
Lösungen zu Kapitel 3 „Optimales Portfolio“

Aufgabe 1

a)

$$E(r_X) = \frac{8\% + 6\% - 2\%}{3} = 4\%$$

$$E(r_Y) = \frac{-3\% + 4\% + 8\%}{3} = 3\%$$

b)

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{3} \times [(0,08 - 0,04)^2 + (0,06 - 0,04)^2 + (-0,02 - 0,04)^2]} = 4,321\%$$

$$\sigma_Y = \sqrt{\frac{1}{3} \times [(-0,03 - 0,03)^2 + (0,04 - 0,03)^2 + (0,08 - 0,03)^2]} = 4,546\%$$

c)

$$\begin{aligned} \text{Cov}_{X,Y} &= \frac{1}{3} \times [(0,08 - 0,04) \times (-0,03 - 0,03) + (0,06 - 0,04) \\ &\quad \times (0,04 - 0,03) + (-0,02 - 0,04) \times (0,08 - 0,03)] = -0,00173 \end{aligned}$$

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}_{X,Y}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{-0,00173}{0,04321 \times 0,04546} = -0,88$$

Aufgabe 2

a)

$$E(r_A) = 0,3 \times 16,5\% + 0,6 \times 10,2\% + 0,1 \times (-3,5\%) = 10,72\%$$

$$E(r_B) = 0,3 \times 8,5\% + 0,6 \times 8,2\% + 0,1 \times 5,0\% = 7,97\%$$

b)

$$\sigma_A = \sqrt{0,3 \times (0,165 - 0,1072)^2 + 0,6 \times (0,102 - 0,1072)^2 + 0,1 \times (-0,035 - 0,1072)^2}$$

$$= 0,0551 = 5,51 \%$$

$$\sigma_B = \sqrt{0,3 \times (0,085 - 0,0797)^2 + 0,6 \times (0,082 - 0,0797)^2 + 0,1 \times (0,05 - 0,0797)^2}$$

$$= 0,01 = 1,00 \%$$

c)

$$\text{Cov}_{A,B} = 0,3 \times (0,165 - 0,1072) \times (0,085 - 0,0797) + 0,6 \times (0,102 - 0,1072) \times (0,082 - 0,0797) + 0,1 \times (-0,035 - 0,1072) \times (0,05 - 0,0797)$$

$$= 0,00050706$$

$$\rho_{A,B} = \frac{\text{Cov}_{A,B}}{\sigma_A \sigma_B} = \frac{0,00050706}{0,0551 \times 0,01} = 0,92$$

d)

$$E(r_P) = 0,4 \times 10,72 \% + 0,6 \times 7,97 \% = 9,07 \%$$

$$\sigma_P = \sqrt{0,4^2 \times 0,0551^2 + 0,6^2 \times 0,01^2 + 2 \times 0,4 \times 0,6 \times 0,00050706}$$

$$= 2,766 \%$$

Die erwartete Portfoliorendite beträgt 9,07 %, während das Portfoliorisiko bei 2,766 % liegt.

Aufgabe 3

a)

$$E(r_P) = 0,4 \times 10 \% + 0,6 \times 16 \% = 13,6 \%$$

b) Die Standardabweichung des Portfolios von 16,25 % lässt sich wie folgt ermitteln:

$$\sigma_P = \sqrt{0,4^2 \times 0,08^2 + 0,6^2 \times 0,25^2 + 2 \times 0,4 \times 0,6 \times 0,3 \times 0,08 \times 0,25}$$

$$= 16,25 \%$$

Aufgabe 4

a)

$$w_A = \frac{100 \times \text{EUR } 50}{(100 \times \text{EUR } 50) + (400 \times \text{EUR } 25)} = 0,333$$

$$w_B = \frac{400 \times \text{EUR } 25}{(100 \times \text{EUR } 50) + (400 \times \text{EUR } 25)} = 0,667$$

$$E(r_P) = 0,333 \times 14 \% + 0,667 \times 20 \% = 18 \%$$

$$\sigma_P = \sqrt{0,333^2 \times 0,10^2 + 0,667^2 \times 0,22^2 + 2 \times 0,333 \times 0,667 \times 0,28 \times 0,10 \times 0,22}$$

$$= 0,1593 = 15,93 \%$$

Die erwartete Rendite des Portfolios beträgt 18 %, während die Standardabweichung der Portfoliorenditen bei 15,93 % liegt.

