

ganz anderen Intention. In den beiden klassischen Werken wurde versucht, möglichst umfassend den damaligen Stand der Algebra zu vermitteln.

Die Darstellung der Algebra hat sich seit WEBER und FRICKE stark verändert. Durch das Programm von HILBERT ist das axiomatische Gerüst ausgeprägt worden; die grundlegenden Vorlesungen in diesem Stil von EMIL ARTIN und EMMY NOETHER waren die Quellen für die 1930 erstmals veröffentlichte *Moderne Algebra* von VAN DER WAERDEN, sie haben alle seither erschienenen Bücher über Algebra geprägt. Durch die Axiomatik wird die Darstellung klarer, Beweise werden einfacher und durchsichtiger. Aber für Studierende besteht die Gefahr, die zahllosen hinter dem klaren Gerüst verborgenen konkreten Situationen nicht genügend kennen zu lernen. Dazu sei erinnert an die Arbeiten von C.F. GAUSS: Hier gab es keinen der abstrakten Begriffe wie Gruppe, Ring oder Körper; es wurden viele raffinierte Überlegungen und Berechnungen durchgeführt, deren Ergebnisse später elegante Formulierungen im abstrakten Rahmen gefunden haben.

In diesem Buch kann und soll die Zeit nicht zurückgedreht werden. Aber es wird versucht, durch sehr viele konkrete *Beispiele* die Bodenhaftung der Studierenden zu erhalten. In dieser Absicht beschreiben wir ausführlich die Symmetrien der *Platonischen Körper* als Illustration der Beziehungen zwischen Gruppen und Geometrie, *quadratische Zahlringe* zur Erläuterung der subtilen Teilbarkeitseigenschaften in Ringen und von GAUSS gefundene Formeln zur *Darstellung von Einheitswurzeln* aus der Sicht der Körpererweiterungen. In einer einführenden Vorlesung verbleibt kaum Zeit zur Behandlung all dieser Themen; die Studierenden erhalten die Möglichkeit, solche zur Vertiefung des Verständnisses wichtige Ergänzungen hier nachzulesen. Außerdem enthält dieser Text für ein Buch über Algebra ungewöhnlich viele Bilder. Dazu sei erinnert, dass die Algebra ein hervorragendes Werkzeug für die Geometrie ist, und dass vor der Entwicklung einer guten Symbolik für die „Buchstabenrechnung“ viele algebraische Beweise geometrisch geführt wurden.

Die zahlreichen Veränderungen der letzten Jahre in den Studiengängen haben sich mittlerweile etwas stabilisiert; dieses Buch versucht, darauf Rücksicht zu nehmen. Der gesamte Inhalt ist für eine zweisemestrige einführende Vorlesung ausgelegt, die nur Kenntnisse aus der Linearen Algebra voraussetzt und ab dem dritten Studiensemester besucht werden kann. In vielen Studiengängen ist nur eine einsemestrige Einführung in die Algebra vorgesehen. Daher sind einige Paragraphen und Abschnitte mit einem *Stern\** versehen: man kann sie beim ersten Durchgang weglassen, und eventuell im zweiten Semester nachholen. Insbesondere ist dadurch ein Minimalkanon für den *Bachelor* vorgeschlagen. Ganz besonders Studierende für das *Lehramt* können durch geeignete Auswahl aus dem Inhalt eine solide und nicht zu abstrakte Grundlage für die spätere Tätigkeit erhalten und das Buch dann als Nachschlagewerk nutzen.

In dieser Einführung soll nur die relativ „klassische“ Algebra behandelt werden, Höhepunkte sind die Ergebnisse über die Lösbarkeit von Polynomgleichungen; dieser Teil der Algebra kam im 19. Jahrhundert - abgesehen von der Darstellung - zu einem Abschluss. Einen sehr guten Eindruck von dem langen Weg dorthin seit den Wurzeln in der Antike vermittelt der *historische Text* von VAN DER WAERDEN [W<sub>2</sub>]. Die anschließende Entwicklung der Algebra im 20. Jahrhundert war rasant, vor allem in Richtung der algebraischen Geometrie und der Zahlentheorie; zwischen beiden wurden innige Zusammenhänge entdeckt, ein Höhepunkt war die Lösung des Problems von FERMAT im Jahr 1993. All das muss fortgeschrittenen Vorlesungen und weiter-

führenden Büchern vorbehalten bleiben; einen knappen historischen Abriss über das vergangene Jahrhundert findet man bei [Mi]. Wie überall in der Mathematik setzt das Studium der neueren Entwicklungen eine solide Kenntnis der klassischen Methoden voraus.

Die *Gliederung des Inhalts* folgt der üblichen Systematik „Gruppen, Ringe, Körper“, dadurch wird das logische Gerüst deutlich und die Darstellung vereinfacht. Zur Erhöhung der Motivation beim Lernen kann man getrost davon abweichen: Man kann ganz hinten anfangen mit den *geometrischen Konstruktionen* und die zunehmend komplexeren algebraischen Hilfsmittel nach Bedarf nachlesen. Wenn man mit dem Paragraphen über die *Lösungen von Polynomgleichungen* anfängt, wird man feststellen, dass die wesentlichen zuvor entwickelten Techniken über Gruppen, Ringe und Körper benötigt werden. In den zahlreichen Beispielen sind nicht immer alle Einzelheiten ausgeführt; da verbleiben viele kleinere und größere *Übungsaufgaben*.

An der Darstellung der grundlegenden Ergebnisse der Algebra ist von vielen Autoren gefeilt worden. Es gibt zahllose Tricks, deren Urheber kaum noch festzustellen sind; man kann sie schon als „Folklore“ bezeichnen. Im *Literaturverzeichnis* sind Bücher aufgeführt, aus denen ich gelernt habe, außerdem zahlreiche Texte für weiterführende Lektüre. Aus den Werken von C.F. GAUSS sind einige Stellen im Faksimile abgedruckt, in der Hoffnung, die Neugier des Lesers auf diese einmaligen Texte zu wecken.

Mein Dank gilt den Studierenden der TU-München für viele kritische Bemerkungen, und vor allem REINHARD SACHER, dem Coautor unseres gemeinsamen Buches „Einführung in die Algebra“ [F-S]; aus diesem alten Text ist vieles übernommen worden. Sowie FLORIAN QUIRING, der vier Semester lang Übungen zur Vorlesung betreut und viele wertvolle Details beigesteuert hat. BRIGITTE SINGHOF hat mit großer Präzision und persönlichem Einsatz die druckfertige  $\text{\TeX}$ -Vorlage erstellt, Ulrike Schmickler-Hirzebruch hat das Projekt vom Verlag begleitet und vorangetrieben.

Trotz sorgfältiger Suche nach Druckfehlern und mathematischen Irrtümern werden wohl einige verblieben sein. Daher möchte ich alle Leser bitten, mir Fundstellen mitzuteilen, am einfachsten an

gfischer@ma.tum.de

Wir haben unter

<http://www-m10.ma.tum.de/~GerdFischer>

eine Seite mit Kommentaren und Verbesserungen eingerichtet.

München, im November 2007

Gerd Fischer

Lehrbuch der Algebra

Mit lebendigen Beispielen, ausführlichen Erläuterungen  
und zahlreichen Bildern

Fischer, G.

2017, XIII, 494 S. 156 Abb., 95 Abb. in Farbe.,

Hardcover

ISBN: 978-3-658-19365-2