

2 Elementare Funktionen

2.1 Polynome

2.1.1 Allgemeines

Unter einem *Polynom n-ten Grades* versteht man eine Funktion der Form

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \quad \text{mit } a_n \neq 0.$$

(Statt Polynom sagt man auch *ganzrationale* Funktion.) Die Zahlen $a_0, a_1, \dots, a_n$ heißen die *Koeffizienten* des Polynoms. Der Definitionsbereich von f ist die gesamte reelle Achse.

Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ (für alle $x \in \mathbb{R}$) heißt das *Nullpolynom*. Ihr wird kein Grad zugeschrieben.

Für $n = 0, 1$ oder 2 erhält man z.B. die Polynome:

$$\begin{aligned} n = 0: f(x) &= a_0, & \text{konstante Funktionen } \neq 0, \\ n = 1: f(x) &= a_0 + a_1x, & \text{Geraden, steigend oder fallend,} \\ n = 2: f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2, & \text{quadratische Polynome,} \end{aligned}$$

Zur Beschreibung technischer Sachverhalte werden Polynome vielfach verwendet.

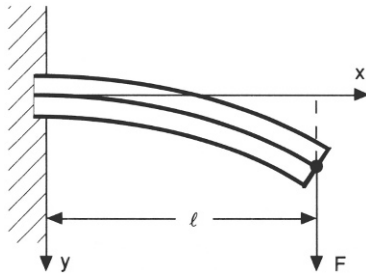


Fig. 2.1: Biegelinie eines Balkens

Beispiel 2.1:

Biegelinie eines einseitig eingespannten Trägers (s. Fig. 2.1) wird beschrieben durch

$$y = \frac{F}{6E \cdot I} (3lx^2 - x^3).$$

Dabei ist $E \cdot I$ die Biegesteifigkeit, F eine Last am freien Ende des Trägers und l seine Länge.

Oft ist auch nach den *Nullstellen* von Polynomen gefragt, da sie Lösungen technischer Probleme darstellen können, z.B. bei der Ermittlung von Gleichgewichtslagen, Resonanzen, Schwingungsfrequenzen und Instabilitäten. Schließlich sind die Polynome von großer Bedeutung als *Näherungsfunktionen* für komplizierte Funktionen (s. auch Abschn. 5.3.1).

2.1.2 Geraden

Wir beginnen mit den einfachsten Polynomen, und zwar mit Funktionen der Form

$$f(x) = a_1x + a_0. \quad (2.1)$$

Sie heißen *Geraden*, da ihre Graphen geometrische Gerade in der Koordinatenebene sind (siehe Fig. 2.2).

Geometrische Bedeutung der Koeffizienten a_0 , a_1 : Wir skizzieren den Graphen von f in einem x - y -Koordinatensystem, s. Fig. 2.2. Dann gilt: a_0 markiert auf der y -Achse den *Schnittpunkt* mit dem Graphen von f . (Dies folgt sofort aus $f(0) = a_0$.)

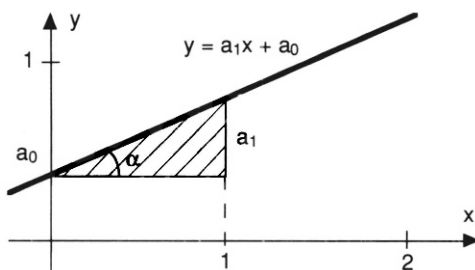


Fig. 2.2: Gerade im Koordinatensystem

Die geometrische Bedeutung von a_1 geht aus Fig. 2.2 hervor: Zeichnet man ein rechtwinkliges Dreieck mit den Ecken $(0, a_0)$, $(1, a_0)$, $(1, f(1))$ ein, so hat die senkrechte Seite die Länge $|a_1|$. (Dies folgt aus $f(1) = a_1 + a_0$, also $f(1) - a_0 = a_1$.) Dabei gilt offenbar

$$\begin{aligned} a_1 > 0 &\Rightarrow \text{die Gerade steigt,} \\ a_1 = 0 &\Rightarrow \text{die Gerade ist horizontal,} \\ a_1 < 0 &\Rightarrow \text{die Gerade fällt.} \end{aligned}$$

a_1 ist ein Maß dafür, wie stark die Gerade nach rechts ansteigt oder abfällt. Aus diesem Grunde wird a_1 die *Steigung* oder *Richtung* der Geraden genannt.

