

Ergänzendes Material zu ‘Wie kommt man darauf?’

Merlin Carl

- Lösungen Kapitel 3: S. 3
- Lösungen Kapitel 4: S. 8
- Lösungen Kapitel 5: S. 11
- Lösungen Kapitel 6: S. 14
- Lösungen Kapitel 7: S. 19
- Lösungen Kapitel 8: S. 25
- Lösungen Kapitel 9: S. 27
- Lösungen Kapitel 10: S. 30
- Lösungen Kapitel 11: S. 36
- Lösungen Kapitel 12: S. 38
- Lösungen Kapitel 13: S. 47
- Lösungen Kapitel 14: S. 56
- Vortest: S. 63
- Nachtest: S. 66
- Vermischte weitere Aufgaben: S. 69

Lösungen und Hinweise zu den Übungsaufgaben

3 Kapitel 3

Aufgabe 3.1:

Wir verbinden die Seitenmitten des Dreiecks wie in der ‘Zielscheibenaufgabe’ und erhalten 4 Teildreiecke mit Flächeninhalt $\frac{1}{4}$. Wegen $9 = 4 \cdot 2 + 1$ müssen nach dem allgemeinen SFP in einem dieser Teildreiecke mindestens 3 der Punkte liegen. Der Flächeninhalt des von diesen drei Punkten gebildeten Dreiecks kann aber offenbar nicht größer sein als der Flächeninhalt des Dreiecks, in dem sie liegen, ist also $\leq \frac{1}{4}$.

Zusatz: Wie viele Punkte braucht man, damit sicherlich 3 darunter sind, die ein Dreieck mit Flächeinhalt $\leq \frac{1}{3}$ bilden?

Aufgabe 3.2:

(a) Die kleinste Summe über eine höchstens 9-elementige Teilmenge von $\{1, 2, \dots, 37\}$ ist 0 (wenn die Teilmenge leer ist), die größte ist $37+36+\dots+29 = 297$; andererseits hat eine 9-elementige Menge $2^9 = 512$ Teilmengen. Also müssen nach dem SFP zwei davon die gleiche Elementsumme haben.

(b) Hier funktioniert das Argument aus (a) nicht mehr, denn nun ist die maximale Summe $37 + 36 + \dots + 30 = 268$, die Zahl der Teilmengen aber $2^8 = 256$, also zu klein für ein direktes Schubfachargument. Wir sollten also auf eine Reduktion der Anzahl der Schubfächer hinarbeiten. Aber wie?

Führe hilfreiche Zusatzannahmen ein!

Auffällig ist, dass die Differenz zwischen 268 und 256 nicht besonders groß ist. Wäre die maximale Summe um 13 kleiner, würde der Schubfachschluss funktionieren. Nun kommt die Summe 268 nur dann zustande, wenn $X = \{30, 31, \dots, 37\}$, also in einem recht speziellen Fall. Kommt andererseits eine der Zahlen $\{1, 2, \dots, 17\}$ in X vor, so ist die maximale Summe $\leq 17 + 31 + 32 + \dots + 37 = 255$ und der Schubfachschluss geht durch. Immerhin, wir können also annehmen, dass X keine Zahl ≤ 17 enthält. Damit stammen die Elemente von X nun also aus der deutlich kleineren Menge $\{18, \dots, 37\}$. Hilft das was?

Allerdings! Denn nun können wir auf eine Reduktion der Anzahl der Schubfächer hinarbeiten: Die kleinstmögliche Summe über eine nichtleere Teilmenge von X ist nun 18, die größtmögliche weiterhin 268. Das sind aber nur noch 251 mögliche Werte, während X $2^8 - 1 = 255$ nichtleere Teilmengen hat - nun funktioniert das SFP.

Aufgabe 3.3:

Führe geeignete Bezeichnungen ein! Für $n \in \mathbb{N}$ sei $z_n = 3030\dots303$, wobei n die Anzahl der Dreien bezeichnet. Die Form der Aussage weist auf das Schubfachprinzip hin. Da es um Teilbarkeit durch u geht, probieren wir

als Schubfächer einmal die Reste modulo u aus. Nun, offenbar haben wir unendlich viele z_n , aber nur endlich viele Schubfächer. Nach der unendlichen Form des SFP gibt es also jedenfalls zwei verschiedene $i, j \in \mathbb{N}$ ($i < j$) so, dass z_i und z_j modulo u denselben Rest lassen, also $z_j - z_i$ durch u teilbar ist. Allerdings hat $z_j - z_i$ die Form 3030303..03000...00, ist also nicht wie gewünscht - die Nullen am Ende stören. Zwar gibt es $k, l \in \mathbb{N}$ mit $z_j - z_i = 10^k z_l$, aber diese 10^k ist uns ein Dorn im Auge. Glücklicherweise fällt uns auf, dass die Voraussetzung an u noch nicht benutzt wurde: Wenn u weder durch 2 noch durch 5 teilbar ist, ist u genau dann ein Teiler von $10^k z_l$, wenn es ein Teiler von z_l ist. Also ist z_l wie gewünscht!

Aufgabe 3.4:

(a) Von den unendlich vielen Potenzen a^i mit $i \in \mathbb{N}$ müssen zwei den gleichen Rest bei der Division durch p lassen, etwa a^j und a^i ($i < j$). Dann ist $p | a^j - a^i = a^i(a^{j-i} - 1)$. Also ist $p | a^i$ oder $p | a^{j-i} - 1$. Da a und p teilerfremd sind, ist p kein Teiler von a^i . Also ist $a^{j-i} - 1$ wie gewünscht.

(b) Wie in (a) existieren natürliche Zahlen $i < j$ so, dass b ein Teiler von $a^j - a^i = a^i(a^{j-i} - 1)$ ist. Da a und b teilerfremd sind, sind auch a^i und b teilerfremd und b ist also ein Teiler von $a^{j-i} - 1$.

(c) Hier kann man analog zu Beispiel 3.18 vorgehen. Einfacher ist es freilich, $a = za'$, $b = zb'$ zu setzen; dann sind a' und b' teilerfremd und nach Beispiel 3.18 existieren $k, l \in \mathbb{Z}$ mit $ka' + lb' = 1$, also $ka + lb = z$.

Aufgabe 3.5:

(a) Die kleinstmögliche Differenz ist 1, die größtmögliche $104 - 1 = 103$. Aus 21 Zahlen lassen sich $\binom{21}{2} = 210$ Paare bilden; wir sortieren ein Paar (a, b) mit $a < b$ in das Schubfach i ($i \in \{1, 2, \dots, 103\}$, falls $b - a = i$). Nun ist $210 > 2 \cdot 103 + 1$, also wird ein Schubfach mindestens dreimal besetzt.

(b) Hier ist die kleinstmögliche Summe $1 + 2 = 3$, die größte $138 + 137 = 275$; geordnete Paare gibt es $\binom{34}{2} = 561$, was sogar größer ist als $2 \cdot 275 + 1 = 551$. Nun verfähre wie in (a).

(c) Hier ist die kleinstmögliche Summe $1 + 2 + 3 = 6$, die größte $138 + 137 + 136 = 411$ und geordnete Tripel gibt es $\binom{34}{3} = 5984$ - mehr als genug.

Aufgabe 3.6:

Der ggT von zwei Zahlen mit Abstand $< k$ kann nicht größer sein als $k - 1$. Wir teilen die Menge $\{1, 2, \dots, kn\}$ also in folgende n Schubfächer auf: $\{1, 2, \dots, k\}$, $\{k + 1, \dots, 2k\}$, $\{2k + 1, \dots, 3k\}$, ..., $\{(n - 1)k + 1, \dots, kn\}$. Von den $(n + 1)$ Zahlen landen zwei im gleichen Schubfach, haben also einen Abstand $\leq (k - 1)$ und also auch einen ggT $\leq (k - 1)$.

Aufgabe 3.7:

(b) $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, dort ist z.B. $0 \cdot 2 = 2 \cdot 2 = 0$, aber $2 \neq 0$.

(c) $2\mathbb{Z}$, der Ring der geraden Zahlen.

(d) Es sei $c \in R$ vom Nullelement von R verschieden. Dann ist also nach der Kürzungsregel $ac \neq bc$ wann immer a und b verschiedene Elemente von R sind. Die Abbildung $x \mapsto xc$ ist also eine injektive Abbildung der endlichen Menge R auf sich selbst und also surjektiv nach Beispiel 3.20. Insbesondere existiert also ein $e \in R$ so, dass $ec = c$. Sei nun d ein weiteres von 0 verschiedenes Element von R . Wie gerade existiert ein $r \in R$ mit $rc = d$. Damit folgt aber $ed = e(rc) = r(ec) = rc = d$. Damit folgt $ed = d$ für alle $d \in R$, d.h. e ist ein Einselement von R .

(e) Die in (d) bereits gezeigte Surjektivität der Abbildung $x \mapsto xc$ für jedes von 0 verschiedene $c \in R$ impliziert schon, dass jedes von 0 verschiedene Element von R ein Inverses haben muss.

Aufgabe 3.8:

Wir führen mit der ursprünglichen Zielscheibe n Unterteilungsschritte durch, wobei wir in jedem Schritt die Seitenmitten aller im letzten Schritt erhaltenen Dreiecke verbinden und sie so in je 4 Dreiecke mit je einem Viertel der Fläche unterteilen. Im n -ten Schritt erhalten wir so 4^n gleichseitige Teildreiecke mit jeweils einer Seitenlänge von $\frac{1}{2^n}$. Von den $4^n + 1$ Pfeilen müssen zwei im gleichen Teildreieck landen und sind dann wie gewünscht.

Aufgabe 3.9:

Wir konstruieren einen ‘Spielbaum’ B wie folgt: Die Wurzel von B ist die anfängliche Spielsituation. Die direkten Nachfolger eines Knotens s von B sind alle Spielsituationen, die durch einen möglichen Zug des in s am Zug befindlichen Spielers erreicht werden können. Nach Annahme ist B endlich verzweigt. Gäbe es beliebig lange Spielverläufe, so wäre B unendlich und hätte also einen unendlichen Zweig. Dieser unendliche Zweig entspricht einem unendlichen Spielverlauf.

Aufgabe 3.10:

Es sei e eine Ecke von G . Wir setzen $v_0 = e$. Entfernt man e aus G (zusammen mit allen Kanten), erhält man eine gewisse endliche Zahl an Zusammenhangskomponenten. Jede dieser Zusammenhangskomponenten ist ein zusammenhängender Graph, in dem jede Ecke endlichen Grad hat. Mindestens eine davon, Z_1 muss unendlich sein. Es sei v_1 eine Ecke aus Z_1 , die mit e verbunden ist. Entfernt man v_1 aus Z_1 , entsteht wiederum eine endliche Zahl von Zusammenhangskomponenten, von denen eine, Z_2 , unendlich sein muss. Es sei v_2 eine Ecke aus Z_2 , die mit v_1 verbunden ist. Auf diese Weise erhält man sukzessive einen unendlichen Pfad $(v_i : i \in \mathbb{N})$ durch G , der mit e beginnt.

Aufgabe 3.11:

Wir nennen eine Färbung ‘passend’, wenn keine zwei verbundene Ecken die gleiche Farbe erhalten. Es sei $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ die Eckenmenge von G . Wir betrachten einen Baum B , dessen Elemente passende Färbungen von Folgen der Form (e_1, \dots, e_n) mit $n \in \mathbb{N}$ sind. Sicherlich ist jede Einschränkung einer passenden Färbung auch eine passende Färbung, also erhält man so tatsächlich einen Baum. Offenbar ist B endlich verzweigt, denn jede Ecke hat höchstens zwei direkte Nachfolger. Nach Annahme ist B außerdem unendlich, denn jede Folge der Form (e_1, \dots, e_n) mit $n \in \mathbb{N}$ hat wenigstens eine passende Färbung. Also hat B einen unendlichen Zweig z . Wäre z keine passende Färbung von G , so gäbe es zwei verbundene Ecken e_i, e_j von G , die laut z die gleiche Farbe erhalten. Das gleiche gilt dann aber schon im Anfangsstück von z der Länge $\max(i, j)$, d.h. nicht jedes endliche Anfangsstück von z gehört zu B , im Widerspruch zur Annahme, z sei ein unendlicher Zweig von B .

Aufgabe 3.12:

Hier zählen wir die Kanten $\{k_i : i \in \mathbb{N}\}$ ab und verfahren dann wie in Aufgabe 3.11.

Aufgabe 3.13:

(a) Da jeder Knopf nur mit endlich vielen anderen verbunden ist, existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $k_n \in \mathbb{N}$ so, dass jeder mit einem der Knöpfe $\{K_1, \dots, K_n\}$ verbundene Knopf in $\{K_1, \dots, K_{k_n}\}$ liegt. OBdA nehmen wir an, dass die k_i eine streng monoton wachsende Folge bilden. Wir konstruieren einen Baum B wie folgt: B besteht aus 0-1-Folgen, deren Länge von der Form k_i , $i \in \mathbb{N}$, sind. Eine Folge $S = (s_1, \dots, s_{k_n})$ gehört zu B , falls die ersten n Knöpfe leuchten, wenn man die ersten k_n Knöpfe gemäß S betätigt (also K_i genau dann betätigt, wenn $s_i = 1$). Sind $S, S' \in B$ mit Längen k_i, k_j , so ist S' direkter Nachfolger von S genau dann, wenn $j = i + 1$ und die ersten k_i Stellen von S' mit denen von S übereinstimmen. Damit hat B an der Stelle k_i höchstens $2^{k_{i+1} - k_i}$ Verzweigungen, ist also endlich verzweigt. Nach Annahme ist B außerdem unendlich. Also hat B einen unendlichen Zweig $z = (s_i : i \in \mathbb{N})$. Wir behaupten: Betätigt man die Knöpfe gemäß z , so leuchten alle Knöpfe anschließend. Wäre das nämlich etwa für K_n falsch, so würde bereits das Anfangsstück von z mit Länge k_n dafür sorgen, dass K_n nicht leuchtet (alle weiteren Knöpfe sind ja nicht mit K_n verbunden und haben also auf seinen Zustand keinen Einfluss); dann würde dieses Anfangsstück aber nicht zu B gehören, ein Widerspruch.

(b) Es seien $(A_i : i \in \mathbb{N})$ die aussagenlogischen Variablen und $S = \{\phi_j : j \in \mathbb{N}\}$. In jedem ϕ_j kommen nur endlich viele der A_i vor. Zu $n \in \mathbb{N}$ sei

k_n so, dass die Aussagen $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ nur aussagenlogische Variablen aus der Menge $\{A_1, \dots, A_{k_n}\}$ enthalten. Nun verfähre analog zu (a).

(c) Interpretiere die aussagenlogische Variable A_i als ‘Der i -te Knopf wurde betätigt’. Finde nun passende ϕ_i , um die Leuchtzustände der Knöpfe wiederzugeben.

Aufgabe 3.14: Es sei $G = (V, E)$ der fragliche Graph; wie im Tipp sei die Eckenmenge V von G OBdA gleich der Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ sei G_n der Teilgraph mit Eckenmenge $\{1, 2, \dots, n\}$ und Kantenmenge $E \cap \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, n\}$. Nach Annahme existiert zu jedem G_n eine Kantenfärbung mit 4 Farben F_n so, dass G_n mit dieser Färbung keinen einfarbigen Kreis enthält. Da G nur abzählbar viele Kanten hat, können wir uns die Kantenmenge abgezählt als $\{k_i : i \in \mathbb{N}\}$ denken.

Für k_1 gibt es nur vier mögliche Farben. Nach dem unendlichen SFP existiert also eine Farbe c so, dass k_1 in unendlich vielen F_i , für die $F_i(k_1)$ definiert ist, die Farbe c_1 bekommt. Wir betrachten von jetzt an nur noch die Menge X_1 der G_i mit $F_i(k_1) = c$ und setzen $F(k_1) = c$. Wieder nach dem unendlichen SFP existiert eine Farbe c_2 und eine unendliche Menge $X_2 \subseteq X_1$ so, dass für alle G_i in X_2 gilt, dass $F_i(k_2) = c_2$. Wir setzen $F(k_2) = c_2$ und betrachten von nun an nur noch die Graphen in X_2 . So fortfahrend erhält schließlich jede Kante von G eine Farbe. Angenommen, es in G mit der Färbung F einen einfarbigen Kreis K . Ein Kreis enthält nur endlich viele Kanten, also existiert ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass alle Kanten von K in $\{k_1, \dots, k_n\}$ liegen. Dann hat aber schon G_{n+1} mit der Färbung F_{n+1} einen einfarbigen Kreis, im Widerspruch zur Annahme.

3.1 Multiple Choice

I) c II) a III) a, dann d IV) c V) c

4 Kapitel 4

Aufgabe 4.1:

Sicherlich ist $F_0 = 1$ (die einzige Teilmenge von \emptyset ist \emptyset , und das hat keine zwei aufeinanderfolgenden Elemente) und ferner ist $F_1 = 2$, denn die beiden Teilmengen \emptyset und $\{1\}$ der Menge $\{1\}$ haben beide keine zwei aufeinanderfolgenden Elemente.

Betrachten wir nun den Schritt von n nach $(n+1)$. Ob man die Teilmenge $X \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ nach rechts durch $(n+1)$ fortsetzen darf, hängt davon ab, ob $n \in X$. Wir machen also eine **Fallunterscheidung**: Es sei S_n^0 die Anzahl der Teilmengen von $\{0, 1, \dots, n\}$, die n nicht enthalten und S_n^1 die Anzahl dieser Teilmengen, die n enthalten. Dann ist $S_n = S_n^0 + S_n^1$. Wenn $n \in X \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, so kann keine Fortsetzung von X zu einer Teilmenge von $\{1, 2, \dots, (n+1)\}$ das Element $(n+1)$ enthalten. Ist andererseits $n \notin X \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, so kann man $(n+1)$ hinzufügen oder auch nicht, ohne zwei aufeinanderfolgende Elemente zu erhalten. Also ist $S_{n+1}^0 = S_n^1 + S_n^0$ und $S_{n+1}^1 = S_n^0 = S_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit folgt $S_{n+1} = S_{n+1}^0 + S_{n+1}^1 = (S_n^1 + S_n^0) + S_n^0 = S_n + S_n^1 = S_n + S_{n-1}$ – die S_i folgen also der Fibonacci-Rekursion, und da die Anfangsglieder stimmen, stimmt auch der Rest.

Aufgabe 4.2: Siehe Beispiel 9.2.

Aufgabe 4.3:

Benutze Induktion als Reduktionsstrategie: Ist eine Sendung mit Kosten kc frankierbar, so auch $k + 8ic$ für jedes $i \in \mathbb{N}$. Es genügt also, für jeden Rest mod 8 Sendungen mit einem Preis frankieren zu können, der in die entsprechende Restklasse fällt und höchstens 140c beträgt...

Aufgabe 4.4:

Tipp 1: Es empfiehlt sich, erst einmal den Fall $k = 1$ zu betrachten, um sich einen Überblick zu verschaffen.

Tipp 2: Benutze die allgemeinste Form des SFP, um zu zeigen, dass mindestens ein Auto A die Strecke zum im Uhrzeigersinn benachbarten Auto A' mit seiner Tankfüllung k mal schafft.

Tipp 3: Entferne A zusammen mit dem Streckenstück zwischen A und A' , wende auf die neue Situation mit weniger Autos die Induktionsannahme an und zeige, dass jedes Auto, das in der neuen Situation die k Runden schafft, das auch in der ursprünglichen Situation vermag.

Aufgabe 4.5: Keine Lösung. Eine direkte, klassische Induktion.

Aufgabe 4.6:

- (a) Verallgemeinere zu $\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$.
- (b) Verstärke zu $\sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i} < 1 - \frac{1}{2^n}$.
- (c) Verstärke zu $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^3} < \frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2}$.
- (d) Verstärke zu $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^4} < \frac{4}{3} - \frac{1}{3n^3}$.
- (e) Verstärke zu $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^k} < \frac{k}{k-1} - \frac{1}{(k-1)n^{k-1}}$.
- (f) Ergänze durch $F_{2n}F_{2n+1} - F_{2n-1}F_{2n+2} = -1$.
- (g) Verallgemeinere auf alle ungeraden Zahlen p .
- (h) Verallgemeinere zu: F_{3k+2} ist eine gerade Zahl.
- (i) Verstärke zu: $\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$.

Aufgabe 4.7: Keine Lösung.**Aufgabe 4.8:**

Wir folgen Tipp 2. Im Induktionsschritt wollen wir also zeigen, dass $\frac{1}{\sqrt{3n+c}} \frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{1}{\sqrt{3(n+1)+c}}$. Umformen und vereinfachen liefert die äquivalente Ungleichung $3 + \frac{c}{n+1} \leq 4c$, die offenbar umso schwächer wird, je größer n wird. Insbesondere soll sie im schärfsten Fall $n = 1$ gelten, es folgt also $3 + \frac{c}{2} \leq 4c$ oder $c \geq \frac{6}{7}$. Der Induktionsschritt funktioniert also für die stärkere Aussage $\prod_{i=1}^n \frac{2i-1}{2i} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+\frac{6}{7}}}$. Der Induktionsanfang $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{3+\frac{6}{7}}}$ ist ebenfalls richtig, wie man durch ein paar einfache Umformungen feststellt.

Aufgabe 4.9:

Schreibt man den Induktionsbeweis zunächst ‘abstrakt’ mit allgemeinem q_i auf und löst dann auf, findet man, dass hier etwa $q_i = 1 - \frac{1}{2i}$ funktioniert.

Aufgabe 4.10: Verallgemeinere zu $\sum_{i=1}^n i^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$ und benutze Induktion.

Aufgabe 4.11:

Analog zu Beispiel 4.9.

Aufgabe 4.12:

Ist n selbst Primzahl, sind beide Aussagen trivial. Andernfalls ist $n = ab$ mit $1 < a, b < n$. Wende starke Induktion auf a, b an.

Aufgabe 4.13:

Finde zunächst $k \in \mathbb{N}$, $c < b$ so, dass $n - cb^k < b^k$, dann benutze starke Induktion.

Aufgabe 4.14:

Sicherlich ist $z > 0$ ein führender Spezialfall. Benutze starke Induktion. Es ist hilfreich, die folgende Verstärkung zu betrachten: Ist $z < \frac{3^k+1}{2}$, so existiert eine Darstellung der gewünschten Art, in der alle Exponenten $< k$ sind.

Aufgabe 4.16:

- (a) Benutze mehrdimensionale Induktion, um zu zeigen, dass $f(x, y) = 0$ für alle $x, y \in \mathbb{Z}$.
- (b) Benutze geschachtelte Induktion.

4.1 Multiple Choice

I) (c), (d) II) (b), (d) III) (a), (b), (d) IV) (b) V) (a) VI) (b), (c), (d)

5 Kapitel 5

Aufgabe 5.1:

(a) Nein: Wie man sich leicht überzeugt, müßten dann im Zustand zuvor alle Ameisen auf einer Linie gesessen haben; im Zustand davor müßte dann wieder das gleiche gegolten haben. Durch Rückwärtsarbeiten sieht man also, dass dieser Fall nicht eintreten kann, denn zu Beginn sitzen nicht alle Ameisen auf einer Geraden.

(b) Nein. Die Invariante ist hier der Flächeninhalt des von den drei Ameisen gebildeten Dreiecks.

Aufgabe 5.2:

Tipp: Die Quersumme einer Zahl läßt bei Division durch 9 den gleichen Rest wie diese Zahl. Der Neunerrest ist also eine Invariante und zum Schluss, wenn nur noch eine einstellige Zahl übrig bleibt, der gleiche wie am Anfang.

Aufgabe 5.3:

Ja: Ist die Summe aller n Einträge einer Zeile, Spalte oder Diagonalen $< \frac{n}{2}$, so sind mehr als $\frac{n}{2}$ der Einträge in dieser Zeile, Spalte oder Diagonalen < 1 . Der Kehrwert einer positiven reellen Zahl < 1 ist > 1 . Bildet man also die Kehrwerte in einer Zeile, Spalte oder Diagonale, in der die Eintragssumme $< \frac{n}{2}$ ist, so ist die Eintragssumme anschließend $> \frac{n}{2}$; insbesondere steigt dadurch die Summe aller Einträge im Quadrat. Diese kann aber nicht mehr als 2^{n^2} viele Werte annehmen, da in jedem Feld in jedem Schritt nur entweder die Ausgangszahl oder ihr Kehrwert stehen kann. Nach spätestens dieser Anzahl von Schritten wird also keine Zeilen-, Spalten- oder Diagonalsumme mehr $< \frac{n}{2}$ sein.

Zusatz: Gegeben sei eine endliche Menge $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ positive reeller Zahlen und eine Menge M von Teilmengen von X . In einem Schritt darf man die Kehrwerte aller Elemente einer in M liegenden Teilmenge bilden und diese Teilmenge durch die Menge der Kehrwerte ersetzen. Kann man so stets eine Situation erreichen, in der alle Teilmengen in M eine Summe haben, die mindestens ihrer halben Elementzahl entspricht?

Aufgabe 5.4:

(a) In jedem Schritt sinkt die Anzahl der Paare (i, j) von natürlichen Zahlen aus $\{1, 2, \dots, n\}$, wobei $i < j$, aber i rechts von j steht. Anfangs ist sie endlich, negativ kann sie nicht werden, also muss der Prozess stoppen. Er stoppt aber erst, wenn die Zahlen komplett richtig sortiert dastehen.

(b) Zeige, dass jeder Schritt wie in (a) dazu führt, dass die Summe wächst, während jeder Schritt in die Gegenrichtung die Summe fallen läßt.

Aufgabe 5.5:

(a) Die Invariante ist hier die Summe aller an der Tafel stehenden Zahlen plus $3(n - k)$, wobei k die Anzahl der an der Tafel stehenden Zahlen ist. Anfangs ist dieser Wert gleich $\frac{n(n+1)}{2}$, also gilt das auch zum Schluss, wenn nur noch eine Zahl z dasteht. Dann gilt also $z + 3(n - 1) = \frac{n(n+1)}{2}$, woraus sich $z = \frac{n^2 - 5n + 6}{2}$ ergibt.

(b) Die Invariante ist das Produkt der um 1 verringerten Zahlen an der Tafel. Anfangs ist dieser Wert gleich 0, also gilt das auch zum Schluss; es bleibt also die 1 übrig, unabhängig davon, mit welchem n wir begonnen haben.

