

Hier listen wir einige heuristische Hinweise auf, die häufig bei Beweisschritten weiterhelfen, aber für sich allein selten stark genug sind, um Aufgaben alleine zu lösen. Der Aufgabentyp, um den es uns dabei hauptsächlich geht, sind Beweisaufgaben, in denen das Ziel darin besteht, aus gewissen Voraussetzungen bzw. Annahmen eine gewisse Folgerung zu ziehen. Wo die Begriffe „Voraussetzung“ bzw. „Folgerung“ im Folgenden auftauchen, sind sie in diesem Sinn zu verstehen. Wir begnügen uns daher mit wenigen kurzen Beispielen zur Illustration oder mit Verweisen auf andere Kapitel; im weiteren Text werden wir immer wieder (aber nicht jedesmal) darauf hinweisen, wo einer davon benutzt wurde.

Polyas heuristisches Standardwerk [P1] enthält eine gute tabellarische Zusammenfassung allgemeiner Herangehensweisen unter dem Titel „Wie sucht man die Lösung“; insbesondere stammen daher die Hinweise 1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11 und 12. Für 11 vgl. auch [S], S. 112. Die Hinweise 2, 3, 8, 9 und 11 finden sich in [L].

2.1 Gehe auf die Definition zurück

Im Gegensatz zu Alltagssprachlichen Begriffen, die wir mit ihren oft unscharfen Grenzen im Umgang erlernen, sind mathematische Begriffe durch präzise Definitionen gegeben. Es kann beim Lösen einer Aufgabe sehr hilfreich sein, einmal das Vorwissen über einen Gegenstandsbereich – wie Zahlentheorie, Algebra, Geometrie ... hinten anzustellen und auf die Definition zurück zu gehen. Alleine dadurch werden viele Aufgaben deutlich einfacher – oder lösen sich sogar ganz auf.

Beispiel 2.1

Zeige: Es existieren unendlich viele natürliche Zahlen n so, dass $x^3 \equiv 2$ modulo n eine Lösung hat.

Lösung An dieser Aufgabe haben schon einige gute Problemlöser mit einigem zahlen-theoretischen und algebraischen Vorwissen eine Weile herum geknobelt, bis sie schließlich auf die Definition zurück gegangen sind:

Die Definition von $x^3 \equiv 2$ modulo n ist, dass n ein Teiler von $x^3 - 2$ ist. Jeder Teiler einer Zahl der Form $x^3 - 2$, insbesondere diese Zahlen selbst, sind also wie gewünscht. Was zunächst vielleicht wie ein schwieriges Problem aussieht, ist tatsächlich trivial. \square

2.2 Nimm das Gegenteil der zu beweisenden Aussage an

Das empfiehlt sich eigentlich immer. Versuche dann, die fragliche Aussage A mithilfe der neuen Annahme „nicht A “ zu beweisen oder einen Widerspruch herbei zu führen. Wenn sich am Ende zeigt, dass die Voraussetzung „nicht A “ nicht benötigt wurde, schadet es nichts, sie gemacht zu haben.

Anwendungsbeispiele für dieses Prinzip sind etwa die Beispiele 6.1, 6.3, 6.4, 6.5, 6.7 und 6.8.

2.3 Mache die gegebenen Daten so konkret wie möglich! Führe geeignete Bezeichnungen ein!

Mathematisch operieren und argumentieren können wir nur mit den Objekten, die wir als solche in unsere Betrachtung eingeführt haben. Gerade Anfänger scheuen sich oft, Objekte und Bezeichnungen einzuführen, die in der Aufgabenstellung nicht ausdrücklich enthalten sind. Dadurch wird die Lösungssuche erschwert und bisweilen blockiert. Wann immer die Beweissituation also ein gewisses Objekt nahelegt, sollte man eine Bezeichnung dafür einführen.

Insbesondere: Gehört eine Aussage der Form „Es gibt ein Objekt mit der Eigenschaft E “ zu den Annahmen, oder hat man eine solche Behauptung bereits gezeigt, so wähle man eine Bezeichnung für ein solches Objekt. So eine Situation liegt auch dann vor, wenn man versucht, eine Aussage der Form „Alle x haben die Eigenschaft E “ durch Widerspruch zu beweisen: In diesem Fall wähle man eine Bezeichnung für ein Gegenbeispiel.

