

1 Die analytische Torsion

Die Ideen für die Definition der Kontakt-Torsion basieren stark auf denen der analytischen Torsion. Deswegen ist es von Vorteil, wenn man weiß, wie die analytische Torsion aufgebaut ist und wie deren Herleitung aussieht, welche in diesem Kapitel erklärt wird. Wir setzen hier außerdem voraus, dass eine gegebene Mannigfaltigkeit stets **geschlossen** ist.

1.1 Die Torsion eines Komplexes

Es sei $\mathbf{K} \in \{\mathbf{R}, \mathbf{C}\}$. Für einen endlich dimensionalen $\mathbf{K}$ -Vektorraum V der Dimension n ist die Determinante von V der eindimensionale Vektorraum $\det V = \Lambda^n V$. Diese Definition wird für einen beschränkten Kokettenkomplex

$$(V^\bullet, d) = \left(\bigoplus_{k=0}^n V^k, d \right) : 0 \rightarrow V^0 \xrightarrow{d} V^1 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} V^n \rightarrow 0,$$

welcher endlich ist, das heißt die Vektorräume V^k sind endlich dimensional, erweitert. Wir werden hin und wieder einfach nur V statt $V^\bullet$ schreiben, sofern dies vom Kontext her eindeutig ist.

Definition 1.1.1. *Für einen eindimensionalen $\mathbf{K}$ -Vektorraum L bezeichne $L^{-1} := \text{Hom}_{\mathbf{K}}(L, \mathbf{K})$ seinen dualen Vektorraum. Die Determinante eines endlichen beschränkten Kokettenkomplexes $(V^\bullet, d) = \left(\bigoplus_{k=0}^n V^k, d \right)$ über $\mathbf{K}$ ist der eindimensionale $\mathbf{K}$ -Vektorraum*

$$\det V^\bullet = \bigotimes_{k=0}^n (\det V^k)^{(-1)^k}.$$

Beispiel 1.1.2. *Die Determinante des Kokettenkomplex* $0 \rightarrow V \rightarrow 0 \cdots \rightarrow 0$ *ist gerade die Determinante des Vektorraums* V .

Die obige Definition überträgt sich auch auf die Kohomologie $H^\bullet(V) = \bigoplus_{k=0}^n H^k(V)$ von $(V^\bullet, d)$, wenn man sie als einen Kokettenkomplex mit trivialem Differential $d = 0$ betrachtet.

Ist $(V^\bullet, d)$ ein azyklischer Komplex, so können wir ihm ein kanonisches, nicht-triviales Element in $\det V^\bullet$ zuordnen, welcher wie folgt aussieht: Sei $n_k = \dim V^k$ und $s_0 = e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n_0}$ ein nicht-triviales Element in $\det V_0$. Weil $(V^\bullet, d)$ azyklisch ist, ist $d : V_0 \rightarrow V_1$ injektiv und ds_0 ist ungleich Null. Nun wählen wir ein nicht-exaktes Element $s_1 \in \Lambda^{n_1-n_0} V_1$ derart, dass $ds_0 \wedge s_1$ eine Basis von $\det V_1$ ist. Wegen der Azyklizität ist $ds_1 \neq 0$. Diese Prozedur wird auf diese Weise weiter fortgeführt (wähle ein nicht exaktes $s_k \in \Lambda^{N_k - \cdots + (-1)^k N_0} V^k$, für welches $ds_{k-1} \wedge s_k$ eine Basis von $\det V_k$ ist), so dass wir schließlich ein nicht-triviales Element $s_0 \otimes (ds_0 \wedge s_1)^{-1} \otimes (ds_1 \wedge s_2) \otimes \cdots \otimes (ds_{n-1})^{(-1)^n}$ in $\det V^\bullet$ erhalten.

Definition 1.1.3. *Das nicht-triviale Element*

$$T(V^\bullet, d) = s_0 \otimes (ds_0 \wedge s_1)^{-1} \otimes (ds_1 \wedge s_2) \otimes \cdots \otimes (ds_{n-1})^{(-1)^n} \in \det V^\bullet$$

heißt Torsionselement¹ des azyklischen Komplexes $(V^\bullet, d)$.

