

## 2. Visualisierung in Mathematik und Mathematikdidaktik

Visuelle Aspekte beim Lehren und Lernen von Mathematik haben in den letzten dreißig Jahren wachsende Aufmerksamkeit erhalten (vgl. Presmeg, 2014a, S. 151). Der Begriff „Visualisierung“ wird in der wissenschaftlichen Literatur in zahlreichen Bedeutungen verwendet. Einerseits kann der Vorgang des Visualisierens gemeint sein, andererseits die bei der Visualisierung entstandene Darstellung. Visualisierung kann meinen, eine Darstellung zu erzeugen oder von einer Darstellung aus zu weiteren Erkenntnissen zu gelangen. Gegenstand der Visualisierung kann beispielsweise ein geometrisches Objekt, ein Begriff oder ein Zusammenhang sein (siehe Abbildung 2.1, S. 14). Auch im Alltagsgebrauch hat der Begriff viele Bedeutungen.<sup>1</sup>

Sowohl das Darstellen an sich als auch die Fähigkeit, Darstellungen vor dem inneren Auge zu sehen und zu verändern, wird mit Visualisierung bezeichnet. Das Visualisieren kann mental, gedanklich vor dem inneren Auge, oder „materiell“, zum Beispiel als eine Zeichnung auf dem Papier, stattfinden. Ein enger Zusammenhang wird auch gesehen zwischen Visualisieren und

---

<sup>1</sup> In Gesprächen über das Thema Visualisierung sind die Gesprächspartner der Verfasserin von ganz unterschiedlichen Fragen ausgegangen. Die Mathematikdidaktikerin für die Primarstufe ging davon aus, dass die Arbeit Fragen aus dem Kontext E-I-S behandeln werde. Der Didaktiker für die Sekundarstufe erwartete, dass die Arbeit sich mit Repräsentationswechseln als Grundlage für mathematisches Verstehen befassen werde. Für den Psychologen war klar, dass mentale Repräsentationen einen wesentlichen Bestandteil dieser Arbeit ausmachen würden, und eine amerikanische Didaktikerin hielt es für offensichtlich, dass es um die Frage gehe, wie man etwas vor dem eigenen inneren Auge abbildet, um es selbst zu verstehen. Die Arbeit wurde alternativ im Bereich der Geometrie, der Arbeit mit Computergraphiken und der Philosophie mit der Frage nach der platonischen Sicht auf Mathematik verortet. Alle Gesprächspartner waren überzeugt zu wissen, was Visualisierung ist, und jeder meinte etwas anderes.

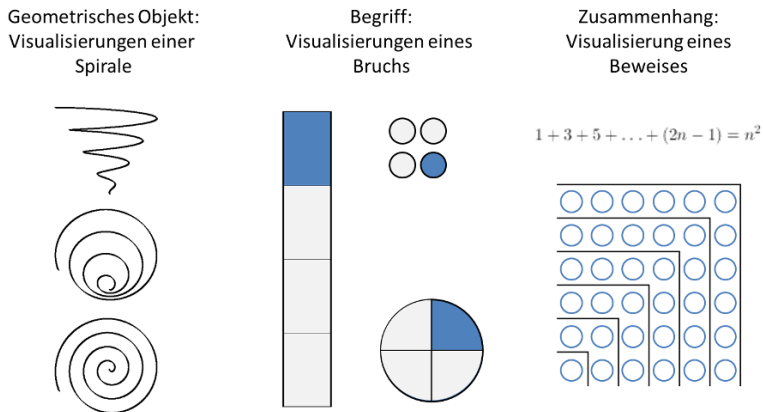
Repräsentieren, welches eher den Aspekt betont, dass eine Darstellung für etwas anderes steht.

Die Mehrdeutigkeit der Verwendung des Begriffs Visualisierung dient für diese Arbeit als Anlass, genauer zu klären, was man unter Visualisierung verstehen kann, ein Anliegen, das bereits in der Vergangenheit geäußert wurde:

„it would be productive at least to explore definitions of visualization for the purpose of establishing some theoretical common ground“ (Presmeg, 2014a, S. 156)

Ziel dieses Kapitels ist, einen klaren Visualisierungsbegriff zu wählen, der dann als eine theoretische Grundlage für die empirische Untersuchung dient. Es ist zu erwarten, dass nicht alle Lehrkräfte das Gleiche unter Visualisierung verstehen. Die Analyse der Theorie trägt dazu bei, offen für verschiedene Sichtweisen zu sein, die Lehrkräfte auf Visualisierung haben, und schärft den Blick für Erhebung und Auswertung.

**Abbildung 2.1.:** Visualisierungen von Objekt, Begriff und Zusammenhang



(Quellen: Abbildungen zu geometrischem Objekt und Begriff: Eigene Darstellung. Abbildung zu Zusammenhang: Modifiziert nach Arcavi, 2003, S. 225)

Das Ziel wird in vier Schritten erreicht. Zunächst wird im Umfeld der Mathematikdidaktik ein Überblick über die Vielfalt an Bedeutungen des Begriffs „Visualisierung“ gegeben, zudem werden mögliche Ursachen für die

Vielfalt benannt (Kapitel 2.1). Dann werden die Bedeutungen des Begriffs „Visualisierung“ anhand seiner Verwendung in der Mathematikdidaktik und in benachbarten Disziplinen analysiert. Die Analyse mündet in ein Modell, das unterschiedlichen unterschiedlichen Visualisierungsbegriffen maximal fünf Tätigkeiten zuordnet (Kapitel 2.2). Mit Hilfe des Modells wird der für diese Arbeit gewählte Visualisierungsbegriff von Arcavi (2003, S. 217) begründet und in die Theorie eingeordnet (Kapitel 2.3). Ein Exkurs am Ende des Kapitels zeigt Zusammenhänge zwischen Visualisieren und Repräsentieren auf und benennt Erweiterungspotenzial für das entwickelte Visualisierungsmodell (Kapitel 2.4).

## 2.1. Verwendung des Begriffs „Visualisierung“

Die Vielfalt an Bedeutungen, mit denen der Begriff „Visualisierung“ verwendet wird, wurde im Umfeld der Mathematikdidaktik häufig thematisiert (vgl. Boeckmann, 1982, S. 13; Bishop, 1989, S. 7; Zimmermann & Cunningham, 1991a, S. 3; Gutiérrez, 1996, S. 4; Guzman, 2002, S. 4; Kadunz, 2003, S. 23; Mancosu, 2005, S. 13; Presmeg, 2006b, S. 206; Clements, 2014, S. 179). Aus welchen Bestandteilen eine übergeordnete Theorie zu Visualisierung in der Mathematikdidaktik – zu der auch eine Auseinandersetzung mit dem Visualisierungsbegriff gehören würde – zusammengesetzt sein könnte, ist dennoch eine offene Frage geblieben (vgl. Presmeg, 2014b, S. 639), und es besteht Bedarf, Visualisierungsbegriffe genauer zu untersuchen, um eine gemeinsame theoretische Basis zu schaffen (vgl. auch das Zitat von Presmeg, 2014a, S. 156, im vorherigen Abschnitt).

Im Folgenden werden drei Ursachen beschrieben, warum der Begriff „Visualisierung“ vielfältig verstanden wird. Erstens kann Visualisierung sowohl einen Prozess als auch das Produkt eines Prozesses meinen (Kapitel 2.1.1). Zweitens werden das deutsche Wort „visuell“ und das englische Wort „visual“ beide mehrdeutig verwendet (Kapitel 2.1.2). Drittens haben die Mathematikdidaktik und ihre Bezugsdisziplinen jeweils eigene Perspektiven auf „Visualisierung“ entwickelt, die mit verschiedenen Bedeutungen einhergehen (Kapitel 2.1.3).

### 2.1.1. Prozess und Produkt

Das Wort „Visualisierung“ wird als Substantivierung des Verbs „visualisieren“ in zwei Bedeutungen verwendet. Einerseits bezeichnet Visualisierung den Vorgang des Visualisierens, man spricht dann von „Visualisierung als

Prozess“. Andererseits werden die Ergebnisse dieses Prozesses als Visualisierungen bezeichnet. Man spricht dann von „Visualisierung als Produkt“. Das Wort „Visualisierung“ kann also im Deutschen je nach Kontext als Prozess oder als Produkt aufgefasst werden.<sup>2</sup> Auch im Englischen wird „visualization“ als Prozess und als Produkt verwendet (Bishop, 1989, S. 7). Oft wird zwischen beiden Bedeutungen nicht unterschieden.<sup>3</sup>

### 2.1.2. Etymologische Wurzeln

Das Wort „Visualisierung“ kann auf das lateinische „visualis“ zurückgeführt werden, das mit „zum Sehen gehörig“ übersetzt werden kann.<sup>4</sup> Das Wort „sehen“ steht einerseits für das Sehen mit den Augen, also den Sehsinn, und andererseits metaphorisch für „Einsicht“ oder „Verstehen“.<sup>5</sup> Entsprechend können das deutsche „Visualisierung“ und das englische „visualization“ „für das Auge sichtbar machen“ oder „für das Verständnis sichtbar machen“ meinen, sie können also sowohl auf das physische Sehen als auch auf das mentale Verstehen zielen.

Das englische Wort „visual“ kann darüber hinaus nicht nur „sichtbar“, sondern auch „bildlich“ bedeuten. Somit kann mit „visual image“ oder „visualization“ je nach Kontext ein im direkten oder übertragenen Sinne sichtbares (nicht unbedingt bildliches) Objekt oder ein bildliches (flächig-räumliches) Objekt gemeint sein.

### 2.1.3. Perspektiven verschiedener Disziplinen

Die Mathematikdidaktik und ihre Bezugsdisziplinen interessieren sich für Visualisierung aus unterschiedlichen Perspektiven, was ebenfalls mit un-

<sup>2</sup> Das Verwenden des Begriffs „Visualisierung“ als Prozess und als Produkt wird auch in anderen didaktischen Disziplinen thematisiert, z.B. bei Ebert (2013) über die Bedeutung von Visualisierung in den Sozialwissenschaften, oder bei Schönfeldt (2005) über die Rolle von Visualisierung im bilingualen Geographieunterricht.

<sup>3</sup> Die Doppeldeutigkeit von Visualisierung als Prozess und als Produkt bezieht sich nicht auf die Vergegenständlichung („reification“) von Prozessen in Form von Objekten und die doppelte Natur von mathematischen Konzepten, wie sie beispielsweise bei Sfard (1991) beschrieben wird. Visualisierungsprodukte im Sinne von Sfard als Vergegenständlichung von Visualisierungsprozessen zu betrachten, ist allerdings denkbar (vgl. Presmeg, 2006a, S. 24).

<sup>4</sup> Siehe <http://www.dwds.de/?qu=visuell> (Zugriff am 25.8.2015).

