

§ 2 Grenzwerte. Stetigkeit

In diesem Paragraphen wird der Begriff der Konvergenz von Punkt-Folgen und die Stetigkeit von Abbildungen zwischen metrischen oder topologischen Räumen eingeführt. Dies verallgemeinert entsprechende Begriffsbildungen für Folgen reeller Zahlen und reelle Funktionen einer Veränderlichen.

Definition (Konvergenz von Folgen). Sei X ein topologischer Raum und $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten aus X . Die Folge (x_k) heißt *konvergent* gegen den Punkt $a \in X$, in Zeichen

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a,$$

wenn gilt: Zu jeder Umgebung U von a existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$x_k \in U \quad \text{für alle } k \geq N.$$

Ist X speziell ein metrischer Raum mit Metrik d_X , so ist dies gleichbedeutend mit folgender Bedingung: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$d_X(x_k, a) < \varepsilon \quad \text{für alle } k \geq N.$$

Die Konvergenz von Punktfolgen im \mathbb{R}^n kann einfach auf die Konvergenz von Folgen reeller Zahlen zurückgeführt werden, wie folgender Satz zeigt:

Satz 1. Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten im \mathbb{R}^n ,

$$x_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Genau dann konvergiert die Folge (x_k) gegen den Punkt $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, wenn für $\nu = 1, 2, \dots, n$ gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k\nu} = a_\nu.$$

Beweis. a) Es gelte $\lim x_k = a$. Dann gibt es zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\|x_k - a\| < \varepsilon$ für alle $k \geq N$. Daraus folgt für $\nu = 1, 2, \dots, n$

$$|x_{k\nu} - a_\nu| \leq \|x_k - a\| < \varepsilon \quad \text{für } k \geq N.$$

Also ist $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k\nu} = a_\nu$.

b) Sei umgekehrt vorausgesetzt, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k\nu} = a_\nu$ für $\nu = 1, \dots, n$. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es dann ein $N_\nu \in \mathbb{N}$, so dass

$$|x_{k\nu} - a_\nu| < \varepsilon' := \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \quad \text{für alle } k \geq N_\nu.$$

Für alle $k \geq N := \max(N_1, \dots, N_n)$ gilt dann

$$\|x_k - a\| = \left(\sum_{\nu=1}^n |x_{k\nu} - a_\nu|^2 \right)^{1/2} < \sqrt{n} \varepsilon' = \varepsilon.$$

Also gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$.

Mit Hilfe der Konvergenz von Folgen kann man auch die abgeschlossenen Mengen charakterisieren.

Satz 2. Sei X ein metrischer Raum mit Metrik d_X . Eine Teilmenge $A \subset X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn gilt: Für jede Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Punkten $x_k \in A$, die gegen einen Punkt $x \in X$ konvergiert, liegt der Grenzwert x schon in A .

Bemerkung. Dies ist eine Verallgemeinerung von Analysis 1, §4, Corollar zu Satz 5.

Beweis. a) Sei zunächst A als abgeschlossen vorausgesetzt und $x_k \in A$, $k \in \mathbb{N}$, eine Folge mit $\lim x_k = x$. Angenommen, x läge nicht in A . Da $X \setminus A$ offen ist, ist dann $X \setminus A$ eine Umgebung von x . Nach der Definition der Konvergenz gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $x_k \in X \setminus A$ für alle $k \geq N$. Das ist aber ein Widerspruch.

b) Zur Umkehrung. Das Folgenkriterium sei erfüllt; wir wollen zeigen, dass dann A abgeschlossen, d.h. $X \setminus A$ offen ist. Sei $x \in X \setminus A$ ein beliebiger Punkt.

Behauptung: Es gibt ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset X \setminus A$. Wäre dies nicht der Fall, könnten wir zu jedem $k > 0$ ein $x_k \in A$ finden mit $d_X(x_k, x) < 1/k$. Dann gilt aber $\lim x_k = x \in A$, was im Widerspruch zu $x \in X \setminus A$ steht. Die Behauptung ist also richtig, was zeigt, dass $X \setminus A$ offen ist.

Cauchyfolgen, Vollständigkeit

Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Punkten aus X heißt *Cauchy-Folge*, wenn gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so

dass

$$d(x_k, x_m) < \varepsilon \quad \text{für alle } k, m \geq N.$$

Bemerkung. Jede konvergente Folge in einem metrischen Raum ist ein Cauchy-Folge.