Das Torsionselement hängt dabei nicht von der Wahl der s_k , $k = 1, \dots, n-1$, ab. Wählt man ein anderes s'_k statt s_k , dann ist $ds_{k-1} \wedge s'_k = \lambda ds_{k-1} \wedge s_k$ für ein $\lambda \in \mathbf{K} \setminus \{0\}$. Somit ist $s'_k = \lambda s_k$ und wir erhalten

$$\begin{aligned} & (ds_{k-1} \wedge s'_k)^{(-1)^k} \oplus (ds'_k \wedge s_{k+1})^{(-1)^{k+1}} \\ &= \lambda^{(-1)^k} \lambda^{(-1)^{k+1}} (ds_{k-1} \wedge s_k)^{(-1)^k} \oplus (ds_k \wedge s_{k+1})^{(-1)^{k+1}} \\ &= (ds_{k-1} \wedge s_k)^{(-1)^k} \oplus (ds_k \wedge s_{k+1})^{(-1)^{k+1}}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Torsionelementes sind wir jetzt bereit folgendes Resultat zu zeigen, welches erstmals von Knudsen und Mumford in [KM76] bewiesen wurde.

¹In [BGS88] wird das Torsionselement Torsion genannt. Weil der Begriff der Torsion noch häufiger auftauchen wird, wurde der Begriff hier leicht verändert.

Proposition 1.1.4 (Knudsen-Mumford). *Man hat einen kanonischen Isomorphismus*

$$\det V^\bullet \cong \det H^\bullet(V).$$

Beweis. 1. Schritt: Sei erstmal $V^\bullet$ ein azyklischer Komplex. Wegen $\det\{0_{\mathbf{K}}\} = \mathbf{K}$ ist $\det H^\bullet(V) = \mathbf{K}$. Dann ist $\det V^\bullet \stackrel{\text{can.}}{\cong} \mathbf{K}$, indem wir das Torsionselement auf die 1 schicken.

2. Schritt: Jetzt sei $V^\bullet$ ein beliebiger Komplex. Wir betrachten die beiden exakten Sequenzen

$$\begin{aligned} 0 \hookrightarrow d(V_k) &\xrightarrow{d} \ker d|_{V_{k+1}} \twoheadrightarrow H^{k+1}(V, d) \rightarrow 0 \\ 0 \hookrightarrow \ker d|_{V_{k+1}} &\hookrightarrow V_{k+1} \xrightarrow{d} d(V_{k+1}) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

womit wir nach Schritt 1 Isomorphismen

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &\cong \det d(V_k) \otimes (\det \ker d|_{V_{k+1}})^{-1} \otimes \det H^{k+1}(V, d) \\ \Leftrightarrow \det(\ker d|_{V_{k+1}}) &\cong \det(d(V_k)) \otimes \det(H^{k+1}(V, d)), \\ \mathbf{K} &\cong \det \ker d|_{V_{k+1}} \otimes (\det(V_{k+1}))^{-1} \otimes \det(d(V_{k+1})) \\ \Leftrightarrow \det(V_{k+1}) &\cong \det(\ker d|_{V_{k+1}}) \otimes \det(d(V_{k+1})) \end{aligned}$$

bekommen. Daraus folgt

$$\det(V_{k+1}) \cong \det(d(V_k)) \otimes \det H^{k+1}(V, d) \otimes \det(d(V_{k+1})),$$

wodurch sich durch Kürzen

$$\begin{aligned} &\det V_0 \otimes (\det V_1)^{-1} \otimes \det V_2 \otimes \dots \\ &\cong \det H^0(V, d) \otimes (\det H^1(V, d))^{-1} \otimes \det H^2(V, d) \otimes \dots \end{aligned}$$

ergibt. □

Dieser Isomorphismus bringt den Vorteil mit sich, dass man auf $\det H^\bullet(V)$ Metriken erhält, welche ihren Ursprung in $\det V^\bullet$ haben.

