

2

Arithmetik und Algebra

2.1 Hinweise und Beispiele

Die Lösung eines komplexen mathematischen Problems lässt sich in drei Phasen gliedern:

- Analyse der Aufgabenstellung und Entwicklung verschiedener Lösungsideen
- Bereitstellung des mathematischen Rüstzeuges
- Ausformulierung der Lösung mit Überprüfung auf Vollständigkeit

In der Regel werden diese drei Abschnitte nicht scharf gegeneinander abgegrenzt sein, sondern sich zumindest teilweise überschneiden. Besonders die ersten beiden Phasen müssen gegebenenfalls mehrfach durchlaufen werden, wenn sich ein ursprünglich erfolgversprechender Lösungsansatz schließlich doch als Sackgasse erweist.

Der folgende Fragenkatalog soll Anregungen zu einer gewissen Systematisierung des Lösungsvorganges geben. Er soll vor allem dann weiterhelfen, wenn sich trotz längeren Bemühens kein Erfolg einstellt. Es gibt zwar keinen Königsweg für das Lösen von Mathematikaufgaben, doch steigen mit jeder erfolgreich abgeschlossenen Aufgabe die Erfahrung und damit auch die Fähigkeit schwierigere bzw. ungewohnte Aufgaben zu lösen – auch Problemlösen ist erlernbar.

Einige der Fragen und Anregungen werden im Zusammenhang mit Problemstellungen aus Arithmetik und Algebra präzisiert und an Beispielen verdeutlicht.

Fragen und Anregungen bei der Analyse der Aufgabenstellung

Sind mir alle Begriffe bekannt? Habe ich die Aufgabenstellung vollständig verstanden?

Was ist gegeben? Was sind die Unbekannten? Was sind die Bedingungen?

Kenne ich Formeln, in denen die Variablen oder die gegebenen Größen enthalten sind? Helfen diese Formeln weiter? Komme ich weiter, wenn ich zusätzliche Informationen habe?

Fragen und Anregungen für die Bearbeitungsphase

Habe ich schon einmal eine ähnliche Aufgabenstellung bearbeitet, die mir nun weiterhelfen könnte? Komme ich durch eine Umformulierung der Aufgabenstellung auf eine mir bereits vertraute Situation?

Habe ich alle Informationen der Aufgabenstellung bereits verwendet oder habe ich vielleicht bisher einige versteckte Informationen übersehen? Wenn ja, könnten diese Informationen die aktuellen Schwierigkeiten überwinden helfen?

Gibt mir die Behauptung oder die zu bestimmende Unbekannte einen Hinweis auf die Überwindung dieses Hindernisses (Rückwärtsarbeiten)?

Habe ich das Gefühl, mich mit jedem Schritt der Lösung zu nähern? Kann ich bereits erkennen, dass mein Lösungsplan schließlich zum Ziel führt?

Bin ich immer wieder an der gleichen Stelle hängen geblieben? Liegt das daran, dass ich immer den gleichen Weg gegangen bin oder bin ich auch von verschiedenen Ansätzen aus immer wieder zur gleichen Stelle gekommen?

Habe ich meinen Lösungsweg schon an einem Sonderfall überprüft, bei dem ich wegen der dabei geltenden zusätzlichen Bedingungen eine Entscheidung treffen kann? Welche der zusätzlichen Bedingungen waren entscheidend, dass ich im Sonderfall die Aufgabe lösen konnte? Kann ich diese Bedingungen auch für den allgemeinen Fall verwenden? Habe ich beim Sonderfall die Informationen der Aufgabenstellung vielleicht in anderer Weise verwendet als bisher im allgemeinen Fall?

Fragen und Anregungen für die endgültige Formulierung der Lösung

Habe ich alle Behauptungen nachgewiesen und alle Variablen bestimmt? Habe ich vielleicht nur einen Teil der Aufgabe gelöst, weil ich immer nur von einer speziellen Ausgangssituation ausgegangen bin, z.B. Primzahlen?

Habe ich tatsächlich nur die Eigenschaften ausgenutzt, die nach Aufgabenstellung als bekannt vorausgesetzt werden dürfen? Sind Teile der Behauptung durch Umformulierung der Aufgabenstellung vielleicht als gegebene Daten verwendet worden?

Habe ich die Überlegungen in der richtigen Reihenfolge angeordnet? Gelten alle bei der Lösung verwendeten Eigenschaften auch tatsächlich, oder gilt vielleicht nur die Umkehrung? Muss die Umkehrung des Satzes erst noch bewiesen werden?