Aufgabe 5.6:

(a) Interpretation: Addition modulo 2, wobei rot für den Rest 0 und grün für den Rest 1 steht. Anfangs ist die Restsumme also $1982 \cdot 0 + 2017 \cdot 1 = 1$ modulo 2, folglich muss das auch zum Schluss gelten. Es wird also ein grüner Punkt übrig bleiben.

(b) Interpretation: Addition mod 3, wobei rot für 0, grün für 1 und gelb für 2 steht. Die Summe mod 3 ändert sich nicht. Zu Beginn ist sie $97 \cdot 0 + 100 \cdot 1 + 102 \cdot 2 = 1 \bmod 3$, also bleibt zum Schluss ein grüner Punkt übrig.

Aufgabe 5.7:

(a) Bemerke zunächst, dass die Fibonaccifolge mod n in beide Richtungen eindeutig ist: D.h. aus zwei aufeinanderfolgenden Gliedern lassen sich alle vorhergehenden ebenso bestimmen wie alle nachfolgenden. Weiterhin folgt nach dem SFP, dass ein Restpaar (a, b) unter den aufeinanderfolgenden Gliedern der Fibonaccifolge mod n zweimal auftreten muss. Angenommen, es tritt zum ersten Mal an der k -ten Stelle auf und zum zweiten mal an der l -ten Stelle. Wegen der Eindeutigkeit nach rechts und links muss sich die Folge dazwischen also rechts und links immer wiederholen.

(b), (c) Wegen (a) muss das Restpaar $(1, 1)$ unendlich oft bei aufeinanderfolgenden Gliedern der Fibonaccifolge mod n auftreten. Das Glied davor muss also den Rest 0 mod n lassen.

Aufgabe 5.8:

Nein, analog zu Beispiel 5.15.

Aufgabe 5.9:

Nein und nein. Zum Beweis versuche, die Argumente von Beispiel 5.3 und Beispiel 5.9 entsprechend anzupassen.

Aufgabe 5.10:

(a) Mit jedem ‘Ringtausch’ fällt die Summe der Präferenzränge der Gruppen, in denen sich die Studierenden befinden.

(b), (c) Die gleiche Lösung funktioniert weiterhin. (d) Keine Lösung.

5.1 Multiple Choice

I (d) II (c) III (a) IV (b) V (d) VI (c) VII (a)

6 Kapitel 6

Aufgabe 6.1:

Angenommen, $\frac{a}{b}$ ist eine Lösung, wobei a und b minimal, d.h. teilerfremd sind. Dann folgt $a^3 + a^2b + b^3 = 0$. Hat b einen Primteiler p , so ist dieser Teiler von 0 und $a^2b + b^3$, aber nicht von a^3 , ein Widerspruch. Hat a einen Primteiler p , so ist dieser ein Teiler von 0 und $a^3 + a^2b$, aber nicht von b^3 , ein Widerspruch. Also sind $a, b \in \{-1, 1\}$, d.h. $\frac{a}{b} \in \{-1, 1\}$. Beides sind keine Lösungen, also gibt es keine rationalen Lösungen.

Aufgabe 6.2:

(a) Wir betrachten dasjenige Feld F_{\min} mit Eintrag 1 und dasjenige F_{\max} mit Eintrag n^2 . Um über eine Kette von einander berührenden Feldern von F_{\min} zu F_{\max} zu gelangen, braucht man höchstens $n - 1$ Schritte. Auf dem Weg muss es also zwei aufeinanderfolgende Felder geben, deren Differenz mindestens $\frac{n^2-1}{n-1} = n + 1$ beträgt.

(b) Nun ist die obere Grenze für Kette von einander berührenden Feldern von F_{\min} zu F_{\max} nicht mehr $n - 1$, sondern $2n - 1$, ansonsten wie (a).

(c), (d) Passe die Argumente aus (a) und (b) entsprechend an.

Aufgabe 6.3:

Da p geraden Grad und positiven führenden Koeffizienten hat, ist $p(x) > 0$, sofern der Betrag von x groß genug ist. p ist also allenfalls auf einem beschränkten, abgeschlossenen Intervall negativ. Dort nimmt p sein Minimum an. Sei x_0 so, dass $p(x_0)$ minimal. Ist $p(x_0) \geq 0$, sind wir fertig. Andernfalls ist $p(x_0) < 0$, und da p bei x_0 ein Minimum annimmt, ist $p'(x_0) = 0$, also $p(x_0) + p'(x_0) < 0$, im Widerspruch zur Annahme.

Zusatz: Lasse die Bedingung über den Grad und den führenden Koeffizienten von p fort und zeige, dass die Aussage weiterhin stimmt.

Aufgabe 6.4: Keine Lösung. Folge dem Tipp.

Aufgabe 6.5:

Betrachte diejenige sikinische Stadt, aus der die meisten Flüsse herausfließen und zeige, dass sie die gewünschte Eigenschaft hat.

Aufgabe 6.6:

(a) Wir können OBdA annehmen, dass $x, y \geq 0$. Der Faktor 11 auf der rechten Seite legt es nahe, die Gleichung einmal modulo 11 zu betrachten. Quadratzahlen lassen bei Division durch 11 einen der folgenden Reste: 0, 1, 4, 9, 5, 3. Offenbar ist die Summe zweier Quadratzahlen also nur dann durch

11 teilbar, wenn diese Quadratzahlen selbst es sind. Bei einer ganzzahligen Lösung von $x^2 + y^2 = 11xy$ sind also x und y beide durch 11 teilbar; sei etwa $x = 11x'$, $y = 11y'$. Dann ist $(11x')^2 + (11y')^2 = 11(11x')(11y')$, d.h. $121((x')^2 + (y')^2) = 121(11x'y')$ oder $(x')^2 + (y')^2 = 11x'y'$. Ist $(x, y) \neq (0, 0)$, so ist (x', y') also eine 'kleinere' Lösung als (x, y) , wenn man etwa die erste Komponente betrachtet, oder die Summe beider Komponenten. Zu jeder Lösung außer $(0, 0)$ läßt sich also noch eine kleinere finden, ein Widerspruch.

(b) Der Faktor 2 auf der rechten Seite legt es nahe, Teilbarkeit durch 2 zu betrachten. Sicherlich können x, y, z nicht alle ungerade sein, sonst wäre $x^2 + y^2 + z^2$ ungerade, $2xyz$ aber gerade. Also ist mindestens eine der Zahlen x, y, z gerade, sagen wir x ; wir schreiben $x = 2x'$. Dann folgt $4(x')^2 + y^2 + z^2 = 4x'yz$. Nun haben wir den Faktor 4 auf der rechten Seite; betrachten wir also Teilbarkeit durch 4. Der erste Summand $4(x')^2$ ist sicherlich durch 4 teilbar, also muss auch $y^2 + z^2$ durch 4 teilbar sein. Quadratzahlen lassen bei der Division durch 4 nur die Reste 0 und 1. Die Summe von zwei Quadratzahlen ist also nur dann durch 4 teilbar, wenn beide Quadratzahlen durch 4 teilbar sind. Also müssen auch y und z gerade sein, sei etwa $y = 2y'$ und $z = 2z'$. Teilt man die 4 auf beiden Seiten der Gleichung heraus, kommt also $(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = 4x'y'z'$. Unmittelbar ergibt sich damit noch kein Abstieg, denn nun steht rechts ja der Vorfaktor 4 statt 2. Allerdings hing unsere Überlegung oben nur an Resten modulo 2; nun ist die linke Seite wieder die Summe von drei Quadraten, die rechte weiterhin gerade, also können wir die Betrachtung wiederholen: x', y' und z' müssen gerade sein, etwa $x' = 2x''$, $y' = 2y''$, $z' = 2z''$. Einsetzen und herausteilen der 4 führt auf $(x'')^2 + (y'')^2 + (z'')^2 = 8x''y''z''$. Offenbar können wir so weitermachen: Aus einer Lösung für $a^2 + b^2 + c^2 = 2^k abc$ mit von 0 verschiedenen Komponenten erhalten wir eine 'kleinere' Lösung für $a^2 + b^2 + c^2 = 2^{k+1} abc$. Nun gibt es zwei Möglichkeiten, das Argument zu beenden: (1) Die fortgesetzte Halbierung der Komponenten einer Lösung wird schließlich dazu führen, dass die Komponenten keine ganzen Zahlen mehr sind, ein Widerspruch. (2) Wir betrachten die allgemeinere Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 2^k xyz$, von der unser Argument nun zeigt, dass sie keine Lösung mit $k \geq 1$ besitzt.

Aufgabe 6.7:

(a) Tipp: Zeichne die in der Beweisskizze angegebene Konstruktion auf. Das Abstiegsargument sollte dann offensichtlich sein.

(b), (c): Gehe analog zu (a) vor.

Aufgabe 6.8:

Bei dieser Aufgabe muss man wissen, was man will: Als Strategie zum Beweis der Unlösbarkeit von diophantischen Gleichungen haben wir den un-

endlichen Abstieg kennen gelernt. Wir wollen also annehmen, dass uns eine Lösung $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ von $a^4 + b^4 = c^2$ gegeben ist und versuchen, eine ‘kleinere’ zu finden.

Die Idee im Beispiel zur Irrationalität von $\sqrt{2}$ war, gemeinsame Teiler in den Komponenten der Lösung auszuschließen. Dieser Versuche empfiehlt sich bei solchen Aufgaben immer. Auch hier ist er ein wertvoller erster Schritt, wenn er auch noch nicht die ganze Lösung liefert: Angenommen, p ist ein gemeinsamer Teiler von a und b , sei etwa $a = p\bar{a}$, $b = p\bar{b}$. Dann ist also $p^4(\bar{a}^4 + \bar{b}^4) = c^2$; es folgt, dass $p^4|c^2$, also $p^2|c$, und, mit $c = p^2\bar{c}$, weiter $p^4(\bar{a}^4 + \bar{b}^4) = p^4\bar{c}^2$, d.h. $\bar{a}^4 + \bar{b}^4 = \bar{c}^4$, womit $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ nun sicherlich eine ‘kleinere’ Lösung als (a, b, c) darstellt, wenn wir etwa nach der letzten Komponente sortieren. Jede Lösung, bei der a und b nicht teilerfremd sind, führt uns so zu einer kleineren Lösung, also zu einem Abstieg; wir können nun also OBdA annehmen, dass a und b teilerfremd sind. Dann sind offenbar auch a und c bzw. b und c teilerfremd.

Weiter scheint uns die Betrachtung der Teilerfremdheit zunächst einmal nicht zu führen. Versuchen wir also etwas anders: Wir schreiben nun $a^4 + b^4 = c^2$ als $(a^2)^2 + (b^2)^2 = c^2$ um und benutzen den Satz über die Klassifikation der primitiven pythagoreischen Zahlentripel: Es existieren $u, v \in \mathbb{N}$ so, dass (1) $a^2 = u^2 - v^2$, (2) $b^2 = 2uv$ und (3) $c = u^2 + v^2$.

Wir wollen auf einen unendlichen Abstieg heraus. Das heißt, wir wollen eine Darstellung einer Quadratzahl als Summe zweier vierter Potenzen natürlicher Zahlen finden, die ‘kleiner’ ist als (a, b, c) . Nun wissen wir, dass $a^2 = u^2 - v^2$ und $b^2 = 2uv$; ferner sind a und b sicherlich beide kleiner als c . Wir könnten also einmal versuchen, darauf hinzuarbeiten, a^2 oder b^2 , d.h. $u^2 - v^2$ oder $2uv$, als Summe zweier vierter Potenzen natürlicher Zahlen darzustellen. Beide Möglichkeiten stehen hier erst einmal gleichberechtigt nebeneinander, beide lohnen einen Versuch. Mit $a^2 = u^2 - v^2$ kommt man allerdings nicht sehr weit. Nach einigen vergeblichen Versuchen, auf deren Darstellung wir hier verzichten, wenden wir uns also $2uv$ zu.

Wir wollen also versuchen, $2uv$ als Summe zweier vierter Potenzen zu schreiben. Dazu müssen wir sicherlich mehr über u und v wissen. Alles, was wir darüber wissen, steht in (1)-(3). Quetschen wir (1)-(3) also einmal aus.

Betrachten wir zunächst (1). Ist $a^2 = u^2 - v^2$, so ist $a^2 + v^2 = u^2$, was ein weiteres pythagoreisches Zahlentripel darstellt. Wenden wir unseren Satz also gleich noch einmal an: Es existieren $x, y, z \in \mathbb{N}$ so, dass (i) $a = x^2 - y^2$, (ii) $v = 2xy$ und (iii) $u = x^2 + y^2$.

Nun zu (2). Es ist $b^2 = 2uv$. Zusammen mit (1) und der Teilerfremdheit von a und b folgt, dass auch u und v teilerfremd sind. Wären beide ungerade, so wären $u^2 - v^2$ und $2uv$, also a^2 und b^2 , beide gerade, was nicht sein kann, da die beiden teilerfremd sind. Aus dem gleichen Grund können nicht beide

gerade sein. Ist u gerade und v ungerade, so läßt $u^2 - v^2$ den Rest 1 bei der Division durch 4, was aber bei einer Quadratzahl wie $a^2 (= u^2 - v^2)$ nicht möglich ist. Also ist u ungerade und v ist gerade. Da u und v teilerfremd sind und $b^2 = 2uv$ gilt, kommt jeder Primfaktor p von b^2 in genau einer der Zahlen u und $2v$ vor. Da jeder Primfaktor in b^2 in gerader Potenz auftritt, gilt das gleiche für u und $2v - u$ und $2v$ sind also Quadratzahlen! Weiter ist $2v = 4xy$, d.h. $4xy$ ist eine Quadratzahl, also ist auch xy eine Quadratzahl; und wiederum müssen x und y teilerfremd sein, weil v und u teilerfremd sind. Wie oben folgt also, dass x und y Quadratzahlen sind; schreiben wir etwa $x = \bar{x}^2$ und $y = \bar{y}^2$.

Wir könnten noch weiter quetschen. Aber schauen wir doch einmal, wohin uns die bisherigen Informationen führen:

Es ist $b^2 = 2uv = u(2v) = (x^2 + y^2)4xy = (\bar{x}^4 + \bar{y}^4)4xy$. Da $4xy$ eine Quadratzahl ist, die b^2 teilt, ist auch $\frac{b^2}{4xy}$ eine Quadratzahl. Nun ist aber $\frac{b^2}{4xy} = \bar{x}^4 + \bar{y}^4$, und sicherlich ist $\sqrt{\frac{b^2}{4xy}} \leq b < c$. Also haben wir eine Lösung für unsere Gleichung gefunden, bei der die dritte Komponente kleiner ist als c . Und damit ist unser Abstiegsargument fertig.

Aufgabe 6.9:

Es sei $\frac{a}{b}$ eine Lösung, wobei $a, b \in \mathbb{Z}$ minimal, also teilerfremd. Dann folgt $a^n = ab^{n-1} + b^n$. Falls b einen Primteiler p besitzt, so ist dieser Teiler der rechten, aber nicht der linken Seite, ein Widerspruch. Also ist $b \in \{-1, 1\}$. Falls a einen Primteiler p besitzt, ist dieser ein Teiler von a^n und ab^{n-1} , aber nicht von b^n , ein Widerspruch. Also ist auch $a \in \{-1, 1\}$, d.h. $\frac{a}{b} \in \{-1, 1\}$. Man überzeugt sich aber leicht, dass weder 1 noch -1 eine Lösung ist.

Aufgabe 6.10:

Gehe analog zu Beispiel 6.3 vor.

Aufgabe 6.11: Keine Lösung.

Aufgabe 6.12:

Betrachte $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ so, dass $f(x, y, z)$ minimal ist. Dann zeige, dass $f(x, y, z) = f(x + 1, y, z) = f(x - 1, y, z) = f(x, y - 1, z) = f(x, y + 1, z) = f(x, y, z - 1) = f(x, y, z + 1)$ und benutze Induktion.

Aufgabe 6.13:

Betrachte diejenige Zuordnung, für die die Summe der Längen aller Leitungen minimal wird und zeige, dass sie die gewünschte Eigenschaft aufweist.

Aufgabe 6.14:

Aus der Bedingung erhalten wir, dass jede der Zahlen bei Division durch 3 denselben Rest lässt wie die Summe aller $3n+1$ Zahlen. Sind alle Zahlen durch 3 teilbar, teilen wir sie durch 3. Lassen alle Zahlen den von 0 verschiedenen Rest i modulo 3, ziehen wir von allen i ab. In beiden Fällen erhalten wir eine Menge von Zahlen mit kleinerer (ganzzahliger) Gesamtsumme, die noch immer der Bedingung genügt. Sind nicht alle Zahlen gleich, so ist die neue Summe zudem weiterhin strikt positiv. Indem wir ein Gegenbeispiel mit minimaler Summe betrachten, erhalten wir einen Widerspruch.

Aufgabe 6.15:

Ein Minimumsindex von $(a_i : i \in \mathbb{N})$ ist ein $i \in \mathbb{N}$ so, dass $a_i \leq a_j$ für alle $j > i$. Betrachtet man die Folge $(a_i : i \in \mathbb{N})$ ab dem k -ten Index, so hat die Menge der Folgenglieder als nichtleere Menge natürlicher Zahlen ein Minimum, dessen Position in der Folge ein Minimumsindex von $(a_i : i \in \mathbb{N})$ ist. Diese Folge hat also unendlich viele Minimumsindizes; sei $(m_i : i \in \mathbb{N})$ die Folge der Minimumsindizes von $(a_i : i \in \mathbb{N})$. Nach Definition ist $a_{m_i} \leq a_{m_{i+1}}$. Ist $b_{m_i} \leq b_{m_{i+1}}$ für ein $i \in \mathbb{N}$, so sind m_i, m_{i+1} wie gewünscht. Andernfalls ist $(b_{m_i} : i \in \mathbb{N})$ eine unendliche streng monoton fallende Folge natürlicher Zahlen, ein Widerspruch.

Aufgabe 6.16:

Es sei I ein Primideal von R . Angenommen, I ist kein radikales Ideal. Es $a \in R$ und $n \in \mathbb{N}$ minimal so, dass $a^n \in I$, aber $a \notin I$. Da $a \notin I$ ist $n > 1$. Wegen der Minimalität von n ist $a^{n-1} \notin I$. Aber es ist $aa^{n-1} = a^n \in I$; da I Primideal ist, muss also $a \in I$ oder $a^{n-1} \in I$ gelten, ein Widerspruch.

Aufgabe 6.17:

Andernfalls betrachte dasjenige von Null verschiedene Element mit dem kleinsten Quadrat und wiederhole das Argument.

Aufgabe 6.18: Keine Lösung.

Aufgabe 6.19: Keine Lösung, achte auf den Tipp.

6.1 Multiple Choice

I (c) II (c) III (d) IV (a) V (a)

7 Kapitel 7

Aufgabe 7.1:

Die letzte Ziffer von n^2 ist nur dann ungerade, wenn n ungerade ist. Betrachten wir einige Quadrate von ungeraden Zahlen: $5^2 = 25$, $7^2 = 49$, $9^2 = 81$, $11^2 = 121$, $13^2 = 169$, $15^2 = 225$, $17^2 = 289$. Es fällt auf, dass deren **vor**letzte Ziffer stets gerade ist. Das lässt sich auch leicht zeigen: Wir schreiben die ungerade Zahl u als $10m + z$, wobei $z \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Dann ist $u^2 = (10m + z)^2 = 100m^2 + 20mz + z^2$. $100m^2$ hat auf die letzten beiden Ziffern der Summe keinen Einfluss. $20mz$ hat eine gerade vorletzte Ziffer und die Endziffer 0, und z^2 ist eine der Zahlen 1, 9, 25, 49, 81, hat also eine gerade vorletzte Ziffer. Damit muss auch die vorletzte Ziffer der Summe gerade sein. Bei jeder Quadratzahl mit mindestens zwei Stellen ist also eine der beiden letzten Stellen gerade. Die Ziffern einer Quadratzahl können also nur dann alle ungerade sein, wenn die Quadratzahl einstellig ist. Das führt auf die Lösungen 1 und 9.

Aufgabe 7.2:

(a) Die Betrachtung der Fälle $n = 3, 4, 5$ zeigt, dass ab A_3 die dritte Zeile der Matrix gleich dem zweifachen der zweiten Zeile, abzüglich der ersten Zeile ist. Die Zeilen sind also linear abhängig und damit ist die Determinante gleich 0, sobald $n \geq 3$.

(b) Das Ergebnis aus (a) ist weiterhin richtig, mit dem gleichen Argument.

Aufgabe 7.3: Keine Lösung.

Aufgabe 7.4: Tipp: Betrachte Paare aufeinanderfolgender Fibonaccizahlen.

Aufgabe 7.5:

Zieht man die erste Zeile von den übrigen Zeilen ab, so erhält man

$$\begin{pmatrix}
 x_1 & x_1 & x_1 & x_1 & \dots & x_1 \\
 0 & x_2 - x_1 & x_2 - x_1 & x_2 - x_1 & \dots & x_2 - x_1 \\
 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_3 - x_1 & \dots & x_3 - x_1 \\
 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 & \dots & x_4 - x_1 \\
 & & & \dots & & \\
 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 & \dots & x_n - x_1
 \end{pmatrix} \text{ mit der Determinante}$$

$$x_1 \cdot \det \begin{pmatrix}
 x_2 - x_1 & x_2 - x_1 & x_2 - x_1 & \dots & x_2 - x_1 \\
 x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_3 - x_1 & \dots & x_3 - x_1 \\
 x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 & \dots & x_4 - x_1 \\
 & & \dots & & \\
 x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 & \dots & x_n - x_1
 \end{pmatrix}$$

Die letzte Determinante ist nun wieder von der gleichen Form. So zeigt man induktiv, dass die Determinante der n -ten Matrix gerade gleich $x_1(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\dots(x_n - x_1)$ ist.

Aufgabe 7.6:

Wir arbeiten heuristisch rückwärts und formen zunächst um zu $2(x+y) = xy$. Eine erste grobe Idee ist, dass xy im Allgemeinen (viel) größer sein wird als $2(x+y)$; versuchen wir also den Bereich einzugrenzen, der infrage kommt.

Mache eine Fallunterscheidung!

Zunächst fällt auf: Sind x und y beide negativ, so ist $2(x+y)$ negativ, xy aber positiv. Dieser Fall scheidet also aus.

Da x und y in der ursprünglichen Gleichung im Nenner auftreten, ist $x, y \neq 0$.

Durch etwas Probieren findet man: Sind $x, y > 4$, so ist $2(x+y) < xy$; mit Induktion ist das auch leicht zu zeigen. Bei Lösungen mit $x, y > 0$ muss also $x \leq 4$ oder $y \leq 4$ gelten. Da die Gleichung in x und y symmetrisch ist, können wir $x \leq 4$ annehmen und die Fälle ausprobieren: Bei $x = 1$ ergibt sich $2 + 2y = y$, d.h. $y = -2$; $(1, -2)$ und $(-2, 1)$ sind also Lösungen. Bei $x = 2$ ergibt sich $4 + 2y = 2y$ oder $4 = 0$, ein Widerspruch. Bei $x = 3$ kommt $6 + 2y = 3y$ oder $y = 6$: $(3, 6)$ und $(6, 3)$ sind zwei weitere Lösungen. Mit $x = 4$ schließlich folgt $8 + 2y = 4y$, d.h. $y = 4$, was auf die Lösung $(4, 4)$ führt.

Betrachten wir nun noch den Fall, dass von den Zahlen x und y genau eine negativ und eine positiv ist; OBdA sei $x < 0, y > 0$. Ersetzt man x durch $-x'$, folgt $2(y - x') = -x'y$ oder $2(x' - y) = x'y$, wobei nun x' und y beide positiv sind. Damit ist $x'y$ auch positiv, also muss $x' - y$ positiv sein, d.h. es folgt $x' > y$. Da $y > 0$ ist $x' - y < x'$ und also $2(x' - y) < 2x'$. Ist andererseits $y \geq 2$, so ist $x'y \geq 2y$. Also folgt $y = 1$, was aber nur erneut auf die Lösung $(-2, 1)$ führt.

Wir haben nun alle Fälle betrachtet; die Lösungen sind $\{(1, -2), (-2, 1), (3, 6), (6, 3), (4, 4)\}$.

Aufgabe 7.7: Keine Lösung.

Aufgabe 7.8:

Tipp: Das Ergebnis ist $(\frac{n(n+1)}{2})^2$.

Aufgabe 7.9: Wir betrachten die Folge der Endziffern der Potenzen von 7: 1, 7, 9, 3, 1, ... Offenbar ist sie periodisch mit Periodenlänge 4 (was sich nun leicht induktiv zeigen lässt). Um die Endziffer von 7^{2017} zu bestimmen, bemerken wir, dass 2017 bei Division durch 4 den Rest 1 lässt. Also ist die Endziffer von 7^{2017} gleich 7.

Aufgabe 7.10:

Tipp: Sofern keiner der Nenner 0 wird, sind die ersten Glieder der Folge: $a, b, \frac{ab}{2a-b}, \frac{ab}{3a-2b}, \frac{ab}{4a-3b}, \frac{ab}{5a-4b}$. Das sollte genügen, um eine Vermutung aufzustellen, die sich dann leicht induktiv zeigen lässt.

Aufgabe 7.11: Tipp: Betrachte zunächst natürliche Zahlen und zeige induktiv, dass $f(n) = f(1) \cdot n$ und allgemeiner $f(nx) = nf(x)$ für $n \in \mathbb{N}$. Folgere dann aus $nf(\frac{m}{n}) = f(n\frac{m}{n}) = f(m) = mf(1)$, dass $\frac{m}{n} = \frac{m}{n}f(1)$. Beobachte, dass $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$, d.h. $f(0) = 0$. Folgere schließlich aus $0 = f(0) = f(x+(-x)) = f(x) + f(-x)$, dass $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, um den Beweis zu beenden.

Aufgabe 7.12:

Eine ziemlich abschreckende Folge. Ohne ein paar Beobachtungen kommen wir hier wohl nicht weiter. Wir berechnen die ersten Glieder der Folge: 2, 8, 26, 80, 242. Wie es scheint, verdreifacht sich die Folge ‘ungefähr’ in jedem Schritt. Wir vergleichen also mit der Folge der Potenzen von 3: 3, 9, 27, 81, 243. Das legt die Vermutung $a_n = 3^{n+1} - 1$ nahe, die nun leicht induktiv beweisbar ist.