Beweis. Sei $\lim x_k = x$. Dann gibt es zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$d(x_k, x) < \varepsilon/2 \quad \text{für alle } k \geq N.$$

Daraus folgt mit der Dreiecks-Ungleichung für alle $k, m \geq N$

$$d(x_k, x_m) \leq d(x_k, x) + d(x, x_m) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \quad \text{q.e.d.}$$

Definition (Vollständigkeit). Ein metrischer Raum heißt *vollständig*, wenn in ihm jede Cauchy-Folge konvergiert.

Ein vollständiger normierter Vektorraum heißt *Banach-Raum*.

Satz 3. Im \mathbb{R}^n konvergiert jede Cauchy-Folge.

Beweis. Sei $x_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn})$, $k \in \mathbb{N}$, eine Cauchy-Folge in \mathbb{R}^n . Da

$$|x_{k\nu} - x_{m\nu}| \leq \|x_k - x_m\|,$$

ist für jedes $\nu = 1, 2, \dots, n$ die Folge $(x_{k\nu})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in \mathbb{R} , die wegen der Vollständigkeit von \mathbb{R} konvergiert. Nach Satz 1 konvergiert dann die Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R}^n .

Definition (Durchmesser). Für eine Teilmenge A eines metrischen Raumes (X, d_X) wird ihr Durchmesser definiert als

$$\text{diam}(A) := \sup\{d_X(x, y) : x, y \in A\}.$$

Die Menge A heißt beschränkt, falls $\text{diam}(A) < \infty$.

Offenbar ist A genau dann beschränkt, wenn A in einer genügend großen Kugel enthalten ist, d.h. wenn ein Punkt $a \in X$ und eine positive reelle Zahl $r > 0$ existiert, so dass $A \subset B_r(a)$. Es gilt

$$\text{diam}(B_r(a)) \leq 2r,$$

wie aus der Dreiecksungleichung folgt.

Der folgende Satz ist eine Verallgemeinerung des Intervallschachtelungs-Prinzips aus An. 1, §5.

Satz 4 (Schachtelungsprinzip). *Sei X ein vollständiger metrischer Raum und*

$$A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$$

eine absteigende Folge nichtleerer abgeschlossener Teilmengen mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam}(A_k) = 0.$$

Dann gibt es genau einen Punkt $x \in X$, der in allen A_k liegt.

Beweis. Dass es nicht mehr als einen solchen Punkt geben kann, ist klar. Es ist also nur die Existenz zu zeigen. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ wählen wir einen Punkt $x_n \in A_n$. Da

$$d_X(x_n, x_m) \leq \text{diam}(A_N) \quad \text{für } n, m \geq N,$$

ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, konvergiert also gegen ein $x \in X$. Da $x_n \in A_k$ für alle $n \geq k$, folgt aus Satz 2, dass $x \in A_k$, q.e.d.

Stetige Abbildungen

Definition (Stetigkeit). Seien X und Y metrische Räume und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. f heißt *stetig* im Punkt $a \in X$, falls

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a);$$

d.h. wenn für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Punkten aus X mit $\lim x_n = a$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a).$$

Die Abbildung f heißt stetig auf X , falls f in jedem Punkt $a \in X$ stetig ist.

Satz 5 (Komposition stetiger Abbildungen). *Seien X, Y, Z metrische Räume und*

$$f : X \rightarrow Y, \quad g : Y \rightarrow Z$$

Abbildungen. Ist f stetig im Punkt $a \in X$ und g stetig in $b := f(a) \in Y$, so ist

$$g \circ f : X \rightarrow Z$$

stetig in a .

Beweis. Ist $\lim x_n = a$, so folgt $\lim f(x_n) = f(a) = b$, da f in a stetig ist. Aus der Stetigkeit von g in b folgt $\lim g(f(x_n)) = g(b) = g(f(a))$, also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (g \circ f)(x_n) = (g \circ f)(a), \quad \text{q.e.d.}$$

Eine Abbildung $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit Werten in \mathbb{R}^n wird durch n Komponenten-Funktionen $f_\nu : X \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, die durch

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) \quad \text{für alle } x \in X$$

definiert sind.

Satz 6. Sei X ein metrischer Raum. Eine Abbildung

$$f = (f_1, \dots, f_n) : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ist genau dann stetig, wenn alle Komponenten $f_\nu : X \rightarrow \mathbb{R}$, $\nu = 1, \dots, n$, stetig sind.