Kann ich im Rückblick die Lösung auch noch auf eine andere Weise bestätigen? Gibt es dadurch vielleicht sogar eine kürzere, einfacher zu formulierende Lösung?

Welche Verfahren habe ich bei der Lösung dieser Aufgabe erfolgreich eingesetzt?

Erforderliche Kenntnisse aus dem Mathematikunterricht

Für die Bearbeitung der Aufgaben aus der Serie Arithmetik und Algebra werden nur wenige Grundkenntnisse vorausgesetzt, so z.B.

- Teilbarkeitseigenschaften und Teilbarkeitsregeln für die Zahlen 2, 3, 4, 5 und 9
- Regeln für das Vereinfachen von Termen
- Binomische Formeln
- Lösungsverfahren für lineare und quadratischen Gleichungen, sowie Gleichungssystemen

Die Schwierigkeit bei der Lösung anspruchsvoller Aufgaben besteht in der Regel darin, zu den gegebenen Informationen der Aufgabenstellung die geeigneten Hilfsmittel auszuwählen, um die gesuchte Zahl oder Variable zu bestimmen oder die Behauptung zu beweisen.

Dies soll nun an vier Beispielen näher erläutert werden.

➤ **Beispiel 1**

Die beiden Zahlen 409 und 281 werden durch dieselbe natürliche Zahl dividiert. Im ersten Fall erhält man den Rest 4, im zweiten den Rest 2.

Durch welche Zahl wurde dividiert?

Um die gesuchte Zahl zu bestimmen, ist die Feststellung zielführend, dass die gesuchte Zahl ein Teiler von $405 (= 409 - 4)$ und ein Teiler von $279 (= 281 - 2)$ sein muss.

Aufgrund der Teilbarkeitsregeln kann man sofort feststellen, dass 405 auf jeden Fall durch 5 und durch 9 und außerdem 279 ebenfalls durch 9 teilbar ist.

Dies führt nach kurzer Rechnung auf folgende Primfaktordarstellungen:

$$405 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \quad \text{und} \quad 279 = 3 \cdot 3 \cdot 31$$

Als gemeinsame Teiler der beiden Zahlen 405 und 279 erhält man daraus die Teilermenge $\{1; 3; 9\}$.

Da bei der Division von 409 der Rest 4 bleibt, kann nur der Teiler 9 die gesuchte Zahl sein.

➤ **Beispiel 2**

Wie heißen die beiden dreistelligen Zahlen a und b mit folgenden Eigenschaften:

- Ihre Summe ist 999.
- Setzt man a vor b , so ist die entstehende sechsstellige Zahl sechsmal so groß wie diejenige Zahl, die entsteht, wenn man b vor a setzt.

Mögliche Erweiterung

Ist dieses Problem auch für andere Summenwerte als 999 lösbar?

Für die Lösung der gestellten Aufgabe ist es erforderlich, eine geeignete Darstellung der beiden sechsstelligen Zahlen zu finden, die auf unterschiedliche Weise aus den beiden dreistelligen Zahlen a und b erzeugt werden.

Das Schreiben der Zahl a vor die dreistellige Zahl b entspricht der Multiplikation von a mit der Zahl 1000 und der anschließenden Addition von b . Es entsteht die sechsstellige Zahl $1000 \cdot a + b$. Entsprechend wird das Schreiben der Zahl b vor die dreistellige Zahl a durch den Term $1000 \cdot b + a$ dargestellt.

Die in der Aufgabenstellung genannten beiden Bedingungen an die beiden dreistelligen Zahlen a und b werden durch das folgende Gleichungssystem beschrieben:

$$a + b = 999 \quad (1)$$

$$1000a + b = 6 \cdot (1000b + a) \quad (2)$$

Zur Lösung des Gleichungssystems kann man dann eines der Lösungsverfahren verwenden, das aus dem Unterricht bekannt ist.