Aufgabe 7.13:

(a) Betrachten wir die ersten Zahlen der Form $2^n + 1$ mit $n \in \mathbb{N}$, so erhalten wir 3, 5, 9, 17, 33, 65, 129, Es fällt auf, dass jede zweite Zahl durch 3 teilbar ist. In der Tat: Die Potenzen von 2 lassen bei Division durch 3 abwechselnd die Reste 1 und 2, addiert man 1, alternieren die Reste also zwischen 2 und 0. Sobald eine durch 3 teilbare Zahl größer ist als 3, kann sie nicht mehr prim sein. Also ist $n = 1$ die einzige natürliche Zahl mit der fraglichen Eigenschaft (zählt man 0 als natürliche Zahl, so ist natürlich auch $n = 0$ eine Lösung).

(b) Eine ähnliche Betrachtung wie in (a) liefert, dass jede zweite Zahl durch 5 teilbar ist. Wieder ist also $n = 1$ die einzige Zahl mit der fraglichen Eigenschaft, mit zugehörigem Paar (5, 17).

(c) Aus (a) und (b) erhalten wir die Idee, die Folge $k^n + 1$ modulo $(k+1)$ zu betrachten. Offenbar ist k kongruent zu (-1) modulo $(k+1)$, also alterniert die Folge der Reste modulo $(k+1)$ zwischen 0 und 2 – jedes zweite Folgenglied ist also durch $k+1$ teilbar. Damit kann allenfalls das Paar $(k+1, k^2+1)$ aus Primzahlen bestehen. Die Frage ist also zu verneinen.

Aufgabe 7.14:

- (a) (2, 7), (5, 2), (11, 1)
- (b) (6, 1)

Aufgabe 7.15: Keine Lösung.

Aufgabe 7.16:

(a) Tipp: Auf diese Weise lassen sich genau die natürlichen Zahlen darstellen, die keine Potenz von 2 sind.

(b) Tipp: Auf diese Weise lassen sich genau die ungeraden und die durch 4 teilbaren natürlichen Zahlen darstellen.

Aufgabe 7.17:

Die Fibonaccifolge hat die Glieder 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, Aus den ersten Fällen $D_{0,1} = 1$, $D_{1,1} = 2$, $D_{2,1} = 4$, $D_{3,1} = 7$, $D_{4,1} = 12$ erhält man die Vermutung $D_{n,1} = F_{n+2} - 1$, was sich nun induktiv leicht zeigen läßt.

Aufgabe 7.18: Keine Lösung.

Aufgabe 7.19: Keine Lösung.

Aufgabe 7.20:

(a) Man gelangt von einer Folge zur nächsten, indem man jedes Zeichen durch 2 Zeichen ersetzt. Die Längen verdoppeln sich also in jedem Schritt, d.h. v_i hat die Länge 2^{i+1} für jedes $i \in \mathbb{N}$.

Für die folgenden Teile betrachten wir die Folge der ersten v_i : $v_0 = 01$, $v_1 = 1001$, $v_2 = 10010110$, $v_3 = 1001011001101001$, $v_4 = 10010110011010010110100110010110$.

(b) Wir schreiben die Worthälften untereinander und erhalten:

0	1	2	3	4
0	10	1001	10010110	1001011001101001
1	01	0110	01101001	0110100110010110

Offenbar entsteht die zweite Hälfte aus der ersten, indem man sämtliche Einsen durch Nullen und sämtliche Nullen durch Einsen ersetzt. Außerdem scheint die erste Hälfte von v_{i+1} gleich v_i zu sein. Das können wir nun induktiv beweisen (wobei der Induktionsanfang durch unsere Beobachtungen bereits gemacht ist): Für eine 0-1-Folge s bezeichne \bar{s} die Folge, die aus s durch Ersetzung der Nullen in s durch Einsen und der Einsen in s durch Nullen entsteht. Aus den Bildungsregeln für σ sieht man leicht, dass $\sigma(\bar{s}) = \overline{\sigma(s)}$ für jede 0-1-Folge s gilt. Angenommen, es ist $v_n = v_{n-1}\overline{v_{n-1}}$. Dann ist $v_{n+1} = \sigma(v_n) = \sigma(v_{n-1}\overline{v_{n-1}}) = \sigma(v_{n-1})\sigma(\overline{v_{n-1}}) = v_n\sigma(v_{n-1}) = v_n\overline{v_n}$, wie gewünscht.

(c) Wir bezeichnen mit $b(k, n)$ die Anzahl der 2^k -Blöcke in v_n und erfassen die ersten Werte in einer Tabelle:

	0	1	2	3	4
0	2	2	2	2	2
1	1	2	2	2	2
2	0	1	2	2	2
3	0	0	1	2	2
4	0	0	0	1	2

In v_i kommt natürlich kein 2^k -Block vor, wenn $k > (i+1)$ ist. Ist $k = i+1$, kommt in v_i genau ein 2^k -Block vor. Darüber hinaus legt die Tabelle nahe, dass für $i+1 > k$ die Anzahl der in v_i vorkommenden 2^k -Blöcke gleich 2 ist. Eine weitere Beobachtung legt nahe, dass diese beiden Blöcke ausserdem von der Form b, \bar{b} sind. Mithilfe von (b) ist das nun eine einfache Induktion.

(d) Wir versuchen es mit 2-Blöcken: Dann wird aus v_1, v_2, v_3, v_4 : 01, 0110, 01101001, 1001011001101001 – anscheinend wiederholt sich die Folge der v_i um ein Glied versetzt! Analoges beobachtet man auch für 4-Blöcke, und auch für 8-Blöcke, wobei hier die Datenlage etwas dünn wird. Jedenfalls vermuten wir, dass $r_k(v_{n+k}) = v_n$, was nun wiederum mit Induktion zu zeigen ist.

(e) Tipp: Vergleiche die k -te Ziffer von v_n mit dem Rest mod 2 der Anzahl der Einsen in der Binärdarstellung von $(k-1)$. Benutze (a)-(d), um die Vermutung induktiv zu beweisen.

Aufgabe 7.21:

(a) Angenommen, b_0b_1 ist so eine Zahl. Was sind mögliche Werte für b_0 ? Offenbar ist $b_0 = 0$ ausgeschlossen, denn damit käme die Ziffer 0 mindestens einmal vor, was sie nach Annahme aber nicht sollte. Also ist $b_0 = 1$. Dann muss die 0 also einmal vorkommen und es ist $b_0 \neq 0$, also folgt $b_1 = 0$. Damit dürfte die 1 aber nicht vorkommen, es ist aber $b_0 = 1$, ein Widerspruch.

(b) Die Antwort ist jeweils nein. Um das zu beweisen, arbeite rückwärts und orientiere dich an (a).

(c) 42101000, 521001000, 6210001000 Wiederum hilft es, rückwärts zu arbeiten.

(d) Verallgemeinern von (c) liefert $(b-4)21 \underbrace{0\dots 0}_{(b-7)\times} 1000$. Wie man leicht nachprüft, stimmt das auch.

(e) Nein. Nutze die Ideen aus (b), um das zu zeigen.

Aufgabe 7.22:

Tipp: Arbeite rückwärts. Nimm an, dass a_1, \dots, a_n der Bedingung genügen und suche nach Umständen, unter denen sich das Produkt noch vergrößern ließe. Versuche, a_1, \dots, a_n dadurch eindeutig zu charakterisieren. Das richtige Ergebnis ist $n = 667$ mit $a_1 = 2, a_2 = \dots = a_{667} = 3$.

7.1 Multiple Choice

I) (c) II) (a) III) (c) IV) (a) V) (a) VI) (c)

8 Kapitel 8

Aufgabe 8.1:

(a) Wir verallgemeinern zu: Sind x_1, \dots, x_n reelle Zahlen mit $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n + x_nx_1$, so ist $x_1 = \dots = x_n$. Der Fall $n = 1$ ist zwar zugänglich, aber leider noch nicht informativ. Für $n = 2$ erhält man $x_1^2 + x_2^2 = 2x_1x_2$, also $(x_1 - x_2)^2 = 0$, woraus in der Tat $x_1 = x_2$ folgt. Bei $n = 3$ haben wir $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$, und der Fall $n = 2$ legt uns den Versuch nahe, zu Quadraten zusammenzufassen. Allerdings kommen die Produkte wie x_1x_2 nur einmal vor, man erhält also nicht unmittelbar eine binomische Formel. Mit einem Faktor 2 wäre es einfacher. Also multiplizieren wir die Gleichung mit 2 und erhalten $2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1$, was sich nun zu $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 = 0$ umformen läßt, woraus wir wie gewünscht $x_1 = x_2 = x_3$ erhalten. Damit sollte die Idee für den allgemeinen Fall klar sein.

(b) Tipp: Wähle x so, dass die rechte Seite gleich 0 wird.

Aufgabe 8.2:

Ansätze:

(a) Zweimal ableiten, dann mit x^2 multiplizieren.

(b) In (a) noch halbieren.

(c) 3 durch x ersetzen und ableiten liefert die geometrische Reihe. Also...

(d) Hier steht ein unsichtbarer Faktor 1^{i+1} hinter jedem Summanden, mit dem wir nun verfahren können wie in (c).

Aufgabe 8.3:

Tipp: In jedem Fall wird die Determinante für hinreichend großes n verschwinden; versuche zu zeigen, dass eine Zeile sich als Linearkombination anderer Zeilen darstellen läßt, sobald n groß genug ist.

Aufgabe 8.4:

(a) 80 (b) Mittelpunkt: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, Radius $\frac{\sqrt{5}}{2}$. (c) 121

Aufgabe 8.5:

Verfahre analog zu Beispiel 8.10.

Aufgabe 8.6:

Es ist $S_n = S'_n(1)$.

Aufgabe 8.7: Keine Lösung.

Aufgabe 8.8: Keine Lösung. Einige Ideen: Fixiere eine der Zahlen X, Y, Z . Wie viele Lösungen kann es geben? Betrachte die Gleichung modulo m für verschiedene $m \in \mathbb{N}$. Angenommen, $X^n + Y^n = Z^n$ ist für ein gewisses $n \in \mathbb{N}$ nicht lösbar. Folgt das gleiche dann für weitere Exponenten? Variiere die Anzahl der Summanden.

Aufgabe 8.9: Keine Lösung.

Aufgabe 8.10: Verfahre analog zu Beispiel 8.1.

Aufgabe 8.11: Keine Lösung. Folge dem Tipp.

Aufgabe 8.12:

Dem Tipp folgend setzen wir $\phi_t(X_1, \dots, X_n) = B_1 \wedge B_2 \wedge \dots \wedge B_n$, wobei $B_i = X_i$, falls $t_i = w$ und $B_i = \neg X_i$, sonst. Die gewünschte Formel ist dann die Disjunktion über alle $\phi_t(X_1, \dots, X_n)$ für alle $t = (t_1, \dots, t_n)$, für die aus $\nu(A_i) = t_i$ schon $g(A_1, \dots, A_n) = w$ folgt.

Aufgabe 8.13: Keine Lösung.

Aufgabe 8.14:

(a) Tipp: Betrachte Beispiel 8.9: Wodurch war die Anzahl der neu entstehenden Teile bei Hinzufügung eines weiteren Kreises bestimmt? Ermittle dann die maximale Anzahl von Schnittpunkten, die zwei Dreiecke miteinander haben können und verfahre wie in Beispiel 8.9.

(b) Verfahre analog zu (a), ermittle hier zunächst die maximale Anzahl von Schnittpunkten, die zwei (konvexe) k -Ecke miteinander haben können.

(c) Ein guter Startpunkt sind der Würfel und das Tetraeder. Verfahre wie in Beispiel 8.9 beim Übergang vom Kreis zur Kugel.

Zusatz: Erweitere (a) und (b) durch gleichzeitige Betrachtung verschiedener Figuren: In wie viele Teile kann die Ebene z.B. maximal k Dreiecke, l Quadrate und n Kreise zerlegt werden?

Aufgabe 8.15: Keine Lösung, folge der im Beispiel gegebenen Skizze.

8.1 Multiple Choice

I) (c) II) (a) III) (b), (d) IV) (c) V) (b) VI) (b)

9 Kapitel 9

Aufgabe 9.1:

Wir benutzen das Schubfachprinzip. G habe n Ecken. Damit kommen als Grade die Zahlen $0, \dots, (n-1)$ infrage. Allerdings können 0 und $(n-1)$ nicht zugleich als Grade auftreten: Wenn eine Ecke mit allen anderen verbunden ist, kann es nicht zugleich eine Ecke geben, die mit keiner anderen verbunden ist. Also können nur $(n-1)$ Grade wirklich auftreten, und von den n Ecken müssen also zwei den gleichen Grad haben.

Aufgabe 9.2:

(a) Wir fassen ‘rot’ und ‘grün’ zu einer neuen ‘Superfarbe’ ‘rog’ [‘rot oder grün’] zusammen. Betrachten wir nun einen Graphen der Größe $R(R(k, l), m)$, der in den Farben rog und blau gefärbt wurde. Nach Definition der Ramseyzahlen existiert ein vollständiger Teilgraph mit m Ecken, dessen Kanten alle in blau gefärbt sind (dann sind wir fertig) oder ein vollständiger Teilgraph mit $R(k, l)$ Ecken, dessen Kanten alle in rog gefärbt sind – also in rot oder grün. In diesem gibt es aber dann, wiederum nach Definition der Ramseyzahlen, einen grün gefärbten K_k oder einen rot gefärbten K_l .

(b) Iteriere die Idee von (a).

Zusatz: Zeige (a) direkt mit einem Schubfachargument analog zu Beispiel 9.7 ohne die Einführung von ‘Superfarben’.

Aufgabe 9.3:

(a)-(c): Keine Lösung.

(d) Tipp: Betrachte die 0-1-Folgen der Länge $(n-1)$ als Ecken eines geeigneten gerichteten Graphen und benutze (c).

(e) Tipp: Betrachte die Folgen der Länge $(n-1)$ von Elementen der Menge $\{0, 1, \dots, (k-1)\}$ als Ecken eines geeigneten gerichteten Graphen und benutze (c).

Aufgabe 9.4:

(a) Das Argument aus Beispiel 9.6 funktioniert weiterhin.

(b) Angenommen doch; sei G ein entsprechender Graph. Wir betrachten Wörter der Form $v_n := w_n w_n$ mit $w_n = \underbrace{00\dots 0}_{n \times} 1$. Alle diese Wörter sind

G -Wörter. Es sei zu $n \in \mathbb{N}$ $p = p_0 p_1 p_2 \dots p_{2n}$ ein Kantenzug in G so, dass die Kante zwischen p_i und p_{i+1} für $0 \leq i < n-1$ und $n < i \leq 2n-1$ mit 0 und für $i \in \{n-1, 2n-1\}$ mit 1 beschriftet ist.

Ist n groß genug, so existieren mit dem Argument aus (a) $i, j \in \{2, 3, \dots, n\}$ mit $i < j$ und $p_i = p_j$. Dann läßt sich aber ein weiteres G -Wort bilden, indem

man den Abschnitt zwischen p_i und p_j im Anschluss an k_j erneut durchläuft und danach den bisherigen Weg nimmt. Damit erhöht sich im zugehörigen G -Wort aber die Anzahl der Nullen links von der ersten 1, während die Anzahl der Nullen rechts von der ersten 1 gleich bleibt. Wir haben also ein G -Wort erhalten, das nicht von der gewünschten Form ist, im Widerspruch zur Annahme.

(c) Auch hier funktioniert das Argument aus (b).

Aufgabe 9.5: Tipp: Falls nicht, zerfällt die Eckenmenge von G in mindestens zwei disjunkte Zusammenhangskomponenten. Betrachte die kleinere davon. Wie groß können die Grade der darin liegenden Ecken höchstens sein?

Aufgabe 9.6: Keine Lösung.

Aufgabe 9.7:

(a) Wir benutzen Aufgabe 9.2(b) in Kombination mit der Idee des Satzes von Schur (Beispiel 9.12): Wir suchen also a, b, c, d so, dass $|b-a|$, $|c-b|$, $|d-c|$ und $|d-a|$ die gleiche Farbe haben. Dazu bilden wir den gleichen Graphen wie im Beweis zu Beispiel 9.12, suchen aber nun nach einem einfarbigen **Viereck**. Das existiert nach Aufgabe 9.2(b), sobald der Graph groß genug ist. Damit haben wir also 4 Zahlen, so dass ihre paarweisen Abstände alle die gleiche Farbe haben; insbesondere gilt das für die Abstände, die wir oben erwähnt haben.

(b) Wir benutzen die gleiche Idee wie in (a), suchen aber nun nach einfarbigen $(k+1)$ -Ecken.

(c) Tipp: Sind a_1, \dots, a_m so, dass alle Abstände zwischen ihnen die gleiche Farbe haben, so gibt es viele Möglichkeiten für die Aufteilung in k Summanden. Versuche, den einfarbigen Teilgraphen so groß zu machen, dass man Gleichheiten vermeiden kann.

Aufgabe 9.8: Keine Lösung. Überlege dir in den Fällen $n = 1, 2, 3$, wie ein n -dimensionaler Würfel aus einem $(n-1)$ -dimensionalen entsteht und benutze vollständige Induktion.

Aufgabe 9.9:

Verfahre analog zum ersten Teil des Beweises von Beispiel 9.3.

Aufgabe 9.10:

Die Antwort ist $(n-1)$. Beweis durch Induktion.

Aufgabe 9.11: Verfahre analog zu Beispiel 9.3.

Aufgabe 9.12:

Wähle eine Ecke v von G und entferne sie. Falls G zusammenhängend bleibt, sind wir fertig. Andernfalls wähle eine Zusammenhangskomponente und benutze Induktion.

Aufgabe 9.13:

- (b) Benutze die Eulersche Formel.

10 Kapitel 10

Aufgabe 10.1:

$\binom{n}{i}$ ist die Anzahl der Möglichkeiten, aus n Dingen i Dinge auszuwählen. $\binom{i}{j}$ ist die Möglichkeit, aus i Dingen j Dinge auszuwählen. $\binom{n}{i}\binom{i}{j}$ ist also die Anzahl der Möglichkeiten, eine Teilmenge von i Elementen einer n -elementigen Menge und anschließend eine j -elementige Teilmenge dieser Teilmenge zu wählen. Insgesamt zählen wir damit also die Anzahl der geordneten Paare (B, A) von Teilmengen von $\{1, 2, \dots, n\}$, für die $B \supseteq A$. Das können wir noch auf andere Weise zählen: Jedes Element von $\{1, 2, \dots, n\}$ gehört entweder zu A oder zu $B \setminus A$ oder zu $\{1, 2, \dots, n\} \setminus B$. Für jedes Element von $\{1, 2, \dots, n\}$ gibt es also drei Möglichkeiten; insgesamt erhalten wir als Ergebnis 3^n .

(Ein anderer Weg ist, die Summe für $n = 1, 2, 3$ auszurechnen und die erhaltene Vermutung dann induktiv zu beweisen.)

Aufgabe 10.2:

Diese Aufgabe haben wir im Zuge der Lösung von Aufgabe 10.1 gelöst.

Aufgabe 10.3:

(a) Die linke Summe zählt für jedes $i \leq n$, wie viele Teiler es hat. Die rechte Summe zählt für jedes $i \leq n$, wie viele Vielfache es in $\{1, 2, \dots, n\}$ hat. Beide Summen zählen also die Anzahl der Paare $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, n\}$, für die i ein Teiler von j ist.

(b) Es ist $\frac{n}{i} - 1 \leq \lfloor \frac{n}{i} \rfloor \leq \frac{n}{i} + 1$. Also ist $(-1) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\frac{n}{i} - 1) \leq \sum_{i=1}^n \lfloor \frac{n}{i} \rfloor \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\frac{n}{i} + 1) = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$, woraus die Behauptung folgt.

Aufgabe 10.4:

Benutze das PIE.

Aufgabe 10.5: Keine Lösung.

Aufgabe 10.6:

(a) Tipp: Betrachte die allgemeinere Frage, wie viele Teilmengen von $\{1, 2, \dots, n\}$ haben Elementzahlen, die bei Division durch 3 den Rest 0, 1, 2 lassen? Stelle eine Vermutung auf und beweise sie induktiv.

(b) Tipp: Bestimme analog zu (a) die Anzahl der Teilmengen, deren Elementzahl durch 6 teilbar ist und benutze das PIE.

Aufgabe 10.7:

(a) Bei einer n -stelligen Zahl gibt es pro Ziffer 10 Möglichkeiten (wobei führende Nullen zugelassen sind; 1 etwa gilt hier in der Schreibweise 001 als

dreistellige Zahl). Es gibt also $10^n - 1$ n -stellige natürliche Zahlen (da wir die 0 nicht als natürliche Zahl zählen). Ist die 7 als Ziffer ausgeschlossen, gibt es für jede Stelle noch 9 Möglichkeiten, also $9^n - 1$ n -stellige Zahlen ohne die Ziffer 7. Also ist $p(n) = \frac{9^n - 1}{10^n - 1}$.

(b) Hier wird eine genaue Zählung etwas umständlicher. Aber zum Glück ist ja nur nach einem Grenzwert gefragt! Ist n k -stellig, so gibt es sicherlich nicht mehr Zahlen ohne die Ziffer 7 unterhalb von n als es insgesamt k -stellige Zahlen mit dieser Eigenschaft gibt, also nach (a) höchstens $9^k - 1$. Als k -stellige Zahl ist andererseits $n \geq 10^{k-1}$. Also ist $0 < p(n) \leq \frac{9^k - 1}{10^k - 1} = 10 \frac{9^k - 1}{10^k} < 10 \left(\frac{9}{10}\right)^k$. Offenbar ist $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{9}{10}\right)^k = 0$, also gilt das gleiche für $\lim_{n \rightarrow \infty} p(n)$.

(c) Auch hier ist eine genaue Zählung umständlich, also begnügen wir uns mit der Abschätzung $r(n) \leq \frac{2 \cdot 9^k}{10^k - 1}$ für k -stelliges n , woraus wiederum $\lim_{n \rightarrow \infty} r(n) = 0$ folgt.

Aufgabe 10.8:

Tipp: Betrachte die Folge der Wurfresultate als die charakteristische Funktion einer Teilmenge von $\{1, 2, \dots, n\}$ und benutze Beispiel 10.5.

Aufgabe 10.9:

Die Lösung ist $n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)$. Verfahre analog zu Beispiel 10.4.

Aufgabe 10.10:

Das Produkt ist der umgeschriebene Binomialkoeffizient $\binom{m+n}{n}$, also die Anzahl der Möglichkeiten, aus $m+n$ Dingen n Dinge auszuwählen - und diese Anzahl ist natürlich eine ganze Zahl.

Aufgabe 10.11:

(b) $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} i^3$

(c) Verallgemeinere die Idee von (a) bzw. (b), um eine nur von $k \in \mathbb{N}$ abhängige Darstellung für $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} i^k$ zu finden.

(a) Hier zählen wir die Anzahl der Möglichkeiten, aus n Personen eine Teilmenge von i Personen auszuwählen und dann eine davon zum/zur AnführerIn zu bestimmen. Alternativ können wir auch den/die AnführerIn zuerst auswählen (n Möglichkeiten) und anschließend den Rest der Gruppe (2^{n-1} Möglichkeiten). Also ergibt sich $2^{n-1}n$.

(b) Hier zählen wir die Anzahl der Möglichkeiten, aus n Personen eine Teilmenge von i Personen für einen Campingurlaub auszuwählen und dann eine davon zum Fahren, eine zum Zeltaufbauen und eine zum Feuermachen zu wählen, wobei auch mehrere oder sogar alle Aufgaben derselben Person aufgebürdet werden können. Alternativ wählen wir diese Personen zuerst

und dann den Rest der Gruppe. Hierbei müssen wir unterscheiden, ob die Aufgaben von drei verschiedenen, von zwei oder von einer einzigen Person erledigt werden.

Fall I: Dieselbe Person fährt, baut das Zelt auf und macht Feuer. Für diese bedauernswerte Position gibt es n Möglichkeiten, dann noch 2^{n-1} für den (offenbar etwas faulen) Rest der Gruppe. Insgesamt gibt es dafür also $n2^{n-1}$ Möglichkeiten.

Fall II: Zwei der drei Aufgaben werden von einer Person übernommen, die dritte von einer anderen. Dann gibt es zunächst n Möglichkeiten für die Wahl der Person mit der ‘Doppelaufgabe’ und danach noch $(n-1)$ Möglichkeiten für die Wahl der Person mit der einen Aufgabe, also $n(n-1)$. Aus 3 Aufgaben lassen sich auf 3 Arten zwei auswählen, also gibt es 3 Möglichkeiten, die Aufgaben auf die beiden gewählten Personen zu verteilen; anschließend kann der Rest der Gruppe auf 2^{n-2} Weisen bestimmt werden, woraus sich insgesamt $3n(n-1)2^{n-2}$ Möglichkeiten ergeben.

Fall III: Jede der Aufgaben wird von einer anderen Person übernommen. Dann gibt es n Möglichkeiten für die Person, die fährt, danach noch $(n-1)$ für die Person, die das Zelt aufbaut und schließlich noch $(n-2)$ für die Person, die Feuer macht. Der Rest der Gruppe lässt sich dann noch auf 2^{n-3} Arten wählen, so dass wir insgesamt auf $n(n-1)(n-2)2^{n-3}$ Möglichkeiten kommen.

Nimmt man alle drei zusammen, erhält man $n2^{n-1} + 3n(n-1)2^{n-2} + n(n-1)(n-2)2^{n-3}$ Möglichkeiten, was sich noch zu $2^{n-3}n^2(n+3)$ vereinfachen lässt.

Aufgabe 10.12: Keine Lösung. Benutze $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ für den Induktionsschritt.

Aufgabe 10.13:

Multipliziert man $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\dots(a+b)}_{n \times}$ aus, so entstehen

Summanden der Form $a^i b^{n-i}$ dadurch, dass aus i Klammern das a und aus den verbliebenen $(n-i)$ Klammern das b gewählt wird. Dafür gibt es gerade $\binom{n}{i}$ viele Möglichkeiten.

Aufgabe 10.14: Diese Summe lässt sich z.B. so interpretieren: Gegeben sind n Personen. Einige davon, nämlich i viele, fahren in den beliebten sikinischen Freizeitpark ‘Cantor’s Paradise’. j davon gehen auf die Achterbahn, eine davon muss sich auf den vordersten Platz setzen und eine mit verbundenen Augen fahren (es kann auch sein, dass die Person auf dem vordersten Platz mit verbundenen Augen fahren muss). Die Summe zählt die Möglichkeiten, das zu arrangieren.