Dies folgt unmittelbar aus Satz 1.

Satz 7. Folgende Abbildungen sind stetig:

- a) add: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x + y,$
- b) mult: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto xy,$
- c) quot: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto xy^{-1}.$

Beweis. Sei $((x_k, y_k))_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten aus $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k, y_k) = (x, y).$$

Nach Satz 1 gilt dann $\lim x_k = x$ und $\lim y_k = y$. Daraus folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{add}(x_k, y_k) = \lim(x_k + y_k) = x + y$$

und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{mult}(x_k, y_k) = \lim(x_k y_k) = xy.$$

Gilt zusätzlich $(x_k, y_k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, so ist auch

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{quot}(x_k, y_k) = \lim(x_k y_k^{-1}) = xy^{-1}.$$

Daraus folgt die Stetigkeit von add, mult und quot.

Corollar. Sei X ein metrischer Raum und seien $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann sind auch die Funktionen

$$f + g : X \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{und} \quad fg : X \rightarrow \mathbb{R}$$

stetig. Gilt außerdem $g(x) \neq 0$ für alle $x \in X$, so ist auch

$$\frac{f}{g} : X \rightarrow \mathbb{R}$$

stetig.

Beweis. Nach Satz 6 ist die Abbildung

$$(f, g) : X \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

stetig. Nun gilt

$$f + g = \text{add} \circ (f, g),$$

$$fg = \text{mult} \circ (f, g),$$

$$f/g = \text{quot} \circ (f, g).$$

Aus Satz 7 und Satz 5 folgt nun die Behauptung.

(2.1) Beispiel. Ein Monom vom Grad r auf dem \mathbb{R}^n ist eine Funktion der Gestalt

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdot \dots \cdot x_n^{k_n},$$

wobei k_1, \dots, k_n natürliche Zahlen mit $k_1 + \dots + k_n = r$ sind. Eine Polynomfunktion $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vom Grad $\leq r$ ist eine Linearkombination von Monomen vom Grad $\leq r$,

$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k_1 + \dots + k_n \leq r} c_{k_1 \dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdot \dots \cdot x_n^{k_n},$$

$c_{k_1 \dots k_n} \in \mathbb{R}$. Da die Koordinatenfunktionen $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_\nu$ und die konstanten Funktionen stetig sind, folgt durch wiederholte Anwendung des Corollars, dass alle Polynomfunktionen auf dem \mathbb{R}^n stetig sind.

Satz 8 (ε - δ -Kriterium der Stetigkeit). Seien X, Y metrische Räume und $a \in X$ ein Punkt. Eine Abbildung

$$f : X \rightarrow Y$$

ist genau dann in a stetig, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in X \text{ mit } d_X(x, a) < \delta.$$

(Dieser Satz verallgemeinert den analogen Satz aus An. 1, § 11.)

Beweis.

a) Wir setzen zunächst voraus, dass f in a stetig ist, d.h. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Annahme: Das ε - δ -Kriterium ist nicht erfüllt. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass für jedes $\delta > 0$ ein $x \in X$ existiert mit

$$d_X(x, a) < \delta \quad \text{aber} \quad d_Y(f(x), f(a)) \geq \varepsilon.$$

Insbesondere gibt es zu $\delta = \frac{1}{n}$ ein $x_n \in X$ mit

$$d_X(x_n, a) < \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad d_Y(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon. \quad (*)$$

Also ist $\lim x_n = a$, woraus folgt $\lim f(x_n) = f(a)$. Dies steht aber im Widerspruch zu (*). Also ist das ε - δ -Kriterium doch erfüllt.

b) Das ε - δ -Kriterium sei erfüllt.

Sei (x_n) eine Folge in X mit $\lim x_n = a$. Wir müssen zeigen $\lim f(x_n) = f(a)$. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$d_X(x, a) < \delta \quad \implies \quad d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Da $x_n \rightarrow a$, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $d_X(x_n, a) < \delta$ für alle $n \geq N$. Dann ist $d_Y(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Also ist $\lim f(x_n) = f(a)$, q.e.d.

(2.2) Beispiel. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $x_0 \in X$. Die Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) := d(x, x_0), \quad (\text{Abstand vom Punkt } x_0).$$

Diese Funktion ist in jedem Punkt $a \in X$ stetig, denn es folgt aus der Dreiecksungleichung

$$|f(x) - f(a)| = |d(x, x_0) - d(a, x_0)| \leq d(x, a),$$

d.h. $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ für $d(x, a) < \varepsilon$. Beim ε - δ -Kriterium kann man also hier $\delta = \varepsilon$ wählen.