Bemerkung: Ist α der Anstiegswinkel der Geraden, so ergibt Fig. 2.2 direkt den Zusammenhang $a_1 = \tan \alpha$ (die Tangensfunktion $\tan$ wird in Abschn. 2.3.3 ausführlich beschrieben).

Beispiel 2.2:

Bewegt sich ein Massenpunkt mit gleichbleibender Geschwindigkeit v auf einer geradlinigen Bahn, so wird seine Bewegung beschrieben durch

$$y = vt + y_0.$$

Zu jedem Zeitpunkt t kann damit der Ort y des Massenpunktes auf der Bahn berechnet werden. Die Gleichung beschreibt eine Gerade im t - y -Koordinatensystem mit Steigung v .

Für zwei beliebige Punkte $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ der betrachteten Geraden $f(x) = a_1x + a_0$ gilt stets

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a_1. \quad (2.2)$$

Der Leser rechnet dies leicht nach.

Bemerkung: Gl. (2.2) lässt sich auch geometrisch begründen: Die beiden schraffierten Dreiecke in Fig. 2.3 sind ähnlich, haben also gleiche Seitenverhältnisse.

Folglich gilt

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{a_1}{1}.$$

Die linke Seite von (2.2) heißt *Differenzenquotient* von f bezüglich x_1, x_2 . Geraden zeichnen sich dadurch aus, dass die Differenzenquotienten bezüglich je zweier verschiedener Zahlen x_1, x_2 stets den gleichen Wert haben!

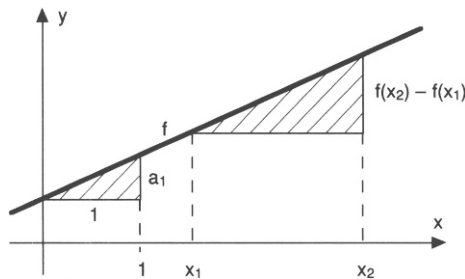


Fig. 2.3: Zum Differenzenquotient bei Geraden

Punkt-Richtungsform: Gesucht ist eine Gerade f , die durch einen bestimmten Punkt (x_1, y_1) verläuft, und deren Richtung a_1 bekannt ist. Wie lautet die Gleichung der Geraden? Für jeden Geradenpunkt $(x, f(x))$ mit $x \neq x_1$ muss nach (2.2) gelten:

$$\frac{f(x) - y_1}{x - x_1} = a_1. \quad (2.3)$$

Auflösung nach $f(x)$ ergibt die gesuchte Gleichung

$$f(x) = a_1 \cdot (x - x_1) + y_1. \quad (2.4)$$

Einsetzen von $x = x_1$ liefert in der Tat $f(x_1) = y_1$. (2.4) nennt man die *Punkt-Richtungsform* einer Geraden.

Beispiel 2.3:

Ein Zug fährt mit konstanter Geschwindigkeit $v = 80 \text{ km/h}$. Er passiert den Streckenkilometer 153 um 11 Uhr. Seine Bewegung wird durch eine Funktion

$$y = f(t) = vt + y_0$$

beschrieben, wobei y den Streckenkilometer angibt, den der Zug um t Uhr passiert. Die Funktion ist eine Gerade im y - t -Koordinatensystem. Wir kennen ihre Steigung v und einen ihrer Punkte, nämlich $(11, 153)$. Nach der Punkt-Richtungsform folgt daher

$$y = f(t) = 80 \cdot (t - 11) + 153.$$

Zwei-Punkte-Form: Gegeben seien zwei Punkte (x_1, y_1) , (x_2, y_2) in der Ebene mit $x_1 \neq x_2$. Gesucht ist eine Gerade f durch diese Punkte.

