

Kapitel 2

Aufgabenstellung und grundlegende Eigenschaften

Wir definieren zunächst die grundlegende Aufgabe aus dem Bereich der optimalen Steuerung, mit welcher wir uns im Verlauf der vorliegenden Arbeit befassen werden. Weiterhin werden wir in diesem Kapitel bereits einige Folgerungen aus der Aufgabenstellung festhalten und grundsätzliche Erkenntnisse aus der optimalen Steuerung wiedergeben.

2.1 Linear-quadratische Steuerungsaufgabe

Ausgangspunkt dieser Arbeit ist eine linear-quadratische Steuerungsaufgabe mit festem Zeithorizont $T > 0$:

$$(LQ) \quad \text{Minimiere} \quad F(x, u), \quad (2.1)$$

$$\text{bezüglich} \quad (x, u) \in W_1^\infty(0, T; \mathbb{R}^n) \times L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m), \quad (2.2)$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad \text{für fast alle } t \in [0, T], \quad (2.3)$$

$$x(0) = a \in \mathbb{R}^n, \quad (2.4)$$

$$u(t) \in U \quad \text{für fast alle } t \in [0, T], \quad (2.5)$$

dabei ist

$$F(x, u) = \frac{1}{2}x(T)^\top Qx(T) + q^\top x(T) + \int_0^T \frac{1}{2}x(t)^\top W(t)x(t) + w(t)^\top x(t) + r(t)^\top u(t) dt, \quad (2.6)$$

$$f(t, x(t), u(t)) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + b(t), \quad (2.7)$$

$$U = \left\{ v \in \mathbb{R}^m \mid b^l \leq v \leq b^u \right\}. \quad (2.8)$$

Das Zielfunktional F ist quadratisch in x und linear in u . In der linearen Dynamik f erlauben wir, im Gegensatz zu [2], eine zusätzliche zeitabhängige Funktion b . Dies hat jedoch keine Auswirkungen auf die Qualität der Konvergenzaussagen in den Kapiteln 3 und 4. Die Systemgleichung (2.3)-(2.4) hat den festen Anfangswert a und der Steuerbereich U ist zeitlich konstant.

Für die Aufgabe (LQ) sollen die folgenden Voraussetzungen erfüllt sein:

- (V2.1) Die Funktionen $W \in C([0, T]; \mathbb{R}^{n \times n})$, $w \in C([0, T]; \mathbb{R}^n)$, $r \in C([0, T]; \mathbb{R}^m)$, $A \in C([0, T]; \mathbb{R}^{n \times n})$, $B \in C([0, T]; \mathbb{R}^{n \times m})$, $b \in C([0, T]; \mathbb{R}^n)$ sind Lipschitz-stetig.
- (V2.2) Die Matrizen Q und $W(t)$ für alle $t \in [0, T]$ sind symmetrisch und positiv semidefinit.
- (V2.3) Es ist $b^l, b^u \in \mathbb{R}^m$, $b^l < b^u$. Der Steuerbereich U ist also nichtleer, konvex und kompakt.

Diese Eigenschaften werden in der vorliegenden Arbeit generell für das Problem (LQ) und die davon abgeleiteten Aufgabenstellungen angenommen, ohne dass dies explizit angegeben wird.

Wegen der Beschränktheit des Steuerbereichs U nach Voraussetzung (V2.3) liegen alle zulässigen Steuerungen in $L^\infty(0, T; \mathbb{R}^n)$. Die Menge der zulässigen Steuerungen ist

$$\mathcal{U} := \left\{ u \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^n) \mid u(t) \in U \text{ für fast alle } t \in [0, T] \right\}. \quad (2.9)$$

In der Bedingung (2.2) würde wegen $W_1^2(0, T; \mathbb{R}^n) \subset L^\infty(0, T; \mathbb{R}^n)$ auch die Forderung $x \in W_1^2(0, T; \mathbb{R}^n)$ ausreichen, welche häufig an Aufgaben der optimalen Steuerung gestellt wird. Mit $u \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^n)$ und der Lipschitz-Stetigkeit von A , B und b gilt dann $\dot{x} \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^n)$ und somit $x \in W_1^\infty(0, T; \mathbb{R}^n)$. Die Menge der zulässigen Steuerungsprozesse, welche wir auch kurz als zulässige Menge bezeichnen, ist dann

$$\mathcal{F} := \left\{ (x, u) \in W_1^\infty(0, T; \mathbb{R}^n) \times L^\infty(0, T; \mathbb{R}^n) \mid \right. \\ \left. u \in \mathcal{U}, x(0) = a, \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \text{ für fast alle } t \in [0, T] \right\}. \quad (2.10)$$

Die Einschränkung der zulässigen Steuerungsprozesse in der Bedingung (2.2) folgt also aus den Voraussetzungen (V2.1) und (V2.3).

2.2 Grundlagen der optimalen Steuerung

Wir definieren zunächst, was wir als Lösung einer Aufgabe der optimalen Steuerung verstehen. Das Problem (LQ) ist konvex, wie wir in den nächsten Abschnitten feststellen werden. Daher beschäftigen wir uns mit globalen Lösungen und nicht mit (starken oder schwachen) lokalen Lösungen.

Definition 2.1. Ein Paar $(x^*, u^*) \in \mathcal{F}^P$ heißt Lösung einer Aufgabe (P) mit dem Zielfunktional F^P und der zulässigen Menge $\mathcal{F}^P$, wenn für alle zulässigen Paare $(x, u) \in \mathcal{F}^P$

$$F^P(x^*, u^*) \leq F^P(x, u) \quad (2.11)$$

gilt. Wenn in (2.11) für alle $(x, u) \in \mathcal{F}^P \setminus \{(x^*, u^*)\}$ die strikte Ungleichungsrelation gilt, so heißt $(x^*, u^*) \in \mathcal{F}^P$ strikte Lösung von (P) .