In anderen Fällen sind Größen oder Objekte eher implizit nahe gelegt: Ist z. B. gegeben, dass X eine endliche Menge ist, so hat X eine gewisse natürliche Zahl n als Anzahl ihrer Elemente. Die Annahme „ X ist endlich“ legt also die Einführung einer Bezeichnung für ihre Größe nahe – oft ist es hilfreich, das auch zu tun.

Beispiel 2.2 ([Er] 2.3(1))

Zeige: Wenn das Quadrat einer quadratischen Matrix mit reellen Einträgen invertierbar ist, so auch die Matrix selbst.

Lösung **Führe geeignete Bezeichnungen ein!** Gegeben ist eine Matrix A so, dass A^2 invertierbar ist. **Mache die Daten so konkret wie möglich!** Nach Annahme ist A^2 invertierbar. Also existiert zu A^2 eine inverse Matrix – nennen wir sie B . Wir haben also $A^2 B = I$. Gesucht ist eine Matrix C so, dass $AC = I$.

Das ist nun einfach: Es ist $I = A^2 B = A(AB)$, also ist $C = AB$ wie gewünscht. \square

2.4 Bringe die Daten in einen möglichst engen Zusammenhang

Wenn in der Voraussetzung einer Behauptung mehrere Objekte vorkommen, versuche, möglichst viele Verbindungen zwischen ihnen und zwischen ihnen und den in der zu beweisenden Folgerung vorkommenden Objekten zu finden. Versuche, gegebene Objekte und Annahmen in einen gemeinsamen Kontext einzubetten.

Beispiel 2.3 (vgl. [L], 6.2.5)

Ein Wanderer bricht am Montag um 10.00 in einem Ort A auf und kommt schließlich an seinem Zielort B an. Zwischendurch ändert er öfter seine Geschwindigkeit und macht Pausen. Tags darauf bricht er um 10.00 in B auf und wandert auf demselben Weg nach A zurück, wiederum mit Geschwindigkeitswechseln, Pausen etc. Zeige: Es gibt einen Punkt auf dem Weg, an dem er sich an beiden Tagen zur gleichen Uhrzeit befunden hat.

Lösung Wir versuchen, die beiden gegebenen Situationen – Montagswanderung und Dienstagswanderung – in einen gemeinsamen Kontext einzubetten und stellen uns dazu vor, dass der Wanderer am Dienstag tatsächlich ein zweiter Wanderer am Montag ist. Da diese beiden Wanderer denselben Weg von der gleichen Startzeit an in entgegengesetzte Richtungen durchlaufen, müssen sie einander begegnen. Ihr Treffpunkt ist offenbar wie gewünscht. \square

Tauchen in der Formulierung der zu beweisenden Aussage mehrere Größen und Objekte auf, sollte man versuchen, einige von ihnen mithilfe der anderen darzustellen. Auf diese Weise verringert sich bisweilen die Anzahl der Objekte, die betrachtet werden müssen; in jedem Fall klärt sich die Beweissituation.

Ist man mit dem Versuch, einige der gegebenen Objekte bzw. Größen durch andere darzustellen, nicht erfolgreich, hilft es oft weiter, neue „Hilfsobjekte“ zu konstruieren, in denen möglichst viele der gegebenen Objekte möglichst „nah“ zusammenkommen. Besonders betrachtenswert sind dabei Hilfsobjekte, wenn sich mithilfe der gegebenen Annahmen etwas über sie folgern lässt oder wenn sich die gesuchte Folgerung als Eigenschaft des Objektes ausdrücken lässt. Wenn man z. B. zwei Zahlen oder zwei Funktionen

vergleichen möchte (etwa eine Gleichheit oder eine Ungleichung zwischen ihnen zeigen möchte), so bietet es sich an, ihre Differenz (oder deren Betrag) oder ihren Quotienten zu betrachten. Oder: Wenn man einige gegebene Terme zu einem neuen Term aufsummieren kann, der sich gut faktorisieren lässt, sollte man sich diese Gelegenheit nicht entgehen lassen! Typische weitere Beispiele sind Hilflinien in der Geometrie.

Beispiel 2.4 ([E], Kap. 6, A1)

Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Zeige: Ist $(a - c)$ ein Teiler von $ab + cd$, so auch von $ad + bc$.

Lösung Eine Startschwierigkeit bei dieser Aufgabe ist sicherlich, dass die beiden Terme $ab + cd$ und $ad + bc$ isoliert herumstehen. Es ist nicht klar, wie man so aus dem einen Informationen über den anderen gewinnen soll.