Eine andere Art, die gleichen Möglichkeiten zu zählen, besteht darin, zunächst die Person mit verbundenen Augen und die auf dem vordersten Platz zu wählen; die verbliebenen Personen müssen dann aufgeteilt werden in die Menge derer, die nicht mitfahren (N), die Menge derjenigen, die zwar mitfahren, aber nicht auf die Achterbahn gehen (F) und die Menge derer, die die Achterbahn fahren (A). Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall I: Die Person auf dem vordersten Sitz muss mit verbundenen Augen fahren. Für die Wahl dieser bedauernswerten Person gibt es n Möglichkeiten. Die verbliebenen $n-1$ Personen müssen dann auf die drei disjunkten Teilmengen N , F und A verteilt werden, wofür es 3^{n-1} Möglichkeiten gibt. Insgesamt kommen wir auf $n3^{n-1}$ Möglichkeiten.

Fall II: Die Person auf dem vordersten Sitz und die mit den verbundenen Augen sind unterschiedliche Personen. Dann gibt es n Wahlen für die Person auf dem vordersten Platz, danach noch $(n-1)$ für die mit der Augenbinde; anschließend sind die verbliebenen $(n-2)$ Personen auf die disjunkten Teilmengen N , F und A zu verteilen, was auf 3^{n-2} Weisen möglich ist. In diesem Fall erhalten wir also $n(n-1)3^{n-2}$ Möglichkeiten.

Zusammen kommen wir also $n3^{n-1} + n(n-1)3^{n-2} = n3^{n-2}(3 + (n-1)) = n(n+2)3^{n-2}$ Möglichkeiten, was dann auch der Wert der obigen Summe ist.

Aufgabe 10.15: Keine Lösung.

Aufgabe 10.16:

(a) Die Summe können wir auffassen als Anzahl der Möglichkeiten, drei Teilmengen $\{1, 2, \dots, n\} \supseteq A \supseteq B \supseteq C$ zu wählen. Dazu teilen wir die Elemente von $\{1, 2, \dots, n\}$ in vier disjunkte Teilmengen auf, nämlich $\{1, 2, \dots, n\} \setminus A$, $A \setminus B$, $B \setminus C$ und C . Dafür gibt es offenbar 4^n Möglichkeiten, was also das Ergebnis der Summe ist.

$$(b) \sum_{i_0=0}^n \sum_{i_1=0}^{i_0} \sum_{i_2=0}^{i_1} \dots \sum_{i_k=0}^{i_{k-1}} \binom{n}{i_0} \binom{i_0}{i_1} \binom{i_1}{i_2} \dots \binom{i_{k-1}}{i_k} = n^{k+2}.$$

Aufgabe 10.17:

(a) Für $1 \leq k \leq 100$ sei $Q_k := \{(a, b) \in P : a = k\}$. Dann ist P die disjunkte Vereinigung der Q_k . Ferner hat Q_k offenbar gerade $101 - k$ viele Elemente. Damit ergibt sich $|P| = \sum_{k=1}^{100} (101 - k) = 100 \cdot 101 - \sum_{k=1}^{100} k = 100 \cdot 101 - \frac{100 \cdot 101}{2} = \frac{100 \cdot 101}{2}$.

(b) Tipp: Benutze die Lösung von Aufgabe 10.21.

(c) Keine Lösung.

Aufgabe 10.18:

(a),(b) Es bezeichne $R_i(n)$ für $0 \leq i \leq n$ die Wahrscheinlichkeit, dass genau i Personen den richtigen Brief erhalten. Wir betrachten zunächst

zugänglichere Spezialfälle und beginnen mit $R_0(n)$, also der Wahrscheinlichkeit, dass **niemand** den richtigen Brief erhält. Dazu **betrachten wir das Komplement**: Nach Beispiel 10.15 ist die Wahrscheinlichkeit, dass wenigstens eine Person den richtigen Brief erhält, $\sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{1}{i!}$; die Wahrscheinlichkeit, dass niemand den richtigen Brief erhält, ist also $R_0(n) = 1 - \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{1}{i!} = \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{1}{i!}$.

Sollen genau k Personen den richtigen Brief erhalten, so gibt es zunächst $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, diese glücklichen k zu wählen. Die Wahrscheinlichkeit, dass diese k die richtigen Briefe erhalten, ist dann $\frac{1}{n} \frac{1}{n-1} \dots \frac{1}{n+1-k} = \frac{(n-k)!}{n!}$. Die übrigen $(n-k)$ Briefe verteilen sich auf die übrigen $(n-k)$ Personen, ohne dass noch jemand den richtigen Brief erhielt - die Wahrscheinlichkeit dafür ist $R_0(n-k)$. Insgesamt erhalten wir $R_k(n) = \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} R_0(n-k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(n-k)!}{n!} R_0(n-k) = \frac{1}{k!} R_0(n-k)$.

(c) Wir benutzen (b). Danach ist die Wahrscheinlichkeit für k richtige Empfänger bei insgesamt n Personen gerade $\frac{1}{k!} R_0(n-k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \frac{1}{i!}$. Wir berechnen nun zunächst einmal einige Werte von $R_0(n)$ für verschiedene Werte von n .

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} n & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline R_0(n) & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{3}{8} & \frac{11}{30} & \frac{53}{144} \end{array}$$

Eine durch Induktion nicht schwierig zu beweisende Beobachtung ist, dass $R_0(n) > \frac{1}{3}$ für $n \geq 4$ und $R_0(n) < \frac{1}{2}$ für $n \geq 3$; für $n \geq 4$ ist also $\frac{1}{3} < R_0(n) < \frac{1}{2}$, also $\frac{1}{3k!} < \frac{1}{k!} R_0(n-k) = R_k(n) < \frac{1}{2k!}$, sobald $n-k \geq 4$, also $k \leq (n-4)$.

Nun ergibt sich für $k \leq (n-4)$:

Für $k=0$: $R_k(n) = \frac{1}{0!} R_0(n) = R_0(n) > \frac{1}{3}$ für $n \geq 3$.

Für $k=1$: $R_k(n) = \frac{1}{1!} R_0(n-1) = R_0(n-1) > \frac{1}{3}$ für $n \geq 4$.

Für $k=2$: $R_k(n) = \frac{1}{2!} R_0(n-2) = \frac{1}{2} R_0(n-2) < \frac{1}{4}$ für $n \geq 5$.

Für $k \geq 3$: $R_k(n) = \frac{1}{k!} R_0(n-k) \leq \frac{1}{6}$ (da stets $R_0(n-k) \leq 1$).

Ist also $n \geq 5$, so ist (wegen $\frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{6}$) unter den Fällen $k \leq (n-4)$ stets der Fall $k=0$ oder der Fall $k=1$ maximal. Da sich $R_0(n)$ aus einer alternierenden Summe ergibt, ist $R_0(n) > R_0(n-1)$ für gerade n und $R_0(n) < R_0(n-1)$ für ungerade n . Unter den Fällen $k \leq (n-4)$ ist also $k=0$ maximal falls n gerade ist und $k=1$, falls n ungerade ist.

Was ist im Fall $k > n-4$, also $k \in \{n-3, n-2, n-1, n\}$? Diese Fälle können wir separat betrachten:

$$k = n-3: R_k(n) = \frac{1}{k!} R_0(n-k) = \frac{1}{(n-3)!} R_0(3) = \frac{1}{(n-3)!} \frac{1}{3} \leq \frac{1}{3}.$$

$$k = n-2: R_k(n) = \frac{1}{k!} R_0(n-k) = \frac{1}{(n-2)!} R_0(2) = \frac{1}{(n-2)!} \frac{1}{2} \leq \frac{1}{12} < \frac{1}{3} \text{ für } n \geq 5.$$

$$k = n-1: R_k(n) = \frac{1}{k!} R_0(n-k) = \frac{1}{(n-1)!} R_0(1) = 0$$

$$k = n: R_k(n) = \frac{1}{n!} R_0(0) = \frac{1}{n!} < \frac{1}{3} \text{ für } n \geq 5.$$

Hier ergibt sich also kein Wert $> \frac{1}{3}$, weswegen es bei den oben bestimmten Maxima bleibt.

Fehlen noch die Fälle, dass $n \leq 5$, also $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$; die behandeln wir ‘zu Fuß’:

Ist $n = 0$, so gibt es keine Briefe, also ist die wahrscheinlichste Anzahl der korrekten Briefempfänger $= 0$ (mit Wahrscheinlichkeit 1).

Ist $n = 1$, so hat man einen Brief und einen Umschlag, also gibt es sicher genau einen Fixpunkt, und die wahrscheinlichste Zahl korrekter Empfänger ist 1 (mit Wahrscheinlichkeit 1).

Ist $n = 2$, so haben die Anzahlen 0 und 2 für die Zahl korrekter Empfänger beide Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$.

Ist $n = 3$, so hat (wie man leicht durch eine vollständige Aufzählung aller 6 Möglichkeiten sieht) das Ereignis, dass genau ein Empfänger den richtigen Brief erhält, die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$, da die anderen Möglichkeiten 0 und 3 jeweils eine Wahrscheinlichkeit > 0 haben, ist das also die wahrscheinlichste Anzahl.

Ist schließlich $n = 4$, so sieht man wie bei $n = 3$ durch eine erschöpfende Betrachtung aller Möglichkeiten, dass 1 die wahrscheinlichste Anzahl korrekter Empfänger ist.

Aufgabe 10.19:

(a) Wir verfahren analog zu Beispiel 10.15. Für $1 \leq i < j \leq n$ sei A_{ij} die Menge der Permutationen f mit $f(i) = j$ und $f(j) = i$. Wir suchen also $\frac{1}{n!} |\bigcup_{1 \leq i < j \leq n} A_{ij}|$. Zur Bestimmung der Vereinigungsmenge benutzen wir das PIE. Bei Elementen von A_{ij} liegen $f(i)$ und $f(j)$ fest, danach gibt es noch $(n-2)!$ viele Möglichkeiten für die übrigen Werte; es ist also $|A_{ij}| = (n-2)!$ für alle $1 \leq i < j \leq n$; von solchen Paaren gibt es $\binom{n}{2}$ viele, also ist der erste Summand $\sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_{ij}|$ gleich $\binom{n}{2} (n-2)! = \frac{n(n-1)}{2} (n-2)! = \frac{n!}{2}$. Der zweite Summand ist $\sum_{1 \leq i < j \leq n, 1 \leq k < l \leq n, (i,j) \neq (k,l)} |A_{ij} \cap A_{kl}|$. Nun ist $A_{ij} \cap A_{kl} = \emptyset$, falls $(i,j) \neq (k,l)$, aber $\{i,j\} \cap \{k,l\} \neq \emptyset$, wie man sich leicht überlegt. Ist andererseits $\{i,j\} \cap \{k,l\} = \emptyset$, so liegen $f(i), f(j), f(k), f(l)$ fest und die übrigen Werte können auf $(n-4)!$ Weisen gewählt werden; es ist also $|A_{ij} \cap A_{kl}| = (n-4)!$. Für die Wahl zweier disjunkter Paare gibt es andererseits (da die Reihenfolge der Paare keine Rolle spielt) $\frac{1}{2} \binom{n}{2} \binom{n-2}{2}$ Möglichkeiten. Insgesamt erhalten wir für den zweiten Summanden damit den Wert $\frac{1}{2} \binom{n}{2} \binom{n-2}{2} (n-4)! = \frac{1}{2} \frac{n(n-1)}{2} \frac{(n-2)(n-3)}{2} (n-4)! = \frac{n!}{2^2 \cdot 2!}$. Analog erhält man für den dritten Summanden $\frac{n!}{2^3 3!}$ und allgemein für den k -ten Summanden $\frac{n!}{2^k k!}$; damit ergibt sich mit dem PIE $|\bigcup_{1 \leq i < j \leq n} A_{ij}| = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^{i+1} \frac{n!}{2^i i!}$. Es ist also $\frac{1}{n!} |\bigcup_{1 \leq i < j \leq n} A_{ij}| = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^{i+1} \frac{1}{2^i i!}$, was für $n \rightarrow \infty$ gegen $1 - \frac{1}{e^2}$

strebt.

(b) Verfahren analog zu (a).

Aufgabe 10.20:

Tipp: PIE.

Aufgabe 10.21:

(d) Bestimme auch hier die wahrscheinlichsten Augensummen in Abhängigkeit von n_1 und n_2 .

(e) Es werden drei faire n -seitige Würfel geworfen, $m \leq 3n$. Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit, dass die Augenzahlen aller drei sich zu m addieren?

(a) Insgesamt gibt es n^2 Kombinationen von Würfelseiten. Liegt die Augenzahl a des ersten Würfels fest, so muss die des zweiten gleich $m - a$ sein. Das ist allerdings nur dann möglich, wenn $1 \leq m - a \leq n$. Ist $m \leq n$, so kommen für a also die Werte $1, 2, \dots, m - 1$ infrage, also $(m - 1)$ viele, und die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt $\frac{m-1}{n^2}$. Ist $m > n$, so kommen für a die Werte $(m - n), (m - n + 1), \dots, n$ infrage, also $2n - m + 1$ viele, die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also $\frac{2n-m+1}{n^2}$.

(b) Nur bei $n + 1$ läßt jede Augenzahl auf dem ersten Würfel sich durch eine geeignete Augenzahl auf dem zweiten zur Augensumme $n + 1$ ergänzen. Diese hat also die höchste Wahrscheinlichkeit, nämlich $\frac{1}{n}$.

(c) OBdA sei $n_1 \leq n_2$. Ist $m \leq n_1$, so muss der erste Würfel eine Augenzahl $\leq (m - 1)$ zeigen, die dann durch den zweiten auf genau eine Weise zur Augenzahlsumme m ergänzbar ist; die Wahrscheinlichkeit ist dann also $\frac{m-1}{n_1 n_2}$. Ist $n_1 < m \leq n_2 + 1$, so ist jede Augenzahl auf dem ersten Würfel durch genau eine Augenzahl auf dem zweiten Würfel zur Augenzahlsumme m ergänzbar und wir erhalten die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n_2}$. Ist schließlich $n_2 + 1 < m \leq n_1 + n_2$, so muss der erste Würfel eine Augenzahl $\geq m - n_2$ (und zugleich natürlich $\leq n_1$) zeigen: Dafür gibt es $n_1 + n_2 - m + 1$ Möglichkeiten, und die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist in diesem Fall $\frac{n_1+n_2-m+1}{n_1 n_2}$.

(d) Mit (c) ergibt sich die maximale Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n_2}$ offenbar im Fall $n_1 < m \leq n_2 + 1$.

(e) Tipp: Benutze zunächst (a), um für jedes $1 \leq i \leq m - 1$ die Wahrscheinlichkeit W_i zu bestimmen, dass die Summe der Augenzahlen der ersten beiden Würfel gleich i ist. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist dann gleich $\sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{n} W_i$.

11 Kapitel 11

Aufgabe 11.1:

(a) Angenommen, die Zahl u ist rational, dann ist ihre Dezimaldarstellung schließlich periodisch mit einer gewissen Periodenlänge p . Andererseits enthält diese Dezimaldarstellung aber beliebig lange Folgen, die nur aus Nullen bestehen (denn es kommen ja für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Ziffern von 10^k in dieser Folge vor). Insbesondere kommt unendlich oft eine Folge von $2p$ Nullen vor. Bei einer Periodenlänge von p folgt damit, dass die Dezimaldarstellung von u nur aus Nullen besteht, was offenbar falsch ist – ein Widerspruch.

Zu (b): Analog zu (a).

(c) Die Teile (a) und (b) geben uns die Idee, auf konstante Ziffernteilfolgen beliebiger Länge zu achten. Nun kann man nicht erwarten, dass Potenzen von 3 auf 0 enden. Es würde aber insbesondere genügen, zu zeigen, dass zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $n \in \mathbb{N}$ so existiert, dass $3^n - 1$ durch 10^k teilbar ist. Dann endet 3^n auf $(k - 1)$ Nullen, gefolgt von einer 1, was ausreicht. Tipp dazu: Schubfachprinzip!

Aufgabe 11.2:

(a) Ist $n^2 \equiv -1 \pmod{p}$, so ist $n^4 \equiv 1 \pmod{p}$. Also ist $\{1, n, n^2, n^3\}$ eine 4-elementige Untergruppe der multiplikativen Gruppe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ mit $(p - 1)$ Elementen. Nach dem Satz von Lagrange folgt $4|p - 1$ oder $p \equiv 1 \pmod{4}$. Also ist p von der Form $4k + 1$, insbesondere nicht von der Form $4k - 1$.

(b) $4n^2 + 1$ ist gleich $(2n)^2 + 1$, hat also nach (a) keine Primfaktoren der Form $4k - 1$. Die Primfaktoren von $4n^2 + 1$ sind also alle gleich 2 oder von der Form $4k + 1$. Offenbar ist $4n^2 + 1$ aber ungerade, also kommt die 2 nicht vor.

(c) Angenommen nicht. Seien p_1, \dots, p_n alle Primzahlen der Form $4k + 1$. Dann ist $4(p_1 \dots p_n)^2 + 1$ eine natürliche Zahl > 1 , die nach (b) ausschließlich Primfaktoren der Form $4k + 1$ hat, aber zu allen p_i mit $1 \leq i \leq n$ teilerfremd ist und also laut Annahme keinen solchen Primfaktor haben kann, ein Widerspruch.

Aufgabe 11.3: Im Bild sehen wir Punktreihen der Länge $1, 2, 3, \dots, n$ über dem Strich und eine weitere der Länge $(n + 1)$ unter dem Strich. Das Bild zeigt außerdem, wie man zu jedem Paar von Punkten aus der letzten Reihe eindeutig einen Punkt in der ‘Pyramide’ darüber finden kann. Damit haben wir eine Bijektion zwischen den $1 + 2 + \dots + n$ Punkten in der Pyramide und den $\binom{n+1}{2}$ Möglichkeiten, zwei Elemente aus einer $(n + 1)$ -elementigen Menge zu wählen.

Aufgabe 11.4:

Zu (a),(b): Führt man die Division $p : q$ schriftlich aus, so hängen die sich ergebenden Ziffern jeweils von Resten mod q ab. Da es davon nur q viele gibt, muss sich die Folge nach spätestens q Rechenschritten wiederholen. Tritt der Rest 0 auf, so bricht die Ziffernfolge ab. Damit bleiben nur noch $(q - 1)$ Reste übrig.

(d) Tipp: Zeige zunächst: Die Fälle $0, \overline{1}, 0, \overline{01}, 0, \overline{001}$ etc. sind führenden Spezialfälle. Die drei genannten sind die Dezimaldarstellungen von $\frac{1}{9}, \frac{1}{99}, \frac{1}{999}$. Stelle eine Vermutung auf und beweise sie.

Aufgabe 11.5: Tipp: Betrachte Aufgabe 11.4. Was geschieht im Laufe des Divisionsalgorithmus mit dem ggT des aktuellen Restes mit q ?

Aufgabe 11.6:

(a) Angenommen doch. Wir nummerieren die Perlen von 0 bis $p - 1$ durch und betrachten die Perle a mit der Farbe F auf Platz 0. Nun soll das Weiterdrehen jeder Perle um k Plätze mit $1 \leq k \leq p - 1$ das Aussehen der Perlenkette unverändert lassen. Da a durch das Weiterdrehen auf Platz k landet, hatte also die k -te Perle ebenfalls die Farbe F . Da diese aber ebenfalls um k weitergedreht wird, gilt das gleiche für die $2k$ -te Perle, usw.: Die 0-te, k -te, $2k$ -te, $3k$ -te etc. Perle haben alle die gleiche Farbe. Aus Kapitel 3 wissen wir, dass $0, k, 2k, \dots, (p-1)k$ für $1 \leq k \leq p-1$ jede Restklasse modulo p genau einmal annehmen. Damit haben aber alle Perlen die gleiche Farbe, im Widerspruch zur Annahme.

(b) Elementare Kombinatorik.

(c) Wegen (b) ist $\frac{1}{p}(n^p - n)$ eine ganze Zahl.

Aufgabe 11.7: Den Fall $n = 2$ haben wir bereits als Beispiel erledigt. Schreibe nun $\prod_{i=1}^n a_i$ als $a_{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} a_i$ und benutze Induktion.

Aufgabe 11.8:

Tipp: Analog zu Beispiel 11.7 ist die Anzahl der Darstellungen von n als Summe von drei Quadraten ganzer Zahlen gleich der Anzahl der Punkte mit ganzzahligen Koordinaten auf der Sphäre im \mathbb{R}^3 um den Nullpunkt mit Radius \sqrt{n} . Die Gesamtzahl solcher Darstellungen für natürliche Zahlen $\leq n$ ist also die Zahl der Gitterpunkte im Inneren und auf dem Rand der Kugel um $(0,0,0)$ mit Radius \sqrt{n} . Wieder können wir diese Zahl grob durch den Rauminhalt der Kugel abschätzen, also $\frac{4}{3}\pi\sqrt{n}^3 = \frac{4\pi n\sqrt{n}}{3}$; im Durchschnitt erhalten wir also $\frac{4\pi\sqrt{n}}{3}$, was für $n \rightarrow \infty$ gegen ∞ strebt. Für (c) muss man entsprechend den Inhalt von Hyperkugeln betrachten.

Aufgabe 11.9: Keine Lösung.

Aufgabe 11.10: Keine Lösung.

12 Kapitel 12

Aufgabe 12.1: Hier ist man vielleicht zunächst versucht, Induktion zu benutzen; tatsächlich ist die aber unnötig: Indem wir die erste Zeile bzw. ihr (-1) -faches von allen übrigen Zeilen abziehen, erhalten wir eine Matrix A' , in der der erste Eintrag der ersten Spalte 1 oder -1 ist, alle anderen Einträge der ersten Spalte gleich 0 sind und in der rechten unteren Teilmatrix der Dimension $(n-1) \times (n-1)$ alle Einträge durch 2 teilbar (genauer -2 , 0 oder 2) sind. Wertet man diese Teilmatrix nach der Leibnizregel aus, ist also jeder Summand ein Produkt aus $(n-1)$ geraden Zahlen, also sicherlich durch 2^{n-1} teilbar, was dann auch für die ganze Summe gilt. Entwickelt man andererseits A' nach der ersten Zeile, erhält man die Determinante der Teilmatrix, evtl. noch mit einem Vorfaktor (-1) . Auch diese ist also durch 2^{n-1} teilbar.

Aufgabe 12.2: Tipp: Beispiel 3.16.

Aufgabe 12.3: Hier hat sich ein Tippfehler eingeschlichen: In der letzten Zeile war ein $+1$ zuviel, die Matrix sollte
$$\begin{pmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{n}{k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n+k}{0} & \binom{n+k}{1} & \cdots & \binom{n+k}{k} \end{pmatrix}$$
 lauten.

Wir betrachten einmal den Spezialfall $n = 5$, $k = 3$, also die Matrix
$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 10 & 10 \\ 1 & 6 & 15 & 20 \\ 1 & 7 & 21 & 35 \\ 1 & 8 & 28 & 56 \end{pmatrix}.$$

Zieht man hier, beginnend bei der n -ten Zeile, die $(i-1)$ te Zeile von der i -ten Zeile ab, so erhält man die Matrix
$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 10 & 10 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 6 & 15 \\ 0 & 1 & 7 & 21 \end{pmatrix}$$
 mit der gleichen Determinante. Entwicklung nach der ersten Zeile ergibt, dass deren Determinante gleich der von
$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 10 \\ 1 & 6 & 15 \\ 1 & 7 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} \\ \binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} \\ \binom{7}{0} & \binom{7}{1} & \binom{7}{2} \end{pmatrix}$$
 ist, und das ist eine kleinere Matrix der gleichen Form. Das ist der Ansatz für einen Induktionsbeweis unter Verwendung der Formel $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ - bringe ihn zuende!

Aufgabe 12.4:

Wir benutzen heuristisches Rückwärtsarbeiten. Angenommen, so ein f ist gegeben. Es geht um \mathbb{R} -lineare Abbildungen von $\mathbb{R}[X]$ nach $\mathbb{R}[X]$. Das legt es nahe, $\mathbb{R}[X]$ als Vektorraum über \mathbb{R} zu betrachten. **Wähle eine Basis!** Die nächstliegende Basis für $\mathbb{R}[X]$ ist sicherlich $\{x^i : i \in \mathbb{N}_0\}$, also die Menge der Monome. Da f \mathbb{R} -linear ist, genügt es, f auf den Monomen zu kennen. Fangen wir damit also an. **Führe geeignete Bezeichnungen ein!** Für $i \in \mathbb{N}_0$ sei $f(x^i) = p_i$.

Betrachten wir zunächst $f(x^0)$. Da $x^0 = 1$ (als Polynom) keine Nullstellen hat, ist p_0 also ein Polynom ohne Nullstellen. Mehr können wir dazu erst einmal nicht sagen. Machen wir also mit $f(x^1)$ weiter. Für jedes $c \in \mathbb{R}$ hat $x - c$ die (einzige) Nullstelle c , also gilt das gleiche nach Annahme für $f(x - c) = f(x) - f(c) = f(x) - f(c \cdot 1) = p_1(x) - cp_0(x)$. Also: Für jedes $c \in \mathbb{R}$ hat $p_1(x) - cp_0(x)$ die Nullstelle c , d.h. es ist $p_1(c) - cp_0(c) = 0$ oder $p_1(c) = cp_0(c)$ für alle $c \in \mathbb{R}$. Damit folgt aber $p_1(x) = xp_0(x)$.

Das läßt sich verallgemeinern: Für jedes $c \in \mathbb{R}$ hat $x^k - c^k$ die Nullstelle c , also gilt das gleiche für $f(x^k - c^k) = f(x^k) - f(c^k) = p_k(x) - f(c^k \cdot 1) = p_k(x) - c^k f(1) = p_k(x) - c^k p_0(x)$. Also ist $p_k(c) - c^k p_0(c) = 0$ oder $p_k(c) = c^k p_0$ für jedes $c \in \mathbb{R}$, d.h. es ist $p_k = x^k p_0$.

Damit liegt f wegen der \mathbb{R} -Linearität von f auf ganz $\mathbb{R}[X]$ fest: Es ist $f(q) = p_0 q$ für alle $q \in \mathbb{R}[X]$. Jede Abbildung der gesuchten Art ist also von der Form $f(q) = pq$ für ein $p \in \mathbb{R}[X]$, das keine reellen Nullstellen hat.

Andererseits prüft man leicht nach, dass diese Abbildungen alle die fragliche Eigenschaft haben. Und damit haben wir sie alle gefunden.

Aufgabe 12.5:

(a) Es sei $a := \sqrt[4]{3} + 7\sqrt[7]{13} + 9\sqrt[5]{5}$. Zeige: Der von $\{a^i : i \in \mathbb{N}\}$ erzeugte Untervektorraum des \mathbb{Q} -Vektorraumes \mathbb{R} ist endlich-dimensional. Benutze dann das SFP für Vektorräume.