Die eindeutige Lösung z einer Differentialgleichung in der Form

$$\dot{z}(t) = M(t)z(t) + m(t) \quad \text{für fast alle } t \in [0, T], \quad (2.12)$$

$$z(0) = z^0 \quad (2.13)$$

mit $M \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^{n \times n})$, $m \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^n)$ und $z^0 \in \mathbb{R}^n$ kann nach [4], Kapitel 6, Gleichung (6.1.3) durch

$$z(t) = \Phi(t)z^0 + \Phi(t) \int_0^t \Phi(s)^{-1} m(s) ds \quad \text{für alle } t \in [0, T] \quad (2.14)$$

dargestellt werden und es gilt $z \in W_1^\infty(0, T; \mathbb{R}^n)$. Dabei ist Φ nach [5], Gleichung (A.6.7), die eindeutige Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{\Phi}(t) = M(t)\Phi(t) \quad \text{für alle } t \in (0, T), \quad (2.15)$$

$$\Phi(0) = E^n \quad (2.16)$$

mit der $n \times n$ -Einheitsmatrix E^n .

Durch die Voraussetzungen (V2.1), (V2.2) und (V2.3) ist nach [4], Satz 3.2.2, die Existenz einer Lösung der Aufgabe (LQ) gesichert. Die Funktionen A , B und b sind Lipschitz-stetig, deshalb hat das Anfangswertproblem (2.3), (2.4) nach (2.14) für jede zulässige Steuerung $u \in \mathcal{U}$ eine eindeutige Lösung. Mit Voraussetzung (V2.3) ist x gleichmäßig Lipschitz-stetig, für alle zulässigen Trajektorien x gilt also

$$\|x\|_{\infty,1} \leq L^x \quad (2.17)$$

mit einer von x unabhängigen Lipschitz-Konstanten L^x . Somit ist $\mathcal{F}$ nichtleer, konvex, beschränkt und abgeschlossen. Aus der Lipschitz-Stetigkeit der Koeffizientenfunktionen und der positiven Semidefinitheit von Q und $W(t)$ für alle $t \in [0, T]$ folgt, dass das Zielfunktional F Lipschitz-stetig und konvex auf $\mathcal{F}$ ist, mit einer Lipschitz-Konstanten L^F gilt

$$|F(x, u) - F(z, v)| \leq L^F (\|x - z\|_{\infty} + \|u - v\|_1) \quad (2.18)$$

für alle $(x, u), (z, v) \in \mathcal{F}$. Insgesamt hat die Aufgabe (LQ) mindestens eine Lösung.

Wir verwenden das Pontrjagin'sche Maximumprinzip nach [4], Satz 3.3.3. Anstatt einer Minimumbedingung verwenden wir jedoch die Maximumbedingung, welche sich ergibt, wenn in der Herleitung in [4] die Vorzeichen in der adjungierten Gleichung und der Transversalitätsbedingung angepasst werden. Wegen der Konvexität der Aufgabe (LQ) sind die notwendigen Optimalitätsbedingungen auch hinreichend.

Satz 2.2 *Ein zulässiges Paar $(x^*, u^*) \in \mathcal{F}$ ist genau dann eine Lösung der Aufgabe (LQ), wenn mit einer Adjungierten $p \in W_1^\infty(0, T; \mathbb{R}^n)$ folgende Bedingungen für fast alle $t \in [0, T]$ erfüllt sind:*

$$(A) \quad \dot{p}(t) = -A(t)^\top p(t) + W(t)x^*(t) + w(t), \quad (2.19)$$

$$(T) \quad p(T) = -Qx^*(T) - q, \quad (2.20)$$

$$(M) \quad \left[-r(t) + B(t)^\top p(t) \right]^\top (v - u^*(t)) \leq 0 \quad \text{für alle } v \in U. \quad (2.21)$$

Eine zulässige Lösung von (LQ) erfüllt also die Maximumbedingung (M) mit einer Adjungierten p , welche eine Lösung der adjungierten Gleichung (A) mit der Transversalitätsbedingung (T) ist. Für jede optimale Zustandstrajektorie x^* ist die Lösung p der linearen Differentialgleichung (A) mit der Endbedingung (T) eindeutig bestimmt.

Wir definieren nun die Umschaltfunktion für $t \in [0, T]$ durch

$$\sigma(t) := -r(t) + B(t)^\top p(t). \quad (2.22)$$

Die Funktionen A , W und w sind Lipschitz-stetig und die Funktionen p und x sind beschränkt. Wegen der Adjungierten-Gleichung (A) ist $\dot{p}$ für fast alle $t \in [0, T]$ beschränkt und somit ist p Lipschitz-stetig. Mit der Lipschitz-Stetigkeit von r und B ist auch die Umschaltfunktion σ Lipschitz-stetig.

Da eine optimale Steuerung u^* die Maximumbedingung (M) erfüllt, gilt für fast alle $t \in [0, T]$:

$$u_i^*(t) := \begin{cases} b_i^u, & \text{falls } \sigma_i(t) > 0, \\ b_i^l, & \text{falls } \sigma_i(t) < 0, \\ \text{singulär,} & \text{falls } \sigma_i(t) = 0, \end{cases} \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.23)$$

Falls die Komponenten von σ nur endlich viele Nullstellen aufweisen, so bezeichnen wir u^* auch als Bang-Bang-Steuerung.

Eine numerische Untersuchung von
Bang-Bang-Steuerungsproblemen

Radow, G.

2017, VIII, 86 S. 28 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-18196-3