Vielleicht hilft es, sie zu einem Term zusammenzubringen. Man könnte sie z. B. addieren, multiplizieren oder voneinander subtrahieren. Da es um Teilbarkeit durch eine Differenz geht, liegt es nahe, es erst einmal mit einer Subtraktion zu versuchen: Betrachten wir also $(ad + bc) - (ab + cd)$. Können wir etwas über die Teilbarkeit durch $(a - c)$ aussagen?

Allerdings! Umformen liefert $(ad + bc) - (ab + cd) = d(a - c) + b(c - a) = (a - c)(d - b) -$ was offenbar durch $(a - c)$ teilbar ist! Wenn aber $(ad + bc) - (ab + cd)$ und $(ab + cd)$ beide durch $(a - c)$ teilbar sind, so auch die Summe $[(ad + bc) - (ab + cd)] + (ab + cd) = ad + bc$, und das war zu zeigen. \square

Die Konstruktion geeigneter Hilfsobjekte erfordert bisweilen erhebliche Kreativität und Geschicklichkeit – es empfiehlt sich, sie an vielen Aufgaben zu üben.

2.5 Betrachte aussagenlogische Varianten

Eine allgemeinere Variante des vorletzten Hinweises. Man sollte stets einfache logische Varianten der betrachteten Aussage im Blick behalten; oft ist eine davon zugänglicher als die ursprüngliche Formulierung.

Insbesondere sollte man solchen Varianten den Vorrang geben, bei denen (1) die Voraussetzung viel konkrete Information enthält (z. B. die Existenz von Objekten mit gewissen Eigenschaften, für die sich dann Bezeichnungen einführen lassen – siehe den letzten Abschnitt), (2) man Sätze oder Strategien kennt, Aussagen zu beweisen, die der Folgerung ähneln und (3) man Sätze und Strategien kennt, deren Voraussetzungen den Voraussetzungen der gegebenen Aussage ähneln.

So lässt sich z. B. eine Aussage der Form „Aus A folgt B “ oft einfacher in der Form „Aus $\neg B$ folgt $\neg A$ “ beweisen; oder in der Form „ $\neg A$ oder B “. Oder ...

Beispiel 2.5 ([Mu])

Es sei n eine natürliche Zahl. Zeige: Ist n^2 gerade, so ist auch n gerade.

Lösung Die Annahme „ n^2 ist gerade“ lässt sich umformulieren zu „Es gibt eine natürliche Zahl m mit $n^2 = 2m$ “. Nun wollen wir sehen, dass n selbst von der gleichen Form ist. Leider scheint uns die Annahme nicht viel weiterzuhelfen. Aus Informationen über n^2 etwas über n abzuleiten, ist schwierig. Umgekehrt wäre es viel einfacher!

Wir betrachten also stattdessen eine logische Umformulierung, die eine Information über n als Annahme hat: „Ist n ungerade, so ist auch n^2 ungerade“. Das ist nun leicht zu sehen: Ist n ungerade, so können wir es in der Form $(2k + 1)$ schreiben. Dann ist aber $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, also ungerade. \square

Beispiel 2.6

Zeige: Ist p eine Primzahl, so ist p nicht die Differenz zweier vierter Potenzen.

Lösung Geht man die Aussage in der gegebenen Form an, ist man zunächst blockiert: Weder kennen wir Strategien noch Sätze, die eine Folgerung der Form „ k ist keine Differenz zweier vierter Potenzen“ erlauben.

Sätze mit einer Folgerung der Form „ k ist keine Primzahl“ gibt es hingegen einige: Jede Weise, k in zwei von 1 verschiedene natürlichzahlige Faktoren zu zerlegen, führt zum Ziel.

Betrachten wir also eine aussagenlogische Variante der Aussage, in der die Folgerung von der Form „ k ist keine Primzahl“ annimmt:

„Ist p die Differenz zweier vierter Potenzen, so ist p keine Primzahl.“

Mache die gegebenen Daten so konkret wie möglich! Angenommen, p ist Differenz zweier vierter Potenzen; seien also $m, n \in \mathbb{N}$ mit $p = m^4 - n^4$. Da $p > 0$, ist $m \neq n$. Nach der dritten binomischen Formel ist $p = m^4 - n^4 = (m^2 + n^2)(m^2 - n^2)$. Es ist nicht schwer zu sehen, dass für $m \neq n$ beide Faktoren > 1 sind und ihr Produkt also keine Primzahl sein kann. \square

2.6 Suche nach führenden Spezialfällen

Ein „führender Spezialfall“ einer allgemeinen Aussage A ist einer, von dem aus sich die Aussage in ihrer Allgemeinheit leicht einsehen lässt. Hat man einen führenden Spezialfall gefunden, kann man sich also auf diesen konzentrieren. In Beweistexten in Lehrbüchern erkennt man führende Spezialfälle an Formulierungen wie „wir können annehmen, dass“, oder „ohne Beschränkung der Allgemeinheit“ (OBdA).