Aus (1) folgt: $a = 999 - b$

Einsetzen in (2) ergibt:

$$1000 \cdot (999 - b) + b = 6 \cdot (1000b + 999 - b)$$

$$999000 - 999b = 6 \cdot (999b + 999)$$

$$999 \cdot (1000 - b) = 6 \cdot 999 \cdot (b + 1)$$

$$1000 - b = 6 \cdot (b + 1)$$

$$7b = 994$$

$$b = 142$$

Einsetzen in (1) ergibt dann: $a = 857$

Lösung der möglichen Erweiterung

Verwendet man für die Erweiterung die Gleichung $a + b = c$ als erste Bedingung, so erhält man mit $a = c - b$ durch Einsetzen in die Gleichung (2) zunächst die folgende Bedingung:

$$1000 \cdot (c - b) + b = 6 \cdot [1000b + (c - b)]$$

$$1000c - 999b = 6 \cdot [999b + c]$$

$$1000c - 999b = 5994b + 6c$$

$$6993b = 994c$$

$$b = \frac{994c}{6993}$$

$$b = \frac{142c}{999}$$

Da die Zahlen 142 und 999 teilerfremd sind, erhält man für b nur dann eine natürliche Zahl, wenn c ein Vielfaches von 999 ist.

Für c kommen also die Werte 999, 1998, 2997, ... in Frage.

Nach Aufgabenstellung sind die dreistellige Zahlen a und b so zu bestimmen, dass nach Bedingung (1) $a + b = c$ gelten muss.

Der Fall $a + b = 999$ wurde bereits behandelt. Der Fall $a + b = 1998$ wäre mit dreistelligen Zahlen a und b nur für $a = b = 999$ möglich. Die beiden mit Hilfe von a und b gezeugten sechsstelligen Zahlen wären dann gleich. Damit ist die zweite Forderung der Aufgabenstellung nicht erfüllt.

Für größere Vielfache der Zahl 999 ist die Bedingung (1) mit dreistelligen Zahlen a und b nicht erfüllbar.

Damit ist 999 der einzige Summenwert.

➤ **Beispiel 3**

Beweise, dass für zwei beliebige Primzahlen $p, q \geq 3, (p > q)$ die Differenz $p^2 - q^2$ ein Vielfaches von 4 ist.

Vorüberlegungen

Alle Primzahlen größer oder gleich 3 sind ungerade. Sowohl p als auch q lassen sich deshalb in der Form $p = 2m + 1$ bzw. $q = 2n + 1$ mit natürlichen Zahlen m und n ($m > n$) darstellen.

Für die Differenz $p^2 - q^2$ gilt deshalb:

$$\begin{aligned} p^2 - q^2 &= (2m+1)^2 - (2n+1)^2 \\ &= 4m^2 + 4m + 1 - (4n^2 + 4n + 1) \\ &= 4m^2 + 4m - 4n^2 - 4n \\ &= 4 \cdot (m^2 + m - n^2 - n) \end{aligned}$$

Da m und n ($m > n$) natürliche Zahlen sind, steht in der Klammer eine natürliche Zahl.

Aus der Produktdarstellung $4 \cdot (m^2 + m - n^2 - n)$ folgt unmittelbar die Teilbarkeit von $p^2 - q^2$ durch 4.

➤ **Beispiel 4**

Wähle drei verschiedene Ziffern ungleich 0 und bilde daraus alle dreistelligen Zahlen, in denen jede dieser Ziffern genau einmal vorkommt.

Berechne die Summe S dieser Zahlen und bestimme alle Teiler von S .

Begründe, weshalb in der Teilermenge von S unabhängig von der Wahl der drei Ausgangsziffern – neben anderen Zahlen – immer die gleichen acht Zahlen vorkommen.

Vorüberlegungen

Um sich einen ersten Überblick zu verschaffen, ist es hilfreich, zunächst ein paar Beispiele zu betrachten.

Wählt man die drei Ziffern 2, 4 und 7, so kann man daraus die sechs verschiedenen Zahlen 247, 274, 427, 472, 724 und 742 bilden. Die Summe dieser sechs Zahlen ist 2886.

Die Teiler von 2886 erhält man aus der Primfaktorzerlegung:

$$\begin{aligned} 2886 &= 2 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 37 \\ T_{2886} &= \{1; 2; 3; 6; 13; 26; 37; 39; 74; 78; 111; 222; 481; 962; 1443; 2886\} \end{aligned}$$

Ein zweites Beispiel für die Ziffern 1, 3 und 5 führt zu den sechs Zahlen 135, 153, 315, 351, 513 und 531 mit der Summe 1998.

$$\begin{aligned} 1998 &= 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37 \\ T_{1998} &= \{1; 2; 3; 6; 9; 18; 27; 37; 54; 74; 111; 222; 333; 666; 999; 1998\} \end{aligned}$$

Auffällig bei den beiden Beispielen ist, dass die Primfaktorzerlegungen die Primfaktoren 2, 3 und 37 enthalten.