<sup>5</sup> Siehe <http://www.dwds.de/?qu=sehen> (Zugriff am 25.8.2015).

terschiedlichen Bedeutungen des Begriffs „Visualisierung“ einhergeht.<sup>6</sup> Im Folgenden werden einige mit Visualisierung verbundene Fragen benannt, um aufzuzeigen, wie über die sprachlichen Varianten hinaus der Begriff „Visualisierung“ in verschiedenen Disziplinen mit verschiedenen Bedeutungen verwendet wird.

## Mathematik

In der Mathematik versteht man unter Visualisierung vor allem das Arbeiten mit graphischen Darstellungen. Für viele Mathematikerinnen und Mathematikern ist das Visualisieren ein fester Bestandteil mathematischen Arbeitens (vgl. z.B. Hadamard, 1954; Polya, 1956). Die Darstellungen repräsentieren mathematische Konzepte und dienen dazu, Verständnis und Erkenntnis zu gewinnen. Darstellen kann man mit der gleichen Visualisierung sowohl geometrische als auch algebraische Objekte oder Konzepte, sowohl Daten als auch Zusammenhänge. Beispielsweise kann ein gezeichnetes Rechteck die geometrische Form „Rechteck“ repräsentieren (geometrisches Konzept), man kann mit einem Rechteck, das in gleiche Teile unterteilt ist, einen Bruch darstellen (algebraisches Konzept), man kann mit verschiedenen Rechtecken in einem Säulendiagramm Daten darstellen, und man kann mit einem in vier Teilflächen unterteilten Rechteck das Distributivgesetz veranschaulichen (siehe Abbildung 2.2, S. 18).

Die Darstellungen können „materiell“ sein, beispielsweise in Form von Zeichnungen oder Computerbildern, oder sie werden mental mit Hilfe der Vorstellungskraft genutzt.<sup>7</sup> Die Darstellungen können sowohl individuell erfolgen, wie beispielsweise als Skizze beim Lösen eines Problems, als auch standardisiert festgelegten Konventionen genügen, wie zum Beispiel ein Funktionsgraph.

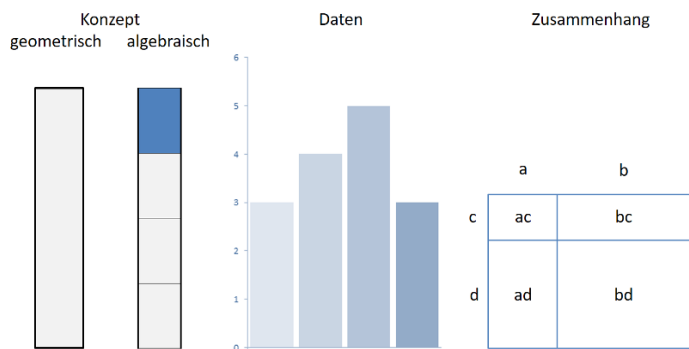
## Mathematische Visualisierung

Eng verbunden mit der Mathematik ist die relativ junge Teildisziplin „mathematical visualization“, in der erforscht wird, wie man komplexe mathematische Probleme mit Hilfe graphischer Darstellungen am Computer darstellen und lösen kann (vgl. z.B. Hege & Polthier, 1997a, S. V). Im

<sup>6</sup> Beispielsweise stellt Clements (2014, S.179 f.) dar, dass Mathematik, Psychologie und Mathematikdidaktik mit „Visualisierung“ ganz unterschiedliche Bedeutungen und Fragestellungen verbinden.

<sup>7</sup> Thurston (1994, S. 4) beschreibt anschaulich aus Sicht eines Mathematikers die hohe Bedeutung, die die mentale Vorstellung beim Lösen mathematischer Probleme hat.

**Abbildung 2.2.:** Visualisierungen von Konzept, Daten und Zusammenhang mit Rechtecken



(Quelle: Eigene Darstellung)

Kontext „mathematical visualization“ geht es hier um Computerbilder, beispielsweise das Entwickeln von Animationen algebraischer Kurven oder von Darstellungsformen des vierdimensionalen euklidischen Raumes.

## Philosophie der Mathematik

Die Philosophie hinterfragt unter dem Stichwort Visualisierung unter anderem, wozu bildliche Darstellungen aus erkenntnistheoretischer Perspektive dienen können, beispielsweise ob sie als Beweise akzeptiert werden und wie, beispielsweise vor dem Hintergrund der Ideenlehre Platons, die Zusammenhänge zwischen mathematischen Objekten und ihren Darstellungen zu interpretieren sind (vgl. z.B. Mancosu, Jørgensen & Pedersen, 2005; Brown, 2008).

## Psychologie

Die Psychologie befasst sich im Kontext Visualisierung unter anderem mit der Untersuchung räumlicher Fähigkeiten, die beispielsweise von den Faktoren „räumliche Orientierung“ und „Visualisierung“ abhängen (vgl. z.B. Clements, 2014, S. 179; Bishop, 1980). Auf individueller Ebene nimmt die „verbalizer-visualizer hypothesis“ an, dass die einen Menschen lieber verbal, andere

bevorzug visuell denken (Richardson, 1977, zitiert nach Clements, 2014, S. 179).

Psychologische Fragestellungen richten sich darüber hinaus im Kontext Visualisierung auf die kognitiven, motivationalen und physiologischen Prozesse, die beim Arbeiten mit mentalen und externalen Repräsentationen ablaufen, beispielsweise im Kontext Text-Bild-Verständnis (z.B. Schnotz, 2002).

## **Mathematikdidaktik**

Die Mathematikdidaktik hat Fragestellungen zu Visualisierung aus allen genannten Disziplinen integriert. Zusätzlich hebt sie unter dem Blickwinkel des Lehrens und Lernens den Wechsel zwischen Repräsentationsformen hervor (z.B. Duval, 1999). Die semiotische Perspektive innerhalb der Mathematikdidaktik interessiert sich unter dem Stichwort Visualisierung vor allem für die Beziehungen zwischen Zeichen und Inhalt (z.B. Presmeg, 2006a; Kadunz, 2003).

## **Fazit**

Auch weil verschiedene Disziplinen unterschiedliche Forschungstraditionen haben, wird der Begriff „Visualisierung“ je nach Kontext mit unterschiedlichen Inhalten verbunden. Im Folgenden wird ein Modell erarbeitet, das ermöglicht, verschiedene Bedeutungen und Perspektiven zu analysieren und zu integrieren.

## **2.2. Überblick anhand eines prozessbasierten Modells**

Es ist offen, ob die in Kapitel 2.1 skizzierten Bedeutungen, die mit dem Begriff „Visualisierung“ verbunden werden, systematisch geordnet werden können (vgl. Presmeg, 2014a, S. 156). In diesem Kapitel wird eine Systematisierung entwickelt, indem konkrete Visualisierungsdefinitionen aus der Fachliteratur der Mathematikdidaktik und benachbarter Disziplinen analysiert werden. Zunächst werden in Kapitel 2.2.1 mögliche Kriterien für eine Anordnung abgewogen. Von Kapitel 2.2.2 bis Kapitel 2.2.6 wird das Modell in mehreren Schritten entwickelt.

Das Modell ermöglicht auf theoretischer Ebene, eine Visualisierungsdefinition mit maximal fünf Tätigkeiten zu beschreiben sowie Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen Visualisierungsdefinitionen herauszuarbeiten.

Außerdem sensibilisiert es für die Bedeutungen, mit denen der Begriff Visualisierung in der Wissenschaft und im Alltag verwendet wird.

In Kapitel 2.2.7 wird das Modell überprüft, indem gezeigt wird, dass sich auch weitere Visualisierungsdefinitionen in das Modell einordnen lassen. Abschließende Anmerkungen werden in Kapitel 2.2.8 zusammengefasst.

### **2.2.1. Auswahl eines Vorgehens**

Denkbar ist, Visualisierungsdefinitionen nach Fachgebieten, nach Visualisierungsprodukten oder nach Visualisierungsprozessen zu ordnen (vgl. Kapitel 2.1).

Die Anordnung nach Fachgebieten könnte beispielsweise an die charakterisierten Bedeutungen aus Mathematik, Psychologie oder Mathematikdidaktik (siehe Kapitel 2.1.3) anknüpfen. Dafür spricht, dass sich so die Bedeutung des Begriffs in verschiedenen Forschungs- und Denktraditionen abbilden lässt. Gegen die Anordnung nach Fachgebieten spricht, dass die Bedeutungen von Visualisierung bereits innerhalb einer Disziplin vielfältig sein können. Vor allem innerhalb der Mathematikdidaktik, in der es viele Visualisierungsdefinitionen gibt, ist eine Anordnung ausschließlich nach Disziplinen daher zu grob.

Zu Visualisierung gehören die Darstellungen beziehungsweise Produkte (siehe Kapitel 2.1.1), mit denen im Kontext Visualisierung gearbeitet wird. Auch nach ihnen könnte man die Bedeutungen des Begriffs „Visualisierung“ ordnen. Allerdings gibt es viele Visualisierungsprodukte und nur erste Ansätze für eine Strukturierung (vgl. z.B. Presmeg, 2008; siehe auch Kapitel 3.4).

Alternativ kann man von „Visualisierung“ als Prozess (siehe Kapitel 2.1.1) ausgehen und die Bedeutungen nach den Tätigkeiten ordnen, die unter Visualisieren verstanden werden. Allerdings können bei der gleichen Tätigkeit unterschiedliche Produkte (z.B. mentale oder externale Bilder) entstehen, und die Tätigkeiten können auch von unterschiedlichen Ausgangslagen ausgehen. Auch muss man entscheiden, ob man eine Tätigkeit aufgrund unterschiedlicher Ausgangslagen oder unterschiedlicher Produkte in zwei Tätigkeiten trennt. Denkt man in Prozessen, bleibt bei der Anordnung ausschließlich nach Tätigkeiten möglicherweise offen, wie Input und Output der



Prozesse<sup>8</sup> berücksichtigt werden. Außerdem muss dann bedacht werden, dass Visualisierung auch aus mehreren Tätigkeiten bestehen kann.

Im Folgenden wird zum Ordnen ein Ansatz gewählt, der auf Visualisierung als Prozess und auf Visualisierung als Produkt zurückgreift. Der Ansatz geht von den Tätigkeiten beim Visualisieren aus und berücksichtigt als weiteres Ordnungskriterium Input oder Output. Er setzt also voraus, dass Visualisierung aus Tätigkeiten besteht. Geht man aber davon aus, dass Visualisierungsprodukte aufgrund von Tätigkeiten entstehen, können so auch die Definitionen von Visualisierung eingeordnet werden, in denen keine Tätigkeiten vorkommen, sondern in denen Visualisierung nur als Produkt verstanden wird.

In den Kapiteln 2.2.2 bis 2.2.6 werden daher in Visualisierungsdefinitionen vorkommende Tätigkeiten identifiziert, beschrieben und zueinander in Beziehung gesetzt. Die Definitionen werden aus Mathematikdidaktik, Psychologie, Mathematik, Mathematischer Visualisierung und Philosophie der Mathematik (vgl. Kapitel 2.1.3) genommen.