Seien dazu $\| \cdot \|_{\det V^k}$ Metriken auf den $\det V^k$, $k = 1 \dots, n$. Sie induzieren eine Metrik

$$\| \cdot \|_{\det V^\bullet} = \prod_{k=0}^n \| \cdot \|_{(\det V^k)(-1)^k}$$

auf $\det V^\bullet$ und mit Hilfe des Isomorphismus aus Proposition 1.1.4 bekommen wir dann eine Metrik $\| \cdot \|_{\det H^\bullet(V)}$ auf $\det H^\bullet(V)$. Die Metrik hängt hier von den $\| \cdot \|_{\det V^k}$ ab. Neben dieser schauen wir uns eine weitere Metrik an, welche aber jedoch direkt von Metriken auf V^k abhängt. Sei also g eine Metrik auf $(V^\bullet, d)$, das soll heißen, dass die V^k diesmal euklidische beziehungsweise unitäre Vektorräume mit Metriken g^{V_k} sind und $g^V = \bigoplus_{k=0}^n g^{V_k}$ ist. Sei dann d^* die Adjungierte zu d bezüglich dieser Metrik. Bezeichne wie üblich $\Delta = dd^* + d^*d$ den Laplace-Operator. Durch die endlich dimensionale Hodge-Zerlegung $\ker d = \ker \Delta \oplus \operatorname{im} d$ können wir die Kohomologie mit dem Raum der harmonischen Formen identifizieren,

$$H^k(V) \cong \mathcal{H}^k(V) = \ker \Delta|_{V^k} = \{v \in V^k | dv = d^*v = 0\}.$$

Die Metrik g^{V^k} induziert eine Metrik auf $\ker \Delta|_{V^k} \subseteq V^k$, womit wir durch den obigen Isomorphismus eine Metrik $| \cdot |_{\det H^k(V)}$ auf $\det H^k(V)$ bekommen.

Auf $H^\bullet(V)$ haben wir somit zwei Metriken, $\| \cdot \|_{\det H^\bullet(V)}$, welche nur von den $\| \cdot \|_{\det V^k}$ abhängt, und $| \cdot |_{\det H^\bullet(V)} = \prod_{k=0}^n | \cdot |_{(\det H^k(V))(-1)^k}$, welche von den g^{V^k} abhängt. Für den Spezialfall, wo die Metriken $\| \cdot \|_{\det V^k}$ ebenfalls von g^{V^k} induziert werden, was wir ab jetzt auch annehmen, lässt sich ein Isomorphismus $\det V^\bullet \cong \det H^\bullet(V)$ auch expliziter angeben:

$$\begin{aligned} \det H^\bullet(V) &\xrightarrow{\cong} \det \mathcal{H}^\bullet(V) \xrightarrow{\cong} \det \mathcal{H}^\bullet(V) \otimes \det (\mathcal{H}^\bullet(V)^\perp) \\ &= \det (\mathcal{H}^\bullet(V) \oplus \mathcal{H}^\bullet(V)^\perp) \\ &= \det V^\bullet \\ s &\mapsto \varphi(s) \mapsto \varphi(s) \otimes T(\mathcal{H}^\bullet(V)^\perp, d) \end{aligned}$$

Die Beziehung zwischen den beiden Metriken $\| \cdot \|_{\det H^\bullet(V)}$ und $| \cdot |_{\det H^\bullet(V)}$ werden wir uns jetzt genauer anschauen.

Definition 1.1.5. Die Torsion eines Komplexes (V, d) mit einer Metrik g ist gegeben durch

$$\tau(V, d, g) | \cdot |_{\det(H^\bullet(V, d))} = \| \cdot \|_{\det(H^\bullet(V, d))}.$$

Wir können davon ausgehen, dass die Torsion nicht nur im Namen etwas mit dem Torsionselement zu tun hat, weil Proposition 1.1.4 mit Hilfe des Torsionelementes bewiesen wurde.