b)

$$w_A = \frac{100 \times \text{EUR } 50}{(100 \times \text{EUR } 50) + (100 \times \text{EUR } 25)} = 0,667$$

$$w_B = \frac{100 \times \text{EUR } 25}{(100 \times \text{EUR } 50) + (100 \times \text{EUR } 25)} = 0,333$$

$$E(r_P) = 0,667 \times 14 \% + 0,333 \times 20 \% = 16 \%$$

$$\sigma_P = \sqrt{0,667^2 \times 0,10^2 + 0,333^2 \times 0,22^2 + 2 \times 0,667 \times 0,333 \times 0,28 \times 0,10 \times 0,22} = 0,1120 = 11,20 \%$$

Der Verkauf von B-Aktien führt sowohl zu einer niedrigeren erwarteten Portfoliorendite von 16 % (versus 18 %) als auch zu einem niedrigeren Portfoliorisiko von 11,20 % (versus 15,93 %). Der Grund dafür liegt in der höheren erwarteten Rendite und Standardabweichung der Aktie B im Vergleich zur Aktie A.

Aufgabe 5

a)

$$E(r_P) = 0,04 + \frac{0,12 - 0,04}{0,2} \times 0,3 = 0,16 = 16 \%$$

b)

$$E(r_P) = (1 - w_T) r_F + w_T E(r_T) ,$$

wobei:

w_T = Anteil des Tangentialportfolios im Portfolio,

$E(r_T)$ = erwartete Rendite des Tangentialportfolios,

r_F = risikoloser Zinssatz.

Setzt man in die oben stehende Formel für die erwartete Portfoliorendite 16 %, für den risikolosen Zinssatz 4 % und für die erwartete Rendite des Tangentialportfolios 12 % ein, so erhält man folgende Gleichung:

$$0,16 = (1 - w_T) \times 0,04 + w_T \times 0,12 .$$

Das Ausmultiplizieren der rechten Seite der Gleichung führt zu folgendem Formel-ausdruck:

$$0,16 = 0,04 - 0,04 \times w_T + 0,12 \times w_T = 0,04 + 0,08 \times w_T .$$

In einem nächsten Schritt wird 0,04 von beiden Seiten der Gleichung subtrahiert:

$$0,12 = 0,08 \times w_T .$$

Werden beide Seiten der Gleichung durch 0,08 dividiert, erhält man für das Gewicht des Tangentialportfolios w_T :

$$w_T = 1,5 .$$

Der Anteil des Tangentialportfolios im neuen Portfolio beträgt 1,5. Um 150 % des Kapitals in das Tangentialportfolio zu investieren, müssen 50 % zum risikolosen Zinssatz als Kredit aufgenommen werden.

Aufgabe 6

Da die erwartete Portfoliorendite von 10 % höher als die erwartete Marktrendite von 8 % ist, muss der Investor Geld aufnehmen und Zinsen dafür bezahlen. Demzufolge lässt sich die erwartete Portfoliorendite wie folgt bestimmen:

$$E(r_P) = 10 \% = w_{\text{Markt}} \times 8 \% + (1 - w_{\text{Markt}}) \times 2 \% .$$

Wird diese Gleichung nach dem Anteil des Marktportfolios w_{Markt} aufgelöst, erhält man:

$$w_{\text{Markt}} = 1 \frac{1}{3} .$$

Der Anteil der risikolosen Geldaufnahme zum Gesamtportfolio beträgt $-1/3$ ($= 1 - 1 \frac{1}{3}$). Demnach muss der Investor EUR 600.000 ($= 1/3 \times \text{EUR } 1.800.000$) zum risikolosen Zinssatz aufnehmen.