(b) Analog zu (a) findet man ein solches Polynom q , dass $q(\sqrt[5]{7} + 7\sqrt[3]{10} - 2\sqrt{11}) = 0$. Setze dann $p = q + 1$.

Aufgabe 12.6: Ist $p_n = q_1 q_2$ und $q_1, q_2 \neq 1$, so sind die Koeffizientensummen von q_1 und q_2 beide größer als 1. Nun ist aber die Koeffizientensumme eines Polynoms p gerade $p(1)$, also ist $(n+1) = p_n(1) = q_1(1)q_2(1)$; da $q_1(1)$ und $q_2(1)$ beide > 1 sind, ist $(n+1)$ also keine Primzahl.

Für die Gegenrichtung betrachte das Produkt $(\sum_{i=0}^k X^i)(\sum_{j=0}^l X^{j(k+1)})$.

Aufgabe 12.7:

(a) Wir betrachten den Spezialfall $A_{a,4} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$. Zieht man

nacheinander die $(n-1)$ te Zeile von der n ten Zeile, die $(n-2)$ te Zeile von der $(n-1)$ ten Zeile usw. ab, erhält man

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1-a & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix}.$$

Ad-
diert man nun nacheinander die n -te Spalte zur $(n-1)$ ten Spalte, die $(n-1)$ te Spalte zur $(n-2)$ ten Spalte usw., kommt

$$\begin{pmatrix} a+3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$$

mit

der Determinante $(a+3)(a-1)^3$. Diese Herleitung läßt sich leicht verallgemeinern und liefert dann $\det(A_{a,n}) = (a+n-1)(a-1)^{n-1}$.

(b) Ist $y = 0$, so ist $\det(C_{x,y,n}) = x^n$. Andernfalls können wir jeden Eintrag von $C_{x,y,n}$ durch y teilen und erhalten die Matrix $A_{\frac{x}{y},n}$ aus (a). Es ist dann also $\det(C_{x,y,n}) = y^n \det(A_{\frac{x}{y},n}) = (\frac{x}{y} + n - 1)(\frac{x}{y} - 1)^{n-1}$.

(c) Mit der Leibnizformel sieht man, dass die gesuchte Zahl gerade gleich $\det(A_{0,n})$ ist.

Aufgabe 12.8:

(a) Tipp: $C_{x,y,n}^{-1} = \frac{1}{x^2+(n-2)xy-(n-1)y^2} B_{x,y,n}$, wobei

$$B_{x,y,n} = \begin{pmatrix} x+(n-2)y & -y & -y & -y & \dots & -y \\ -y & x+(n-2)y & -y & -y & \dots & -y \\ -y & -y & x+(n-2)y & -y & \dots & -y \\ -y & -y & -y & x+(n-2)y & \dots & -y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -y & -y & -y & -y & \dots & x+(n-2)y \end{pmatrix}.$$

(b) $\frac{n(x-y)}{x^2+(n-2)xy-(n-1)y^2} = \frac{n}{x+(n-1)y}$.

Aufgabe 12.9:

(a) Tipp: Subtrahiere zunächst die erste Spalte von allen anderen Spalten; subtrahiere dann geeignete Vielfache der übrigen Zeilen von der ersten Zeile, um auf eine Dreiecksmatrix zu kommen. Betrachte gesondert die Fälle, dass eines oder mehrere der x_i gleich 1 sind.

(b) Teile durch a , um eine Matrix der in (a) betrachteten Form zu erhalten.

Aufgabe 12.10:

Lösung: $\frac{3^n-1}{2}$. Beweis mit Induktion.

Aufgabe 12.11:

Gehe analog zu Beispiel 12.26 vor.

Aufgabe 12.12:

Tipp: Als Induktionsvariable empfiehlt sich $|x| + |y|$. Ist $|x| = |y|$, so ist wegen der Bedingung der Teilerfremdheit $x, y \in \{-1, 1\}$ und die Aussage ist trivial; ebenso, wenn $|x| = 0$ oder $|y| = 0$. Andernfalls sei $0 < |x| < |y|$, betrachte dann $|x|$ und $|y| - |x|$.

Aufgabe 12.13:

- (a) Benutze Induktion.
- (b) Tipp: Es ist $A^{m+n} = A^m A^n$ (und also auch $A^{3n} = A^n A^n A^n$).

Aufgabe 12.14:

Benutze vollständige Induktion und Aufgabe 12.16. Überlege dann, welche Eigenschaften von \mathbb{R} im Beweis benutzt werden, um (b) und (c) zu beantworten.

Aufgabe 12.15: Tipp: Betrachte die Fälle $n = 0, 1, 2, 3$, führe die Polynomdivision dort explizit aus und versuche, ein Bildungsgesetz zu raten.

Aufgabe 12.16: Tipp: Zeige zunächst, dass $(X - a)^k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein Teiler von $X^k - a^k$ ist. Gehe dazu analog zu Beispiel 12.19 vor.

Aufgabe 12.17:

Tipp: Gehe analog zu Beispiel 12.21 vor.

Aufgabe 12.18:

- (a) Berechnen wir AA^t für eine 3×3 -Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, so erhalten

wir

$$AA^t = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 + c^2 & * & * \\ * & b^2 + e^2 + f^2 & * \\ * & * & g^2 + h^2 + i^2 \end{pmatrix}.$$

Die Spur von AA^t ist also die Summe der Quadrate aller Einträge von A . Nun rechnet man leicht nach, dass das gleiche für beliebige $n \times n$ -Matrizen A gilt. Wenn $AA^t = 0$, so ist auch die Spur (also die Summe der Diagonaleinträge) von AA^t gleich 0; also ist die Summe der Quadrate aller Einträge von A gleich 0, d.h. alle Einträge von A sind gleich 0.

(b) Der Beweis in (a) hängt nicht von der quadratischen Gestalt von A ab. Wir können also allgemeiner zeigen: Ist A eine beliebige reelle Matrix mit $AA^t = 0$, so ist $A = 0$.

Aufgabe 12.19:

(a) Nein. Eine wichtige Invariante beim Übergang von AB zu BA ist die **Spur**, also die Summe der Diagonaleinträge. Da AB und BA die gleiche Spur haben, hat $AB - BA$ die Spur 0; I_n hat aber die Spur n , ein Widerspruch.

(b) Nein, aus dem gleichen Grund wie in (a).

Aufgabe 12.20:

Tipp: Zeige durch starke Induktion über k , dass a_i und b_j für $i + j \leq k$ in $\{0, 1\}$ liegen.

Aufgabe 12.21:

(a) $\mathbb{Z}/n!\mathbb{Z}$ ist abelsch, S_n hingegen nicht.

(b) Wir versuchen, einen Isomorphismus $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2$ zu konstruieren. Sicherlich ist $f(0) = (0, 0)$. Was ist mit $f(1)$? Jedes Element von \mathbb{Z} ist eine Summe endlich vieler Einsen oder das additive Inverse einer solchen Summe: Es ist $\mathbb{Z} = \{\underbrace{1 + \dots + 1}_{n \times} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{-\underbrace{(1 + \dots + 1)}_{n \times} : n \in \mathbb{N}\}$. Damit müßte auch $\mathbb{Z}^2 = \{\underbrace{f(1) + \dots + f(1)}_{n \times} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{-\underbrace{(f(1) + \dots + f(1))}_{n \times} : n \in \mathbb{N}\}$

gelten. Es sei $f(1) = (a, b)$. Insbesondere existieren also $m, n \in \mathbb{Z}$ so, dass $m(a, b) = (1, 2)$ und $n(a, b) = (2, 1)$. Aus $m(a, b) = (1, 2)$ folgt $b = 2a$ und aus $n(a, b) = (2, 1)$ folgt $a = 2b$. Gleichzeitig kann das nur erfüllt sein, wenn $a = b = 0$, dann ist aber $f(1) = f(0)$ und f ist nicht bijektiv. In jedem Fall ergibt sich also ein Widerspruch, daher kann so ein Isomorphismus nicht existieren.

(c) Wir versuchen, einen Isomorphismus f zu konstruieren. Sicherlich muss f das neutrale Element von $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ auf das neutrale Element von $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^\times$ abbilden. Es ist also $f(0) = 1$. Was ist mit $f(1)$? Jedes Element von $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ ergibt sich als Summe von Einsen. Entsprechend müßte jedes Element von $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^\times$ sich als Potenz von $f(1)$ ergeben. Hat $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^\times$ so ein Element? In der Tat, z.B. die 2. Damit können wir $f(i) = 2^i \bmod 13$ setzen.

Aufgabe 12.22:

Für $1 \leq i < k$ sei $v_i \in V_{i+1} \setminus V_i$. Dann ist $\{v_1, \dots, v_k\}$ eine linear unabhängige Teilmenge von V ; nach dem Schubfachprinzip für Vektorräume hat sie also höchstens so viele Elemente wie V Dimensionen hat.

Aufgabe 12.23:

Wir arbeiten rückwärts und nehmen in jedem Fall an, \cdot sei eine solche Skalarmultiplikation.

(a) Hier müsste insbesondere $0 = 0 \cdot 1 = (1 + 1) \cdot 1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$ gelten, was in \mathbb{Q} aber falsch ist.

(b) Es sei $0 \neq v \in V$. Von den Elementen von V der Form $q \cdot v$, $q \in \mathbb{Q}$ müssen nach dem unendlichen Schubfachprinzip zwei gleich sein, etwa $q_0 \cdot v$ und $q_1 \cdot v$. Dann ist $(q_1 - q_0)v = 0$, aber $q_1 - q_0 \neq 0$, ein Widerspruch.

(c) Es sei $0 \neq q \in \mathbb{Q}$. Von den Elementen von \mathbb{Q} der Form $r \cdot q$, $r \in \mathbb{R}$ müssen nach dem unendlichen Schubfachprinzip zwei gleich sein, etwa $r_0 \cdot q$ und $r_1 \cdot q$. Dann ist $(r_0 - r_1)q = 0$, aber $r_0 - r_1 \neq 0$, ein Widerspruch.

(d) Das Element $z = \frac{1}{2} \cdot 1$ von \mathbb{Z} müsste die Eigenschaft $z + z = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1$ haben. So ein Element gibt es in \mathbb{Z} aber nicht.

Zusatz: Gibt es überhaupt einen Körper K so, dass $(\mathbb{Z}, +)$ sich als K -Vektorraum auffassen lässt?

Aufgabe 12.24:

Tipp: Berechne q_n und r_n für $n = 1, 2, 3$, stelle eine Vermutung auf und beweise sie durch vollständige Induktion.

Aufgabe 12.25:

Tipp: Berechne $c_{n,u}$ explizit.

Aufgabe 12.26:

(a) Eine Basis von V hat n Elemente, V hat k^n Elemente. Wir wählen die Elemente (v_1, \dots, v_n) der Basis nacheinander: v_1 kann jedes Element von V sein außer 0; dafür gibt es $k^n - 1$ Möglichkeiten. v_2 kann jedes Element von V sein, dass nicht aus dem von $\{v_1\}$ aufgespannten Unterraum stammt. Dafür gibt es $k^n - k$ viele Möglichkeiten. Allgemein kann v_j jedes Element von V sein, dass nicht aus dem von $\{v_1, \dots, v_{j-1}\}$ aufgespannten Unterraum stammt, wofür es $k^n - k^{j-1}$ viele Möglichkeiten gibt. Insgesamt erhalten wir so $(k^n - 1)(k^n - k)(k^n - k^2) \dots (k^n - k^{n-1})$ Basen, bei denen wir allerdings die Reihenfolge der Vektoren berücksichtigt haben. Da Basen **Mengen** und nicht Folgen von Vektoren sind, ist die gesuchte Zahl also $\frac{(k^n - 1)(k^n - k)(k^n - k^2) \dots (k^n - k^{n-1})}{n!}$.

(b) Tipp: Zähle zunächst für $k \leq n$ die k -dimensionalen Unterräume von V ; benutze dazu (a), um die Anzahl der Basen für solche Unterräume zu zählen und anschließend durch die Anzahl der Basen, die ein solcher Unterraum besitzt, zu teilen.

Aufgabe 12.27:

Tipp: Bestimme jeweils eine geeignete Basis.

Aufgabe 12.28:

(a) Eine Matrix ist genau dann invertierbar, wenn ihre Spaltenvektoren linear unabhängig sind. Sei $\{s_1, \dots, s_n\}$ die Menge der Spaltenvektoren.

s_1 kann jedes Element von K^n sein außer 0; dafür gibt es also $k^n - 1$ Möglichkeiten.

s_2 kann nun jedes Element von K^n sein, das nicht in $\text{span}(\{s_1\})$ liegt; das sind $k^n - k$ Möglichkeiten.

s_3 kann jedes Element von K^n sein, dass nicht in $\text{span}(\{s_1, s_2\})$ liegt; das sind $k^n - k^2$ Möglichkeiten, usw.

Also ergeben sich insgesamt $(k^n - 1)(k^n - k)(k^n - k^2)(k^n - k^3) \dots (k^n - k^{n-1})$ Möglichkeiten.

(b) Nach Beispiel 3.16 haben genau die invertierbaren Matrizen diese Eigenschaft. Das Ergebnis ist also das gleiche wie in (a).

Aufgabe 12.29:

Tipp: Beweise die Aussagen zunächst im Fall $k = 2$ unter Verwendung der Leibnizregel. Benutze dann Induktion und fasse dabei die Blöcke A_2, \dots, A_k als Teil eines großen Blocks auf.

Aufgabe 12.30:

Tipp: Die analogen Aussagen für die Determinante sind durchweg bekannt. Betrachte die Beweise und passe sie entsprechend an.

Aufgabe 12.31:

Tipp: **Wähle eine Basis** \mathbb{B} für $U \cap W$ sowie Basen $\mathbb{B}' \supseteq \mathbb{B}$ für U und $\mathbb{B}'' \supseteq \mathbb{B}$, zeige, dass $\mathbb{B} \cup \mathbb{B}' \cup \mathbb{B}''$ linear unabhängig ist und benutze das Schubfachprinzip für Vektorräume.

Aufgabe 12.32:

Hinweis: Arbeite rückwärts, analog zu Beispiel 12.21. Da \mathcal{M} mehr als ein Element hat, existiert ein $0 \neq A \in \mathcal{M}$. Zeige zunächst, dass mit $A, B \in \mathcal{M}$, $c \in \mathbb{R}$ auch $A + cB \in \mathcal{M}$. Definiere dann B_{ij} wie in Beispiel 12.21. Offenbar sind die B_{ij} führende Spezialfälle der Behauptung. Betrachte $B_{ij}A + AB_{kl}$ für alle Werte von $1 \leq i, j, k, l \leq n$ und versuche zu zeigen, dass alle B_{ij} zu \mathcal{M} gehören.

Aufgabe 12.33:

Wähle eine Basis \mathcal{B} von U , ergänze zu einer Basis $\mathbb{B} \cup \mathbb{B}'$ von V (mit $\mathbb{B}' \cap \mathbb{B} = \emptyset$) und setze $W = \text{span}(\mathbb{B}')$.

Aufgabe 12.34:

(a),(b) Verfahre analog zu Beispiel 12.27.

(c) Verfahre analog zu Beispiel 12.13.

Aufgabe 12.35:

Tipp: **Wähle eine Basis** für jeden der beiden Vektorräume V und W .

Aufgabe 12.36:

Es sei \mathbb{B} eine Basis wie im Tipp beschrieben. Setze $f(1) = 1$ und $f(b) = 0$ für $b \in \mathbb{B} \setminus \{0\}$ und ansonsten $f(\sum_{b \in \mathbb{B}} r_b b) = \sum_{b \in \mathbb{B}} r_b f(b)$. Dann ist f eine Funktion von \mathbb{R} nach \mathbb{R} und erfüllt offenbar $f(a + b) = f(a) + f(b)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$. Sei $b \in \mathbb{B} \setminus \{1\}$ beliebig, dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $q \in \mathbb{Q}$ so, dass $|1 - bq| < \varepsilon$; außerdem folgt $f(qb) = qf(b) = q \cdot 0 = 0$, aber $f(1) = 1$. Also ist f im Punkt 1 nicht stetig, wie gewünscht.

Aufgabe 12.37:

(a) Tipp: $A_k^n = k^{n-1} A_k$.

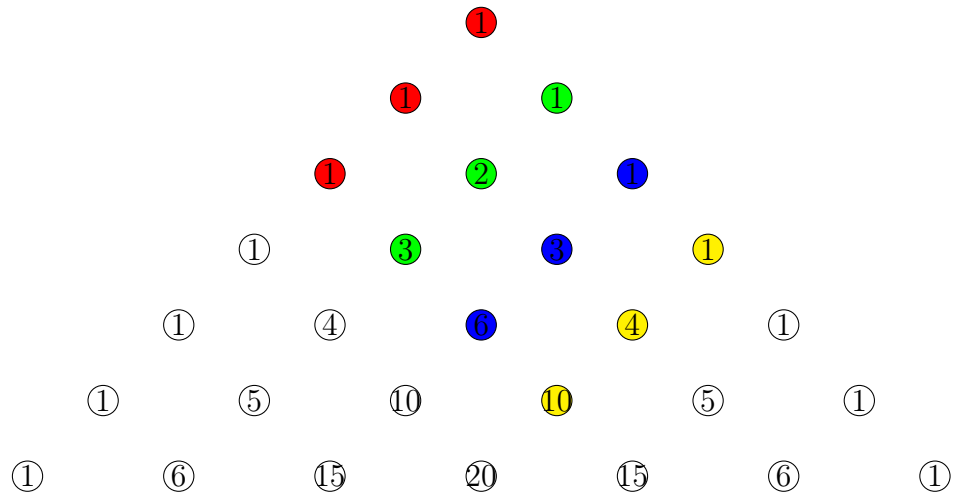
(b) Tipp: Die erste Zeile von A_n^k ist $((\binom{k}{0}), (\binom{k}{1}), \dots, (\binom{k}{n-1}))$ (wobei $\binom{k}{n} = 0$, falls $n > k$ oder $n < 0$). Die i -te Zeile ist $((\binom{k}{-i}), (\binom{k}{-i+1}), (\binom{k}{-i+2}), \dots, (\binom{k}{n-i}))$.

(c) Tipp: Gehe analog zu (b) vor. Betrachte A_n^k für kleine Werte von k und n und vergleiche mit der ausmultiplizierten Darstellung von $(1+x)^k$.

(d) Tipp: Es ist $A_3^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$A_3^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Betrachte dazu das Pascalsche Dreieck:



Aufgabe 12.38: Keine Lösung.

13 Kapitel 13

Aufgabe 13.1: Keine Lösung; folge dem Tipp.

Aufgabe 13.2:

(a) Wir arbeiten rückwärts. Sei also p ein Polynom, das $(X - 4)p(X) = (X - 5)p(X + 1)$ erfüllt. Was können wir über p sagen? Bei Polynomen empfiehlt es sich, auf Nullstellen zu achten. Was wissen wir über die Nullstellen von p ? Der Tipp gibt einen Hinweis: Einsetzen von $X = 5$ liefert $p(5) = 0$; also ist p darstellbar als $p(X) = (X - 5)p_1(X)$ für ein reelles Polynom p_1 . Setzen wir das in die Bedingung ein, erhalten wir $(X - 4)(X - 5)p_1(X) = (X - 5)(X + 1 - 5)p_1(X + 1)$, also $p_1(X) = p_1(X + 1)$ – das heißt aber, dass p_1 konstant ist (denn ein nichtkonstantes Polynom kann jeden Wert nur endlich oft annehmen)! Sei etwa $p_1(X) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Dann folgt $p(X) = (X - 5)p_1(X) = c(X - 5)$. Das ist also die einzige Form, die p haben kann. Andererseits rechnet man leicht nach, dass diese Polynome der Bedingung auch tatsächlich alle genügen.

(b) Ähnlich wie in (a) stellen wir zunächst fest, dass p die Nullstelle 6 hat und also als $p(X) = (X - 6)p_1(X)$ geschrieben werden kann. Einsetzen liefert $(X - 3)(X - 6)p_1(X) = (X - 6)(X - 5)p_1(X + 1)$, also $(X - 3)p_1(X) = (X - 5)p_1(X + 1)$. Wiederholen wir die Idee, erhalten wir $p_1(X) = (X - 5)p_2(X)$, also $(X - 3)(X - 5)p_2(X) = (X - 5)(X - 4)p_2(X + 1)$ oder $(X - 3)p_2(X) = (X - 4)p_2(X + 1)$. Das kann man nun entweder durch eine kleine Substitution auf (a) zurückführen (welche?) oder durch erneutes Abspalten von Nullstellen und Einsetzen weiter untersuchen, womit man schließlich auf $p_2(X) = (X - 4)p_3(X)$ kommt, wobei p_3 konstant sein muss. Ist etwa $p_3(X) = c$, so kommt $p(X) = c(X - 6)(X - 5)(X - 4)$; wieder prüft man leicht nach, dass diese Polynome der Bedingung auch alle genügen.

(c) Verfahre analog zu (a) und (b).

(d) Benutze (a), (b), (c), um das Ergebnis zu raten. Verwendet Induktion und die Ideen aus (a),(b),(c), um es zu beweisen.

Aufgabe 13.3: Angenommen doch, so existieren insbesondere reelle Zahlen $a < b$ mit $f(a) = f(b) = 0$. Zwischen a und b nimmt f ein Maximum und ein Minimum an; links von a und rechts von b kann f keine weiteren Nullstellen haben und also das Vorzeichen nicht mehr wechseln. Da f nach Annahme beliebig große und beliebig kleine Werte annimmt, wird f also rechts von b beliebig große Werte annehmen und links von a beliebig kleine (oder umgekehrt). Wir nehmen OBdA an, dass f rechts von b beliebig groß und links von a beliebig klein wird und unterscheiden nun zwei Fälle: Falls das Maximum M von f zwischen a und b positiv ist und etwa an der Stelle

$c \in (a, b)$ angenommen wird und weiter $0 < x < M$ beliebig ist, so wird der Wert $f(x)$ von f im Intervall $[a, b]$ mindestens zweimal angenommen (einmal zwischen a und c und einmal zwischen c und b). Außerdem muss er aber noch rechts von b angenommen werden, da f dort ja beliebig große Werte annimmt. Also wird der Wert x wenigstens dreimal angenommen, ein Widerspruch.

Aufgabe 13.4:

(c) Tipp: Betrachte die Vorzeichen des ersten und den letzten Koeffizienten von p und $(X-1)p$. Was wissen wir über die Zahl der Vorzeichenwechsel, wenn der erste und der letzte Koeffizient das gleiche bzw. verschiedene Vorzeichen haben?

(d) Analog zu (c).

(e) Benutze (d) und Induktion über die Anzahl der Nullstellen.

(f) Tipp: Die negativen Nullstellen von $p(X)$ sind die positiven Nullstellen von $p(-X)$.

Aufgabe 13.5: Nein; z.B. hat das rationale Polynom $X^2 - 2$ zwar einen Vorzeichenwechsel, aber keine rationalen Nullstellen.

Aufgabe 13.6:

In Beispiel 13.4 wurde gezeigt, dass die fragliche Aussage für $2k$ gilt, wenn sie für k gilt, und dass sie für $k-1$ gilt, falls sie für $k > 2$ gilt. Daraus folgt genau wie dort, dass sie für alle natürlichen Zahlen k gilt, sobald sie für eine natürliche Zahl gilt.

Aufgabe 13.7:

Beachte $\frac{1}{i} - \frac{1}{i+k} = \frac{k}{i(i+k)}$ und benutze das multiple Teleskopprinzip.

Aufgabe 13.8:

(a) **Faktorisiere!** Es ist $i^2 - 1 = (i+1)(i-1)$; wir versuchen es also mit dem Teleskopprinzip. Nun ist $\frac{1}{i-1} - \frac{1}{i+1} = \frac{2}{(i-1)(i+1)} = \frac{2}{i^2-1}$. also ist $\frac{1}{i^2-1} = \frac{1}{2(i-1)} - \frac{1}{2(i+1)}$. Damit ist $\sum_{i=2}^n \frac{1}{i^2-1} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right]$.

(b) Benutze $4i^2 - 1 = (2i-1)(2i+1)$ und verfare wie in (a).

(c) Die linke Seite $s_n := \frac{1}{2} \frac{3}{4} \dots \frac{4n^2-1}{4n^2}$ ist zwar kein Teleskopprodukt, lässt sich aber leicht zu einem ergänzen. Da es uns nur um eine Abschätzung geht, ergänzen wir zu $\frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{3}{4} \frac{4}{5} \dots \frac{4n^2-1}{4n^2} \frac{4n^2}{4n^2+1} = \frac{1}{4n^2+1}$. Dabei haben wir mit $t_n = \frac{2}{3} \frac{4}{5} \dots \frac{4n^2}{4n^2+1}$ ergänzt, wobei jeder Faktor größer als der entsprechende in s_n ist; also ist $s_n < t_n$ und $s_n t_n = \frac{1}{4n^2+1}$, woraus $s_n < \sqrt{\frac{1}{4n^2+1}}$, also $s_n < \frac{1}{\sqrt{4n^2+1}}$ folgt, wie gewünscht.

Aufgabe 13.9:

(a) Wir setzen $r_1 = 3$ und lösen die Gleichungen $5r_1 - r_2 = 6$, $19r_2 - 5r_3 = 36$, $65r_3 - 19r_4 = 216$ auf, um in der Folge der ersten r_i hoffentlich ein Muster erkennen zu können. Einsetzen und auflösen liefert der Reihe nach $r_1 = 3$, $r_2 = 9$, $r_3 = 27$, $r_4 = 81$. Das legt die Vermutung $r_i = 3^i$ nahe, die wir nun induktiv beweisen können:

Wegen $r_1 = 3$ ist der Induktionsanfang schon gemacht. Angenommen nun, es ist $r_i = 3^i$. Aus $3^i(3^{i+1} - 2^{i+1}) - r_{i+1}(3^i - 2^i) = 6^i$ folgt dann durch einige Umformungen (wobei wir $6^i = 2^i 3^i$ beachten): $r_{i+1}(3^i - 2^i) = 3^i(3^{i+1} - 2^{i+1} + 2^i) = 3^i(3^{i+1} - 3 \cdot 2^i) = 3^{i+1}(3^i - 2^i)$, also $r_{i+1} = 3^{i+1}$, womit die Induktion beendet ist.