Die gemeinsamen Teiler sind $\{1; 2; 3; 6; 37; 74; 111; 222\}$. Dies ist gerade die Teilermenge von $222 (= 2 \cdot 3 \cdot 37)$.

Mit einem dritten Beispiel soll diese Beobachtung überprüft werden.

Wählt man die Ziffern 2, 6 und 8, so werden daraus die sechs Zahlen 268, 286, 628, 682, 826 und 862 mit der Summe 3552.

$$3552 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 37$$

$$T_{3552} = \left\{ \begin{array}{l} 1; 2; 3; 4; 6; 8; 16; 24; 32; 37; 48; 74; 96; 54; 74; \\ 111; 148; 222; 444; 592; 888; 1184; 1776; 3552 \end{array} \right\}$$

Zwischenbilanz

In allen drei Beispielen erhält man unabhängig von der Wahl der drei Ziffern die acht Teiler $\{1; 2; 3; 6; 37; 74; 111; 222\}$.

Gelingt der Nachweis, dass in der Primfaktorzerlegung der Summe der sechs Zahlen immer die Primfaktoren 2, 3 und 37 enthalten sind, dann ist die behauptete Eigenschaft bewiesen.

Begründung auf der verbalen Ebene

Für die drei von Null verschiedenen Ziffern werden die Variablen a , b und c verwendet.

Jede dieser Ziffern kommt zweimal als Einer, zweimal als Zehner und zweimal als Hunderter vor. Man erhält also die doppelte Summe der drei gewählten Ziffern insgesamt 111-mal. Damit ist die Summe S gleich $2 \cdot 111 \cdot (a + b + c)$. Die Summe S ist also immer ein Vielfaches von 222. Damit ist die Summe S immer durch 222 teilbar. Jeder Teiler von 222 ist auch ein Teiler von S . Damit sind die acht Zahlen 1, 2, 3, 6, 37, 74, 111 und 222 immer Teiler von S .

Begründung auf formaler Ebene

Zunächst gilt es, die dreistelligen Zahlen mit Hilfe ihrer Ziffern a , b und c darzustellen. Dazu eignet sich die folgende Darstellung mit Hilfe der Stufenzahlen im Dezimalsystem:

$$\overline{abc} = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c$$

Aus drei verschiedenen Ziffern a , b und c ungleich 0 können sechs verschiedene dreistellige Zahlen $\overline{abc}$, $\overline{acb}$, $\overline{bac}$, $\overline{bca}$, $\overline{cab}$ und $\overline{cba}$ gebildet werden.

Mit $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ usw. erhält man als Summe S der sechs Zahlen:

$$\begin{aligned} S &= \overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba} \\ &= 100a + 10b + c + 100a + 10c + b + \dots + 100c + 10a + b + 100c + 10b + a \\ &= 222 \cdot (a + b + c) \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 37 \cdot (a + b + c) \end{aligned}$$

Die Teilermenge von S enthält unabhängig von der Wahl der Ziffern a , b und c die Teiler 1, 2, 3, 6, 37, 74, 111 und 222. Damit ist die Behauptung aus der Aufgabenstellung bewiesen.

Kongruenzenrechnung – ein Hilfsmittel zur Darstellung der Lösung

Eine häufig unterschätzte Schwierigkeit besteht darin, den Beweis für eine mit heuristischen Verfahren gewonnene Vermutung allgemein und übersichtlich zu formulieren. Im Bereich der Zahlentheorie, bei der viele Problemstellungen auf Teilbarkeitseigenschaften führen, hilft die Kongruenzenrechnung weiter. Mit ihrer Hilfe gelingt es, eine Aussage über unendlich viele Elemente auf eine endliche Anzahl von Fällen zu reduzieren. Mit den folgenden Ausführungen sollen neben der Begriffsbildung auch erste Erfahrungen im Rechnen mit Kongruenzen vermittelt werden. Die Tragweite der Kongruenzenrechnung reicht aber weit über die Rolle eines Hilfsmittels zum Lösen von Aufgaben aus der Arithmetik hinaus.