Aufgabe 7

Zuerst ist die Gewichtung der Aktie Z zu berechnen:

$$w_Z = \frac{\sigma_X}{\sigma_Z + \sigma_X} = \frac{0,30}{0,30 + 0,30} = 0,5 .$$

Das Gewicht der Aktie X ist ebenfalls 0,5 ($= 1 - 0,5$). Werden die Gewichte der beiden Aktien von je 0,5 in Formel 3.14 für das Portfoliorisiko eingesetzt, erhält man für die Standardabweichung des Portfolios 0 %:

$$\sigma_P = \sqrt{0,5^2 \times 0,3^2 + 0,5^2 \times 0,3^2 + 2 \times 0,5 \times 0,5 \times (-1) \times 0,3 \times 0,3} = 0 .$$

Die erwartete Portfoliorendite liegt bei 15 %:

$$E(r_P) = 0,5 \times 15 \% + 0,5 \times 15 \% = 15 \% .$$

Aufgabe 8

Mithilfe der Formel 3.29 lässt sich die Varianz bzw. die Standardabweichung des gleich gewichteten Portfolios für die unterschiedliche Anzahl Aktien berechnen:

$$\sigma_{30 \text{ Aktien}} = \sqrt{625 \times \left(\frac{1 - 0,4}{30} + 0,4 \right)} = 16,20 \% ,$$

$$\sigma_{100 \text{ Aktien}} = \sqrt{625 \times \left(\frac{1 - 0,4}{100} + 0,4 \right)} = 15,93 \% .$$

Mit unendlich vielen Aktien im Portfolio strebt der erste Term im Klammerausdruck gegen 0, was zur niedrigsten Standardabweichung des Portfolios von 15,81 % führt:

$$\sigma_{\text{unendlich viele Aktien}} = \sqrt{625 \times 0,4} = 15,81 \% .$$

Der Quotient aus der Standardabweichung des Portfolios bestehend aus 30 Aktien und der Standardabweichung aus der Anlagekombination mit unendlich vielen Aktien beträgt 1,0247:

$$\frac{\sigma_{30 \text{ Aktien}}}{\sigma_{\text{unendlich viele Aktien}}} = \frac{16,20 \%}{15,81 \%} = 1,0247 .$$

Die Standardabweichung des Portfolios aus 30 Aktien liegt ungefähr bei 102,5 % der Standardabweichung der Anlagekombination bestehend aus unendlich vielen Aktien. Dieses Beispiel zeigt, dass mit 30 Aktien und einem Korrelationskoeffizienten von 0,4 eine sehr gute Diversifikation des Portfolios erreicht werden kann.

Aufgabe 9

Das Portfolio B besitzt die niedrigste Sharpe Ratio von 0,3125 und liegt daher nicht auf der Kapitalmarktklinie. Alle anderen Portfolios verfügen über dieselbe Sharpe Ratio von 0,3333 und befinden sich demnach auf der Kapitalmarktklinie.

$$\begin{aligned} \text{SR}_A &= \frac{8 \% - 4 \%}{12 \%} = 0,3333 \\ \text{SR}_B &= \frac{9 \% - 4 \%}{16 \%} = 0,3125 \\ \text{SR}_C &= \frac{10 \% - 4 \%}{18 \%} = 0,3333 \\ \text{SR}_D &= \frac{11 \% - 4 \%}{21 \%} = 0,3333 \end{aligned}$$

Aufgabe 10

Wenn die US-Aktien eine höhere Sharpe Ratio zur Folge haben, sind sie vorteilhaft. Dabei muss die folgende Bedingung erfüllt sein:

Sharpe Ratio der US-Aktien > (Sharpe Ratio des existierenden Portfolios) × (Korrelationskoeffizient zwischen US-Aktien und existierendem Portfolio).

$$0,12 > 0,0325 ,$$

wobei: $0,0325 = 0,13 \times 0,25$.

Die Sharpe Ratio der US-Aktien von 0,12 ist größer als 0,0325, sodass die neuen Aktien die Sharpe Ratio des bestehenden Portfolios erhöhen.

Aufgabe 11

- a) Gemäß Formel 3.20 lässt sich der Anteil des Aktienfonds A im Minimum-Varianz-Portfolio der beiden risikobehafteten Fonds (A und B) wie folgt berechnen:

$$w_A = \frac{\sigma_B^2 - \text{Cov}_{A,B}}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\text{Cov}_{A,B}},$$

wobei:

A = Aktienfonds,

B = Anleihefonds.

Die Kovarianz der beiden Fonds von 0,00784 kann wie folgt bestimmt werden:

$$\text{Cov}_{A,B} = \rho_{A,B} \sigma_A \sigma_B = 0,2 \times 0,28 \times 0,14 = 0,00784.$$

Werden die Kovarianz und die Varianzen der entsprechenden Fonds in Formel 3.20 eingesetzt, erhält man für den Aktienfonds ein Gewicht von 14,29 % im Minimum-Varianz-Portfolio:

$$w_A = \frac{0,14^2 - 0,00784}{0,28^2 + 0,14^2 - 2 \times 0,00784} = 0,1429.$$

Das Gewicht des Anleihefonds im Minimum-Varianz-Portfolio beträgt 85,71 % (= $1 - 0,1429$).