### 2.2.2. Visualisierung als Erstellen und Interpretieren

Zunächst werden aus den Visualisierungsdefinitionen von Zimmermann und Cunningham (1991a) und Duval (2014) die Tätigkeiten *Erstellen* und *Interpretieren* hergeleitet.

#### Visualisierung als *Erstellen* und *Verwenden*

Zimmermann und Cunningham (1991a, S. 1) beschreiben Visualisierung mit

„We take the term visualization to describe the process of producing or using geometrical or graphical representations of mathematical concepts, principles or problems, whether hand drawn or computer generated.“ (Zimmermann & Cunningham, 1991a, S. 1)

Für sie umfasst Visualisierung also die Tätigkeiten „produce or use“, übersetzbar mit *Erstellen oder Verwenden*. Man kann beide Tätigkeiten gemeinsam

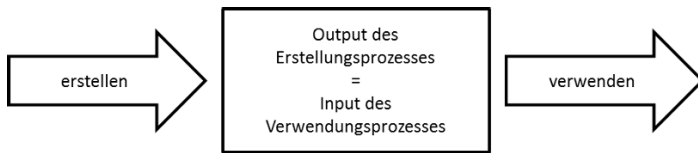
---

<sup>8</sup> Man kann einen Prozess als eine Struktur verstehen, die aus einer Tätigkeit mit einem definierten Startereignis (Input) und einem Ergebnis (Output) besteht (Fischermanns, 2008, S. 12). Ein Prozess ist dann mehr als die Tätigkeit. In dieser Arbeit werden Prozess und Tätigkeit aber gleichgesetzt und gegebenenfalls genauer anhand von Input und Output beschrieben.

oder auch einzeln durchführen. Verbunden sind die beiden Tätigkeiten durch den Bezug auf „geometrische oder graphische Repräsentationen“.

Mit „geometrischen oder graphischen Repräsentationen“ bezeichnen Zimmermann und Cunningham Darstellungen mit einer flächigen oder räumlichen<sup>9</sup> Komponente. Die Darstellungen beziehen sich auf mathematische Konzepte, Prinzipien oder Probleme und sowohl auf geometrische als auch auf nicht-geometrische, beispielsweise algebraische Themen (vgl. Zimmermann & Cunningham, 1991a, S. 3). Denkt man in Prozessen (vgl. Fußnote 8, S. 21), so sind die Darstellungen Output des *Erstellens* und dienen gleichzeitig als Input für das *Verwenden* (Abbildung 2.3, S. 22).

**Abbildung 2.3.:** Output des Erstellens = Input des Verwendens



(Quelle: Eigene Darstellung)

Die Darstellungen sind nach Zimmermann und Cunningham (1991a, S. 1) von Hand gezeichnet oder mit dem Computer hergestellt. Es geht also um Darstellungen, die für das Auge sichtbar sind, um *externe* Repräsentationen. Man meint zunächst, dass Zimmermann und Cunningham keine *mentalen* Repräsentationen berücksichtigen. Aber sie halten in der Mathematik die Beschränkung auf mentale Bilder, die aus ihrer Sicht im Alltag und in der Psychologie mit Visualisierung verbunden werden, für künstlich (Zimmermann & Cunningham, 1991a, S. 3) und schließen sowohl externe (Schnotz, 2002) als auch mentale Repräsentationen in ihr Verständnis von Visualisierung ein:

„Mathematical visualization is the process of forming images (mentally, or with pencil and paper, or with the aid of technology) and using such images effectively for mathematical discovery and understanding.“ (Zimmermann & Cunningham, 1991a, S. 3)

<sup>9</sup> Bei anderen Autoren finden sich statt „räumlich“ unter anderem die Bezeichnungen ikonisch, bildlich, graphisch, spatial und depiktional, womit leicht unterschiedliche Nuancen gesetzt werden. Die Nuancen spielen aber für diese Arbeit keine Rolle.

Das Verwenden konkretisieren Zimmermann und Cunningham im vorangegangenen Zitat mit den Zielen „Entdecken“ und „Verstehen“, geistigen Tätigkeiten, mit denen ausgehend von den Darstellungen weiter gedacht wird.

### Visualisierung als *Erkennen*

Duval (2014) hingegen trennt explizit zwischen dem Erstellen und dem Verwenden von Darstellungen. Er bezeichnet mit „visualization“ die Tätigkeit, bei der es um das *Erkennen von mathematisch Relevantem* in visuellen Repräsentationen geht:

„We will distinguish between visual representations and visualization. Visual representations are all kinds of representations that are used in mathematics and in the teaching of mathematics to fulfill quite different functions [...] Visualization is the recognition, more or less spontaneous and quick, of what is mathematically relevant in any visual representation given or produced.“ (Duval, 2014, S. 159 f.)

Das Erstellen von visuellen Repräsentationen<sup>10</sup>, das *Repräsentieren*, bezeichnet Duval nicht als Visualisierung, wie er für algebraische Ausdrücke auch konkret formuliert:

„From a cognitive point of view, visualization does not consist in the switch from algebraic expressions to graphs, that is, in a coding process, but in the recognition (and even very quick recognition) of the algebraic expression visualized by the graph.“ (Duval, 2014, S. 165)

Gleichzeitig bemerkt Duval, dass Mathematiker und Lehrkräfte im Allgemeinen nicht zwischen „visual representation“ und „visualization“, mit den hier gewählten Bezeichnungen *Repräsentieren* und *Verwenden* der visuellen Repräsentationen, unterscheiden. Er weist darauf hin, dass man aber für das Verwenden zuerst lernen müsse, in den Repräsentationen mathematisch Relevantes zu sehen, beispielsweise in einem Funktionsgraphen einen algebraischen Ausdruck. Das Sehen bezeichnet er als *visualization*. Wenn man eine visuelle Repräsentation nicht kenne, sei nicht offensichtlich, welche visuellen Elemente in ihr wichtig sind (vgl. Duval, 2014, S. 160).

<sup>10</sup> Für die graphischen Repräsentationen wählt Duval (2014) den Ausdruck „visual representations“.

### Zwischenergebnis: Visualisierung als *Erstellen* und *Interpretieren*

Durch das Analysieren der Visualisierungsdefinitionen von Zimmermann und Cunningham (1991a) sowie Duval (2014) konnten die Tätigkeiten *Erstellen*, *Verwenden* und *Erkennen* im Kontext Visualisierung identifiziert werden. Zimmermann und Cunningham verstehen das *Erstellen* und *Verwenden* geometrischer oder graphischer Repräsentationen als Visualisierung, Duval versteht ausschließlich das *Erkennen* in visuellen Repräsentationen als Visualisierung. Beim *Erstellen* entstehen als Output Repräsentationen, beim *Verwenden* und *Erkennen* sind Repräsentationen der Input für die Tätigkeit.

Sowohl *Verwenden* als auch *Erkennen* beinhalten, mathematisch Relevantes in den Repräsentationen zu erkennen. Beide Tätigkeiten werden für das Modell, das hier aufgebaut wird, mit *Interpretieren* zusammengefasst, um die Idee des inhaltlichen Weiterentwickelns beim *Verwenden* beziehungsweise *Erkennen* zum Ausdruck zu bringen.<sup>11</sup> Im ersten Schritt umfasst das Modell, das die Bedeutungen von Visualisierung beschreibt, also die beiden Tätigkeiten *Erstellen* und *Interpretieren*.

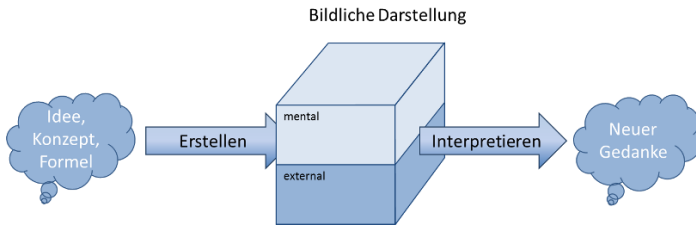
Beide Tätigkeiten werden durch die *geometrischen oder graphischen* (vgl. Zimmermann & Cunningham, 1991a, S. 1) beziehungsweise *visuellen* Repräsentationen (vgl. Duval, 2014, S. 159), die Output des *Erstellens* oder Input des *Interpretierens* sind, miteinander verbunden. Als übergeordneter Begriff wird im Modell für die Repräsentationen die Bezeichnung *bildliche Darstellung* gewählt, um erstens zum Ausdruck zu bringen, dass es um Darstellungen geht, die eine flächige, nicht rein symbolische Komponente haben<sup>12</sup>, und um zweitens mit dem Begriff *Darstellung* im Vergleich zum Begriff *Repräsentation* einen weiter gefassten Begriff zu wählen. Die bildlichen Darstellungen können mental oder external sein. Sie können sich sowohl auf geometrische als auch auf nicht-geometrische mathematische Konzepte beziehen.

Abbildung 2.4, S. 25, stellt das bis hierhin entwickelte Modell dar. Die Abbildung konkretisiert den prozeduralen Gedanken, benennt die Tätigkeiten *Erstellen* und *Interpretieren* und beschreibt die zentrale bildliche Darstellung als mental oder external.

<sup>11</sup> Der Gedanke des *Interpretierens* findet sich nach Greeno und Hall (1997, S. 366) auch bei Peirce in „Logic as Semiotic: The theory of signs“ (zitiert nach Greeno und Hall, 1997, S. 366). Das Interpretieren verbindet Repräsentiertes und sichtbare Form miteinander (vgl. Greeno & Hall, 1997, S. 366).

<sup>12</sup> Vgl. Fußnote 9, S. 22.

**Abbildung 2.4.:** Visualisierungsmodell mit *Erstellen* und *Interpretieren* als erster Dimension



(Quelle: Eigene Darstellung)

### 2.2.3. Erstellen und Interpretieren in weiteren Definitionen

Als nächstes wird das Modell genutzt, um weitere Visualisierungsdefinitionen, die man aufgrund der in ihnen genannten Tätigkeiten mit *Erstellen* beziehungsweise *Interpretieren* durch das Modell beschreiben kann, miteinander zu vergleichen. Unterschiede zwischen den Definitionen kristallisieren sich durch die drei folgenden Fragen heraus:

1. Sind die in der Visualisierungsdefinition genannten bildlichen Darstellungen *mentale* oder *externale* Repräsentationen?
2. Welches Gewicht haben *Erstellen* beziehungsweise *Interpretieren* in der Visualisierungsdefinition?
3. Was wird in der Visualisierungsdefinition genauer unter *Erstellen* beziehungsweise *Interpretieren* verstanden?

Zu Frage 1 werden in Abschnitt *Mentale oder externale bildliche Repräsentationen* Beispiele für unterschiedliche Positionierungen gegeben. Zu Frage 2 stellt Abschnitt *Gewichtung von Erstellen und Interpretieren* Definitionen vor, die unterschiedliche Akzente setzen. Zu Frage 3 werden im Abschnitt *Konkretisierung von Erstellen und Interpretieren* Analogien zu Kodieren beziehungsweise Sprache herausgearbeitet.