Benennungen und Eigenschaften

Dividiert man eine ganze Zahl a durch eine natürliche Zahl m , so erhält man einen Rest r , der größer oder gleich 0 und kleiner als m ist. Die Division mit Rest lässt sich durch den Ansatz $a = q \cdot m + r$ mit $a, q \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leq r < m$ beschreiben.

Fasst man alle ganzen Zahlen zusammen, die bei Division durch m den gleichen Rest ergeben, so erhält man eine Einteilung der ganzen Zahlen in Teilmengen.

Für $m = 5$ ergeben sich fünf Teilmengen:

$$\begin{aligned} R_0 &= \{\dots; -10; -5; 0; 5; 10; \dots\} & R_1 &= \{\dots; -9; -4; 1; 6; 11; \dots\} \\ R_2 &= \{\dots; -8; -3; 2; 7; 12; \dots\} & R_3 &= \{\dots; -7; -2; 3; 8; 13; \dots\} \\ R_4 &= \{\dots; -6; -1; 4; 9; 14; \dots\} \end{aligned}$$

Die Indizes 0, 1, 2, 3 und 4, die zur Kennzeichnung der Teilmengen verwendet wurden, stimmen mit den jeweiligen Resten überein, die sich bei Division von Elementen aus der Teilmenge R_m durch die Zahl 5 ergeben.

Bei der Division durch m erhält man m Teilmengen. Jeder mögliche Rest $0, 1, \dots, (m-1)$ legt genau eine Teilmenge fest. Da bei der Division durch m der Rest eindeutig bestimmt ist, gehört jede ganze Zahl n zu genau einer Teilmenge. Diese Teilmengen bilden eine Zerlegung der Menge der ganzen Zahlen. Man bezeichnet diese Teilmengen auch als Restklassen bei Division durch m .

Definition 1

Zwei ganze Zahlen a und b heißen *kongruent modulo m* , geschrieben $a \equiv b \pmod{m}$, wenn sie bei Division durch m den gleichen Rest ergeben.

Definition 2

Zwei ganze Zahlen a und b heißen *kongruent modulo m* , wenn ihre Differenz ein ganzzahliges Vielfaches von m ist.

Definition 3

Zwei ganze Zahlen a und b heißen *kongruent modulo m* , wenn es eine ganze Zahl k gibt mit $a = b + k \cdot m$.

Beispiel: $17 \equiv 23 \pmod{3}$, denn es gilt

- 1) Die Zahl 17 und die Zahl 23 ergeben bei Division durch 3 jeweils den Rest 2.
- 2) Die Differenz 6 ist ein Vielfaches von 3.
- 3) Es gilt $17 = 23 + (-2) \cdot 3$.

Die drei Definitionen sind äquivalent zueinander. Bei Anwendungen kann also stets diejenige verwendet werden, die für die Problemstellung am geeignetsten ist.

Eigenschaften der Kongruenzrelation

Für alle Moduln m und alle ganzen Zahlen a, b und c gilt:

$$\begin{aligned} a &\equiv a \pmod{m} && \text{(Reflexivität)} \\ \text{Aus } a &\equiv b \pmod{m} \text{ folgt } b &\equiv a \pmod{m} && \text{(Symmetrie)} \\ \text{Aus } a &\equiv b \pmod{m} \text{ und } b &\equiv c \pmod{m} \text{ folgt } a &\equiv c \pmod{m} && \text{(Transitivität)} \end{aligned}$$

Die Gültigkeit der ersten beiden Eigenschaften folgt unmittelbar aus den oben genannten Definitionen. Die Transitivität wird in Aufgabe 188 behandelt. Weitere Übungsaufgaben zum Rechnen mit Kongruenzen sind Thema der Aufgaben 185 bis 187.

Rechnen mit Kongruenzklassen

Für die Restklassen können Addition $\oplus$, Subtraktion $\ominus$ und Multiplikation $\otimes$ dadurch erklärt werden, dass man jeweils einen Repräsentanten aus den Restklassen addiert, subtrahiert oder multipliziert. Verwendet man als Grundlage die Restklassen modulo 5, so kann dieses Verfahren durch folgende Beispiele verdeutlicht werden:

$$R_2 \oplus R_4 = R_1, \quad \text{denn } 2 + 4 = 6 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$R_1 \ominus R_4 = R_2, \quad \text{denn } 1 - 4 = -3 \equiv 2 \pmod{5}$$

$$R_4 \otimes R_3 = R_2, \quad \text{denn } 4 \cdot 3 = 12 \equiv 2 \pmod{5}$$

Durch diese Festlegung der Addition, der Subtraktion und der Multiplikation wird jedem Paar von Restklassen unabhängig von den gewählten Repräsentanten jeweils genau eine Restklasse als Ergebnis zugeordnet. Dies lässt sich allgemein mit jeder der drei oben genannten Definitionen nachweisen.