Die erwartete Rendite und Standardabweichung des Minimum-Varianz-Portfolios (MVP) können wie folgt ermittelt werden:

$$E(r_{\text{MVP}}) = 0,1429 \times 15 \% + 0,8571 \times 10 \% = 10,71 \% ,$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{MVP}} &= \sqrt{0,1429^2 \times 0,28^2 + 0,8571^2 \times 0,14^2 + 2 \times 0,1429 \times 0,8571 \times 0,00784} \\ &= 0,13387 = 13,39 \% . \end{aligned}$$

- b) Der Berührungspunkt zwischen der Kapitalallokationslinie mit der höchsten Sharpe Ratio und der Effizienzkurve stellt das optimale Portfolio von risikobehafteten Anlagen (Tangentialportfolio) dar. Für ein Zwei-Anlagen-Portfolio kann das Gewicht der Anlage A (Aktienfonds) mit Formel 3.39 ermittelt werden:

$$w_A = \frac{[E(r_A) - r_F] \sigma_B^2 - [E(r_B) - r_F] \text{Cov}_{A,B}}{[E(r_A) - r_F] \sigma_B^2 + [E(r_B) - r_F] \sigma_A^2 - [E(r_A) - r_F + E(r_B) - r_F] \text{Cov}_{A,B}},$$

$$\begin{aligned} w_A &= \frac{(0,15 - 0,02) \times 0,14^2 - (0,10 - 0,02) \times 0,00784}{(0,15 - 0,02) \times 0,14^2 + (0,10 - 0,02) \times 0,28^2 - (0,15 - 0,02 + 0,10 - 0,02) \times 0,00784} \\ &= 0,2678 , \end{aligned}$$

$$w_B = 1 - 0,2678 = 0,7322 .$$

Die erwartete Rendite und die Standardabweichung des Tangentialportfolios können wie folgt bestimmt werden:

$$\begin{aligned} E(r_{TP}) &= 0,2678 \times 15 \% + 0,7322 \times 10 \% = 11,34 \% , \\ \sigma_{TP} &= \sqrt{0,2678^2 \times 0,28^2 + 0,7322^2 \times 0,14^2 + 2 \times 0,2678 \times 0,7322 \times 0,00784} \\ &= 0,1386 = 13,86 \% . \end{aligned}$$

- c) Die Steigung der effizientesten Kapitalallokationslinie ist durch die Sharpe Ratio des Tangentialportfolios von 0,6739 gegeben:

$$SR_{TP} = \frac{11,34 \% - 2 \%}{13,86 \%} = 0,6739 .$$

Die Steigung der effizientesten Kapitalallokationslinie ist höher als die Steigung jeder anderen Kombinationslinie zwischen einem Portfolio auf der Effizienzkurve und der risikolosen Anlage.

- d) Die erwartete Rendite eines Portfolios, das auf der effizientesten Kapitalallokationslinie liegt, kann wie folgt berechnet werden:

$$E(r_P) = r_F + \left(\frac{E(r_{OP}) - r_F}{\sigma_{OP}} \right) \sigma_P = 0,11 = 0,02 + 0,6739 \times \sigma_P .$$

Das Portfoliorisiko von 13,36 % ergibt sich durch die Auflösung der Gleichung nach σ_P :

$$\sigma_P = \frac{0,11 - 0,02}{0,6739} = 0,1336 .$$

Die erwartete Rendite des Portfolios besteht aus der Summe der gewichteten erwarteten Renditen. Dabei setzt sich die Anlagekombination aus dem risikolosen Geldmarktfonds und aus den zwei risikobehafteten Fonds (Tangentialportfolio) zusammen.

$$\begin{aligned} E(r_P) &= w_F r_F + (1 - w_F) E(r_{TP}) \\ 11 \% &= w_F \times 2 \% + (1 - w_F) \times 11,34 \% \\ w_F &= 0,0364 \\ w_{OP} &= 1 - 0,0364 = 0,9636 \end{aligned}$$