Möchte man etwa Problem der Dreiecksgeometrie dadurch lösen, dass man das Dreieck in ein Koordinatensystem zeichnet und die fragliche Beziehung nachrechnet, kann man meistens annehmen, dass sich dabei eine Ecke des Dreiecks im Ursprung des Koordinatensystems befindet, da sich das Dreieck gewöhnlich beliebig verschieben lässt, ohne die für die Aufgabe wichtigen Eigenschaften zu verändern; ferner, dass sich eine weitere Ecke auf der x -Achse befindet, da sich das Dreieck gewöhnlich beliebig drehen lässt, ohne die für die Aufgabe wichtigen Eigenschaften zu verändern; und schließlich, dass diese zweite Ecke auf $(1, 0)$ liegt, da sich das Dreieck gewöhnlich um einen beliebigen (positiven) Faktor strecken oder stauchen lässt, ohne die für die Aufgabe wichtigen Eigenschaften zu verändern. Man kann also annehmen, dass die Ecken des Dreiecks $(0, 0)$, $(1, 0)$ und (x, y) sind und muss somit nur noch mit zwei Variablen rechnen und nicht mit sechs, was man müsste, wenn man alle drei Eckpunkte durch beliebige Koordinaten beschreiben wollte.

Ein weiteres Beispiel ist Aufgabe 8.5.

2.7 Sammle hilfreiche Sätze. Suche ähnliche Aufgaben

Gute Kandidaten für hilfreiche Sätze sind vor zunächst vor allem solche, die ähnliche Voraussetzungen wie die in der zu beweisenden Aussage gegebenen machen, eine ähnliche Folgerung haben wie die zu beweisende Aussage oder die Objekte betreffen, um die es in der zu beweisenden Aussage geht.

Solche Sätze lassen sich dann oft anwenden, um ein sinnvolles Zwischenziel für einen Beweis zu finden: Hat man einen Satz, der es einem erlaubt, aus den gegebenen Annahmen eine Folgerung F zu ziehen, kann man F als weitere Annahme verwenden. Hat man andererseits einen Satz, der es einem erlaubt, aus gewissen Annahmen A die Folgerung der zu beweisenden Aussage zu schließen, so kann man nun versuchen, aus den gegebenen Annahmen A abzuleiten. Sind sowohl die Voraussetzungen als auch die Folgerung eines bekannten Satzes denen der zu beweisenden Aussage ähnlich, kann man auch versuchen, ob die Beweisidee sich anpassen lässt.

Wir verzichten hier auf gesonderte Beispiele; jedes der folgenden Kapitel enthält sie in großer Zahl.

2.8 Mache eine Fallunterscheidung. Führe hilfreiche Zusatzannahmen ein

Vielleicht lässt eine Aufgabe sich leicht lösen, wenn man eine zusätzliche Annahme macht. In diesem Fall lohnt es sich, eine Fallunterscheidung einzuführen und die Aufgabe einmal mit dieser Annahme und einmal mit der Negation dieser Annahme zu betrachten. In beiden Fällen steht nun mehr Information zur Verfügung, die vielleicht hilfreich ist.

Beispiel 2.7

Zeige: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $n(n-1)$ gerade.

Lösung Wir unterscheiden 2 Fälle:

Fall 1: n ist gerade, etwa $n = 2m$. Dann ist auch $n(n-1) = 2m(n-1)$ gerade.

Fall 2: n ist ungerade, etwa $n = 2m+1$. Dann ist $n(n-1) = n(2m) = 2mn$ ebenfalls gerade.

In beiden Fällen ist die Folgerung trivial; zusammen lösen sie unser Problem. \square

2.9 Wenn möglich, stelle das Problem graphisch dar!

Eine graphische Darstellung ist bisweilen auch in Fällen möglich, in denen man es kaum erwarten würde – und dann für gewöhnlich sehr hilfreich. Das illustrieren die Beispiele 11.7 und 11.8 sowie die Aufgaben 11.3 und 11.8 sowie die Beispiele 13.1 und 13.2.