Für das Rechnen mit Kongruenzklassen gelten die gleichen Rechengesetze wie für die Addition, die Subtraktion und die Multiplikation von natürlichen Zahlen.

Die Tabellen geben einen vollständigen Überblick über die drei Verknüpfungen der Restklassen modulo 5.

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\ominus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	0	4	3	2
2	2	1	0	4	3
3	3	2	1	0	4
4	4	3	2	1	0

$\otimes$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Teilbarkeitsregeln

Eine natürliche Zahl mit der Einerziffer a_0 , der Zehnerziffer a_1 usw. kann auch als

$$n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1 a_0} = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$$

dargestellt werden.

Die bekannten Teilbarkeitsregeln für die Zahlen 2, 4, 5 und 8 ergeben sich aus dieser Darstellung einfach durch Kongruenzenrechnung. Betrachtet man z. B. die Zahl modulo 8, so sind alle Zehnerpotenzen 10^n mit $n \geq 3$ durch 8 teilbar und damit kongruent 0 modulo 8. Für die kleineren Zehnerpotenzen gilt:

$$10^2 \equiv 4 \pmod{8}; \quad 10^1 \equiv 2 \pmod{8}; \quad 10^0 = 1 \equiv 1 \pmod{8}$$

Für eine beliebige Zahl n ergibt sich daraus:

$$n \equiv (a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0) \pmod{8} \equiv (4 \cdot a_2 + 2 \cdot a_1 + a_0) \pmod{8}$$

Diese Darstellung erlaubt zwei Deutungen. Zunächst einmal kann man ablesen, dass n genau dann durch 8 teilbar ist, wenn $a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$ durch 8 teilbar ist. Dies ist die bekannte Teilbarkeitsregel, dass eine Zahl genau dann durch 8 teilbar ist, wenn dies für die aus den letzten drei Ziffern gebildete Zahl gilt.

Die zweite Darstellung $n \equiv (4 \cdot a_2 + 2 \cdot a_1 + a_0) \pmod{8}$ bedeutet, dass eine Zahl n genau dann durch 8 teilbar ist, wenn die Summe aus dem Vierfachen der Hunderterziffer, dem

Doppelten der Zehnerziffer und der Einerziffer ein Vielfaches von 8 ist. Dies ist eine vielleicht unbekannte Teilbarkeitsregel für die Zahl 8.

Die Quersummenregel für die Teilbarkeit durch 3 lässt sich ebenfalls mit Hilfe der Kongruenzenrechnung einfach bestätigen. Geht man von der Kongruenz $10 \equiv 1 \pmod{3}$ aus, so gilt nach der Potenzregel $10^n \equiv 1^n \equiv 1 \pmod{3}$.

Daraus folgt:

$$n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 \equiv (a_k + a_{k-1} + \dots + a_1 + a_0) \pmod{3}$$

Die Zahl n ist also genau dann durch 3 teilbar, wenn die Summe ihrer Ziffern durch 3 teilbar ist. Die Kongruenzenrechnung zeigt aber auch, dass bei der Division von n durch 3 stets der gleiche Rest wie bei der Division der Quersumme durch 3 bleibt.

In entsprechender Weise lässt sich mit der Kongruenzenrechnung die Teilbarkeitsregel für die Zahl 9 bestätigen.

Mit einer Teilbarkeitsregel für 11 soll dieser Abschnitt abgeschlossen werden.

Betrachtet man die Reste der Stufenzahlen 1, 10, 100, 1000, ... bei der Division durch 11 und berücksichtigt, dass nach Definition die Zahlen 10 und -1 in die gleiche Restklasse modulo 11 gehören, so gilt:

$$1 \equiv 1 \pmod{11}; \quad 100 \equiv 1 \pmod{11}; \quad 10000 \equiv 1 \pmod{11}; \dots \quad 10^{2n} \equiv 1 \pmod{11};$$

$$10 \equiv -1 \pmod{11}; \quad 1000 \equiv -1 \pmod{11}; \quad 100000 \equiv -1 \pmod{11}; \dots \quad 10^{2n+1} \equiv -1 \pmod{11}$$

Die Stufenzahlen ergeben also abwechselnd den Wert 1 und -1 modulo 11.