Es ist also $\frac{6^i}{(3^{i+1}-2^{i+1})(3^i-2^i)} = \frac{3^i}{3^i-2^i} - \frac{3^{i+1}}{3^{i+1}-2^{i+1}}$, woraus wir mit dem Teleskopprinzip $\sum_{i=1}^n \frac{6^i}{(3^{i+1}-2^{i+1})(3^i-2^i)} = \frac{3^1}{3^1-2^1} - \frac{3^{n+1}}{3^{n+1}-2^{n+1}} = 3 - (1 + \frac{3^{n+1}}{3^{n+1}-2^{n+1}}) = 2 - \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}-2^{n+1}}$ erhält.

(b) Siehe die Fußnote in Beispiel 13.19 und verfare wie in (a).

(c) Die Fälle $r_1 = 1, 2, 3$ legen den Ansatz $r_i = 2^i a + 3^i b$ nahe. Setzt man das in $r_i(3^{i+1} - 2^{i+1}) - r_{i+1}(3^i - 2^i) = 6^i$ und formt – unter Berücksichtigung von $2^i 3^i = 6^i$ – ein wenig um, kommt man auf $a + b = 1$. Startet man mit einem beliebigen Wert $r_1 = r$, so muss außerdem $r_1 = 2a + 3b = r$ gelten. Daraus folgt $b = r - 2$ und $a = 1 - b = 3 - r$, womit sich die Aufgabe nun wiederum wie in (a), (b) oder der Lösung in Beispiel 13.19 lösen läßt.

Aufgabe 13.10:

(a) Die rechte Seite ist ein alter Bekannter aus Beispiel 13.23. Versuchen wir es also analog durch eine Approximation der Integrale durch Riemannsummen. Ersetzt man auf beiden Seiten das Integral durch die n -te Riemannsumme, erhält man die Ungleichung

$$\frac{n}{\frac{1}{f(0)} + \frac{1}{f(\frac{1}{n})} + \dots + \frac{1}{f(\frac{n-1}{n})}} \leq e^{\frac{1}{n} \ln(f(0))} \cdot \dots \cdot e^{\frac{1}{n} \ln(f(\frac{n-1}{n}))} = \sqrt[n]{f(0)f(\frac{1}{n}) \dots f(\frac{n-1}{n})}.$$

Der Einfachheit halber schreiben wir x_i für $f(\frac{i}{n})$, betrachten also die Ungleichung

$$\frac{n}{\frac{1}{x_0} + \dots + \frac{1}{x_{n-1}}} \leq \sqrt[n]{x_0 \dots x_{n-1}}$$

mit $x_0, \dots, x_{n-1} \geq 0$. Wir machen nun ein paar vereinfachende Umformungen. Bringt man die Summe von Brüchen im Nenner links auf den Hauptnenner $x_0 \dots x_{n-1}$ und löst den Doppelbruch auf, kommt

$$\frac{n x_0 \dots x_{n-1}}{x_0 \dots x_{n-2} + x_0 \dots x_{n-3} x_{n-1} + \dots + x_1 \dots x_{n-1}} \leq \sqrt[n]{x_0 \dots x_{n-1}}.$$

Multiplikation mit dem Nenner der linken Seite und Division durch $\sqrt[n]{x_0 \dots x_{n-1}}$ liefert

$$n(x_0 \dots x_{n-1})^{\frac{n-1}{n}} \leq x_0 \dots x_{n-2} + x_0 \dots x_{n-3} x_{n-1} + \dots + x_1 \dots x_{n-1}$$

bzw.

$$\sqrt[n]{x_0 \dots x_{n-1}}^{n-1} \leq \frac{x_0 \dots x_{n-2} + x_0 \dots x_{n-3} x_{n-1} + \dots + x_1 \dots x_{n-1}}{n}.$$

Wenden wir Beispiel 4.5 auf die rechte Seite an, erhalten wir $\frac{x_0 \dots x_{n-2} + x_0 \dots x_{n-3} x_{n-1} + \dots + x_1 \dots x_{n-1}}{n} \geq \sqrt[n]{(x_0 \dots x_{n-1})^{n-1}}$ (beachte, dass jedes x_i in $x_0 \dots x_{n-2} + x_0 \dots x_{n-3} x_{n-1} + \dots + x_1 \dots x_{n-1}$ in genau $(n-1)$ Summanden als Faktor vorkommt!). Das ist aber gerade die linke Seite der letzten Ungleichung.

Damit ist die Ungleichung für die Riemannsummen bewiesen; durch Grenzübergang folgt sie auch für die Integrale.

Bemerkung: Die Ungleichung, die wir oben gezeigt haben, heißt harmonisch-geometrische Mittelungleichung. Sie ist häufig nützlich und es lohnt sich, sie im Hinterkopf zu behalten.

Aufgabe 13.11:

(a) Ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$, so ist f konstant, wegen $f(0) = 0$ also die Nullfunktion, und also ist $\int_a^b f(x) dx = 0$. Nehmen wir nun an, dass f' auf $[a, b]$ nicht verschwindet und f also nicht konstant ist. **Wähle Schranken!** Da f nur nichtnegative Werte annimmt, nimmt f im Inneren von $[a, b]$ also mindestens einen positiven Wert an, sei etwa $f(x) > 0$, $x \in (a, b)$. Also existieren $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ so, dass $f(y) > \varepsilon$ für $y \in [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$. Damit folgt aber $\int_a^b f(y) dy \geq \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(y) dy \geq 2\varepsilon'\varepsilon > 0$, ein Widerspruch.

(b) Ist $f^{(n)}(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$, so ist $f^{(n-1)}$ auf $[a, b]$ konstant, wegen $f^{(n-1)}(a) = 0$ also konstant 0. Induktion liefert $f^{(i)}(x) = 0$ auf $[a, b]$ für alle $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, insbesondere also verschwindet f auf $[a, b]$ und also auch das Integral.

Ist andererseits $f^{(n)}$ nicht konstant 0 auf $[a, b]$, so auch $f^{(n-1)}$ nicht (denn die Ableitung der Nullfunktion ist wieder die Nullfunktion), und induktiv ist keine der Funktionen $f^{(i)}(x)$, $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ die konstante Nullfunktion auf $[a, b]$, insbesondere f selbst nicht. Nun folgt aber wie in (a), dass $\int_a^b f(x) dx > 0$.

Aufgabe 13.12:

Tipp: **Wähle Schranken!**

Aufgabe 13.13:

Die Ungleichung macht zunächst ähnlich hilflos wie die in Beispiel 13.23. Dort war eine Approximation der Integrale durch Riemannsummen unsere Rettung. Versuchen wir, ob das hier nicht ebenfalls hilft! Der Einfachheit halber sei $a = 0$, $b = 1$, dann sind die Vorfaktoren gleich 1. Ersetzt man die Integrale jeweils durch die n -te Riemannsumme, so erhält man die Ungleichung

$$\sqrt{\frac{1}{n}f^2(0) + \frac{1}{n}f^2\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n}f^2\left(\frac{n-1}{n}\right)} \geq \frac{1}{n}f(0) + \dots + \frac{1}{n}f\left(\frac{n-1}{n}\right).$$

Der Einfachheit halber schreiben wir x_i statt $f(\frac{i}{n})$ und erhalten die Behauptung, dass

$$\sqrt{\frac{x_0^2 + \dots + x_{n-1}^2}{n}} \geq \frac{x_0 + \dots + x_{n-1}}{n}$$

für $x_0, \dots, x_{n-1} \geq 0$. Quadrieren und Multiplikation mit n^2 liefert die äquivalente Ungleichung

$$n(x_0^2 + \dots + x_{n-1}^2) \geq x_0^2 + \dots + x_{n-1}^2 + 2\sum_{0 \leq i < j \leq n-1} x_i x_j$$

bzw.

$$(n-1)(x_0^2 + \dots + x_{n-1}^2) \geq 2\sum_{0 \leq i < j \leq n-1} x_i x_j.$$

Nun ist nach Beispiel 4.5: $2x_i x_j = 2\sqrt{x_i^2 x_j^2} \leq 2\frac{x_i^2 + x_j^2}{2} = x_i^2 + x_j^2$. Damit ist also $2\sum_{0 \leq i < j \leq n-1} x_i x_j = \sum_{0 \leq i < j \leq n-1} 2x_i x_j \leq \sum_{0 \leq i < j \leq n-1} (x_i^2 + x_j^2)$. In der letzten Summe kommt nun aber jeder Summand x_i^2 in genau $(n-1)$ Summanden vor, d.h. die letzte Summe ist gleich $(n-1)(x_0^2 + \dots + x_{n-1}^2)$ – und damit sind wir fertig.

Also ist die Ungleichung für die Riemannsummen bewiesen; durch Grenzübergang folgt sie auch für die Integrale.

Bemerkung: Die Ungleichung, die wir oben gezeigt haben, heißt quadratisch-arithmetische Mittelungleichung. Sie ist häufig nützlich und es lohnt sich, sie im Hinterkopf zu behalten.

Aufgabe 13.14: Tipp: Approximiere $\sqrt{2}$ beliebig genau durch rationale Zahlen.

Aufgabe 13.15:

Betrachte Differenzen! – und benutze den Zwischenwertsatz.

Aufgabe 13.16:

(a) Sei p das fragliche Polynom; OBdA haben p den führenden Koeffizienten 1. Für hinreichend große X ist $p(X)$ dann positiv und $p(-X)$ negativ. Die Behauptung folgt also aus dem Zwischenwertsatz.

(b) Sei $S \in \mathbb{R}^+$ so, dass $-S \leq g(x) \leq S$ für alle $x \in \mathbb{R}$. f nimmt nach Annahme beliebig große und beliebig kleine Werte an, insbesondere existieren $x, y \in \mathbb{R}$ mit $f(x) < -S$ und $f(y) > S$, also $f(x) + g(x) < 0$ und $f(y) + g(y) > 0$. Als Summe stetiger Funktionen ist $f + g$ stetig. Nach dem Zwischenwertsatz nimmt $f + g$ also zwischen x und y den Wert 0 an.

(c) Wie in (b) garantiert die Abschätzung, dass $f + g$ positive und negative Werte annimmt.

Aufgabe 13.17:

Angenommen nicht, und f ist ein Gegenbeispiel. **Wähle Schranken!** Es sei $\rho \in \mathbb{R} = \sup\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$. Wir nehmen OBdA an, dass ein $x \in \mathbb{R}$ so existiert, dass $f(x) = \rho - 1$ (mit einem beliebigen positiven Wert anstelle von 1 funktioniert es ebenso, nur weniger übersichtlich). Da ρ das Supremum von f ist, existiert ein $y \in \mathbb{R}$ so, dass $f(y) \geq \rho - \frac{1}{3}$; sei etwa $y = x + d$. Wir betrachten nun den Wert $f(z)$ mit $z = y + d = x + 2d$. Wegen der Konvexität von f ist $f(y) = f(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(z)$. Also folgt $\rho - \frac{1}{3} \leq f(y) \leq \frac{1}{2}(\rho - 1) + \frac{1}{2}f(z)$ oder $\rho + \frac{1}{3} \leq f(z)$. f nimmt also einen Wert oberhalb von ρ an, während ρ doch das Supremum der Werte von f sein sollte! Ein Widerspruch.

Aufgabe 13.18: Sei $[a, b]$ das fragliche Intervall, $a < b$. Was könnte das ‘Bildintervall’ für Grenzen haben? (Sicherlich kann man nicht einfach $[f(a), f(b)]$ betrachten, wie etwas das Beispiel $f(x) = x^2$, $a = -1$, $b = 1$ zeigt.) Das Extremalprinzip garantiert uns immerhin, dass f in $[a, b]$ ein Maximum M und ein Minimum μ annimmt. Alle Werte von $f(x)$ für $x \in [a, b]$ werden also im Intervall $[\mu, M]$ liegen.

Werden diese Werte auch alle angenommen? Allerdings, und zwar wegen des Zwischenwertsatzes: Sind $x, y \in [a, b]$ so, dass $f(x) = \mu$ und $f(y) = M$ und ist $\mu \leq c \leq M$, so existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $z \in [x, y]$ so, dass $f(z) = c$. Damit ist das Intervall $[\mu, M]$ also wie gewünscht.

Aufgabe 13.19: Verfahre analog zu Beispiel 13.8.

Aufgabe 13.20:

Zwischen zwei Nullstellen von f ist die Funktion f' entweder konstant 0 oder sie wechselt das Vorzeichen und hat also nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle. Benutze nun Induktion über i .

Aufgabe 13.21:

(a) Lege zunächst eine beliebige Gerade g durch P . Ist g schon wie gewünscht, sind wir fertig. Andernfalls liegen auf einer Seite, etwa auf der rechten Seite, von g mehr blaue als gelbe Punkte und auf der anderen, der linken, weniger. Wir drehen nun g um 180° um P . Zum Schluss liegen rechts mehr gelbe als blaue Punkte und links mehr blaue als gelbe. Nach Annahme wechselt während des Drehvorgangs höchstens ein Punkt die Seite; die Differenz zwischen der Zahl der gelben und der Zahl der blauen Punkte rechts von g ändert sich also um höchstens 1. Zu Beginn ist sie negativ, zum Schluss positiv; also muss sie zwischendurch 0 gewesen sein, und zu diesem Zeitpunkt lagen gleich viele gelbe wie blaue Punkte auf der rechten (und also auch auf der linken) Seite von G .

(b) Analog.

Aufgabe 13.22: Da p_1 nur eine Variable X_1 hat, hat p_1 auch nur endlich viele Nullstellen, etwa $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1}$. Wenn $p_1(X_1)$ und $p_2(X_1, X_2)$ gleichzeitig verschwinden sollen, muss insbesondere $X_1 \in \{x_{11}, \dots, x_{1n_1}\}$ gelten. Setzt man in p_2 für X_1 eine dieser Zahlen ein, erhält man ein Polynom mit einer Variablen, das wiederum nur endlich viele Nullstellen hat.

Diese Betrachtung legt es nahe, das Königsche Lemma anzusetzen. Wir betrachten folgenden Baum \mathcal{B} : Die Wurzel von \mathcal{B} ist die leere Folge, ansonsten besteht \mathcal{B} aus endlichen Folgen reeller Zahlen, wobei $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{B}$, falls $p_1(x_1) = p_2(x_1, x_2) = p_3(x_1, x_2, x_3) = \dots = p_n(x_1, \dots, x_n) = 0$. Dass diese Menge tatsächlich ein Baum ist (also unter Anfangsstücken abgeschlossen), ist leicht zu sehen. Da nach Annahme jede endliche Menge der Polynome eine gemeinsame Nullstelle hat, ist \mathcal{B} außerdem unendlich. Schließlich: Ist $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{B}$ und $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ ein direkter Nachfolger, so ist x_{n+1} eine Nullstelle von $p_{n+1}(x_1, \dots, x_n, X_{n+1})$, einem reellen Polynom mit einer Variablen, das also nur endlich viele Nullstellen hat (wir ignorieren hier den Sonderfall, dass $p_{n+1}(x_1, \dots, x_n, X_{n+1})$ das Nullpolynom ist und überlassen seine Behandlung dem Leser bzw. der Leserin). Also ist \mathcal{B} endlich verzweigt und hat nach dem Königschen Lemma also einen unendlichen Zweig $(x_i : i \in \mathbb{N})$. Dieser Zweig ist aber offenbar wie gewünscht.

Aufgabe 13.23:

Im Unterschied zu Beispiel 13.11 haben wir es hier nicht mehr mit einer abzählbaren Menge von Intervallen zu tun, die man mit den natürlichen Zahlen indizieren könnte. Wir müssen den Baum also irgendwie anders aufbauen. Die neue Idee ist: Bilde wie in 13.11 einen Baum, dessen Ecken Teilintervalle von $[0, 1]$ sind, die durch fortgesetztes Halbieren entstehen, und zwar diejenigen, die sich nicht durch eine endliche Teilmenge der I_x überdecken lassen. Dann funktioniert der Beweis genauso.

Aufgabe 13.24: Keine Lösung.

Aufgabe 13.25: Keine Lösung.

Aufgabe 13.26: Wir konstruieren einen Baum, bestehend aus den Intervallen I_n^k wie im Beispiel 13.11, wobei nur diejenigen Intervalle zu Knoten des Baumes werden, in denen unendlich viele Folgenglieder liegen. Das Intervall I' ist dabei direkter Nachfolger des Intervalles I , wenn I' halb so lang ist wie I und $I' \subseteq I$. Dieser Baum ist sicherlich endlich verzweigt (jeder Knoten hat höchstens zwei direkte Nachfolger) und unendlich (auf dem k -ten Level liegen nur endlich viele Intervalle, wenigstens eines davon muss unendlich viele Folgenglieder enthalten und also zum Baum gehören). Nach dem Königschen Lemma besitzt der Baum also einen unendlichen Zweig; wählt man aus jedem dazugehörigen Intervall ein Folgenglied, erhält man die gewünschte Teilfolge.

Aufgabe 13.27: Keine Lösung.

Aufgabe 13.28:

Betrachte Differenzen!, um die Behauptung in eine äquivalente Behauptung über die Existenz komplexer Nullstellen von nichtkonstanten komplexen Polynomen zu verwandeln. Verwende dann den Fundamentalsatz der Algebra.

Aufgabe 13.29:

Tipp: Verfahre analog zu Beispiel 13.26.

Zusatz: Zeige: Auch drei Polyeder lassen sich gleichzeitig durch eine Ebene halbieren.

Aufgabe 13.30: Tipp: Zwischenwertsatz.

Aufgabe 13.31: Gehe analog zu Beispiel 13.4 vor.

Aufgabe 13.32:

Beachte, dass hier im Unterschied zum Leitprinzip von Abschnitt 13.5.2 ('Wähle Schranken') gefordert ist, dass die untere Schranke und der Abstand von x_0 , in dem sie gültig ist, die gleiche Zahl sind. Tatsächlich ist dieser Zusatz aber nicht schwer zu erreichen. Gemäß 13.5.2 existieren zunächst $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ so, dass $f(x) > \varepsilon$ für $x \in [x_0 - \varepsilon', x_0 + \varepsilon']$. Ist $\varepsilon' = \varepsilon$, sind wir fertig. Ist $\varepsilon < \varepsilon'$, ersetzen wir ε' durch ε , also das Intervall $[x_0 - \varepsilon', x_0 + \varepsilon']$ durch das darin echt enthaltene Intervall $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$, in dem die Ungleichung $f(x) > \varepsilon$ natürlich weiterhin gilt. Ist andererseits $\varepsilon > \varepsilon'$, so ersetzen wir ε

durch ε' , machen die untere Schranke also kleiner, wodurch die Ungleichung natürlich richtig bleibt.

Aufgabe 13.33: Tipp: $\frac{1}{i!} - \frac{1}{(i+1)!} = \frac{i}{(i+1)!}$.

Aufgabe 13.34:

- (a) Folge dem Tipp.
- (b) Benutze die Idee aus (a): Mit ausreichend kleiner Schrittweite muss man schließlich in jedem noch so kleinen Intervall landen...

Aufgabe 13.35: Tipp: Zwischenwertsatz.

Aufgabe 13.36: Keine Lösung.

14 Kapitel 14

Aufgabe 14.1: Verfahre wie in Beispiel 14.3, betrachte aber nur die linear unabhängigen Mengen, die die gegebene linear unabhängige Teilmenge erweitern.

Aufgabe 14.2: Verfahre wie in Beispiel 14.3, betrachte aber nur die linear unabhängigen Mengen, die in der gegebenen erzeugenden Menge als Teilmengen enthalten sind.

Aufgabe 14.3:

Die Maximalitätsbedingung ist hier offensichtlich; unsere partielle Ordnung P besteht also aus allen echten Untergruppen von G , die H als Untergruppe enthalten, geordnet durch \subseteq . Das sieht nach der speziellen Form des Zornschen Lemmas aus. Sicherlich ist ein maximales Element dieser Ordnung wie gewünscht. Sind die Voraussetzungen des speziellen Zornschen Lemmas erfüllt? Sei K eine durch \subseteq linear geordnete Teilmenge von P . Wir wollen zeigen, dass $U := \bigcup K$ zu P gehört. Sicherlich ist eine aufsteigende Vereinigung von Untergruppen wieder eine Untergruppe, und sicherlich ist $H \subseteq U$. Ist U aber auch eine **echte** Untergruppe? Das ist nicht offensichtlich, denn eine aufsteigende Vereinigung echter Teilmengen muss ja keine echte Teilmenge mehr sein, wie etwa das Beispiel $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{1, 2, \dots, n\} = \mathbb{N}$ zeigt.

Nun haben wir bisher die Bedingung ‘endlich erzeugt’ noch nicht benutzt. Vermutlich wird es Zeit, sie einzusetzen. Aber wie? **Mache die Daten so konkret wie möglich!** G ist endlich erzeugt. Also existiert eine endliche Teilmenge $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ von G so, dass G die kleinste Untergruppe von G ist, die X als Teilmenge enthält. Damit können wir die Bedingung ‘echte Untergruppe’ auch so charakterisieren: Es existiert ein x_i so, dass $x_i \notin U$. Falls nicht, existiert zu jedem $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ein $H_i \in K$ so, dass $x_i \in H_i$. Unter den endlich vielen H_i , die durch \subseteq linear geordnet sind, muss eine maximal sein, etwa H_k . Dann ist aber $X \subseteq H_k$, also $H_k = G$, im Widerspruch zur Annahme, dass H_k als Element von K eine echte Untergruppe von G ist.

Also sind die Voraussetzungen für die spezielle Form des Zornschen Lemmas erfüllt und das Argument funktioniert.

Aufgabe 14.4:

Hier ist die ‘Maximalitätsbedingung’, dass f auf ganz \mathbb{N} definiert sein soll, die ‘Restbedingung’ dagegen ‘Injektion nach X ’. Wir könnten also als partielle Ordnung die injektiven Abbildungen von Teilmengen von \mathbb{N} nach X betrachten, geordnet durch die Teilmengenrelation. Die Bedingungen des Zornschen Lemmas sind dann erfüllt, und wir erhalten die Existenz eines

maximalen Elementes F . Leider gibt es keine Garantie, dass F auf ganz \mathbb{N} definiert ist - F könnte z.B. eine Bijektion zwischen X und der Menge der geraden Zahlen sein. Klar ist allerdings, dass der Definitionsbereich D von F nicht endlich sein kann, denn sonst hätte D ein maximales Element n und die Funktion $F' : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow X$, gegeben durch $F'(i) = F(i)$ für $i \in D$ und $F'(i) = x \in X$ beliebig für $i \notin D$ wäre eine Surjektion von $\{1, 2, \dots, n\}$ nach X , im Widerspruch zur Annahme. F wird also eine Injektion von einer unendlichen Teilmenge von \mathbb{N} nach X sein, und es ist nun nicht mehr schwierig, daraus eine Injektion \hat{F} von \mathbb{N} nach X zu erhalten, indem man etwa k_i für alle $i \in \mathbb{N}$ als die i -größte Zahl in D definiert und dann $\hat{F}(i) = F(k_i)$ setzt.

Aber mit einer etwas geschickteren Wahl der Annäherungen geht es direkter: Eine Menge $S \subseteq \mathbb{N}$ heißt ‘nach unten abgeschlossen’, falls S mit einer natürlichen Zahl n stets auch alle natürlichen Zahlen $< n$ enthält. Die nach unten abgeschlossenen Teilmengen von \mathbb{N} sind also \emptyset , die Mengen der Form $\{1, 2, \dots, n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und \mathbb{N} selbst. Betrachten wir nun die injektiven Funktionen von nach unten abgeschlossenen Teilmengen von \mathbb{N} nach X , geordnet durch die Teilmengenrelation, als partielle Ordnung, so sind wiederum die Bedingungen des Zornschen Lemmas erfüllt, und das maximale Element dieser Ordnung ist sofort eine Injektion von \mathbb{N} nach X .

Aufgabe 14.5:

Die ‘Maximalitätsbedingung’ ist hier ‘total’, die ‘Restbedingung’ ist ‘partielle Ordnung auf X , die \leq_X respektiert’. Als Ordnung benutzen wir die Teilmengenrelation. In diesem Fall ist es leicht, zu zeigen, dass die Bedingungen der speziellen Form des Zornschen Lemmas erfüllt sind (anders als bei Beispiel 14.4 gibt es hier kein Problem mit Erweiterungen ‘nach links’, da hier ja keine Wohlfundiertheit verlangt wird). Wie in Beispiel 14.4 zeigt man dann, dass maximale Elemente der Ordnung totale Ordnungen sein müssen: Andernfalls fügt man ein fehlendes Element einfach an beliebiger Stelle in die Ordnung ein, um sie echt zu erweitern und zu einem Widerspruch zu gelangen.

Aufgabe 14.6:

$Y \subseteq X$ ist eine nach ‘nach unten abgeschlossene Teilmenge’ von X falls für $x, y \in X$ aus $x \leq_X y \in Y$ schon $x \in Y$ folgt. Kombiniere nun die Ideen aus Aufgabe 14.5 und Beispiel 14.4, betrachte also partielle wohlfundierte Ordnungen auf nach unten abgeschlossenen Teilmengen von X , die \leq_X respektieren. Sind (Y_0, \leq_0) und (Y_1, \leq_1) zwei solche Ordnungen, so setze $(Y_0, \leq_0) \leq (Y_1, \leq_1)$, falls $Y_0 \subseteq Y_1$, \leq_1 eine Erweiterung von \leq_0 ist und für $y_1 \in Y_1 \setminus Y_0$, $y_0 \in Y_0$ niemals $y_1 \leq_1 y_0$ gilt.

Aufgabe 14.7:

Die ‘Maximalitätsbedingung’ ist die Forderung, dass f auf ganz \mathcal{F} definiert ist, die ‘Restbedingung’, dass f eine partielle Funktion von \mathcal{F} nach $\bigcup \mathcal{F}$ so ist, dass $f(x) \in x$ für alle $x \in \mathcal{F}$.

Aufgabe 14.8: Benutze die spezielle Form des Zornschen Lemmas: Betrachte \mathcal{F} , geordnet durch \subseteq . Ist $K \subseteq \mathcal{F}$ eine durch \subseteq linear geordnete Teilmenge, so wollen wir zeigen, dass $\bigcup K \in \mathcal{F}$. Da \mathcal{F} endlichen Charakter hat, genügt es, zu zeigen, dass jede endliche Teilmenge von $\bigcup K$ in \mathcal{F} liegt. Sei also $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \bigcup K$ endlich. Dann existiert zu jedem $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ein $M_i \in K$ so, dass $x_i \in M_i$. Nun ist $\{M_i : 1 \leq i \leq n\}$ eine durch \subseteq linear geordnete endliche Menge, besitzt also ein \subseteq -maximales Element M_j . Dann ist aber $X \subseteq M_j \subseteq \bigcup K$, was wir zeigen wollten.