#### Mentale oder externale bildliche Repräsentationen

Die Visualisierungsdefinitionen von Hege und Polthier (1997b), Clements (2014), Mancosu (2005) und Gutiérrez (1996) können mit *Erstellen* beziehungsweise *Interpretieren* beschrieben werden. Die folgenden Zitate lenken

die Aufmerksamkeit auf die Art der bildlichen Darstellungen in den Definitionen. Sie werden exemplarisch herausgegriffen, um kenntlich zu machen, dass die Darstellungen je nach Visualisierungsdefinition mental oder external sind.

Im Gebiet „Mathematische Visualisierung“ werden mit Computergraphiken *ausschließlich externale Repräsentationen* betrachtet (vgl. Hege & Polthier, 1997a, S. V). Für Clements (2014, S. 181) hingegen sind die Tätigkeiten und Repräsentationen beim Visualisieren *ausschließlich mental*:

„For me, visualization is something which someone does in one’s mind – it is a personal process that assumes that the person involved is developing or using a mental image.“ (Clements, 2014, S. 181)

Mancosu (2005) *unterscheidet nicht zwischen mentalen und externalen Repräsentationen*<sup>13</sup>:

„I will take a rather broad conception of visualization to include both visualization by means of mental images as well as visualizations by means of computer generated images or images drawn on paper, e.g. diagrams etc.“ (Mancosu, 2005, S. 13)

Gutiérrez (1996) berücksichtigt mentale und externale Darstellungen, hält aber die *mentalen* für *zentral*:

„I therefore consider ‘visualization’ in mathematics as the kind of reasoning activity based on the use of visual or spatial elements, either mental or physical, performed to solve problems or prove properties. [...] I consider mental images as the basic element in visualization.“ (Gutiérrez, 1996, S. 9)

Gutiérrez (1996) beschreibt allerdings weniger das *Interpretieren* selbst, sondern dass das Ziel des Visualisierens das Begründen („reasoning“) ist.

Hinsichtlich der Frage, ob die bildlichen Darstellungen beim Visualisieren *mental oder external* sind, finden sich also sehr unterschiedliche Auffassungen. Die Auffassungen können mit Hilfe des entwickelten Modells miteinander verglichen werden.

<sup>13</sup> Genauso wie Zimmermann und Cunningham (1991a, S. 1), siehe S. 22.

### Gewichtung von *Erstellen* und *Interpretieren*

Eine weitere Unterscheidung in Visualisierungsdefinitionen, die mit *Erstellen* und *Interpretieren* beschrieben werden können, liegt darin, wie beide Tätigkeiten in den Definitionen gewichtet werden.

Bereits in Kapitel 2.2.2 wurde herausgestellt, dass Visualisierung bei Zimmermann und Cunningham (1991a, S. 1) *Erstellen* und *Interpretieren* umfasst, wobei beide Tätigkeiten gemeinsam oder isoliert durchgeführt werden können. Auch Clements (2014) (s.o., S. 26) und Mancosu (2005) (s.o., S. 26) können unter *Erstellen* und *Interpretieren* eingeordnet werden, wobei bei Mancosu (2005) das *Erstellen* stärker erkennbar ist als das *Interpretieren*.

Duval (2014, S. 165) hingegen versteht Visualisierung ausschließlich als *Interpretieren*. Ebenfalls unter *Interpretieren* einordnen lässt sich „Interpreting figural information (IFI)“, welches nach Bishop (1983, S. 184) die Fähigkeit ist, mathematische Objekte wie geometrische Figuren, Graphen und Diagramme zu lesen, verstehen und interpretieren.<sup>14</sup> Auch bei Gutiérrez (1996) (s.o., S. 26) und bei Guzman (2002) wird Visualisierung ausschließlich als *Interpretieren* gesehen:

„Visualization is therefore not an immediate vision of the relationships, but rather an interpretation of what is presented to our contemplation that we can only do when we have learned to appropriately read the type of communication it offers us.“  
(Guzman, 2002, S. 3)

Bei den Visualisierungsdefinitionen, die mit *Erstellen* und *Interpretieren* beschrieben werden können, gibt es also sehr verschiedene Gewichtungen zwischen beiden Tätigkeiten. *Erstellen* und *Interpretieren* können gleich oder unterschiedlich gewichtet werden und auch isoliert betrachtet werden. Gemeinsam ist allen Definitionen, dass beim *Erstellen* und *Interpretieren* Eigenschaften von mathematischen Konzepten mental oder external mittels *bildlicher Darstellungen* sichtbar gemacht werden.

### Konkretisierung von *Erstellen* und *Interpretieren*

Bei der Entwicklung des Modells wurden verschiedene Tätigkeiten mit *Erstellen* und *Interpretieren* zusammengefasst. Beispielsweise umfasst das

<sup>14</sup> Bishop spricht allerdings von einer Fähigkeit, nicht von einer Tätigkeit. Da die Fähigkeit sich in Tätigkeiten äußert, wird bei der Analyse der Visualisierungsdefinitionen jedoch nicht zwischen einer Fähigkeit und ihren korrespondierenden Tätigkeiten unterschieden (vgl. auch Gutiérrez, 1996, S. 7).

Interpretieren das Verwenden und das Erkennen (s.o., Kapitel 2.2.2). Im Folgenden werden beide Tätigkeiten konkretisiert, indem genauer dargestellt wird, welche Tätigkeiten aus verschiedenen Visualisierungsdefinitionen unter *Erstellen* und *Interpretieren* eingeordnet wurden.

Duval (2014, S. 165) legt den Fokus beim Interpretieren auf das Erkennen der relevanten Einheiten, das für das Interpretieren aus seiner Sicht notwendig ist. Er versteht das Interpretieren als Übersetzen oder *Dekodieren* bildlich gegebener Inhalte, das erlernt werden muss. Beim ihm ist Erstellen zwar kein Bestandteil von Visualisierung (s.o. S. 23), aber er beschreibt es als ein Vorgehen nach gewissen Regeln, als *Kodieren*. *Erstellen* und *Interpretieren* entsprechen also einem *Kodieren* und *Dekodieren*. Auch Guzman (2002) beschreibt, dass die graphischen Repräsentationen interpretiert (Guzman, 2002, S. 3) beziehungsweise dekodiert (Guzman, 2002, S. 4) werden. Sowohl Duval als auch Guzman heben hervor, dass diese Art von Kommunikation gelernt werden muss.

Zusätzlich betont Guzman (2002, S. 3), dass das Interpretieren in einen historischen und sozialen Kontext eingebettet ist (Guzman, 2002, S. 3). Die *Kontextabhängigkeit* beim Interpretieren beschreibt ebenfalls Bishop (1983, S. 184):

„It [the ability for interpreting figural information] is an ability of content and of context.“ (Bishop, 1983, S. 184)

Mit Kodieren vergleichbare Tätigkeiten formulieren Kupfermann sowie Hershkowitz, die beide Visualisierung in Nardi (2014, S. 196 ff., 198 ff.)<sup>15</sup> eine *Sprache* nennen, die die Möglichkeit bietet, mathematisch zu denken (vgl. auch Nardi, 2014, S. 193). Aus der Sicht von Kupfermann und Hershkowitz geht man beim *Erstellen* und *Interpretieren* bildlicher Darstellungen nach *Regeln* vor, die man zunächst *lernen* (Kupfermann) beziehungsweise *entwickeln und kommunizieren* muss (Hershkowitz).

*Erstellen* und *Interpretieren* wird also verglichen mit *Kodieren* und *Dekodieren*, und das beinhaltet ein *erlernbares, regelgeleitetes, kontextabhängiges* Vorgehen. Auch die alternative Analogie zu einer Sprache kann als ein Vorgehen nach (sozial und kulturell eingebetteten) Regeln verstanden werden kann, bei dem das *Erstellen* für das *Sprechen oder Schreiben* und das *Interpretieren* für das *Verstehen* steht.<sup>16</sup> Ein Unterschied zwischen der Auffassung von Visualisierung als Kodieren oder als Sprache ist, dass man in einer Sprache

<sup>15</sup> Der Beitrag von Nardi (2014) enthält Teilkapitel von Kupfermann und von Hershkowitz.

<sup>16</sup> Auch das Sprichwort „Ein Bild sagt mehr als tausend Worte“ gibt Visualisierung den Status einer Sprache.



die Regeln beim Anwenden nicht unbedingt wahrnimmt, wohingegen beim Kodieren Regeln bewusst dazugehören.

### Zusammenfassung

Zahlreiche Visualisierungsdefinitionen lassen sich unter der Perspektive *Visualisierung als Erstellen und Interpretieren bildlicher Darstellungen* einordnen. Visualisierung kann eine oder beide Tätigkeiten meinen, und wenn beide Tätigkeiten gemeint sind, können sie unterschiedlich gewichtet werden. An beiden Tätigkeiten ist eine bildliche (nicht symbolische) Darstellung zentral beteiligt, die mental oder external beschaffen sein kann. Die Perspektive *Erstellen und Interpretieren* betont den Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungsformen, da das Erstellen von einer nicht-bildlichen Darstellung zu einer bildlichen Darstellung wechselt, und das Interpretieren von einer bildlichen Darstellung zu einem (neuen) Gedanken verläuft. Der Wechsel folgt formalen oder individuelle Konventionen, die durch die Analogien zum Kodieren und zur Sprache ausgedrückt werden.

#### 2.2.4. Visualisierung als Darstellen

Im Gegensatz zu *Erstellen* und *Interpretieren*, bei dem etwas *für den Geist* sichtbar gemacht wird, beschreibt Boeckmann (1982, S. 14) unter anderem ein Verständnis von Visualisierung, bei dem man etwas *materiell* sichtbar macht, beispielsweise indem man Worte schriftlich festhält:

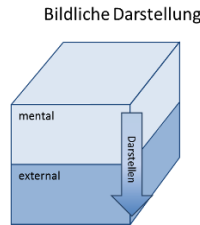
„An der Oberfläche des Begriffes bezieht sich ‘Visualisierung’ aber in der Tat auf das Sichtbarmachen [...] bezeichnet der Begriff eben alles sichtbare, z.B. auch das an die Tafel geschriebene Wort.“ (Boeckmann, 1982, S. 14)

In der Beschreibung ist Visualisierung nicht auf bildliche Darstellungen beschränkt, sondern es geht grundsätzlich um ein *materielles Darstellen*. Das Zeichnen eines Bildes, das man vor Augen hat, wäre ein weiteres Beispiel. Ein ähnliches Verständnis von Visualisierung als *materielles Darstellen* wird ausgedrückt, wenn das Verwenden eines Beamers als Visualisierung bezeichnet wird, und beim Gerät Visualizer sogar in der Bezeichnung des Gerätes. Alle Beispiele beziehen sich auf den „visuelle[n] Sinneskanal“ (Boeckmann, 1982, S. 15).