Für eine beliebige natürliche Zahl n ergibt sich daraus:

$$n \equiv (a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 \pm \dots) \pmod{11}$$

Eine natürliche Zahl n ist genau dann durch 11 teilbar, wenn die alternierende Quersumme $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 \pm \dots$ ein Vielfaches von 11 ist.

Anwendung der Kongruenzenrechnung

Problemstellung

Bestimme alle natürlichen Zahlen n , für die der Term $2^n - 1$ durch 7 teilbar ist.

Da die Aufgabenstellung eine Aussage über die Teilbarkeit durch 7 enthält, ist es naheliegend, die Zahl 7 als Modul zu verwenden.

Betrachtet man die Zweierpotenzen modulo 7, so erhält man:

$$2^0 = 1 \equiv 1 \pmod{7}, \quad 2^1 = 2 \equiv 2 \pmod{7}, \quad 2^2 = 4 \equiv 4 \pmod{7}, \quad 2^3 = 8 \equiv 1 \pmod{7},$$

$$2^4 = 16 \equiv 2 \pmod{7}, \text{ usw.}$$

Die Reste der Zweierpotenzen wiederholen sich mit der Periodenlänge 3. Jede natürliche Zahl n lässt sich in der Form $n = 3 \cdot k + r$ mit $k, r \in \mathbb{N}$ und $0 \leq r < 3$ darstellen.

$$\text{Es gilt dann: } 2^n = 2^{3k+r} = 2^{3k} \cdot 2^r = (2^3)^k \cdot 2^r \equiv 1^k \cdot 2^r \pmod{7} \equiv 2^r \pmod{7} \quad (*)$$

Die Zahl $2^n - 1$ ist genau dann durch 7 teilbar, wenn $2^n \equiv 1 \pmod{7}$ gilt.

Wegen (*) und $0 \leq r < 3$ ist dies nur für $r = 0$ der Fall.

Die Zahl $2^n - 1$ ist genau dann durch 7 teilbar, wenn n ein Vielfaches von 3 ist.

2.2 Rechnen mit natürlichen Zahlen

Aufgabe 71

5/6	■	Teilbarkeit	Begründung		
-----	---	-------------	------------	--	--

Das Produkt von fünf natürlichen Zahlen ist eine ungerade Zahl.

Ist die Summe dieser fünf Zahlen gerade oder ungerade?

Aufgabe 72

5/6	■	nat. Zahlen	Berechnung		H
7/8	■■	Terme	Begründung		

Die Differenz von zwei natürlichen Zahlen soll das arithmetische Mittel der beiden Zahlen sein, wie dies bei 6 und 2 der Fall ist, denn es gilt $6 - 2 = \frac{6+2}{2}$.

Bestimme weitere Zahlenpaare mit dieser Eigenschaft.

Erweiterung

Stelle eine Vermutung auf und beweise diese.

Anmerkung

Addiert man zwei Zahlen a und b , so bezeichnet man die Hälfte dieser Summe als arithmetisches Mittel der beiden Zahlen.

Aufgabe 73

5/6	■	nat. Zahlen	Berechnung		H
7/8	■■	Terme	Berechnung		

Die Zahl 198 ist elfmal so groß wie ihre Quersumme.

Bestimme alle dreistelligen Zahlen, die 13-mal so groß wie ihre Quersumme sind.

Erweiterung

Die Bestimmung der gesuchten Zahlen kann auch mit Hilfe von Variablen erfolgen.

Aufgabe 74

5/6	■■	nat. Zahlen	Berechnung		H
7/8	■■	Gleichung	Berechnung		

Zwischen zwei Zahlen a und b werden durch

$$a * b = 2 \cdot a \cdot b \quad \text{und} \quad a \# b = 2 \cdot a - b$$

zwei neue Rechenarten festgelegt.

Welcher der beiden Terme $(12 * 26) \# 8$ und $12 * (26 \# 8)$ hat den größeren Wert?

Erweiterung

Bestimme alle Zahlen a , für die $a * a = a \# a$ gilt.

Mathematikaufgaben zur Binnendifferenzierung und
Begabtenförderung

300 Beispiele aus der Sekundarstufe I

Amann, F.

2017, XI, 318 S. 125 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-19417-8