Um die Gewichte der beiden risikobehafteten Fonds zu bestimmen, sind die entsprechenden prozentualen Anteile des Tangentialportfolios zu verwenden.

$$\text{Gewicht des Anlagefonds} = 0,2678 \times 0,9636 = 0,2581$$

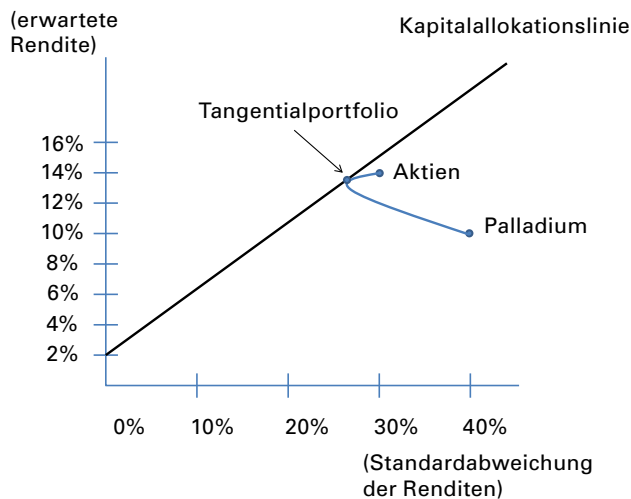
$$\text{Gewicht des Anleihefonds} = 0,7322 \times 0,9636 = 0,7055$$

Das Portfolio mit einer erwarteten Rendite von 11 %, das auf der effizientesten Kapitalallokationslinie liegt, setzt sich aus folgenden Anteilen der drei Fonds zusammen:

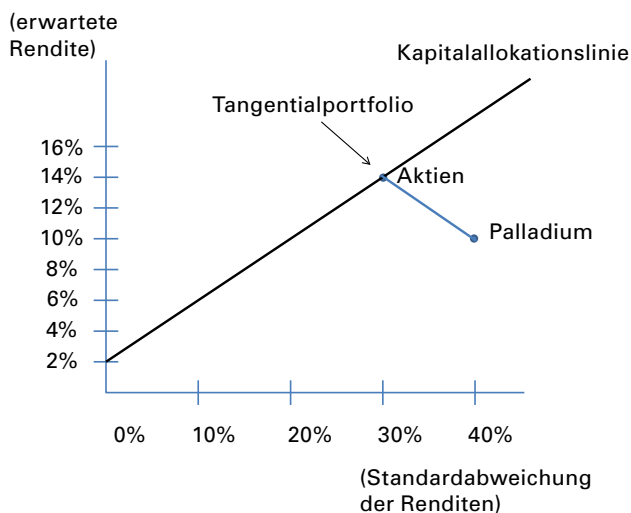
Risikoloser Geldmarktfonds	3,64 %
Aktienfonds	25,81 %
Anleihefonds	<u>70,55 %</u>
Total	= 100,00 %

Aufgabe 12

- a) Ist der Korrelationskoeffizient zwischen Aktien und Palladium genügend niedrig, wird Palladium im optimalen Tangentialportfolio gehalten. Das Tangentialportfolio, bestehend aus Aktien und Palladium, liegt auf der effizientesten Kapitalallokationslinie. Eine Kombination aus dem Tangentialportfolio und dem risikolosen Zinssatz erzielt bei gleichem Aktienrisiko eine höhere erwartete Rendite.



- b) Mit einem Korrelationskoeffizienten von +1 wird Palladium nicht im effizienten Portfolio gehalten. Das Tangentialportfolio besteht nur aus Aktien. Jede Kombination zwischen risikolosem Zinssatz und Aktien ist im Vergleich zu einem Portfolio bestehend aus risikolosem Zinssatz, Aktien und Palladium effizienter.

**Aufgabe 13**

$$E(r_P) = 0,4 \times 12\% + 0,3 \times 10\% + 0,3 \times 15\% = 12,3\%$$

$$\begin{aligned} \sigma_P &= (0,4^2 \times 0,25^2 + 0,3^2 \times 0,3^2 + 0,3^2 \times 0,35^2 + 2 \times 0,4 \times 0,3 \times 0,4 \times 0,25 \\ &\quad \times 0,3 + 2 \times 0,4 \times 0,3 \times 0,6 \times 0,25 \times 0,35 + 2 \times 0,3 \times 0,3 \times 0,8 \times 0,3 \\ &\quad \times 0,35)^{1/2} = 0,25307 \end{aligned}$$

Die erwartete Rendite des Portfolios beträgt 12,3 %, während das Portfoliorisiko bei 25,31 % liegt.