2.10 Forme geschickt um!

Viele Lösungen mathematischer Probleme bestehen zumindest teilweise aus Termumformungen. Wir sehen uns kurz einige wichtige Strategien für solche Schritte an, nämlich Substitution, Nullergänzung, Faktorisierung und Umordnung.

Substitution Oft lassen sich Terme erheblich vereinfachen, indem man (1) gewisse Teilterme durch eine einzige Variable ersetzt oder (2) einzelne Variablen durch Teilterme. Für beides empfehlen sich zunächst solche Teilterme, die im fraglichen Term mehrfach vorkommen oder für die der fragliche Term sich so umformen lässt, dass sie mehrfach vorkommen. Auf diese Weise kann man z. B. eine Reduktion des Grades eines polynomiellen Terms oder eine Reduktion der Anzahl der Variablen erreichen; in manchen Fällen kann man auf diese Weise auch dafür sorgen, dass der Term symmetrisch wird, d. h. sich bei Vertauschung zweier Variablen nicht ändert.

Beispiel 2.8

Finde alle reellen Zahlen x mit $(x^2 - 3x + 1)^2 + 2x^2 - 6x - 8 = 0$.

Lösung Lösen wir das Quadrat auf, erhalten wir eine Polynomgleichung vierten Grades – ein eher unangenehmer Gegner.

Sehen wir also zu, ob es nicht auch anders geht: Tatsächlich ist der „Restterm“ $2x^2 - 6x - 8$ gerade das doppelte von dem quadrierten Term, verringert um 10. Daher bietet es sich an, eine Substitution vorzunehmen: Wir setzen $y := (x^2 - 3x + 1)$. Damit hat die Gleichung die Form $y^2 + 2y - 10 = 0$, was sich mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen leicht lösen lässt. Sind y_0 und y_1 die Lösungen, so müssen wir nun nur noch die quadratischen Gleichungen $x^2 - 3x + 1 = y_0$ und $x^2 - 3x + 1 = y_1$ lösen, um die Lösungen für die ursprüngliche Gleichung zu erhalten. \square

Nullergänzung Wenn ein gegebener Term T einem anderen Term T' ähnelt, mit dem man bereits umgehen kann, es aber in T' gegenüber T einige fehlende (oder zusätzliche) Summanden gibt, so füge sie zu T' hinzu und ziehe sie gleich wieder ab (bzw. ziehe sie ab und addiere sie sogleich wieder). Häufig lässt sich mit dem Term, der sich so ergibt, noch immer gut arbeiten.

Beispiel 2.9

Ein bekanntes Beispiel ist die quadratische Ergänzung: Sind die (reellen oder komplexen) Lösungen von $X^2 + aX + b = 0$ gesucht, so versuchen wir, der linken Seite durch einen Term der Form $(X + c)^2$ möglichst nahe zu kommen. Dazu wählen wir c so, dass der lineare Koeffizient von $(X + c)^2$ gleich a ist, also $2c = a$ oder $c = \frac{a}{2}$ gilt. Nun ist $(X + \frac{a}{2})^2 = X^2 + 2\frac{a}{2}X + \frac{a^2}{4} = X^2 + aX + \frac{a^2}{4}$. Bis auf den letzten Summanden sieht das $X^2 + aX + b$ recht ähnlich. Nun benutzen wir die Nullergänzung: Es ist $X^2 + aX + b = X^2 + aX + b + (\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}) = X^2 + aX + \frac{a^2}{4} + (b - \frac{a^2}{4}) = (X + \frac{a}{2})^2 + (b - \frac{a^2}{4})$. Das heißt: Es ist $X^2 + aX + b = 0$ genau dann, wenn $(X + \frac{a}{2})^2 + (b - \frac{a^2}{4}) = 0$ ist, also $(X + \frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{4} - b$ oder $X = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$ – die Lösungsformel für die quadratische Gleichung.

Faktorisierung In vielen Zusammenhängen (z. B. wenn es um Nullstellen von Funktionen geht) ist es angenehmer, mit einem Produkt zu arbeiten als mit einer Summe. Wenn möglich, sollte man dann also versuchen, einen gegebenen Term zu faktorisieren, also als Produkt darzustellen.

Umordnen Gerade bei Summen oder Produkten beliebiger oder unendlicher Länge sollte man darauf achten, ob geeignete Zusammenfassungen von Summanden bzw. Faktoren nicht einfacher zu bearbeiten sind.