Ein *materielles Darstellen* als Wechsel von einer mentalen zu einer externalen Repräsentation ist also eine weitere Tätigkeit, die als Visualisieren

bezeichnet wird. Im Modell wird die Bezeichnung *Darstellen* gewählt. Damit wird eine zweite Dimension von Tätigkeiten eingeführt, die in Abbildung 2.5, S. 30, mit dem Pfeil *Darstellen* gekennzeichnet ist:

**Abbildung 2.5.:** Visualisierungsmodell mit *Darstellen* als eine Richtung in der zweiten Dimension



(Quelle: Eigene Darstellung)

Im Prozess des *Darstellens* können sein Input und sein Output beide sowohl bildlich als auch symbolisch sein, werden aber hier in beiden Fällen als bildliche Elemente mit einer flächigen Ausdehnung gesehen.<sup>17</sup> Es findet also kein Wechsel zwischen einer nicht-bildlichen und einer bildlichen Darstellung statt, sondern das *Darstellen* bezieht sich auf den bildlichen Aspekt der dargestellten Objekte.

Sowohl beim *Erstellen* als auch beim *Darstellen* kann ein Wechsel von mental nach external stattfinden, und das Ergebnis kann in beiden Fällen eine bildliche Darstellung sein. Der Unterschied zwischen beiden Tätigkeiten liegt darin, dass beim *Erstellen* ein Wechsel der Repräsentationsform von nicht-bildlich nach bildlich stattfindet. Beispielsweise kann aus einer (mentalen nicht-bildlichen) Idee eine (externale) bildliche Repräsentation *erstellt* werden. Beim *Darstellen* hingegen sieht man das bildliche Objekt bereits vor dem inneren Auge (mental) und stellt dann noch external dar, was man bereits mental sieht.

Die Grenzen zwischen dem *Erstellen* (ausgehend von einer nicht-bildlichen mentalen Idee zu einer bildlichen externalen Darstellung) und dem *Darstellen* (ausgehend von einer bildlichen mentalen Idee zu einer bildlichen externalen Darstellung) sind allerdings fließend. Streng genommen beinhaltet das *Erstellen* das *Darstellen*, wenn man davon ausgeht, dass Menschen sich beim

<sup>17</sup> Einen Buchstaben kann man als Bild statt als Zeichen, das für einen Inhalt steht, sehen (vgl. Presmeg, 2006a, S. 22). Auch algebraische Strukturen kann man bildlich wahrnehmen (z.B. Presmeg, 2006a, S. 22; Hitt, 2002, S. xii).

*Erstellen* zunächst mental bildlich vorstellen, was sie anschließend external darstellen. *Erstellen* betont den Repräsentationswechsel von nicht-bildlich zu bildlich, *Darstellen* betont den Repräsentationswechsel von mental zu external.

### 2.2.5. Visualisierung als Vorstellen und Transformieren

Eine weitere Sichtweise auf Visualisierung stammt aus dem Bereich der Psychologie, in dem die Fähigkeit des räumlichen Denkens untersucht wird. Ein Beispiel ist das mentale Drehen eines Würfels. Aus dem sehr ausdifferenzierten Konzept der „spatial ability“, in etwa der Summe der Fähigkeiten, die benötigt werden, um ein bildlich präsentiertes Objekt mental zu verändern, wird der Aspekt „spatial visualization“ (Bishop, 1983, S. 182) herausgegriffen.<sup>18</sup> Hier steht nicht der Wechsel zwischen nicht-bildlichen und bildlichen Darstellungen oder von mental nach external in den Vordergrund, sondern das Verändern von mentalen Objekten:

„Spatial visualization (Vz), which involves ‘the ability to mentally manipulate, rotate, twist or invert a pictorially presented stimulus object’ (p. 893).“<sup>19</sup> (Bishop, 1983, S. 182)

Die zitierte Sichtweise auf Visualisierung beschreibt die Fähigkeit, bildlich präsentierte Objekte mental zu verändern.<sup>20</sup> Sie ist verbunden mit den Tätigkeiten *Vorstellen* und *Transformieren*.

### Visualisierung als Vorstellen

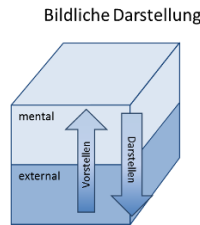
Beim Verändern bildlich präsentierter Objekte stellt man sich ein external gegebenes bildliches Objekt mental vor. Das *Vorstellen* wird in der obigen Beschreibung von „spatial visualization“ nicht separat erwähnt, aber beispielsweise bei Cook (1981, zitiert nach Clements, 1982, S. 34) als eigene Fähigkeit bezeichnet. Das *Vorstellen* wird daher auch als Tätigkeit in das Visualisierungsmodell aufgenommen (siehe Abbildung 2.6, S. 32).

<sup>18</sup> Für ein Review der frühen Forschung zu „spatial ability“ siehe beispielsweise Bishop (1980).

<sup>19</sup> Die Seitenzahl im Zitat bezieht sich auf McGee (1979), zitiert nach Bishop (1983, S. 182).

<sup>20</sup> Die Theorie zu Visualisierung baut also zum Teil auf der Tradition der „spatial ability“ auf, und im Kontext Visualisierung wird oft auch von „ability“ gesprochen. Aber wie schon in Fußnote 14 (S. 27) für diese Arbeit festgelegt wurde, wird hier nicht zwischen einer Fähigkeit und ihrer korrespondierenden Tätigkeit unterschieden.

**Abbildung 2.6.:** Visualisierungsmodell mit *Darstellen* und *Vorstellen* als zweiter Dimension



(Quelle: Eigene Darstellung)

Konkretisiert man das *Vorstellen* anhand von Input und Output, so ist der Input das bildliche externe Objekt. Das bildliche Objekt kann auch ein Buchstabe sein, aber dieser wird in diesem Fall als Bild und nicht als Zeichen, das für einen Inhalt steht, gesehen.<sup>21</sup> Output ist die mentale Vorstellung des bildlichen Objektes.

Eine Beschreibung, die das *Vorstellen* möglicherweise erläutern kann, findet sich bei Guzman (2002) der in seinen Überlegungen über Visualisierung einen Vergleich zu einer Kamera zieht:

„Our human visualization [...] is not a process that merely involves the optical processes of our eyes. [...] *Perhaps in the newly born child the phenomenon that takes place is much more similar to the one occurring in a photographic camera, but the cerebral processes that immediately start taking place in his brain cause that, after a rather short time, after experimenting with the objects of the world outside the child transforms his vision into a true mental interpretation of what before was a simple physical optical phenomenon* [Hervorh. d. Verf.]“ (Guzman, 2002, S. 3)

Möglicherweise schließt beim Menschen aber an das *Vorstellen* sofort ein *Interpretieren* an. Demnach wäre fraglich, ob *Vorstellen* ohne *Interpretieren* überhaupt möglich ist. Unter der Annahme, dass es sinnvoll ist, *Vorstellen* als eigene Tätigkeit zu beschreiben (die möglicherweise nicht isoliert existiert), kann man das *Vorstellen* als „entgegengerichtete Tätigkeit“ zum *Darstellen*

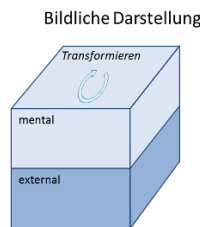
<sup>21</sup> Vgl. Fußnote 17, S.30.

auffassen. Das wird durch die entgegengesetzten Pfeile in Abbildung 2.6, S. 32, ausgedrückt.

### Visualisierung als *Transformieren*

In dem Zitat zu „spatial visualization“ (siehe Seite 31) beschreibt Bishop (1983, S. 182) das „Manipulieren, Rotieren, Verbiegen und Invertieren“, also das Anwenden geometrischer Abbildungen auf mentale Objekte. Die verschiedenen Veränderungen eines bildlichen Objektes werden für das Visualisierungsmodell mit *Transformieren* umschrieben und als dritte Dimension in das Modell aufgenommen (siehe Abbildung 2.7, S. 33).

**Abbildung 2.7.:** Visualisierungsmodell mit *Transformieren* als dritter Dimension



(Quelle: Eigene Darstellung)

Das *Transformieren* im Rahmen der „spatial visualization“ wurde bei Bishop (1983, S. 182) als mentaler Vorgang beschrieben. Aber auch externe Objekte können transformiert werden, z.B. wenn man mit dynamischen Computergraphiken arbeitet oder ein bildlich dargestelltes Objekt zeichnerisch variiert.<sup>22</sup> *Transformieren* bezieht sich daher nicht nur auf mentale, sondern auch auf externe Repräsentationen, wie auch der Pfeil *Transformieren* in Abbildung 2.7, S. 33, verkörpern soll.

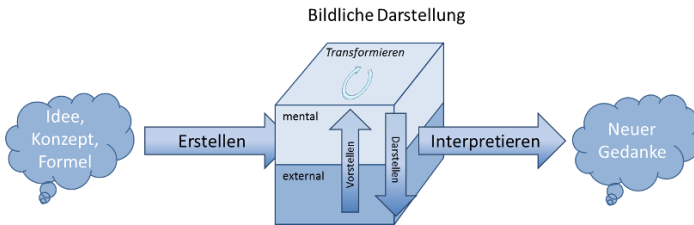
#### 2.2.6. Gesamtes Modell

Bis hierhin wurde ein Modell aufgebaut, das die Tätigkeiten, die beim Visualisieren vorkommen können, mit *Erstellen*, *Interpretieren*, *Vorstellen*,

<sup>22</sup> Das Transformieren bildlicher Objekte findet sich bei Duval unter der Bezeichnung „treatment“ bezogen auf „non-discursive representations“ (Duval, 2006, S. 110 f.).

*Darstellen* und *Transformieren* beschreibt. Alle fünf Tätigkeiten sind in Abbildung 2.8, S. 34, zusammengefasst.

**Abbildung 2.8.:** Visualisierungsmodell mit allen fünf Tätigkeiten



(Quelle: Eigene Darstellung)

Die Visualisierungstätigkeiten lassen sich anhand von drei Dimensionen ordnen:

- 1) *Erstellen* und *Interpretieren* beschreiben die Repräsentationswechsel von einer nicht-bildlichen Darstellung, einer Idee oder einem Konzept über eine bildliche Darstellung zu einem (neuen) Gedanken.
- 2) *Vorstellen* und *Darstellen* beschreiben die Wechsel zwischen mentalen und externalen bildlichen Darstellungen.
- 3) *Transformieren* beschreibt das Verändern mentaler oder externaler bildlicher Darstellungen.

Bezogen auf das Modell wird die Hypothese formuliert, dass sich weitere Visualisierungsdefinitionen auf eine oder mehrere der fünf Tätigkeiten des Visualisierungsmodells zurückführen lassen und so Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen Visualisierungsdefinitionen herausgearbeitet werden können. Diese Hypothese wird im nächsten Kapitel überprüft, indem weitere Visualisierungsdefinitionen anhand des Modells analysiert werden.