Aufgabe 14

a) Der Nutzen der drei Asset-Allokationen kann wie folgt berechnet werden:

$$U_A = 0,10 - 0,5 \times 2 \times 0,20^2 = 0,06 ,$$

$$U_B = 0,08 - 0,5 \times 2 \times 0,1414^2 = 0,06 ,$$

$$U_C = 0,05 - 0,5 \times 2 \times 0,0758^2 = 0,044 .$$

Die Asset-Allokationen A und B besitzen den gleichen Nutzen von 0,06 und der Kunde ist demnach indifferent zwischen diesen beiden Anlagemöglichkeiten.

b) Die Mindestrendite, welche die Erhaltung des Vermögens gewährleistet, beträgt 4 % (= CHF 80.000/CHF 2.000.000). Aufgrund dieser Mindestrendite lässt sich die risikoadjustierte Rendite der drei Anlageklassen wie folgt ermitteln:

$$\text{Risikoadjustierte Rendite von A} = \frac{0,10 - 0,04}{0,20} = 0,30 ,$$

$$\text{risikoadjustierte Rendite von B} = \frac{0,08 - 0,04}{0,1414} = 0,283 ,$$

$$\text{risikoadjustierte Rendite von C} = \frac{0,05 - 0,04}{0,0758} = 0,132 .$$

Die Asset-Allokation A besitzt die höchste risikoadjustierte Rendite von 0,3 und den gleichen Nutzen von 0,06 wie B. Folglich muss der Kunde die Asset-Allokation A auswählen, da diese neben dem höchsten Nutzen die niedrigste Wahrscheinlichkeit aufweist, dass die Mindestrendite von 4 % nicht erreicht wird.

Aufgabe 15

- a) Ein risikoneutraler Investor besitzt einen Risikoaversionskoeffizienten von 0 ($A = 0$). Demzufolge errechnet sich der Nutzen aus der erwarteten Rendite [$U = E(r)$]. Die Anlage 3 weist den höchsten Nutzen für einen risikoneutralen Investor auf, da sie über die höchste erwartete Rendite von 12 % verfügt.

b)

$$U_1 = 0,09 - 0,5 \times (-3) \times 0,04^2 = 0,0924$$

$$U_2 = 0,10 - 0,5 \times (-3) \times 0,16^2 = 0,1384$$

$$U_3 = 0,12 - 0,5 \times (-3) \times 0,30^2 = 0,255$$

$$U_4 = 0,09 - 0,5 \times (-3) \times 0,50^2 = 0,465$$

Anlage 4 besitzt für einen risikofreudigen Investor mit einem Risikoaversionskoeffizienten von -3 den höchsten Nutzen von 0,465.

c)

$$U_1 = 0,09 - 0,5 \times 3 \times 0,04^2 = 0,0876$$

$$U_2 = 0,10 - 0,5 \times 3 \times 0,16^2 = 0,0616$$

$$U_3 = 0,12 - 0,5 \times 3 \times 0,30^2 = -0,015$$

$$U_4 = 0,09 - 0,5 \times 3 \times 0,50^2 = -0,285$$

Anlage 1 stellt für einen durchschnittlich risikoaversen Investor mit einem Risikoaversionskoeffizienten von 3 den höchsten Nutzen von 0,0876 dar.

d)

$$U_1 = 0,09 - 0,5 \times 6 \times 0,04^2 = 0,0852$$

$$U_2 = 0,10 - 0,5 \times 6 \times 0,16^2 = 0,0232$$

$$U_3 = 0,12 - 0,5 \times 6 \times 0,30^2 = -0,15$$

$$U_4 = 0,09 - 0,5 \times 6 \times 0,50^2 = -0,66$$

Anlage 1 besitzt für einen überdurchschnittlich risikoaversen Investor mit einem Risikoaversionskoeffizienten von 6 den höchsten Nutzen von 0,0852.

Lösungen zum Lehrbuch Finance
Theorie und Anwendungsbeispiele

Mondello, E.

2017, X, 170 S., Softcover

ISBN: 978-3-658-17923-6