Beispiel 2.10

Ein sehr bekanntes Beispiel: Um die Summe $1 + 2 + \dots + 2n + 1$ zu bestimmen, fassen wir den ersten und letzten, den zweiten und zweitletzten, den dritten und

drittletzten etc. Summanden zusammen. Dann ist $1 + 2 + 3 + \dots + 2n + 1 = (1 + (2n + 1)) + (2 + 2n) + \dots + (n + (n + 1)) = (2n + 1) + (2n + 1) + \dots + (2n + 1)$, wobei wir n Summanden haben; in der Summe ergibt sich also $n(2n + 1)$.

Weitere Beispiele sind 12.26, 12.27 und Aufgabe 12.11.

2.11 Variiere die Aufgabe

Wenn die zu beweisende Aussage nicht direkt zugänglich ist, kann man sich ihr nähern, indem man Varianten betrachtet:

- Lasse einige Voraussetzungen der zu beweisenden Behauptung weg oder schwäche sie ab. Prüfe, ob die Behauptung noch stimmt. Auf diese Weise erfährt man etwas darüber, welche Voraussetzungen beim Beweis welche Bedeutung haben werden: Wird die Behauptung z. B. ohne eine gewisse Voraussetzung falsch, muss diese Voraussetzung im Beweis auf jeden Fall benutzt werden.
- Füge Voraussetzungen hinzu: Auf diese Weise erreicht man zwar nicht direkt das ursprüngliche Beweisziel, lernt aber etwas über das Problem und erledigt oft einen oder mehrere Spezialfälle. Außerdem hat man im Erfolgsfall die Negation der zusätzlichen Voraussetzung als weitere Annahme zur Verfügung; auf diese Weise gelangt man zu einer **Fallunterscheidung** (s. o.).
- Verstärke die Folgerung: Wie weit geht das, ehe du sie definitiv widerlegen kannst? Auf diese Weise werden die für den Beweis wichtigen Aspekte der Behauptung deutlich.
- Schwäche die Folgerung ab, bis du zu einer Aussage gelangst, die du beweisen kannst. Oft ist die Beweisstrategie dann zu einer für die stärkere Folgerung ausbaubar (vgl. dazu auch Kap. 8 zur Verallgemeinerung und Analogie).

2.12 Rekonstruiere Lösungen!

Streng genommen ist das keine Lösungsstrategie, sondern eine Strategie, um das Lösen zu lernen:

Wenn ein Beweis vorliegt, versuche, ihn heuristisch zu rekonstruieren: Was könnte einen auf die Idee gebracht haben, an einer Stelle des Beweises dies oder jenes zu versuchen? Wie hätte man darauf kommen können? Wenn dir dabei neue Lösungsideen kommen, suche nach anderen Situationen, in denen sie ebenfalls hilfreich sein könnten.

2.13 Literatur

[P1] enthält eine gute Zusammenfassung allgemeiner Herangehensweisen unter dem Titel „Wie sucht man die Lösung“; insbesondere stammen daher die Hinweise 1, 3, 4, 7, 9 und 11. Die Hinweise 2, 3, 8 und 9 werden auch in [L] erläutert. Empfehlenswert ist ferner die Darstellung in [Z].

Literatur

- [E] Engel, A.: Problem Solving Strategies. Springer, New York (1998)
- [Er] Erdmann, J.: Exercises and Problems in Linear Algebra. http://web.pdx.edu/~erdman/LINALG/Linalg_pdf.pdf. Zugegriffen: 11.04.2017
- [L] Larson, L.: Problem-Solving Through Problems. Springer, New York (1983)
- [Mu] Bin Muhammad, R.: Proof by Contraposition. http://www.personal.kent.edu/~rmuhamma/Philosophy/Logic/ProofTheory/proof_by_contradictionExamples.htm. Zugegriffen 04.04.2017
- [P1] Polya, G.: Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme. Vierte Auflage. Francke Verlag Tübingen und Basel (1995)
- [S] Schoenfeld, A.: Mathematical Problem Solving. Academic Press Inc. Orlando, Florida (1985)
- [Z] Zeitz, P.: The Art and Craft of Problem Solving. Wiley, New York (2006)

Wie kommt man darauf?

Einführung in das mathematische Aufgabenlösen

Carl, M.

2017, X, 249 S. 15 Abb., 4 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-658-18249-6