Proposition 1.1.6. Sei $P_k = \det(d^* d|_{V^k \cap (\ker d)^\perp})$. Dann ist die Torsion gegeben durch

$$\tau(V, d, g) = \|T(\mathcal{H}^\bullet(V)^\perp, d)\|_{\det \mathcal{H}^\bullet(V)^\perp} = \prod_{k=0}^n P_k^{\frac{(-1)^{k+1}}{2}}$$

Beweis. Für $s \in H^\bullet(V)$ ungleich Null ist mit den Bezeichnungen vor Definition 1.1.5

$$\begin{aligned} \tau(V, d, g) &= \frac{\|s\|_{\det(H^\bullet(V, d))}}{|s|_{\det(H^\bullet(V, d))}} \\ &= \frac{\|\varphi(s) \otimes T(\mathcal{H}^\bullet(V)^\perp, d)\|_{\det \mathcal{H}^\bullet(V) \otimes \det \mathcal{H}^\bullet(V)^\perp}}{|\varphi(s)|_{\det(\mathcal{H}^\bullet(V))}} \\ &= \frac{\|\varphi(s)\|_{\det \mathcal{H}^\bullet(V)} \cdot \|T(\mathcal{H}^\bullet(V)^\perp, d)\|_{\det \mathcal{H}^\bullet(V)^\perp}}{|\varphi(s)|_{\det(\mathcal{H}^\bullet(V))}} \\ &= \|T(\mathcal{H}^\bullet(V)^\perp, d)\|_{\det \mathcal{H}^\bullet(V)^\perp}. \end{aligned}$$

Mit $d_k := d|_{V^k}$ hat man die Isomorphismen

$$\begin{aligned} d_k : \ker(d_k)^\perp &\xrightarrow{\cong} \operatorname{im}(d_k) = (\ker d_{k+1}^*)^\perp \quad \text{und} \\ d_{k+1}^* : \operatorname{im}(d_k) &\xrightarrow{\cong} \ker(d_k)^\perp = \operatorname{im}(d_{k+1}^*), \end{aligned}$$

welche einen Isomorphismus

$$\det(\ker(d_k)^\perp) \xrightarrow{\cong} \det(\operatorname{im}(d_k))$$

induzieren, der ebenfalls mit d_k bezeichnet wird. Damit hat man eine Isometrie

$$\det(d_{k+1}^* d_k)^{-1/2} d_k : \det(\ker(d_k)^\perp) \rightarrow \det(\operatorname{im}(d_k)).$$

Wählen wir $s_k \in \det(\ker d|_{V_k})^\perp$, so bekommen wir

$$\begin{aligned} & \|ds_k \wedge s_{k+1}\|_{\det H^\bullet(V,d)^\perp} \\ &= \|ds_k\|_{\det H^\bullet(V,d)^\perp} \|s_{k+1}\|_{\det H^\bullet(V,d)^\perp} \\ &= P_k^{1/2} \|s_k\|_{\det H^\bullet(V,d)^\perp} \|s_{k+1}\|_{\det H^\bullet(V,d)^\perp}. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} & \tau(V, d, g) \\ &= \|T(\mathcal{H}^\bullet(V)^\perp, d)\|_{\det \mathcal{H}^\bullet(V)^\perp} = \prod_{k=0}^n \|ds_k \wedge s_{k+1}\|_{\det \mathcal{H}^\bullet(V,d)^\perp}^{(-1)^{k+1}} \\ &= \prod_{k=0}^n P_k^{\frac{(-1)^{k+1}}{2}} (\|s_k\|_{\det \mathcal{H}^\bullet(V,d)^\perp})^{(-1)^{k+1}} (\|s_{k+1}\|_{\det \mathcal{H}^\bullet(V,d)^\perp})^{(-1)^{k+1}} \\ &= \prod_{k=0}^n P_k^{\frac{(-1)^{k+1}}{2}}. \end{aligned}$$

□

Diese Ergebnisse versuchen wir jetzt auf einen bestimmten Komplex anzuwenden, den der de Rham-Komplex $(\mathfrak{A}^\bullet(M), d)$, wobei hier M eine geschlossene, n -dimensionale Mannigfaltigkeit ist. Dieser Komplex ist jedoch nicht endlichdimensional, darum betrachten wir gewisse endlichdimensionale Teilkomplexe, welche eine Art „Approximation“ des de Rham-Komplexes darstellen sollen. Die Ergebnisse für diesen Teilkomplex sollen uns dann motivieren, die Torsion des de Rham-Komplexes zu definieren.