### 2.2.7. Einordnen weiterer Visualisierungsdefinitionen

Die bislang analysierten Visualisierungsdefinitionen können getrennt werden in *Erstellen* und/oder *Interpretieren* (Kapitel 2.2.2 und 2.2.3) bzw. *Darstellen* (Kapitel 2.2.4) bzw. *Vorstellen* und *Transformieren* (Kapitel 2.2.5). Als nächstes werden weitere Visualisierungsdefinitionen hinsichtlich der in

ihnen vorkommenden Tätigkeiten untersucht. In den Visualisierungsdefinitionen kommen keine neuen Tätigkeiten vor. Das ist ein gutes Indiz dafür, dass das Visualisierungsmodell aus Kapitel 2.2.6 bereits alle relevanten Visualisierungstätigkeiten beschreibt. Die Visualisierungsdefinitionen unterscheiden sich aber in der Kombination der Tätigkeiten, und weitere weitere sieben Kombinationen, die in Visualisierungsdefinitionen aus dem Umfeld der Mathematikdidaktik vorkommen, werden hier unterschieden.

### **Visualisierung als *Erstellen*, *Vorstellen* und *Transformieren***

Bishop (1983, S. 184 ff.) schlägt zur Differenzierung von verschiedenen Visualisierungsprozessen neben „Interpreting Figural Information (IFI)“ (siehe S. 27) das Konstrukt des „Visual Processing (VP)“ vor:

„The ability for visual processing (VP). This ability involves visualization and the translation of abstract relationships and nonfigural information into visual terms. It also includes the manipulation and transformation of visual representations and visual imagery. It is an ability of process, and does not relate to the form of the stimulus material presented.“ (Bishop, 1983, S. 182).

In VP sind neben „visualization“, was im Sinne von „spatial visualization“ als *Vorstellen* interpretiert wird (siehe S. 31), zwei weitere Tätigkeiten enthalten. Einerseits wird mit „Translation“ etwas „Abstraktes und nicht Figürliches“ in etwas Bildliches („visual term“) übersetzt. Diese „Translation“ fällt unter *Erstellen* einer bildlichen Darstellung. Andererseits werden bildliche Darstellungen, external sowie mental, manipuliert und verändert. Dies kann unter *Transformieren* zusammengefasst werden. Damit kann VP als *Vorstellen*, *Erstellen* und *Transformieren* aufgefasst werden. Auch hier wird mit „ability of process“ von einer Fähigkeit gesprochen<sup>23</sup>.

### **Visualisierung als *Erstellen*, *Vorstellen*, *Transformieren* und *Interpretieren***

Später beschreibt Bishop (1988, S. 177) vor dem Hintergrund der „spatial ability“ die Tätigkeiten beim Visualisieren mit „konstruieren“ und „angemessen nutzen“:

---

<sup>23</sup> Vgl. Fußnote 14, S. 27.

„At its simplest then, the visualisation process appears to involve the learner constructing some kind of visualisation and using it appropriately.“ (Bishop, 1988, S. 173)

Bishop geht als Input von einer „Vielzahl von Aufgaben und stimulierenden Kontexten“ (Bishop, 1988, S. 173) aus und betont, dass sich sowohl das Erstellen als auch das Verwenden der bildlichen Objekte auf einen Kontext beziehen. Der Kontext kann sowohl ein mathematisches Problem als auch ein räumliches Objekt sein. Das Konstruieren kann also sowohl das *Erstellen* (basierend auf einem mathematischen Problem) als auch das *Vorstellen* (eines räumlichen Objekts) sein. Das angemessene Verwenden kann sowohl ein *Transformieren* als auch ein *Interpretieren* sein.

Auch bei Giaquinto (2010, S. 1) findet sich dieses Verständnis von Visualisierung. Er verwendet „visualization“ und „visual thinking“ gleichwertig (vgl. Giaquinto, 2008, S. 22) und beschreibt:

„Visual thinking, thinking that involves visual imagination or visual perception of external diagrams, is widespread in mathematics, across levels, across subjects, and across kinds of mathematical activity.“ (Giaquinto, 2010, S. 1)

„Visual thinking“ beinhaltet mit „imagination“ und „perception“ das *Erstellen* und *Vorstellen*. Aufgrund der Beschreibung, dass „imagination“ und „perception“ „involviert“ werden, wird „visual thinking“ hier so aufgefasst, dass es auch weitere Tätigkeiten umfasst. Weil als Einsatzgebiet mathematische Aktivitäten genannt werden, die beispielsweise in Giaquinto (2005) genauer beschrieben sind<sup>24</sup>, wird Giaquinto so interpretiert, dass „visual thinking“ auch *Transformieren* und *Interpretieren* einschließt.

### **Visualisierung als *Vorstellen*, *Darstellen*, *Transformieren* und *Interpretieren***

Hershkowitz et al. (1990, S. 75) beschreiben mit Visualisierung das Arbeiten mit „visual information“:

„Visualization generally refers to the ability to represent, transform, generate, communicate, document, and reflect on visual information.“ (Hershkowitz et al., 1990, S. 75)

<sup>24</sup> „Mathematical activity“ umfasst für ihn Entdecken, Erklären, Formulieren, Anwenden, Rechtfertigen und Repräsentieren (Giaquinto, 2005, S. 85).



Zentral ist bei ihnen mit „visual information“ die bildliche Information. Sie wird hier aufgrund des Kontexts des Artikels als geometrische Information, die sich auf geometrische Objekte bezieht, aufgefasst. Die bildliche Information wird „repräsentiert“, damit *vorgestellt* oder *dargestellt*, oder sie wird *transformiert*. Mit „Kommunizieren, Dokumentieren und Nachdenken“ lenken Hershkowitz et al. (1990) den Blick auf verschiedene Teiltätigkeiten im Kontext des Weiterarbeitens mit bildlichen Darstellungen, die als *Interpretieren* zusammengefasst werden. Hershkowitz et al. (1990) sprechen wie Bishop (1983) mit „ability“ von einer Fähigkeit und nicht von Tätigkeiten.<sup>25</sup>

Bei der Interpretation der Visualisierungsdefinition von Hershkowitz et al. (1990) wird davon ausgegangen, dass „visual information“ für sie nur *geometrische* Objekte umfasst. Daher ist das *Erstellen* nicht relevant, da es ja gerade den Übersetzungsprozess von einer nicht-bildlichen in eine bildliche Darstellung beschreibt. Möglicherweise meinen Hershkowitz et al. mit „visual information“ aber auch alle Arten bildlicher Darstellungen. Dann würde die Definition alle fünf Tätigkeiten des Visualisierungsmodells umfassen.

### **Visualisierung als *Erstellen*, *Vorstellen* und *Darstellen***

Zazkis, Dubinsky und Dautermann (1996) legen bei Visualisierung vor allem Wert auf den Wechsel zwischen mentalen und externalen Repräsentationsformen, also *Vorstellen* und *Darstellen*. Für sie ist unerheblich, ob es sich dabei um bildliche Darstellungen handelt.

„Visualization is an act in which an individual establishes a strong connection between an internal construct and something to which access is gained through the senses. Such a connection can be made in either of two directions. An act of visualization may consist of any mental construction of objects or processes which an individual associates with objects or events perceived by her or him as external. Alternatively, an act of visualization may consist of the construction, on some external medium such as paper, blackboard or computer screen, of objects or events which the individual identifies with object(s) or process(es) in her or his mind.“ (Zazkis et al., 1996, S. 441)

Indem sie auch von dem „assoziieren“ mit wahrgenommenem oder vorgestelltem sprechen, ist der Aspekt des *Erstellens* implizit auch enthalten.

---

<sup>25</sup> Siehe Fußnote 14, S. 27.

### Visualisierung als *Erstellen, Vorstellen, Darstellen, Transformieren und Interpretieren*

Abschließend werden mit Presmeg (2006b, S. 206) (auch in Presmeg, 1997, S. 304) und Arcavi (2003, S. 217) zwei Visualisierungsdefinitionen vorgestellt, die alle fünf Tätigkeiten des Modells umfassen.

Presmeg benennt explizit für das Visualisieren die Tätigkeiten *Konstruieren* und *Transformieren*. *Konstruieren* kann als *Erstellen* verstanden werden, *Transformieren* wird explizit genannt:

„Thus visualization is taken to include processes of constructing and transforming both visual mental imagery and all of the inscriptions of a spatial nature that may be implicated in doing mathematics (Presmeg 1997b).“ (Presmeg, 2006b, S. 206)

Weiterhin beschreibt sie Visualisierung als einen Bestandteil mathematischen Arbeitens, was unter *Interpretieren* eingeordnet wird.

Presmeg benennt explizit mentale und externe Repräsentationen. Sie hält aber, wie beispielsweise auch Zimmermann und Cunningham (1991a) und Mancosu (2005), die Trennung in external und mental nicht für relevant. In ihrer Begründung, die auf Piaget und Inhelder (1971) verweist, vertritt sie, dass externe Bilder immer zunächst mental gebildet werden (vgl. Presmeg, 2014a, S. 636; Presmeg, 2006b, S. 206). Da sie die mentalen Prozesse erwähnt, werden hier auch *Darstellen* und *Vorstellen* als Bestandteile ihres Visualisierungsbegriffs verstanden.

Damit finden sich in Presmegs Sichtweise auf Visualisierung alle fünf dargestellten Tätigkeiten. Im Zentrum ihrer Sichtweise auf Visualisierung stehen Darstellungen „räumlicher Natur“, deren *Erstellen, Transformieren und Interpretieren*. Presmeg fasst den Begriff „Bild“ sehr weit. Dazu gehört bei ihr alles, was in irgendeiner Form eine räumliche („spatial“) Ausdehnung hat (vgl. Presmeg, 2014a, S. 636), also auch beispielsweise algebraische Formeln (vgl. Presmeg, 2006a, S. 22, siehe auch Fußnote 17, S. 30).

Auch die Definition von Arcavi (2003, S. 217), die, wie er schreibt, die Definitionen von Zimmermann und Cunningham (1991a, S. 3)<sup>26</sup> und von Hershkowitz et al. (1990, S. 75)<sup>27</sup> integriert, kann mit Hilfe der fünf Tätigkeiten analysiert werden:

„Visualization is the ability, the process and the product of creation, interpretation, use of and reflection upon pictures, images,

<sup>26</sup> Siehe S. 22.

<sup>27</sup> Siehe S. 36.

diagrams, in our minds, on paper or with technological tools, with the purpose of depicting and communicating information, thinking about and developing previously unknown ideas and advancing understandings.“ (Arcavi, 2003, S. 217)

„Creation“ kann in der Kombination mit „interpretation, use, reflect“ in die horizontale Dimension des Modells, also in *Erstellen* und *Interpretieren* eingeordnet werden.

Im Zentrum stehen „picture, images, diagrams“ als bildliche Elemente, die mental oder external sein können. Die Definition ist sehr offen gehalten und beinhaltet mit „use of and reflect upon pictures and images“ auch das *Vorstellen*, *Transformieren* und *Interpretieren* geometrischer Objekte. Indem das Arbeiten mit den bildlichen Darstellungen sowohl external als auch mental thematisiert wird, kann man Arcavi so verstehen, dass sein Visualisierungsbegriff auch – untergeordnet – das *Darstellen* beinhaltet.