Bemerkung. Das ε - δ -Kriterium aus Satz 8 für die Stetigkeit einer Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen zwei metrischen Räumen X, Y lässt sich auch so umformulieren: f ist im Punkt $a \in X$ genau dann stetig, wenn zu jeder Umgebung V von $f(a) \in Y$ eine Umgebung U von a existiert mit $f(U) \subset V$. In dieser Form ist es auch anwendbar zur Definition der Stetigkeit von Abbildungen zwischen beliebigen topologischen Räumen.

Definition (Stetige Abbildungen von topologischen Räumen). Seien X, Y topologische Räume und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Die Abbildung f heißt *stetig* im Punkt $a \in X$, wenn zu jeder Umgebung V von $f(a) \in Y$ eine Umgebung U von a existiert mit $f(U) \subset V$. Die Abbildung f heißt *stetig auf X* (oder *stetig schlechthin*), wenn sie in jedem Punkt $x \in X$ stetig ist.

Man könnte natürlich auch daran denken, die Definition der Stetigkeit mittels Folgen (siehe Seite 25) zu verallgemeinern.

Definition (Folgenstetigkeit). Seien X, Y topologische Räume und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Die Abbildung f heißt *folgenstetig* im Punkt $a \in X$, wenn für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Punkten von X mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$.

Es stellt sich jedoch heraus, dass im Allgemeinen eine folgenstetige Abbildung nicht stetig ist. Wir betrachten dazu folgendes Beispiel.

(2.3) Sei X eine überabzählbare Menge, z.B. $X = \mathbb{R}$. Wir führen auf X zwei Topologien \mathcal{T}_1 und \mathcal{T}_2 ein. Eine Menge $U \subset X$ sei genau dann offen bzgl. \mathcal{T}_1 , falls es eine abzählbare Teilmenge $A \subset X$ gibt mit $U = X \setminus A$. Es ist leicht nachzuprüfen, dass dies eine Topologie ist, vgl. auch die Bemerkung im Anschluss an Beispiel (1.29). Die zweite Topologie sei definiert als $\mathcal{T}_2 := \mathfrak{P}(X)$, d.h. bzgl. \mathcal{T}_2 ist jede Teilmenge von X offen. Wir betrachten nun die identische Abbildung

$$f : (X, \mathcal{T}_1) \rightarrow (X, \mathcal{T}_2), \quad x \mapsto f(x) := x.$$

1. Behauptung. Die Abbildung f ist in keinem Punkt $a \in X$ stetig.

Beweis. Da $\{a\}$ offen in X bzgl. \mathcal{T}_2 ist, ist $V := \{a\}$ eine Umgebung von $f(a) = a$. Es gibt aber keine Umgebung U von a bzgl. der Topologie \mathcal{T}_1 mit $f(U) = U \subset V = \{a\}$, da jede Umgebung von a bzgl. \mathcal{T}_1 aus unendlich vielen Punkten besteht. Also ist f in a nicht stetig.

2. Behauptung. Die Abbildung f ist folgenstetig in a .

Beweis. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten, die bzgl. der Topologie \mathcal{T}_1 gegen a konvergiert. Sei A die Menge aller Folgenglieder x_n mit $x_n \neq a$. Dann ist $U := X \setminus A$ eine Umgebung von a (bzgl. \mathcal{T}_1), also existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $x_n \in U$ für alle $n \geq N$. Nach Konstruktion von U folgt, dass $x_n = a$ für alle $n \geq N$. Dann ist auch $f(x_n) = x_n = a = f(a)$ für alle $n \geq N$, woraus folgt, dass die Folge $f(x_n)$ gegen $f(a)$ konvergiert (bzgl. \mathcal{T}_2). Also ist f in a folgenstetig, q.e.d.

Unter geeigneten Abzählbarkeits-Bedingungen sind die Begriffe stetig und folgenstetig jedoch äquivalent, wie folgender Satz zeigt.

Satz 9. Seien X, Y topologische Räume und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung.

- a) Ist f im Punkt $a \in X$ stetig, so ist f in a auch folgenstetig.
- b) Besitzt der Punkt $a \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis und ist f in a folgenstetig, so ist f in a stetig.