Für den Hodge-Laplace-Operator Δ bezeichne Δ_k dessen Einschränkung auf k -Formen, $\sigma(\Delta_k)$ die Menge der Eigenwerte von Δ_k und schließlich $\text{Eig}_\mu \Delta_k$ der Eigenraum von Δ_k zum Eigenwert μ . Für $\lambda > 0$ setzen wir dann

$$V_{[0,\lambda]}^k := \{\Delta_k \leq \lambda\} = \bigoplus_{\mu \in \sigma(\Delta_k) \cap]0,\lambda]} \text{Eig}_\mu \Delta_k.$$

Aufgrund der Kompaktheit von M ist $V_{[0,\lambda]}^k$ endlichdimensional. Nun können wir die Torsion des Komplexes $(V_{[0,\lambda]}^\bullet, d)$ bestimmen.

Proposition 1.1.7. *Die Torsion von $(V_{[0,\lambda]}^\bullet, d)$ ist*

$$\tau((V_{[0,\lambda]}^\bullet, d, g)) = \prod_{k=0}^n \det(\Delta_k|V_{[0,\lambda]}^\bullet)^{-(-1)^k k/2}.$$

Beweis. Mit $d_k := d|_{V_{[0,\lambda]}^k}$ hat man wieder den Isomorphismus

$$d_{k-1} : \ker(d_{k-1})^\perp \xrightarrow{\cong} \text{im}(d_{k-1}) = (\ker d_k^*)^\perp.$$

Als erstes bemerken wir, dass $d_k^* d_{k-1}$ auf $\ker(d_{k-1})^\perp$ dieselben Eigenwerte hat wie $d_{k-1} d_k^*$ auf $\ker(d_k^*)^\perp$:

$$\begin{aligned} d_k^* d_{k-1}|_{\ker(d_{k-1})^\perp} \alpha &= \lambda \alpha \\ \Rightarrow d_{k-1} (d_k^* d_{k-1}|_{\ker(d_{k-1})^\perp} \alpha) &= \lambda d_{k-1} \alpha \\ \Leftrightarrow d_{k-1} d_k^*|_{\ker(d_k^*)^\perp} d_{k-1} \alpha &= \lambda d_{k-1} \alpha, \end{aligned}$$

das heißt, ist λ ein Eigenwert von $d_k^* d_{k-1}|_{\ker(d_{k-1})^\perp}$ mit Eigenform α , dann ist λ ein Eigenwert von $(d_{k-1} d_k^*)|_{\ker(d_k^*)^\perp}$ mit Eigenform $d_{k-1} \alpha$ und umgekehrt, wenn man d^* statt d nimmt. Dadurch ist insbesondere $\det(d_{k-1} d_k^*|_{\ker(d_k^*)^\perp}) = \det(d_k^* d_{k-1}|_{\ker(d_{k-1})^\perp})$. Indem wir jetzt die Hodge-Zerlegung unter der Tatsache, dass $\ker(\Delta_k|V_{[0,\lambda]}^k) = 0$ ist nutzen, bekommen wir

$$\det(\Delta_k|V_{[0,\lambda]}^k) = \det(d_{k-1} d_k^* + d_{k+1}^* d_k)|_{\ker(d_k^*)^\perp \oplus \ker(d_k)^\perp}$$

$$\begin{aligned}
&= \det(d_{k-1} d_k^*|_{\ker(d_k^*)^\perp}) \det(d_{k+1}^* d_k|_{\ker(d_k)^\perp}) \\
&= \det(d_k^* d_{k-1}|_{\ker(d_{k-1})^\perp}) \det(d_{k+1}^* d_k|_{\ker(d_k)^\perp}) = P_{k-1} P_k,
\end{aligned}$$

mit $P_k = \det(d^* d|_{V_{[0,\lambda]}^k} \cap (\ker d)^\perp)$. Damit können wir Lemma 1.1.6 anwenden und erhalten