Arcavi nimmt in seine Definition einen wesentlichen Zusatzaspekt hinein, indem er, wie auch schon Zimmermann und Cunningham (1991a, S. 1) und Gutiérrez (1996, S. 9)<sup>28</sup> Ziele benennt, die mit dem Visualisieren verfolgt werden (vgl. auch Kapitel 3.3). Dadurch kommen aber keine weiteren Tätigkeiten hinzu.

### **Visualisierung als Produkt als *Erstellen* und *Interpretieren***

Auch in Definitionen, in denen Visualisierung nicht als Tätigkeit, sondern ausschließlich als Produkt einer Visualisierungstätigkeit aufgefasst wird (vgl. Kapitel 2.1.1), lässt sich das Visualisierungsmodell anwenden. Als Beispiel wird das Modell auf Dörfler (2015) angewendet. Dörfler benennt mit Visualisierung beziehungsweise Darstellung die Systeme, die im platonischen Sinne abstrakte mathematische Objekte veranschaulichen (Dörfler, 2015, S. 35 ff.). Er beobachtet zudem, dass Visualisierungen in der Didaktik für „geometrische/graphische Darstellungen reserviert erschein[en]“ (Dörfler, 2015, S. 38).

Für Dörfler sind Visualisierungen also ausschließlich Produkte, keine Tätigkeiten. Die Produkte müssen jedoch „irgendwie produziert“ werden. Dörflers Verständnis von Visualisierung kann so interpretiert werden, dass er beim Produzieren einer bildlichen Darstellung, die sich auf eine abstrakte mathematische Idee bezieht, die Tätigkeit des *Erstellens* implizit mitgedacht hat. Dass er davon spricht, dass die bildlichen Darstellungen abstrakte mathematische Objekte veranschaulichen, wird hier so interpretiert, dass für

---

<sup>28</sup> Siehe S. 26.

Dörfler auch das *Interpretieren* eng mit der Darstellung verbunden ist. Daher kann sein Verständnis von Visualisierung unter *Erstellen* und *Interpretieren* eingeordnet werden.

### **Visualisierung als Produkt und Prozess als *Erstellen*, *Vorstellen* und *Interpretieren***

Phillips, Norris und Macnab (2010, S. 19 ff.) untersuchen 28 explizite Visualisierungsdefinitionen (vgl. Phillips et al., 2010, S. 22) und fassen die Gemeinsamkeiten und Unterschiede mit drei Charakteristika zusammen (vgl. Phillips et al., 2010, S. 26). Sie unterscheiden „Visualization objects“ als externale bildliche Darstellungen, „Introspective Visualization“ als mentale bildliche Darstellung und „Interpretative Visualization“ als die Aktivität, bei der man der externalen oder mentalen bildlichen Darstellung eine Bedeutung gibt. Den Aspekt des *Interpretierens* heben sie besonders hervor. Die Beschreibung der Objekte enthält aber auch den Aspekt, dass die Objekte sich auf „something other than the object itself“ beziehen. Daher werden sie so interpretiert, dass für sie auch das *Erstellen* von Bedeutung ist. Dass sie die mentalen Objekte als „an imaginative construction of some possible visual experience“ beschreiben, wird ebenfalls als *Erstellen* und gleichzeitig auch als *Vorstellen* interpretiert. Ihr Überblick über Visualisierungsdefinitionen kann also auch in das Visualisierungsmodell eingeordnet werden.

### **Fazit**

Die geprüften Visualisierungsdefinitionen konnten in das Modell eingeordnet werden. Tabelle 2.1 (S. 41) gibt abschließend einen Überblick über die Einordnung.

### **2.2.8. Zusammenfassung**

Die Visualisierungsdefinitionen, die sich in der mathematikdidaktischen Literatur und ihrem Umfeld finden, können anhand der fünf Tätigkeiten *Erstellen*, *Interpretieren*, *Vorstellen*, *Darstellen* und *Transformieren* beschrieben werden. Aus diesen Tätigkeiten können drei typische Sichtweisen auf Visualisierung extrahiert werden:

- 1) *Erstellen* und *Interpretieren* von bildlichen Darstellungen: Visualisierung als *Erstellen* und *Interpretieren* meint, etwas nicht-graphisches in etwas Graphisches umzuwandeln, und damit unter inhaltlichen Gesichtspunkten

**Tabelle 2.1.:** Visualisierungsdefinitionen und ihre Einordnung in das Visualisierungsmodell

Quelle	Erstellen	Interpretieren	Vorstellen	Transformieren	Darstellen
Zimmermann und Cunningham (1991a)	x	x			
Duval (2014)		x			
Hege und Polthier (1997b)	x	x			
Clements (2014)	x	x			
Mancosu (2005)	x	x			
Gutiérrez (1996)		x			
Bishop (1983) (IFI)		x			
Guzman (2002)		x			
Kupfermann in Nardi (2014)	x	x			
Hershkowitz in Nardi (2014)	x	x			
Boeckmann (1982)					x
Bishop (1983) (Vz)			x	x	
Bishop (1983) (VP)	x		x	x	
Bishop (1988) (spacial ability)	x	x	x	x	
Giaquinto (2010)	x	x	x	x	
Hershkowitz et al. (1990)	(x)	x	x	x	x
Zazkis, Dubinsky und Dautermann (1996)	x		x		x
Presmeg (2006b)	x	x	x	x	x
Presmeg (1997)	x	x	x	x	x
Arcavi (2003)	x	x	x	x	x
Dörfler (2015)	x	x			
Phillips, Norris und Macnab (2010)	x	x	x		

weiterzuarbeiten. Dabei ist es nicht relevant, ob man mental oder external arbeitet. Man kann es zusammenfassen als „einen Inhalt im übertragenen Sinne sichtbar machen und das sichtbar gemachte verwenden“. Beide Tätigkeiten gehören in der Regel zusammen. Der Schwerpunkt zwischen den beiden Tätigkeiten wird je nach Autor jedoch unterschiedlich gesetzt, und zum Teil wird nur das *Interpretieren* als Visualisierung bezeichnet.

- 2) *Vorstellen* und *Transformieren* von external gegebenen Objekten: Visualisierung als *Vorstellen* und *Transformieren* meint, sich etwas external Gegebenes, sei es symbolisch oder bildlich, vor dem inneren Auge vorzustellen und zu verändern. Symbolische Darstellungen werden hierbei als Figuren mit einer flächigen oder räumlichen Ausdehnung betrachtet, es geht nicht um den mit den Symbolen verbundenen Inhalt. Auch diese beiden Tätigkeiten werden in der Regel gemeinsam genannt.
- 3) Das *Darstellen* von mental vorhandenen Objekten: Visualisierung als *Darstellen* meint, eine Idee oder ein mentales Bild zu „materialisieren“, ohne es weiter zu interpretieren. Das *Darstellen* kann mit „External repräsentieren“ gleichgesetzt werden. Im Modell wurde es auf bildliche Inhalte bezogen. Es kann sich aber auch auf symbolische Inhalte beziehen, die als bildliche Elemente interpretiert werden<sup>29</sup>.

Bei der Entwicklung des Modells hat sich herausgestellt, dass Visualisierung in vielen Kombinationen dieser fünf Tätigkeiten formuliert wird. Auch wenn die Tätigkeiten nicht in allen Situationen klar voneinander trennbar sind, ermöglicht das Modell, eine Visualisierungsdefinition mit maximal fünf Tätigkeiten zu beschreiben.

Theoretisch ist denkbar, dass andere weitere Tätigkeiten unter Visualisierung verstehen. Das Visualisierungsmodell kann keinen Anspruch auf Vollständigkeit erheben. Für das Modell spricht jedoch, dass es auf die 21 in dieser Arbeit analysierten Definitionen aus dem Kontext der Mathematikdidaktik und auf das auf 28 Definitionen basierende Modell von Phillips et al. (2010) anwendbar war.

### Abschließende Anmerkungen

- 1) Das Wechseln zwischen externalen und mentalen Bildern im Rahmen von Denkprozessen und das Transformieren von Bildern (also *Vorstellen*, *Darstellen* und *Transformieren*) sind häufig Bestandteil des Visualisierens,

---

<sup>29</sup> Siehe Fußnote 17, S. 30.

ohne dass sie explizit erwähnt werden. Überlegungen dazu finden sich beispielsweise bei Presmeg (2006b, S. 206).

- 2) Wenn man sagt, dass eine Darstellung etwas visualisiert, ist dabei häufig nicht nur ein *Darstellen* ohne Konsequenzen gemeint (im Sinne eines Abbildens), sondern es ist gemeint, dass man auf Basis der Darstellung weiterdenken, also *interpretieren* kann.
- 3) Das *Transformieren* kann dem *Interpretieren* vorausgehen, ohne dass das explizit thematisiert wird.
- 4) An allen Visualisierungsprozessen sind bildliche Darstellungen als Input oder Output beteiligt.
- 5) Um die Prozesse, die beim Visualisieren stattfinden können, im Detail zu verstehen, könnte eine Taxonomie der bildlichen Darstellungen hilfreich sein (zu Versuchen einer Taxonomie siehe Kapitel 3.4). Für einen Überblick darüber, was Visualisierung bedeuten kann, ist sie aber nicht nötig.
- 6) Für eine Übersetzung des Modells ins Englische scheinen die Übersetzungen „produce“, „transform“ und „interpret“ zutreffend. Das Vorstellen und Darstellen könnten mit „imagine“ und „display“ übersetzt werden, um hier – wie im Deutschen – das sehr allgemeine „Repräsentieren“ beziehungsweise „represent“ zu vermeiden.

Der Begriff „bildliche Darstellung“ könnte mit „visual display“ übersetzt werden, ein Begriff, der sich bereits in der englischsprachigen Literatur findet (vgl. z.B. David, Tomaz & Ferreira, 2014, S. 95; Presmeg, 2014a, S. 154; Schnotz, 2002), allerdings eher für externe bildliche Darstellungen verwendet wird. Für die mentale bildliche Darstellung bietet sich „mental image“ an, das aber wiederum (auch als mentales Bild im deutschen) je nach Kontext und psychologischer Theorie mit unterschiedlichen Bedeutungen verstanden wird (vgl. z.B. N. J. Thomas, 2016, S. 2 f.). Da diese Arbeit den Schwerpunkt nicht auf die Unterscheidung von mentalen und externen Bildern legt, sondern auf den Einsatz „nicht-symbolischer“ Darstellungen, wird für diese Arbeit die Bezeichnung „bildliche Darstellung“ für mentale und externe Bilder verwendet.

- 7) Das Modell sieht seinen Schwerpunkt darin, Visualisierung inhaltlich in Teiltätigkeiten zu analysieren. Die Bedeutung der Teiltätigkeiten wird weniger aus ihren Bezeichnungen als aus den Beschreibungen der Tätigkeiten deutlich.

### 2.3. Begriffsklärung für diese Arbeit

In dieser Arbeit geht es um die Frage, welche Überzeugungen Lehrkräfte zum Einsatz von Visualisierung im Mathematikunterricht haben. Konkret wird untersucht, welche bildlichen Darstellungen Lehrkräfte einsetzen, sowie wie und warum sie dies tun.