Aufgabe 14.9: Tipp: Die linear unabhängigen Teilmenge eines Vektorraumes bilden eine Familie von endlichem Charakter.

Aufgabe 14.10: Tipp: Es sei (P, \leq_P) eine partielle Ordnung, die der Voraussetzung des Zornschen Lemmas genügt. Nun sei \mathcal{F} die Menge aller durch \leq_P linear geordneten Teilmengen von P . Zeige, dass \mathcal{F} endlichen Charakter hat, benutze Tukeys Lemma, um ein maximales Element M von \mathcal{F} zu erhalten und zeige, dass das durch die Annahme über P garantierte Element m von P , das in \leq_P mindestens so groß ist wie alle Elemente von M , ein maximales Element von (P, \leq_P) ist.

Aufgabe 14.11: Hier sind Maximalitäts- und Restbedingung offensichtlich.

Aufgabe 14.12:

Tipp: Die Maximalitätsbedingung ist ‘aufspannend’, die Restbedingung ‘Teilbaum von G ’, die Ordnung die Teilmengenrelation.

Aufgabe 14.13:

(a) Hier darf man sich von der Form der Aufgabe nicht in die Falle locken lassen, denn natürlich braucht man das Zornsche Lemma nicht: Schließlich ist jede Kante selbst schon ein Pfad!

(b) Hier ist man durch den endlichen Fall vielleicht versucht, es mit einer Induktion zu versuchen: Hat G keinen Kreis, ist man fertig. Gibt es noch einen Kreis in G , entfernt man alle seine Kanten und erhält einen Graphen mit weniger Kanten, auf den man die Induktionsannahme anwenden kann. Für endliche Graphen (bzw. solche mit nur endlich vielen Kanten) funktioniert dieses Argument. Enthält der Graph aber unendlich viele Kanten, klappt es so nicht mehr: Ein Kreis hat nur endlich viele Kanten, und wenn

man die aus der unendlichen Kantenmenge entfernt, werden es leider nicht ‘weniger’.

Also versuchen wir es mit dem Zornschen Lemma. Gesucht ist eine Menge X , bestehend aus disjunkten Kreisen von G so, dass die $G = (V, E)$ keinen Kreis mehr enthält, wenn man alle Kanten in $\bigcup X$ aus G entfernt. Als Maximalitätsbedingung bietet sich hier die Eigenschaft an, dass $(V, E \setminus \bigcup X)$ keinen Kreis mehr enthält, als Restbedingung entsprechend ‘Menge von disjunkten Kreisen’, als Ordnungsrelation \subseteq . Die Bedingungen des Zornschen Lemmas sind dann erfüllt, und wir erhalten somit die Existenz einer \subseteq -maximalen Menge Y , die die Restbedingung erfüllt. Enthält nun $(V, E \setminus \bigcup Y)$ noch einen Kreis K , so erfüllt auch $Y \cup \{K\}$ die Restbedingung, was der Maximalität von Y widerspricht. Also ist Y wie gewünscht.

Aufgabe 14.14:

Verfahre analog zu Beispiel 14.1, betrachte aber nur diejenigen echten Ideale von R , die J erweitern.

Aufgabe 14.15: Modifiziere die Lösung von Aufgabe 14.12 geeignet.

Aufgabe 14.16:

(a) Verfahre analog zu Beispiel 14.2, betrachte aber nur diejenigen Repräsentantensysteme, die Y erweitern.

(b) Verfahre analog zu Aufgabe 14.7, betrachte aber nur diejenigen partiellen Auswahlfunktionen, die f erweitern.

Aufgabe 14.17:

(a) Die Behauptung, dass $\bigcap_{i \in I} U_i$ stets eine obere Schranke der Kette $(U_i : i \in I)$ ist, ist leider falsch, selbst dann, wenn \mathcal{F} nur eine einzige Menge enthält. Sei etwa $\mathcal{F} = \{\mathbb{N}\}$ und $U_i = \{k \in \mathbb{N} : k \geq i\}$ für $i \in \mathbb{N}$. Dann ist $U_1 \supseteq U_2 \supseteq U_3 \supseteq \dots$, also ist $(U_i : i \in \mathbb{N})$ durch \supseteq aufsteigend geordnet; aber $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_i$ ist leer, also sicherlich kein Überrepräsentantensystem für \mathcal{F} . Daher schlägt der Beweis leider fehl, ähnlich dem nach Beispiel 14.3 beschriebenen Versuch zum Beweis, dass jeder Vektorraum eine Basis hat.

(b) Wir definieren die Ordnung wie in Aufgabenteil (a) beschrieben und versuchen, zu zeigen, dass die Voraussetzungen des Zornschen Lemmas erfüllt sind. Sei $(U_i : i \in I)$ eine aufsteigende Kette in (\mathcal{U}, \leq) , $S = \bigcap_{i \in I} U_i$. Falls S kein Überrepräsentantensystem von \mathcal{F} ist, existiert $X \in \mathcal{F}$ mit $S \cap X = \emptyset$. Das heißt aber, dass zu jedem $x \in X$ ein $i(x)$ so existiert, dass $x \notin U_{i(x)}$. Nun existiert unter den endlich vielen $i(x)$ mit $x \in X$ ein Maximum bezüglich \leq , etwa \hat{i} . Da die U_i durch \supseteq aufsteigend geordnet sind, ist $U_{i(x)} \supseteq U_{\hat{i}}$ für alle $x \in X$, also $x \notin U_{\hat{i}}$ für alle $x \in X$, d.h. $U_{\hat{i}} \cap X = \emptyset$, was aber der Annahme widerspricht, $U_{\hat{i}}$ sei ein Überrepräsentantensystem von \mathcal{F} . Also

sind die Voraussetzungen des Zornschen Lemmas erfüllt. Sei $U \in \mathcal{U}$ maximal bezüglich \leq . Nun zeigt, das in Aufgabenteil (a) gegebene Argument in der Tat, das U ein Repräsentantensystem für \mathcal{F} ist.

Vor- und Nachtest sowie weitere Aufgaben

1 Vortest

Die folgenden Aufgaben sollen dazu dienen, deine Beherrschung einiger wichtiger Lösungsstrategien zu erfassen. Bearbeite sie also **vor** der Lektüre des Buches. Lasse dir Zeit - es kann sehr ergiebig sein, eine oder zwei Stunden über eine Aufgabe nachzudenken. Notiere dir die Anzahl der Aufgaben, die du lösen konntest. Nach Lektüre des Buches kannst du sie mit dem Ergebnis des Nachtests vergleichen, um deinen Lernfortschritt einzuschätzen. Markiere dir die Aufgaben, die du nicht lösen kannst, besonders die, bei denen du keinen Ansatz findest. Komme während und nach Lektüre des Buches auf sie zurück. Kennst du inzwischen eine Strategie, mit der man sie angehen könnte?

Aufgabe 1: Die Ebene wird durch 3 Ellipsen und 4 Quadrate in nicht weiter unterteilte Teilflächen zerlegt. Wie viele Flächen können dabei höchstens entstehen?

Aufgabe 2: Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ eine Funktion. Zeige: Es existiert eine nichtleere Teilmenge $X \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ so, dass $f[X] = X$.

Aufgabe 3: Auf der kreisrunden Geburtstagstorte des fairen Fritz befinden sich 102 punktförmige Kirschen, davon keine zwei auf einem Radius (also einer Verbindung vom Mittelpunkt zum Rand des Kreises). Fritz möchte nun für sich ein keilförmiges Tortenstück mit Mittelpunktswinkel 60° herauschneiden, auf dem genau 17 Kirschen liegen. Zeige, dass das immer möglich ist.

Aufgabe 4: Sieben leuchtfähige Knöpfe sind in einem Kreis angeordnet; drückt man auf einen der Knöpfe, wechseln seine beiden Nachbarn ihren Zustand von ‘leuchtend’ zu ‘nicht leuchtend’ bzw. von ‘nicht leuchtend’ zu ‘leuchtend’. Anfangs liegt eine gewisse Konfiguration K leuchtender Knöpfe vor.

(a) Zeige: Kann man durch eine Reihe von Knopfbetätigungen von einer Konfiguration K in eine Konfiguration K' gelangen, so auch von K' nach K .

(b) Bestimme ein Verfahren, mit dem man jede Konfiguration durch eine Reihe von Knopfbetätigungen in eine Konfiguration überführen kann, in der nur noch höchstens ein Knopf leuchtet.

(c) Es sei K_0 die Konfiguration, in der kein Knopf leuchtet und K_1 die Konfiguration, in der alle Knöpfe leuchten. Zeige, dass man aus K_0 nicht nach K_1 gelangen kann.

Aufgabe 5: Die natürlichen Zahlen a, b, c, d haben keinen gemeinsamen Primfaktor. Zeige: Es existieren $p, q, r, l \in \mathbb{Z}$ so, dass $ap + bq + cr + dl = 1$.

Aufgabe 6: Es sei \mathbb{P} die Menge der Primzahlen. Zeige: Es existiert eine unendliche Teilmenge $X \subseteq \mathbb{P}$ so, dass $p_2 - p_1$ für alle $p_1, p_2 \in X$ mit $p_1 < p_2$ durch 11111 teilbar ist.

Aufgabe 7: Bestimme $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{1000}$.

Aufgabe 8: Es seien $x_1, \dots, x_{11} \in \mathbb{R}^+$ so, dass $\sum_{i=1}^{11} x_i = 1$. Zeige: Es existieren verschiedene $i, j \in \{1, 2, \dots, 11\}$ so, dass $x_i + x_j < \frac{1}{4}$.

Aufgabe 9: Es sei $n \geq 5$. Aus dem vollständigen Graphen K_n mit n Ecken werden alle Kanten eines kreisfreien Teilgraphen entfernt. Zeige, dass der Restgraph einen Kreis enthält. Zeige weiter, dass der Restgraph einen Kreis der Länge 3 enthält.

Aufgabe 10: Zeige: Sind $x_1, \dots, x_5 > 0$, so ist $(x_1 + \dots + x_5)(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_5}) \geq 25$.

Aufgabe 11: Finde alle Paare $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $\frac{m^2 + 3m + 1}{m^4 + 1} = n$.

Aufgabe 12: Es seien 9 natürliche Zahlen gegeben, deren Primfaktoren alle in $\{2, 3, 5\}$ liegen. Zeige: Es sind darunter zwei verschiedene, deren Produkt eine Quadratzahl ist. Wie viele solche Zahlen braucht man, damit darunter sicher 3 verschiedene sind, deren Produkt eine dritte Potenz einer natürlichen Zahl ist?

Aufgabe 13: Es sei wieder \mathbb{P} die Menge der Primzahlen.

(a) Zeige: Für unendlich viele $p \in \mathbb{P}$ hat $x^5 - x^3 = 2$ eine Lösung x in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

(b) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige: Für unendlich viele $p \in \mathbb{P}$ hat $x^n + y^n = z^n$ eine Lösung in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ mit $x, y, z \neq 0$.

Aufgabe 14: Es seien $x_1, \dots, x_9 \in \mathbb{R}$. Zeige: Es sind darunter 3, deren paarweise Differenzen alle rational sind, oder 5, deren paarweise Differenzen alle irrational sind.

Aufgabe 15:

(a) Es seien $x, y \in \mathbb{N}$ so, dass $x + y$ ein Teiler von x^3 ist. Zeige: $x + y$ ist ein Teiler von y^3 .

(b) Es seien $x, y \in \mathbb{N}$ so, dass $x - y$ ein Teiler von x^3 ist. Zeige: $x - y$ ist ein Teiler von y^5 .

Aufgabe 16: Gegeben ist eine endliche Menge M von Fliesentypen; eine Fliese hat die Form eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge 1, dessen Seiten mit einer von endlich vielen Farben gefärbt sind. Von jedem Typ in M steht ein beliebiger Vorrat an Fliesen zur Verfügung. Bei einer Kachelung mit diesen Fliesen dürfen zwei Fliesen nur dann am Rand zusammenstoßen, wenn sie dort die gleiche Farbe haben. Wir nehmen an, dass sich jedes gleichseitige Dreieck mit ganzzahliger Seitenlänge komplett mit den gegebenen Fliesen kacheln lässt. Zeige, dass sich dann die ganze Ebene so kacheln lässt.

Aufgabe 17: Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, ferner schreiben wir $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$. Zeige: Für alle $n \geq 1$ ist $a_{2^n} > b_{2^n}$.

Aufgabe 18: In Cantors Paradies gibt es jeweils unendlich viele Herren und Damen und alle Sympathien beruhen dort auf Gegenseitigkeit. Außerdem findet jede Dame genau zwei Herren und jeder Herr genau zwei Damen sympathisch. Beim großen Sylvesterball sollen sich alle Damen und Herren in (zweigeschlechtlichen) Tanzpaaren zusammenfinden, wobei die Tanzpartner sich jeweils sympathisch sein sollen. Zeige, dass eine solche Tanzordnung möglich ist.

Aufgabe 19: Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^2$ konvex und kompakt, $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Zeige, dass man K nicht durch n Kreisscheiben überdecken kann, die einander höchstens am Rand berühren.

Aufgabe 20: Es sei $a_0 = 0$ und $a_{k+1} = 3^k - a_k$ für $k \geq 0$. Finde eine explizite Vorschrift für a_k in Abhängigkeit von k .

Aufgabe 21: Es sei f eine stetige Funktion so, dass $\int_0^1 f(x)e^{p(x)}dx = 0$ für jedes Polynom $p \in \mathbb{R}[X]$. Zeige: Es ist $f(x) = 0$ für alle $x \in [0, 1]$.

2 Nachtest

Die folgenden Aufgaben sollen dazu dienen, deine Beherrschung einiger wichtiger Lösungsstrategien **nach** der Lektüre des Buches zu erfassen. Wiederum: Lasse dir Zeit - es kann sehr ergiebig sein, eine oder zwei Stunden über eine Aufgabe nachzudenken. Vergleiche die Aufgaben mit den im Buch vermittelten Lösungsstrategien. Welche könnten geeignet sein? Welche eher nicht? Kennst du inzwischen ähnliche Aufgaben?

Notiere dir die Anzahl der Aufgaben, die du lösen konntest und vergleiche mit dem Ergebnis im Vortest.

Aufgabe 1: Es sei G ein zusammenhängender, abzählbarer Graph ohne Kreise. Eine ‘perfekte Kantenüberdeckung’ von G ist eine Menge X von Ecken von G so, dass für jede Kante k von G genau eine Ecke von k in X liegt. Zeige, dass G eine perfekte Kantenüberdeckung besitzt.

Aufgabe 2: Es sei $k \in \mathbb{N}$. Eine Folge s von Elementen der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ heißt ‘ k -stotterfrei’, falls in s keine Teilfolge k mal direkt hintereinander auftritt. So ist z.B. 10010110 3-stotterfrei, 110101011010 aber nicht, weil hier die Teilfolge 101010 auftritt, die aus drei Wiederholungen von 10 besteht.

Zeige: Gibt es zu $k, n \in \mathbb{N}$ k -stotterfreie Folgen von Elementen der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ in jeder endlichen Länge, so existiert eine solche Folge unendlicher Länge.

Aufgabe 3: Eine positive Treppenfunktion ist eine Funktion $t : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ so, dass endlich viele disjunkte halboffene Intervalle I_1, \dots, I_n mit $\bigcup_{i=1}^n I_i = [0, 1]$ derart existieren, dass mit $I_j = [a_j, b_j)$ und $j < n$ stets $a_{j+1} = b_j$ gilt und t auf jedem dieser Intervalle konstant ist; ferner sei $t(1) = t(a_n)$. Es sei nun $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig so, dass $\int_0^1 f(x)t(x) = 0$ für jede positive Treppenfunktion t . Zeige: Es ist $f(x) = 0$ für alle $x \in [0, 1]$.

Aufgabe 4: Es seien $m, n \in \mathbb{Z}$, $(m, n) \neq (0, 0)$ und $k \in \mathbb{N}$. Wir betrachten Summen der Form $\sum_{i=1}^{2k+1} \varepsilon_i v_i$, wobei $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ und $v_i \in \left\{ \binom{m}{n}, \binom{n}{m} \right\}$ für $i \in \{1, 2, \dots, (2k+1)\}$. Kann solch eine Summe gleich 0 sein?

Aufgabe 5: Bestimme die 2017te Ableitung der Funktion $f(x) = e^{2x}$.

Aufgabe 6: Zeige: Die Gleichung $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 5abcd$ hat keine ganzzahligen Lösungen außer $(0, 0, 0, 0)$.

Aufgabe 7: Bestimme die Summe $\sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$ in Abhängigkeit von n .

Aufgabe 8: Es sei $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ das Einheitsquadrat und $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar; außerdem sei f auf dem Rand von Q überall positiv. Mit f_x bzw. f_y bezeichnen wir die Ableitung von f nach x bzw. nach y . Angenommen, es ist $f(a, b) + f_x(a, b) + f_y(a, b) \geq 0$ für alle $(a, b) \in Q$. Zeige: Dann ist $f(a, b) > 0$ für alle $(a, b) \in Q$.

Aufgabe 9: Vier punktförmige Raumschiffe liegen träge im \mathbb{R}^3 herum. Ab und zu bewegt sich eines, während die anderen stillstehen, und zwar parallel zu der Ebene durch die anderen drei. Anfangs liegen die Raumschiffe auf den Koordinaten $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$. Können sie schließlich (in beliebiger Reihenfolge) die Positionen $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 2)$, $(0, 2, 0)$, $(2, 0, 0)$ einnehmen?

Aufgabe 10: Es seien $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ monoton wachsende, stetig differenzierbare Funktionen mit $f(0) = g(0) = 0$ und $f(1) = g(1) = 1$. Zeige: Es existiert ein $x \in [0, 1]$ mit $f'(x) = g'(x)$.

Aufgabe 11: Bestimme die 2017te Ableitung der Funktion $f(x) = e^x \cos(x)$.

Aufgabe 12: Es sei $p = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ ein Polynom mit Koeffizienten im zweielementigen Körper \mathbb{F}_2 und $a_0 = 1$. Zeige: Es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass $p(x)$ ein Teiler von $X^n - 1$ ist.

Aufgabe 13: Bestimme alle Matrizen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ so, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ alle Einträge von A^n aus der Menge $\{0, 1\} \cup \mathbb{P}$ kommen, wobei \mathbb{P} die Menge der Primzahlen bezeichnet.

Aufgabe 14: Zeige: Unter 82 Punkten in einem Würfel mit 1cm Kantenlänge befinden sich stets vier, die ein Tetraeder mit Volumen $\leq \frac{1}{27}$ bilden.

Aufgabe 15: Gegeben sind n Punkte in der Ebene, keine drei auf einer Geraden. Zeige: Unter den von diesen Punkten gebildeten (nicht notwendigerweise konvexen) Siebenecken ist eines, das keinen weiteren der Punkte enthält.

Aufgabe 16: Es sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig so, dass $\int_0^1 f(x) dx = 0$, ferner $\varepsilon > 0$. Zeige: Es existiert ein $x \in [0, 1 - \varepsilon]$ so, dass $\int_x^{x+\varepsilon} f(x) dx = 0$.

Aufgabe 17: Es sei W_7 der 7-dimensionale Einheitswürfel, dessen Eckpunkte die Elemente von $\{0, 1\}^7$ sind. Was ist der maximale Abstand zweier Eckpunkte des W_7 ? Wie viele Paare von Eckpunkten des W_7 haben diesen maximalen Abstand?

Aufgabe 18: Zeige: Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist 7 ein Teiler von $2^{9^k} - 1$.

Aufgabe 19: Es sei $(F_i : i \in \mathbb{N})$ die Fibonaccifolge, gegeben durch $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $p_0 = 1$, $p_{n+1} = (X - F_n)p_n$. Zeige: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist x^{F_n} eine reelle Linearkombination der Polynome $\{p_i : i \in \mathbb{N}_0\}$.

Aufgabe 20:

(a) Zeige durch kombinatorische Interpretation: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\binom{2n}{n} = \sum_{i+j=n} \binom{n}{i} \binom{n}{j}$.

(b) Zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\binom{3n}{n} = \sum_{i+j+k=n} \binom{n}{i} \binom{n}{j} \binom{n}{k}$.

(c) Bestimme $\sum_{i+j+k+l=n} \binom{n}{i} \binom{n}{j} \binom{n}{k} \binom{n}{l}$ in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$.

(d) Verallgemeinere.

Aufgabe 21:

(a) Zeige: Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ ist $\text{ggT}(2^m, 2^n) = \text{ggT}(2^m, 2^{n-m})$.

(b) Zeige: Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ ist $\text{ggT}(2^m, 2^n) = 2^{\text{ggT}(m, n)}$.

(c) Zeige: Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ ist $\text{ggT}(2^{2^m}, 2^{2^n}) = 2^{2^{\text{ggT}(m, n)}}$.

(d) Verallgemeinere.

3 Weitere Aufgaben

Eine Reihe von Aufgaben hat es nicht mehr ins Buch geschafft; als zusätzliche Übungsaufgaben sind sie dennoch geeignet. Wir stellen hier noch eine gemischte Auswahl zur Verfügung.

Aufgabe 1: Es sei K der Einheitskreis. Für $0 < \varepsilon < 1$ und x auf K bezeichnen wir mit $K(x, \varepsilon)$ den Abschnitt auf K von dem Punkt, der entlang von K um ε links von x liegt zu dem Punkte, der entlang von K um ε rechts von x liegt. Es sei nun $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $0 < \varepsilon < 1$ fest. Für jedes $x \in K$ sei $f(x) = \int_{K(x, \varepsilon)} f(y) dy$. Zeige: f ist konstant.

Aufgabe 2: Es seien $a, n \in \mathbb{N}$. Eine a -Folge ist eine Folge von Elementen der Menge $\{1, 2, \dots, a\}$.

(a) Zeige: Es gibt genau $a^{n-k}(a-1)$ a -Folgen der Länge n , bei denen die letzten k , aber nicht die letzten $(k+1)$ Glieder alle gleich sind.

(b) Zeige mit kombinatorischer Interpretation: $(a-1)\sum_{k=0}^n a^k = a^{n+1} - 1$.

Aufgabe 3: Gegeben sind n punktförmige Brunnen und n punktförmige Häuser in der Ebene, wobei folgendes gilt: Sind P, Q zwei der Punkte, und ist K der Kreis mit Durchmesser \overline{PQ} , so liegt kein weiterer Punkt der Menge auf K . Zeige, dass man je einen Brunnen mit je einem Haus über eine halbkreisförmige Leitung so verbinden kann, dass keine zwei Leitungen sich kreuzen.

Aufgabe 4: Ein ebener Gitterpunkt ist ein Punkt im \mathbb{R}^2 , dessen beide Koordinaten ganze Zahlen sind.

(a) Zeige: Unter 5 ebenen Gitterpunkten gibt es zwei, auf deren Verbindungslinie ein weiterer ebener Gitterpunkt liegt.

(b) Zeige: Unter 17 ebenen Gitterpunkten gibt es zwei, auf deren Verbindungslinie drei weitere ebene Gitterpunkte liegen.

(c) Wie viele ebene Gitterpunkte braucht man, damit darunter sicher zwei sind, auf deren Verbindungslinie 7 weitere ebene Gitterpunkte liegen?

(d) Es sei $k \in \mathbb{N}$. Wie viele ebene Gitterpunkte braucht man, damit darunter sicher zwei sind, auf deren Verbindungslinie k weitere Gitterpunkte liegen?

(e) Es sei $k \in \mathbb{N}$. Wir betrachten nun Gitterpunkte (also Punkte mit ganzzahligen Koordinaten) im \mathbb{R}^3 . Wie viele davon braucht man, damit darunter sicher zwei sind, auf deren Verbindungslinie k weitere Gitterpunkte liegen?

(f) Verallgemeinere auf höherdimensionale Räume.

Aufgabe 5: In einer Gruppe von n Agenten ist jeder Agent mit höchstens drei weiteren Agenten verschworen. Verschworenheit ist symmetrisch, und niemand ist mit sich selbst verschworen.

(a) Eine ‘Triade’ ist eine Menge $\{a_1, a_2, a_3\}$ von drei Agenten, von denen je zwei miteinander verschworen sind. Zeige, dass man die Agenten in zwei Teilgruppen aufteilen kann, die beide frei von Triaden sind.

(b) Ein ‘Verschwörerkreis’ ist eine Folge (a_1, \dots, a_k) von mindestens drei Agenten so, dass a_1 mit a_2 , a_2 mit a_3 , ..., a_k mit a_1 verschworen ist. Zeige, dass man die Agenten in zwei Teilgruppen aufteilen kann, so dass es in keiner von beiden einen Verschwörerkreis gibt.

Aufgabe 6: Bestimme die Summe $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 7: Eine ‘perfekte Kantenüberdeckung’ für einen (endlichen oder unendlichen) Graphen G ist eine Menge X von Ecken von G , so dass jede Kante von G genau eine Endecke in X hat. Es sei G ein abzählbarer Graph, so dass jeder endliche Teilgraph von G eine perfekte Kantenüberdeckung besitzt. Zeige, dass auch G selbst eine perfekte Kantenüberdeckung besitzt.

Aufgabe 8: Zeige: Unter 351×2 -Matrizen mit Einträgen aus \mathbb{F}_5 befinden sich zwei, die miteinander kommutieren.

Aufgabe 9: Bestimme für jede der folgenden Funktionen die 2017te Ableitung:

- (a) xe^x
- (b) $x\sin(x)$
- (c) x^2e^x

Aufgabe 10: Eine Kantenüberdeckung eines Graphen G ist eine Menge X von Ecken von G so, dass jede Kante von G wenigstens eine Ecke in G hat. Eine Kantenüberdeckung X von G heißt ‘minimal’, falls keine echte Teilmenge von X ebenfalls eine Kantenüberdeckung von G ist. Zeige: Jeder Graph (endlich oder unendlich) besitzt eine minimale Kantenüberdeckung.

Aufgabe 11: Beweise oder widerlege: Es existiert eine Menge $X \subseteq \mathbb{Q}$ so, dass jedes $q \in \mathbb{Q}$ auf genau eine Weise in der Form $q = \sum_{x \in X} n_x x$ darstellbar ist, wobei $n_x \in \mathbb{Z}$ für alle $x \in X$ und alle bis auf endlich viele n_x gleich 0 sind.