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^n \det(\Delta_k|_{V_{[0,\lambda]}^\bullet})^{-(-1)^k k} &= \prod_{k=0}^n P_{k-1}^{(-1)^{k+1} k} P_k^{(-1)^{k+1} k} \\
&= \prod_{k=0}^n P_k^{(-1)^{k+1}} = \tau((V_{[0,\lambda]}^\bullet, d, g)^2).
\end{aligned}$$

□

Für einen euklidischen/unitären Raum V und eine Abbildung $\Delta \in \text{GL}(V)$, welche selbstadjungiert ist und positive Eigenwerte hat, ist

$$e^{\text{Tr} \log \Delta} = \det(\Delta).$$

Für die auf ganz $\mathbf{C}$ holomorphe Zetafunktion

$$\zeta(\Delta)(s) = \text{Tr} \Delta^{-s}$$

ist $\zeta'(\Delta)(0) = -\text{Tr} \log \Delta$, das heißt man hat

$$\det(\Delta) = e^{-\zeta'(\Delta)(0)}.$$

Proposition 1.1.7 motiviert uns dazu, die Torsion des de Rham-

Komplexes als $e^{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (-1)^k k \zeta'(\Delta_k)(0)}$ zu setzen. Aber Vorsicht: Wir dürfen hier nicht voreilig sein, denn zum Einen kann der Laplace-Operator auch die Null als Eigenwert haben (hat also einen Kohomologie-Anteil) und zum Anderen ist die Zeta-Funktion keine ganze Funktion mehr. Das ist aber kein Grund zum Verzweifeln, denn wir werden im nächsten Abschnitt sehen, dass die Zeta-Funktion eine meromorphe Funktion auf $\mathbf{C}$ definiert, welche bei Null sogar holomorph ist.

1.2 Die analytische Torsion

Für den Hodge-Laplace-Operator $\Delta = (d + d^*)^2$ auf einer riemannschen Mannigfaltigkeit M der Dimension n bezeichne $k_t(x, y)$ seinen Wärmeleitungskern. Aus der globalen Analysis ist es bekannt, dass

$$\mathrm{Tr} e^{-t\Delta} = \int_M \mathrm{Tr} k_t(x, x) \mathrm{dvol}_g(x)$$

eine asymptotische Entwicklung

$$\mathrm{Tr} e^{-t\Delta} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \sum_{j=0}^{\infty} \int_M a_j(\Delta)(x) \mathrm{dvol}_g(x) t^{j-\frac{n}{2}} \quad (1.2.1)$$

besitzt. Es bezeichnen nun $\sigma^*(\Delta) = \sigma(\Delta) \setminus \{0\}$ und $\mathrm{Eig}_\lambda^*(\Delta) = \mathrm{Eig}_\lambda(\Delta) \setminus \{0\}$. Dann definiert man die *Zeta-Funktion des Hodge-Laplace-Operators* als

$$\zeta(\Delta)(s) = \sum_{\lambda \in \sigma(\Delta)^*} \lambda^{-s}, \quad s \in \mathbf{C} \text{ mit } \mathrm{Re} s \gg 0.$$

Satz 1.2.1. *Die Zeta-Funktion ist für $\mathrm{Re} s > \frac{n}{2}$ holomorph und lässt sich zu einer meromorphen Funktion auf ganz $\mathbf{C}$ fortsetzen mit einfachen Polen an den Stellen $s = \frac{n}{2}, \frac{n}{2} - 1, \dots, \frac{n}{2} - [\frac{n-1}{2}]$.*

Beweis. Betrachte für $\mathrm{Re} s > 0$ die Gamma-Funktion

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt.$$

Für einen Eigenwert $\lambda > 0$ von Δ hat man durch die Substitution $t \rightarrow \lambda t$ die Identität

$$\lambda^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t\lambda} dt,$$

wodurch, wenn wir mit $\mathcal{P}$ die Orthogonalprojektion auf $\ker \Delta$ bezeichnen, sich die Zeta-Funktion schreiben lässt als

$$\zeta(\Delta)(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \left(\sum_{\lambda \in \sigma(\Delta)} e^{-t\lambda} - \dim \ker \Delta \right) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \operatorname{Tr}(e^{-t\Delta} - \mathcal{P}) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 t^{s-1} \operatorname{Tr}(e^{-t\Delta} - \mathcal{P}) dt \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(s)} \int_1^\infty t^{s-1} \operatorname{Tr}(e^{-t\Delta} - \mathcal{P}) dt \\
&=: \text{I} + \text{II}.
\end{aligned}$$