Zunächst wurden theoretische Konzepte zu Visualisierung vorgestellt. Nun stellt sich die Frage, auf welchem Konzept diese Arbeit basiert. Geht man von einem engen Visualisierungsbegriff aus, so besteht die Gefahr, dass statt der Perspektiven der Lehrkräfte die vorgegebene theoretische Perspektive auf Visualisierung dominiert. Da aber die Sichtweisen der Lehrkräfte untersucht werden sollen, soll in der empirischen Untersuchung der theoretische Fokus im Vorfeld nicht durch ein zu enges Verständnis von Visualisierung eingeschränkt werden.

Gleichzeitig soll die Arbeit an die bisherige Forschung zu Visualisierung anschließen. Daher wird für diese Arbeit mit der Visualisierungsdefinition von Arcavi (2003, S. 217)<sup>30</sup> ein bestehender und sehr breiter Visualisierungsbegriff gewählt. Arcavis Definition benennt zahlreiche Aspekte, die für den Mathematikunterricht relevant sein können:

- 1) Arcavis Definition versteht Visualisierung sowohl als Prozess als auch als Produkt.<sup>31</sup> Dies ist hilfreich, da zu erwarten ist, dass die befragten Lehrkräfte nicht unbedingt streng zwischen beiden Aspekten trennen werden.
- 2) Arcavis Definition umfasst alle fünf Tätigkeiten, die man unter Visualisierung verstehen kann. Damit bleibt Raum dafür, was Lehrkräfte unter Visualisierung verstehen.
- 3) Die Definition zählt unterschiedliche Arten von Darstellungen auf. Sie ermöglicht damit, alles, was nicht vollständig symbolisch ist, als bildliche Darstellung einzubeziehen.
- 4) Die bildlichen Darstellungen können sowohl für mathematische Konzepte, geometrisch oder nicht, stehen, als auch auf individuellen Ideen basieren. Arcavi schränkt nicht ein, auf welche Objekte sich die bildlichen Darstellungen beziehen können. Dazu passt, dass den Lehrkräften im Vorfeld

---

<sup>30</sup> Siehe S. 39.

<sup>31</sup> Zwar bezeichnet Arcavi Visualisierung auch als Fähigkeit. Visualisierung als Fähigkeit wird aber in der Definition nicht weiter vertieft und steht auch in dieser Arbeit nicht im Fokus, siehe auch Fußnote 14, S.27.



keine Einschränkungen zu den von ihnen eingesetzten Visualisierungen gemacht werden sollen.

- 5) Sowohl mentale als auch externe Darstellungen werden berücksichtigt. Beide können im Unterricht bedeutsam sein.
- 6) Die externalen Darstellungen können auf verschiedenen Wegen erstellt werden, beispielsweise von Hand oder mit technischen Hilfsmitteln. Die Aufzählung der Darstellungswege ist offen für weitere Arten von Darstellungen, beispielsweise Gesten und Handlungen.
- 7) Arcavis Beschreibung von Visualisierung rückt die Tätigkeiten *Erstellen* und *Interpretieren* in den Vordergrund. Erstellen und Interpretieren stehen auch für diese Arbeit im Vordergrund, ohne die anderen Tätigkeiten auszuschließen, sofern sie für die befragten Lehrkräfte relevant sind.
- 8) Arcavi formuliert Ziele, die mit dem Visualisieren verbunden werden können. Dies betont die inhaltliche Dimension des Visualisierens, die auch schon durch das Interpretieren zum Ausdruck kommt.

Insgesamt liefert die Definition von Arcavi mit wenigen Worten einen Überblick über das, was unter Visualisierung verstanden werden kann und bietet Potenzial für Erweiterungen. Sie bildet daher einen guten Startpunkt für die empirische Untersuchung. Darüber hinaus wird die Definition in vielen mathematikdidaktischen Arbeiten zu Visualisierung verwendet (z.B. Rösken & Rolka, 2006; Presmeg, 2014a; David et al., 2014; Gómez-Chacón, 2015).

## 2.4. Exkurs: Abgrenzung zu Repräsentation und Modellerweiterungen

Auch unter dem Stichwort „Repräsentation“ gibt es in der Mathematikdidaktik viele Arbeiten. Zum Abschluss des Kapitels werden daher Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen Visualisierung und Repräsentation aufgezeigt (Kapitel 2.4.1). Außerdem werden Grenzen und Erweiterungspotenzial für das Visualisierungsmodell skizziert (Kapitel 2.4.2).

### 2.4.1. Repräsentation und Visualisierung

„Visualization is implicated in its representation“ (Presmeg, 2014a, S. 636).

Das Zitat besagt, dass jede Visualisierung das Repräsentieren beinhaltet. Charakteristisch für eine Repräsentation ist, dass sie für etwas anderes steht (vgl. Palmer, 1978, S. 262; Goldin & Shteingold, 2001, S. 3). Es besteht eine „konzeptuelle Verbindung“ zwischen repräsentierter Welt und repräsentierender Welt (Kaput, 1987, S. 23). Repräsentationen können mental oder external sein (vgl. Goldin, 1992, S. 241).

Gemeinsam ist den Begriffen „Visualisierung“ und „Repräsentation“, dass man sie auf zahlreiche Arten verstehen kann.<sup>32</sup> Beide können im Deutschen (analog zu Visualisierung, vgl. Kapitel 2.1.1) wie im Englischen (vgl. National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000b, S. 67) sowohl einen Prozess als auch ein Produkt bezeichnen.

Eine wesentliche Gemeinsamkeit zwischen Visualisierung und Repräsentation ist, dass auch beim Visualisieren die bildliche Darstellung für etwas anderes steht, also auch eine Repräsentation ist. Beim Visualisieren als *Erstellen* und *Interpretieren* steht die bildliche Darstellung für das Konzept, die Idee oder die Formel, von der ausgehend sie erstellt wurde. Auch beim Visualisieren als *Vorstellen* oder *Darstellen* ist die bildliche Darstellung eine Repräsentation. Entweder steht die mentale Repräsentation für etwas Externales, oder die externale Repräsentation steht für etwas Mentales. *Transformieren* kommt nur mit anderen Visualisierungstätigkeiten vor, somit wird aufgrund der vorgeschalteten Visualisierungstätigkeiten eine mentale oder externale Repräsentation transformiert. Zum Teil werden Visualisieren und Repräsentieren synonym verwendet.

Ein Unterschied zwischen einer bildlichen Darstellung und einer Repräsentation (als Produkt) liegt darin, dass Repräsentationen nicht notwendigerweise bildlich sind, sondern auch rein symbolisch sein können. Beispielsweise sind sowohl eine symbolische Darstellung  $\frac{1}{4}$  als auch eine Zeichnung (siehe Abbildung 2.9, S. 46) Repräsentationen des Bruchs ein Viertel.

**Abbildung 2.9.:** Rechteck als Repräsentation für den Bruch ein Viertel



(Quelle: Eigene Darstellung)

Von den Repräsentationen, die für Funktionen stehen (vgl. Kapitel 3.2), ist nur der Funktionsgraph eine bildliche Darstellung. Die Tabelle liegt

<sup>32</sup> Zu Visualisierung siehe Kapitel 2.1. Zu Repräsentation findet sich ein Überblick beispielsweise bei Pape und Tchoshanov (2001, S. 119 ff.).

aufgrund ihrer flächigen Anordnung im Grenzbereich zwischen bildlich und nicht-bildlich. Alle bildlichen Darstellungen sind also Repräsentationen, aber nicht jede Repräsentation wird im Sinne des Visualisierungsmodells als eine bildliche Darstellung aufgefasst.<sup>33</sup>

Eine Nuance eines weiteren Unterschieds zwischen dem Visualisieren und den Repräsentieren (als Prozess) kann möglicherweise mit dem Visualisierungsmodell ausgedrückt werden. Repräsentieren wird gelegentlich eher als *Erstellen*, *Vorstellen* und *Darstellen* verstanden. Das Visualisieren schließt tendenziell das *Interpretieren* unausgesprochen ein, zumindest wenn es in der Bedeutung von *Erstellen* und *Interpretieren* verwendet wird. Visualisieren und Repräsentieren sind also verwandte, aber unterschiedliche Konzepte. Die Grenzen sind aber fließend. In der Mathematikdidaktik kommt dem Repräsentieren wie dem Visualisieren hohe Bedeutung zu, siehe auch Kapitel 3.2.1.

### 2.4.2. Erweiterungspotenzial des Modells

Das Visualisierungsmodell bezieht sich mit bildlichen Darstellungen ausschließlich auf den Sehsinn.<sup>34</sup> Eine Erweiterung des Visualisierungsbegriffs schlagen beispielsweise Abrahamson, Lee, Negrete und Gutiérrez (2014, S. 80) vor. Sie bezeichnen allgemeiner das Arbeiten mit „perceptual displays“ als Visualisierung und lösen sich damit von der Fokussierung auf den Sehsinn und auf bildliche Darstellungen. Insgesamt schlagen sie fünf Aspekte vor, mit denen man Arcavis Visualisierungsbegriff (Arcavi, 2003, S. 217) erweitern kann. Unter anderem nennen sie neben „modality“, also dem Bezug zu den Sinnen, auch „activity“, womit sie den Bezug zu Handlungen meinen, und „ontology“ als Bezug zu wahrnehmbaren Informationen. Im Modell könnte man entsprechend bildliche Darstellung durch wahrnehmbare Darstellung („perceptual display“) ersetzen, ohne dass man die Tätigkeiten verändern müsste.

Auch mit Gesten kann man Ideen darstellen. Ein Unterschied zu externalen bildlichen Darstellungen liegt in der Dauerhaftigkeit. Gesten, beispielsweise etwas „in die Luft zu zeichnen“, sind nur während der Erstellung sichtbar oder fühlbar und bleiben nicht erhalten. Abgesehen davon könnten auch

<sup>33</sup> Hier erkennt man eine Grenze des Visualisierungsmodells, da es darauf ankommt, wie man eine Darstellung auffasst. In Fußnote 17 wurde im Kontext *Darstellen* begründet, dass auch beispielsweise Worte external *dargestellt* werden können. Dann werden sie aber als bildliche Darstellungen aufgefasst, für die man den Inhalt (die Bedeutung) der Worte nicht kennen muss.

<sup>34</sup> Das Modell beinhaltet aber mit mentalen bildlichen Darstellungen, dass auch blinde Personen visualisieren können.

Gesten in das Modell integriert werden, wenn man die Beschränkung auf bildliche Darstellungen aufhebt (siehe auch Anmerkung 6, S. 45, zu der in dieser Arbeit verwendeten Visualisierungsdefinition von Arcavi).

Beliefs von Lehrerinnen und Lehrern der  
Sekundarstufen zum Visualisieren im  
Mathematikunterricht

Schmitz, A.

2017, XVI, 478 S. 32 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-18424-7