Aufgabe 12:

(a) Zeige: Unter $(n+1)$ positiven reellen Zahlen $\leq n^2$ gibt zwei, a und b , so, dass $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| < 1$.

- (b) Zeige: Unter $(n+1)$ positiven reellen Zahlen $\leq n^3$ gibt es zwei, a und b , so, dass $|\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}| < 1$.
- (c) Verallgemeinere (a) und (b).
- (d) Wie reelle Zahlen zwischen 1 und $\leq 2^n$ braucht man, damit darunter sicher zwei sind, a und b , die $|\text{ld}(a) - \text{ld}(b)| < 1$ erfüllen?

Aufgabe 13:

- (a) Es sei $3 \leq n \in \mathbb{N}$. Gegeben sind $2\lceil \frac{n}{3} \rceil + 1$ natürliche Zahlen unterhalb von n . Zeige, dass darunter zwei (verschiedene) sind, deren Quotient eine Potenz von 3 ist. (Hier bezeichnet $\lceil x \rceil$ die kleinste ganze Zahl $\geq x$.)
- (b) Es sei $5 \leq n \in \mathbb{N}$. Finde eine möglichst kleine ganze Zahl $z(n)$ in Abhängigkeit von n so, dass sich unter $z(n)$ natürlichen Zahlen unterhalb von n mindestens zwei (verschiedene) sind, deren Quotient eine Potenz von 5 ist.
- (c) Verallgemeinere.

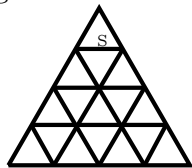
Aufgabe 14: An einer Tafel stehen die Polynome $p(X) = 5X^2 + 3X + 1$ und $q(X) = 7X^3 + 2X^2 + X + 2$. In einem Schritt darf zwei Polynome p_0, p_1 nehmen, die bereits an der Tafel stehen, und das Polynom $p_0(p_1(X))$ an die Tafel schreiben. Kann auf diese Weise das Polynom $\sum_{i=0}^{2017} iX^i$ an die Tafel kommen?

Aufgabe 15: Es sei $n \in \mathbb{N}$. Für eine reelle $n \times n$ -Matrix A sei \tilde{A} die ‘um 90° nach links’ gedrehte Matrix A . Ist $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, so ist also

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} c & f & i \\ b & e & h \\ a & d & g \end{pmatrix}.$$

- (a) Gib den (k, l) -ten Eintrag von \tilde{A} in Abhängigkeit von den Einträgen A_{ij} von A an.
- (b) Finde für jedes $n \in \mathbb{N}$ alle reellen $n \times n$ -Matrizen A so, dass $AX = X\tilde{A}$ für alle $X \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$.

Aufgabe 16: Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge 100, das in kleinere gleichseitige Dreiecke der Seitenlänge 1 aufgeteilt wird, wie in folgendem Bild angedeutet:



Wir denken uns die Linien nun als Wände. Im Teildreieck an der Spitze steht eine Springmaus. Pro Minute kann sie über genau eine Wand von einem Dreieck in ein benachbartes Dreieck springen (also eines, das mit dem aktuellen eine gemeinsame Grenzlinie hat). Die Maus möchte gerne in das 30te Teildreieck von links in der 100ten Zeile, wo es Eierkuchen gibt. Wie lange braucht sie dafür mindestens?

Aufgabe 17:

- (a) Bestimme $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{3} \frac{1}{k!}$.
- (b) Bestimme $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3}{k!}$.

Aufgabe 18: Es sei G ein abzählbarer gerichteter Graph, wobei bei jeder Ecke der Ingrad endlich und gleich dem Ausgrad sei; außerdem sei der Graph, der aus G entsteht, wenn man die gerichteten durch ungerichtete Kanten ersetzt, zusammenhängend. Zeige: Es existiert ein unendlicher gerichteter Pfad in G .

Aufgabe 19: Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ so, dass die Matrix $A^2 + AB - 2BA - 2B^2$ invertierbar ist. Zeige, dass $(A - 2B)$ ebenfalls invertierbar ist.

Aufgabe 20: Existiert eine natürliche Zahl z so, dass in der Dezimaldarstellung von z^3 alle Ziffern durch 3 teilbar sind? Beweise deine Antwort.

Aufgabe 21: Zeige durch kombinatorische Interpretation: Ist p eine Primzahl und $1 \leq k < p$, so ist $\binom{p}{k}$ durch p teilbar. Stelle dir dazu die Elemente von $\{1, 2, \dots, p\}$ als im Kreis angeordnete Glühbirnen vor und eine nichtleere, echte Teilmenge X von $\{1, 2, \dots, p\}$ dadurch ausgewählt, dass die Glühbirnen leuchten, die zu Elementen von X gehören. Drehe nun X im Uhrzeigersinn weiter und zeige, dass dadurch eine Aufteilung der k -elementigen Teilmengen von $\{1, 2, \dots, n\}$ in disjunkte Portionen mit je p Elementen erzeugt wird.

Aufgabe 22: Es sei p eine Primzahl. Welchen Rest lässt $(p-1)!$ bei Division durch p ? Betrachte zunächst die Fälle $p = 2, 3, 5, 7$, stelle eine Vermutung auf, prüfe sie durch Betrachtung weiterer Fälle und versuche dann, sie zu beweisen.

Aufgabe 23:

- (a) Zeige durch kombinatorische Interpretation: Ist $n \in \mathbb{N}$ und k ungerade mit $1 \leq k < 2^n$, so ist $\binom{2^n}{k}$ eine gerade Zahl. Betrachte dazu die bijektive Abbildung f , die die k -elementige Teilmenge $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ von

$\{1, 2, \dots, 2^n\}$ auf $f(A) = \{2^n - a_1, 2^n - a_2, \dots, 2^n - a_k\}$ abbildet und zeige, dass $f(f(A)) = A$ für jede Teilmenge A gilt und dass f keine Fixpunkte besitzt.

(b) Wir wollen nun noch den Fall betrachten, dass k gerade ist. Wir nehmen induktiv an, dass $\binom{2^{n-1}}{l}$ für jedes $1 \leq l < 2^{n-1}$ gerade ist und betrachten die Abbildung f aus Teil (a). Zeige, dass f eine gerade Anzahl von Fixpunkten besitzt und verfare wie in (a).

Aufgabe 24: Die Ebene wird durch 7 Parabeln in nicht weiter unterteilte Teilflächen zerlegt, wobei die Parabeln beliebig gedreht sein dürfen. Wie viele Teilflächen können dadurch maximal entstehen?

Aufgabe 25:

(a) Die natürlichen Zahlen von 1 bis N sind mit zwei Farben gefärbt. Zeige: Es ist möglich, N so groß zu wählen, dass mit Sicherheit fünf gleichfarbige und paarweise verschiedene darunter sind, etwa a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 so, dass $a_1 + a_2 + a_3 = a_4 + a_5$.

(b) Es seien $k, l \in \mathbb{N}$. Die natürlichen Zahlen von 1 bis $N(k, l)$ sind mit 2 Farben gefärbt. Zeige, dass es möglich ist, $N(k, l)$ so groß zu wählen, dass mit Sicherheit $k + l$ gleichfarbige und paarweise verschiedene darunter sind, etwa $a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l$ so, dass $a_1 \dots + a_k = b_1 + \dots + b_l$.

(c) Verallgemeinere auf eine beliebige endliche Anzahl von Farben.

Aufgabe 26:

(a) Die positiven reellen Zahlen sind in zwei Farben gefärbt. Zeige, dass es drei verschiedene, gleichfarbige positive reelle Zahlen x_1, x_2, x_3 so gibt, dass $x_1 x_2 = x_3$.

(b) Die positiven rationalen Zahlen sind mit zwei Farben gefärbt. Zeige, dass drei verschiedene, gleichfarbige positive rationale Zahlen q_1, q_2, q_3 so gibt, dass $q_1 q_2 = q_3$.

(c) Verallgemeinere auf andere Anzahlen von Farben und von Faktoren.

Aufgabe 27: Gegeben ist eine endliche Menge $X = \{P_1, \dots, P_n\}$ von Punkten in der Ebene. Zeige, dass es darunter zwei, etwa P_i und P_j mit folgender Eigenschaft gibt: Die Kreisscheibe mit Mittelpunkt P_i , auf deren Rand P_j liegt, enthält alle Elemente von X .

Aufgabe 28: Eine natürliche Zahl heißt ‘Quadratsumme’, falls sie die Summe von zwei Quadratzahlen, also Quadraten ganzer Zahlen (einschließlich 0), ist. Zeige: Jede natürliche Zahl ist die Differenz zweier Quadratsummen.

Aufgabe 29: In einer kreisförmigen Zirkusmanege wurden n undurchsichtige Stellwände aufgestellt, die einander nirgends durchdringen. Wie viele Personen braucht man mindestens, um sie so in der Manege positionieren zu

können, dass jeder Punkt der Manege von mindestens einer Person gesehen wird?

Aufgabe 30: n Studierende haben an einer Ersti-Ralley teilgenommen und jeweils sowohl die zurückgelegten Kilometer (als ganze Zahl) als auch die Anzahl der eingesammelten Telefonnummern erfasst. Keine dieser Zahlen war größer als 30, und für keine zwei Studierende hat der eine in beiden Komponenten mindestens so hohe Werte wie der andere. Wie groß kann n höchstens sein?

Aufgabe 31: Eine hübsche Art, den Wert der geometrischen Reihe $1 + x^1 + x^2 + \dots + x^n$ in Abhängigkeit von x und n zu bestimmen, ist folgende: Setze $q = 1 + x^1 + x^2 + \dots + x^n$. Dann ist $qx = x^1 + x^2 + \dots + x^{n+1}$ und also $qx - q = x^{n+1} - 1$ oder $q(x - 1) = x^{n+1} - 1$. Damit folgt $q = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$.

(a) Verfahre analog, um $q = F_0 + F_1x^1 + F_2x^2 + \dots + F_nx^n$ in Abhängigkeit von x und n zu bestimmen. Hier bezeichnet F_i die i -te Fibonaccizahl, also $F_0 = F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

(b) Benutze (a), um $\sum_{i=0}^n iF_i$ zu bestimmen.

(c) Benutze (a), um $\sum_{i=0}^n i^3 F_i$ zu bestimmen.

(d) Benutze (a), um $\sum_{i=0}^n \frac{F_i}{i}$ zu bestimmen.

Aufgabe 32: Es seien $m, n \in \mathbb{N}$. In einer $m \times n$ -Tabelle stehen positive reelle Zahlen. In einem Zug darf man eine Zeile oder Spalte auswählen und von allen Einträgen den Kehrwert bilden. Zeige, dass man durch solche Züge eine Tabelle erreichen kann, in der jede Zeilensumme $\leq \frac{m}{2}$ und jede Spaltensumme $\leq \frac{n}{2}$ ist.

Aufgabe 33: Bestimme die 2017te Ableitung von $(\sin(x))^{2017}$.

Aufgabe 34: Es sei $n \in \mathbb{N}$. Gegeben sind n leuchtfähige Knöpfe K_1, \dots, K_n , von denen einige mit anderen verbunden sind. Drückt man einen der Knöpfe, so wechseln alle mit ihm verbundenen Knöpfe ihren Zustand (fangen also an zu leuchten, wenn sie derzeit nicht leuchten bzw. hören auf zu leuchten, wenn sie derzeit leuchten). Anfangs leuchtet keiner der Knöpfe. Drückt man einige (d.h. mindestens einen) der Knöpfe, so wird anschließend immer mindestens einer davon leuchten. Zeige: Es gibt eine Auswahl von Knöpfen, deren Betätigung alle Knöpfe leuchten lässt.

Aufgabe 35: Es sei $A = (a_i : i \in \mathbb{N})$ eine Folge natürlicher Zahlen, in der kein Wert doppelt auftritt. Zeige, dass A eine unendliche streng monoton wachsende Teilfolge enthält.

Aufgabe 36: Es sei $p \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom so, dass $2p(x)^5 - 5p(x)^4 - 8p(x)^3 + 7p(x)^2 + 5p(x) - 3$ keine reellen Nullstellen besitzt. Zeige, dass dann auch $2p(x)^2 + p(x) - 1$ keine reellen Nullstellen besitzt.

Aufgabe 37: Es sei K eine kompakte und zusammenhängende Teilmenge des \mathbb{R}^3 ; schneidet man K mit einer Ebene, die parallel zu einer der Koordinatenebenen liegt, so erhält man stets ein Quadrat. Zeige, dass K ein Würfel ist.

Aufgabe 38:

(a) Die Seiten eines gleichseitigen Dreiecks werden je mit einer von n Farben gefärbt. Zwei Färbungen gelten als gleich, wenn die eine durch Drehung aus der anderen hervorgeht. Wie viele verschiedene Färbungen gibt es (abhängig von n)?

(b) Betrachte (a) mit Fünf- und Siebenecken anstelle von Dreiecken.

(c) Verallgemeinere.

Aufgabe 39:

(a) Ein „Zögerweg“ von 0 nach $m \in \mathbb{N}_0$ der Länge $n \in \mathbb{N}$ ist eine Folge (a_1, \dots, a_n) mit $a_i \in \{0, 1\}$ für $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ und $\sum_{i=1}^n a_i = m$. Finde die Anzahl der Zögerwege von 0 nach m der Länge n in Abhängigkeit von m und n .

(b) Ein „Zauderweg“ von 0 nach $z \in \mathbb{Z}$ der Länge n ist eine Folge (a_1, \dots, a_n) mit $a_i \in \{-1, 0, 1\}$ für $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ und $\sum_{i=1}^n a_i = z$. Wir betrachten folgende Variante des Pascalschen Dreiecks:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & 1 & 1 & 1 & \\
 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & \\
 1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 \\
 1 & 4 & 10 & 16 & 19 & 16 & 10 & 4 & 1
 \end{array}$$

Hier entsteht jede Zahl durch Addition der darüberliegenden Zahl und ihrer rechten und linken Nachbarn (wobei nicht explizit eingetragene Zahlen gleich 0 sind). Wir betrachten die mittlere Spalte als die 0-te Spalte und

bezeichnen den k -ten Eintrag der n -ten Zeile mit $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$. Es ist also z.B.

$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 6$ und $\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} = 10$. Zeige: Die Anzahl der Zauderwege der Länge

n von 0 nach $z \in \mathbb{Z}$ ist gleich $\begin{bmatrix} n \\ z \end{bmatrix}$.

Aufgabe 40: Wir verwenden die Bezeichnung $\begin{bmatrix} n \\ z \end{bmatrix}$ wie in Aufgabe 40.

Zeige durch Verwendung der in Aufgabe 40(b) aufgezeigten kombinatorischen Interpretation:

- (a) $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}$ ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine ungerade Zahl.
- (b) Für alle $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{Z}$ ist $\begin{bmatrix} n \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ -z \end{bmatrix}$.
- (c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $z \in \mathbb{N}_0$ ist $\begin{bmatrix} n \\ z \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n-k}{z+k}$.

Aufgabe 41: Hans steht mit einem Laserpointer in seinem Zimmer. Im Zimmer seines Freundes Fritz einige Straßen weiter steht eine quadratische Buchstabentafel. Dazwischen haben Hans und Fritz eine Kette von quadratischen Spiegeln aufgebaut, die den Strahl des Laserpointers von Hans Zimmer auf die Buchstabentafel lenken. Über die Spiegel kann Fritz die vier Eckpunkte der Buchstabentafel anleuchten. Zeige, dass er jeden Punkt der Buchstabentafel anleuchten kann.

Aufgabe 42: Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Bestimme für $1 \leq i, j \leq n$ den (i, j) -ten Eintrag B_{ij} in Abhängigkeit von den Einträgen A_{kl} von A , wenn B aus A dadurch entsteht, dass...

- (a) A ‘um 90° nach rechts gedreht wird’, also etwa aus $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

die Matrix $B = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 8 & 5 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ wird.

- (b) A ‘um 180° gedreht wird’, also etwa aus $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ die Matrix

$B = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ wird.

- (c) A ‘an einer horizontalen Achse gespiegelt wird’, also etwa aus $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ die Matrix $B = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ wird.

- (d) A ‘an einer vertikalen Achse gespiegelt wird’, also etwa aus $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ die Matrix $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ wird.

(e) A ‘an der Hauptdiagonalen gespiegelt wird’, also etwa aus $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

die Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ wird.

(f) A ‘an der Nebendiagonalen gespiegelt wird’, also etwa aus $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

die Matrix $B = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 8 & 5 & 2 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ wird.

Aufgabe 43: Es seien $a, b \in \mathbb{R}^+$, $x_0 = a$, $x_1 = b$, $x_{k+2} = x_{k+1} + x_k$ für $k \geq 2$. Bestimme $\sum_{i=0}^n \frac{1}{x_i x_{i+2}}$ in Abhängigkeit von n , a und b .

Aufgabe 44: Gegeben ist ein in Teilwürfel mit Kantenlänge 1 zerlegter Würfel mit Kantenlänge 2^n . Einer der 8 mittleren Teilwürfel wurde entfernt. Zeige, dass der Rest sich aus ‘Minuswürfeln’ zusammensetzen lässt, wobei ein ‘Minuswürfel’ ein $2 \times 2 \times 2$ -Würfel ist, bei dem ein Teilwürfel entfernt wurde.

Aufgabe 45: Für $n \in \mathbb{N}_0$ bezeichne P_n das Produkt der ersten n Primzahlen. Es ist also etwa $P_0 = 1$, $P_1 = 2$, $P_2 = 2 \cdot 3 = 6$ und $P_3 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Ferner sei $\tilde{\mathbb{P}} := \{P_i : i \in \mathbb{N}_0\}$. Zeige: Jede natürliche Zahl n ist als Bruch $\frac{a}{b}$ darstellbar, wobei a und b Produkte von Elementen aus $\tilde{\mathbb{P}}$ sind.

Aufgabe 46: Wir verwenden die Bezeichnung $\begin{bmatrix} n \\ z \end{bmatrix}$ wie in Aufgabe 40.

(a) Bestimme $\sum_{i=-n}^n \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}$ in Abhängigkeit von n .

(b) Bestimme $\begin{bmatrix} n \\ 3-n \end{bmatrix}$ in Abhängigkeit von n .

(c) Zeige durch vollständige Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist $(x+1+x^{-1})^n = \sum_{i=-n}^n \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} x^i$.

(d) Zeige (c) erneut, diesmal durch kombinatorische Interpretation.

Aufgabe 47:

(a) Zeige: Es gibt eine natürliche Zahl k , für die folgendes gilt: Jede natürliche Zahl n ist in der Form $a - b$ darstellbar, wobei a und b Summen von höchstens k Kubikzahlen (einschließlich 0) sind.

(b) Verallgemeinere (a) von Kubikzahlen auf beliebige Potenzen natürlicher Zahlen.

Aufgabe 48:

(a) Wir führen folgendes Verfahren mit den natürlichen Zahlen durch: Erst streichen wir die 1. Die kleinste verbliebene Zahl ist 2. Wir streichen nun alle Zahlen, die größer als 2 und Vielfache von 2 sind. Die nächstgrößere verbliebene Zahl nach 2 ist 3. Wir streichen nun alle Zahlen, die größer als 3 und Vielfache von 3 sind. So verfahren wir weiter, indem wir jeweils die nächstgrößere verbliebene Zahl k betrachten und alle Zahlen streichen, die echt größer als k und Vielfache von k sind. Welche Zahlen bleiben auf diese Weise übrig?

(b) Wir modifizieren das Verfahren aus (a), indem wir nun (bei 1 beginnend) jeweils alle Zahlen streichen, die größer sind als k und **keine** Vielfachen von k sind. Welche Zahlen bleiben nun übrig?

Aufgabe 49: Bestimme in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$ die kleinste Zahl $k(n)$, für die folgende Aussage gilt: Unter $k(n)$ Teilmengen einer n -elementigen Menge befinden sich stets zwei, die einen nichtleeren Schnitt haben.

Aufgabe 50: Wir kommen noch einmal auf Beispiel 5.3 zurück. Es sei $i \leq m$, B_i der i -te Ball von links. Bestimme in Abhängigkeit von m , n und i , wie oft B_i die Richtung wechselt.

Aufgabe 51: 7 Biemen sitzen in einem regelmäßigen Sechseck mit Seitenlänge 10cm. Im Gegensatz zu ihren entfernten Verwandten, den Bienen, sind Biemen äußerst ungesellig und fangen sofort Streit an, sobald zwei sich näher als 11cm kommen. Kann es im Sechseck friedlich bleiben?

Aufgabe 52:

(a) Es sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum. Eine Menge $\mathbb{B} \subseteq V$ heißt ‘Biasis’ von V , falls jedes $v \in V$ sich auf genau zwei Weisen in der Form $v = \sum_{b \in \mathbb{B}} k_b b$ darstellen lässt, wobei die k_b aus K stammen und alle bis auf endlich viele gleich 0 sind. Finde alle Vektorräume, die eine Biasis besitzen.

(b) Eine ‘Triasis’ ist ähnlich definiert wie eine Biasis, nun soll aber jedes Element genau drei Darstellungen haben. Finde alle Vektorräume, die eine Triasis haben.

Aufgabe 53: Löse Beispiel 5.11 bzw. Aufgabe 5.10 erneut, diesmal unter Benutzung des Extremalprinzips.

Aufgabe 54: Es sei $n \in \mathbb{N}$, ferner sei $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ die Folge der Primzahlen $\leq n$. Bestimme $\sum_{i=0}^k (-1)^i \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_i \leq k} \left\lceil \frac{n}{p_{j_1} p_{j_2} \dots p_{j_i}} \right\rceil$.

(Tipp: Benutze das PIE, um den Term zu interpretieren.)

Aufgabe 55: Eine natürliche Zahl n heißt ‘quadratifrei’, falls sie durch keine Quadratzahl außer 1 teilbar ist.

(a) Zeige: Eine Zahl ist genau dann quadratifrei, wenn sie nicht durch das Quadrat einer Primzahl teilbar ist.

(b) Zeige: Die Anzahl der quadratifreien Zahlen $\leq n$ ist

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_i \leq k} \left\lceil \frac{n}{(p_{j_1} p_{j_2} \dots p_{j_i})^2} \right\rceil.$$

(Tipp: Benutze das PIE. Beachte auch Aufgabe 54.)

Aufgabe 56: Es sei $k \in \mathbb{N}$. Zeige: Es existiert ein $n \in \mathbb{N}$, für das folgendes gilt: Ist G ein gerichteter Graph mit n Ecken, wobei je zwei Ecken durch eine gerichtete Kante verbunden sind, und werden die Kanten von G mit zwei Farben gefärbt, so existiert in G ein gerichteter Pfad der Länge k , dessen Kanten alle die gleiche Farbe haben.

Aufgabe 57: In einem endlichen Graphen G habe jede Ecke einen geraden Grad. Zeige: Es ist möglich, jeder Kante von G eine Orientierung zu geben (also aus der ungerichteten eine gerichtete Kante zu machen) so, dass im entstehenden Graphen für jede Ecke der Ingrad gleich dem Ausgrad ist.

Aufgabe 58: Bestimme $\sum_{i=0}^n \frac{1}{F_i F_{i+2} F_{i+3}}$ in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$, wobei F_i die i -te Fibonaccizahl bezeichnet.

Aufgabe 59: Es sei $k \in \mathbb{N}$. Bestimme $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{kn} \right)$ in Abhängigkeit von k .

Aufgabe 60: Es sei $c \in [0, 1]$, $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

(a) Zeige: Es existiert ein $a \in [0, 1]$ so, dass $\int_0^a f(x) dx = c \int_a^1 f(x) dx$.

(b) Zeige: Es existiert ein $a \in [0, 1]$ so, dass $f(a) = c \int_0^1 f(x) dx$.

Aufgabe 61: Es seien $1 < k \in \mathbb{N}$ und q_1, \dots, q_{kn+1} positive rationale Zahlen. Entfernt man eine beliebige dieser Zahlen, lassen die übrigen sich in k Teilmengen mit je n Elementen aufteilen, so dass die Elementsumme für jede dieser Teilmengen die gleiche ist. Zeige, dass alle diese Zahlen gleich sein müssen.

Aufgabe 62: Wir kommen noch einmal auf den Aspekt der „Kontrolle“ (im Sinne der Einleitung) zurück. Kontrollstrategien dienen der Auswahl geeigneter Ansätze und der Steuerung des Lösungsversuchs: Was probiert

man aus? Wie lange? Was tut man, wenn ein Ansatz (auf eine gewisse Weise) nicht funktioniert?

Kontrollstrategien sind für das erfolgreiche Aufgabenlösen ebenso wichtig wie ein Vorrat an heuristischen Strategien. Tatsächlich können sie bisweilen sogar bei fast völliger Unkenntnis passender Heuristiken zum Ziel führen¹. Für den Aufbau von Kontrollstrategien ist es wichtig, sich die eigene Vorgehensweise immer wieder zu vergegenwärtigen und gezielt über Verbesserungen nachzudenken. Dabei soll diese Aufgabe helfen.

(a) Konstruiere ein Flussdiagramm, das die in diesem Buch besprochenen Varianten des Induktionsprinzips beschreibt sowie die Situationen, in denen man es ausprobieren sollte. Konstruiere entsprechende Flussdiagramme für die Kapitel 3 sowie 5–8.

(b) Konstruiere nun ein großes Flussdiagramm für die Kapitel 2–8. Lasse dir ruhig ein paar Tage oder Wochen Zeit und gehe sorgfältig vor – das Ergebnis kann dir in Zukunft beim Aufgabenlösen und der Entwicklung deiner Kontrollstrategien von großem Nutzen sein!

(c) Behalte das Ergebnis aus (b). Wann immer du eine neue Lösungsstrategie lernst, baue sie ein, ebenso, wenn du eine neue Kontrollstrategie lernst.

(d) Wenn du eine Aufgabe nicht selbst lösen, ihre Lösung aber in Erfahrung bringen kannst, arbeite zunächst eine heuristische Rekonstruktion der Lösung aus. Dann vergleiche mit deinem aktuellen Flussdiagramm: Was hat den Einsatz der richtigen Strategie oder den Erfolg des Einsatzes verhindert? Welche Anzeichen gab es dafür, dass sie hilfreich sein könnte? Oder fehlt noch eine Strategie? Was müsstest du im Flussdiagramm ändern, um den Fehler in Zukunft zu vermeiden?

¹Siehe dazu etwa S. 121 ff im Schoenfelds ‘Mathematical Problem Solving’.

Wie kommt man darauf?

Einführung in das mathematische Aufgabenlösen

Carl, M.

2017, X, 249 S. 15 Abb., 4 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-658-18249-6