Wegen $\Gamma(s) \neq 0$ und weil $\operatorname{Tr}(e^{-t\Delta} - \mathcal{P})$ für $t \rightarrow \infty$ exponentiell fällt, stellt das zweite Integral II eine ganze Funktion dar. Für das erste Integral benutzen wir die asymptotische Entwicklung (1.2.1) und erhalten für festes $N > \frac{n}{2}$ und $a_j(\Delta) := \int_M a_j(\Delta)(x)$

$$\begin{aligned}
\text{I} &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 t^{s-1} \left(\sum_{j=0}^N a_j(\Delta) t^{j-\frac{n}{2}} + \mathcal{O}(t^{N+1-\frac{n}{2}}) - \dim \ker \Delta \right) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(s)} \left(\sum_{j=0}^N \int_0^1 a_j(\Delta) t^{s-1+j-\frac{n}{2}} dt - \int_0^1 t^{s-1} \dim \ker \Delta dt \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 \mathcal{O}(t^{N+1-\frac{n}{2}}) t^{s-1} dt \right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(s)} \left(\sum_{j=0}^N \frac{1}{s+j-\frac{n}{2}} a_j(\Delta) - \frac{1}{s} \dim \ker \Delta + R(s) \right),
\end{aligned}$$

wobei $R(s)$ den beschränkten Rest bezeichnet. Dadurch sehen wir, dass das Integral I für $\operatorname{Re} s > \frac{n}{2}$ eine holomorphe Funktion darstellt, welche sich meromorph fortsetzen lässt mit den in der Behauptung genannten einfachen Polen. $\square$

Mit Hilfe dieser bei Null holomorphen Zeta-Funktion sind wir jetzt in der Lage die analytische Torsion zu definieren.

Definition 1.2.2. *Für eine n -dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) ist die analytische Torsion gegeben durch*

$$T(M, g) = e^{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (-1)^k k \zeta'(\Delta_k)(0)}.$$

Beispiel 1.2.3. Betrachte die S^1 mit der flachen Metrik. Eine Orthonormalbasis von $L^2(S^1, \mathbf{C})$ ist gegeben durch $\{e^{i\vartheta} \mapsto e^{i\vartheta n} | n \in \mathbf{Z}\}$. Der Laplace-Operator ist $-\frac{d^2}{d\vartheta^2}$ und wegen $\Delta e^{i\vartheta n} = n^2 e^{i\vartheta n}$ sind die Eigenwerte von Δ gegeben durch $\{n^2 | n \in \mathbf{N}_0\}$. Die Zeta-Funktion auf Funktionen ist somit

$$\zeta(\Delta_0)(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2s} = \zeta_R(2s),$$

wobei ζ_R die riemannsche zeichnet, für die $\zeta'_R(0) = -\frac{1}{2} \log(2\pi)$ gilt. Damit ist $\zeta'(\Delta_0)(0) = -\log(2\pi)$ und wegen $\zeta(\Delta_0) = \zeta(\Delta_1)$ ist die analytische Torsion von S^1 bezüglich der flachen Metrik

$$T(S^1) = e^{\frac{1}{2} \log(2\pi)} = \sqrt{2\pi}.$$

Man kann zeigen, dass diese Größe auf Mannigfaltigkeiten gerader Dimension verschwindet und dass sie eine von der Metrik unabhängige Invariante definiert, welche mit der Reidemeister-Torsion übereinstimmt. Es ist auch möglich, eine holomorphe Torsion auf komplexen Mannigfaltigkeit bezüglich des Dolbeault-Komplexes zu definieren und diese auf holomorphe hermitesche Vektorbündeln, welche nicht notwendigerweise flach sein müssen, zu erweitern. Dies alles werden wir jedoch nicht wiedergeben, denn wir werden uns für den folgenden Fall interessieren:

Wir betrachten die Situation, in der eine Gruppe G isometrisch von links auf M operiert. Die Operation von G auf M induziert eine Operation von G auf $\mathfrak{A}^\bullet(M)$ durch $\gamma \cdot \alpha = \gamma\alpha := \gamma^{-1*}\alpha$, für $\gamma \in G$ und $\alpha \in \mathfrak{A}^\bullet(M)$. Als pull-back kommutiert γ mit dem de Rham-Operator d und ist somit auf $H^\bullet(M)$ wohldefiniert. Nun ist für $s \in \Gamma(M, \Lambda^k T^*M)$

$$\begin{aligned} (\gamma e^{-t\Delta} s)(x) &= \gamma \cdot \int_{\{x\} \times M} k_t(x, y) s(y) dy \\ &= \int_{\{\gamma^{-1}x\} \times M} \gamma^{-1*} k_t(\gamma^{-1}x, y) s(y) dy, \end{aligned}$$

das heißt $\gamma^{-1*}k_t(\gamma^{-1}x, y)$ ist der Kern von $\gamma e^{-t\Delta}$, wobei γ^{-1*} auf die x -Variable operiert. Wir definieren $(\gamma^{-1*}k_t)(x, y) := \gamma^{-1*}k_t(\gamma^{-1}x, y)$. Falls die Fixpunktmenge Ω von γ aus Untermannigfaltigkeiten N_i der Dimension n_i besteht, so hat man eine asymptotische Entwicklung

$$\mathrm{Tr} \gamma e^{-t\Delta} \stackrel{t \rightarrow 0}{\sim} \sum_{N_i \in \Omega} \sum_{j=0}^{\infty} t^{j - \frac{n_i}{2}} \int_{N_i} a_j(\Delta)(x) \mathrm{dvol}_{N_i}(x). \quad (1.2.2)$$

Diese Aussage, die man in Lehrbüchern wie [BGV92] oder [Gi84] wiederfindet, wurde von Donnelly in [Do76] erstmals bewiesen. Dies ermöglicht uns, die folgende Zeta-Funktion bezüglich γ zu betrachten:

$$\zeta(\Delta_k, \gamma)(s) := \sum_{\lambda \in \sigma^* \Delta_k} \mathrm{Tr} \gamma|_{\mathrm{Eig}_{\lambda}(\Delta_k)} \lambda^{-s}.$$

Sie ist für $\mathrm{Re} \, s \gg 0$ holomorph und besitzt eine meromorphe Fortsetzung auf ganz $\mathbf{C}$, welche bei $s = 0$ holomorph ist. Das zeigt man analog zu Satz 1.2.1 mit Hilfe der obigen asymptotischen Entwicklung. Für eine n -dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) ist dann die *äquivariante analytische Torsion bezüglich γ* gegeben durch

$$T(M, g, \gamma) = e^{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (-1)^k k \zeta'(\Delta_k, \gamma)(0)}.$$

Sie wurde schon bereits bei der Untersuchung von Linsenräumen in [R70] eingeführt und in [K97] für symmetrische Räume berechnet. Es wird unser Ziel sein, ein ähnliches Objekt für Kontakt-Mannigfaltigkeiten zu untersuchen. Aber vorher müssen wir die Grundbegriffe aus der Kontaktgeometrie kennenlernen, was uns auch im nächsten Kapitel erwartet.

Literatur

Für den endlichdimensionalen Zugang zur Torsion in Abschnitt 1.1 wurde [BGS88] und [RuS12] verwendet. Die Idee für die Berechnung der Torsion in Proposition 1.1.7 wurde aus [RuS12] übernommen, wobei dort der Rumin-Komplex betrachtet wurde. Der zweite Abschnitt basiert auf [RS71], wobei noch zusätzlich [Gi84] und [Ro97] für die meromorphe Fortsetzung der Zeta-Funktion verwendet wurden. Für die äquivariante analytische Torsion wurden [BGV92], [Gi84], [Do76], [KR01] und [LR91] herangezogen.

Äquivariante Torsion auf Kontakt-Mannigfaltigkeiten

Teßmer, P.

2017, XI, 102 S. 2 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-17793-5