Beweis. a) Wir setzen voraus, dass f in a stetig ist. Sei (x_n) eine Punktfolge in X mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Es ist zu zeigen, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$. Sei V eine beliebige Umgebung von $f(a)$. Wegen der Stetigkeit von f gibt es eine Umgebung U von a mit $f(U) \subset V$. Da $\lim x_n = a$, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $x_n \in U$ für alle $n \geq N$. Daraus folgt aber $f(x_n) \in V$ für alle $n \geq N$. Dies beweist $\lim f(x_n) = f(a)$.

b) Sei $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ ein abzählbare Umgebungsbasis von a . Wir dürfen annehmen, dass $U_n \supset U_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (Andernfalls ersetze man U_n durch $U'_n := \bigcap_{k \leq n} U_k$.) Wir setzen voraus, dass f in a folgenstetig ist, und müssen beweisen, dass f in a stetig ist.

Annahme. f ist in a nicht stetig. Dann gibt es eine Umgebung V von $f(a)$, so dass $f(U_n) \not\subset V$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gibt also für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Punkt $x_n \in U_n$ mit $f(x_n) \notin V$. Aus $x_n \in U_n$ für alle n folgt $\lim x_n = a$, und wegen der Folgenstetigkeit von f auch $\lim f(x_n) = f(a)$. Dies steht aber im Widerspruch zu $f(x_n) \notin V$ für alle n . Daher ist die Annahme falsch und f in a stetig.

Wegen Satz 9 sind also für topologische Räume, die dem 1. Abzählbarkeitsaxiom genügen (z.B. metrische Räume) die Begriffe stetig und folgenstetig äquivalent.

Satz 10. Seien X, Y zwei topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist genau dann auf ganz X stetig, wenn das Urbild $f^{-1}(V)$ jeder offenen Menge $V \subset Y$ offen in X ist.

Beweis. Sei zunächst f als stetig vorausgesetzt und sei V offen in Y . Es ist zu zeigen, dass $f^{-1}(V)$ offen in X ist. Sei $a \in f^{-1}(V)$ beliebig. Da V Umgebung von $f(a) \in V$ ist, gibt es wegen der Stetigkeit von f im Punkt a eine Umgebung U von a mit $f(U) \subset V$. Daraus folgt aber $U \subset f^{-1}(V)$. Deshalb ist $f^{-1}(V)$ Umgebung von a . Da $a \in f^{-1}(V)$ beliebig war, ist $f^{-1}(V)$ offen.

Sei umgekehrt vorausgesetzt, dass das Urbild jeder offenen Menge offen ist und sei $a \in X$ beliebig. Ist V eine Umgebung von $f(a)$, so gibt es eine offene Menge V_1 mit $f(a) \in V_1 \subset V$. Dann ist $U := f^{-1}(V_1)$ offen. U enthält den Punkt a , ist also Umgebung von a , und es gilt $f(U) \subset V$. Also ist f in a stetig, q.e.d.

Bemerkung. Da die abgeschlossenen Mengen gerade die Komplemente der offenen Mengen sind, gilt auch: Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist genau dann stetig, wenn das Urbild jeder abgeschlossenen Menge abgeschlossen ist.

(2.4) Beispiel. Sei X ein topologischer Raum, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $c \in \mathbb{R}$. Dann ist die Menge

$$U := \{x \in X : f(x) < c\}$$

offen und die Menge

$$A := \{x \in X : f(x) = c\}$$

abgeschlossen. Denn es gilt $U = f^{-1}]-\infty, c[$ und $A = f^{-1}(\{c\})$. Die Menge $]-\infty, c[$ ist offen und die Menge $\{c\}$ abgeschlossen in \mathbb{R} .

Definition (Homöomorphismus). Seien X, Y topologische Räume. Eine bijektive Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt *Homöomorphismus* (oder *topologische Abbildung*), wenn f stetig ist und die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \rightarrow X$ ebenfalls stetig ist. Zwei topologische Räume heißen *homöomorph*, wenn es einen Homöomorphismus $f : X \rightarrow Y$ gibt.

(2.5) Als Beispiel zeigen wir, dass der \mathbb{R}^n zur offenen Einheitskugel

$$B := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$$

Analysis 2

Differentialrechnung im \mathbb{R}^n , gewöhnliche
Differentialgleichungen

Forster, O.

2017, VIII, 245 S. 39 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-19410-9