Da alle Differenzenquotienten von f den gleichen Wert haben, gilt für jedes $x \neq x_1$

$$\frac{f(x) - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad (2.5)$$

Auflösung nach $f(x)$ liefert

$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1. \quad (2.6)$$

Es gilt hierbei, wie verlangt, $f(x_1) = y_1$ und $f(x_2) = y_2$. (2.6) heißt die *Zwei-Punkte-Form* einer Geraden.

Beispiel 2.4:

Die Länge l eines Stabes hängt von seiner Temperatur δ ab:

$$l = l_0(1 + \alpha\delta). \quad (2.7)$$

Dabei ist l_0 die Länge des Stabes bei 0°C und α der Wärmeausdehnungskoeffizient des Stabes. Die Gleichung beschreibt eine Gerade im δ - l -Koordinatensystem.

Wir nehmen an, dass uns l_0 und α unbekannt sind. Messungen jedoch haben ergeben, dass der Stab bei 36°C eine Länge von $4,3008 \text{ m}$ hat und bei 94°C eine Länge von $4,3042 \text{ m}$. Wir kennen also zwei Punkte der Geraden. Nach der Zwei-Punkte-Form hat (2.7) daher die explizite Gestalt

$$l = \frac{4,3042 - 4,3008}{94 - 36}(\delta - 36) + 4,3008 \doteq 5,86 \cdot 10^{-5}\delta + 4,2987.$$

Es folgt $l_0 \doteq 4,2987 \text{ m}$ und aus $l_0\alpha \doteq 5,86 \cdot 10^{-5} \text{ m}/^\circ \text{C}$ der Ausdehnungskoeffizient $\alpha \doteq 1,363 \cdot 10^{-5}/^\circ \text{C}$.

Abschnittsform: Es ist eine Gerade f gesucht, welche die x -Achse bei $A \neq 0$ und die y -Achse bei B schneidet, s. Fig. 2.4.

(A und B heißen die *Achsenabschnitte* der Geraden.) f geht also durch die beiden Punkte $(A, 0)$ und $(0, B)$. Die Zwei-Punkte-Form liefert daher

$$f(x) = -\frac{B}{A}x + B. \quad (2.8)$$

Ist $B \neq 0$ und schreiben wir y statt $f(x)$, so lässt sich (2.8) in die elegante Gestalt

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} = 1 \quad (2.9)$$

umformen. (2.9) heißt die *Abschnittsform* der Geraden.

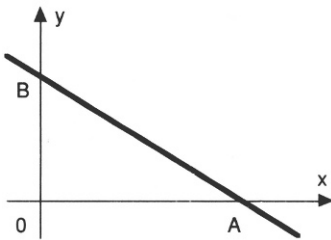


Fig. 2.4: Zur Abschnittsform

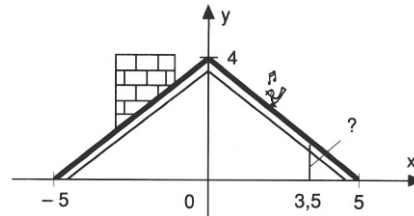


Fig. 2.5: Dachhöhe an Abseite

Beispiel 2.5:

Ein Haus habe eine Breite von 10 m und eine Dachfirsthöhe von 4 m über dem Dachboden, s. Fig. 2.5. Bei einem Dachbodenausbau interessiert die Frage: Wie hoch ist das Dach in der Entfernung 3,5 m von der Hausmittellinie?

Die rechte Seite der Dachlinie kann mit der Abschnittsform beschrieben werden:

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{4} = 1.$$

Für $x = 3,5$ errechnen wir daraus die Dachhöhe über dem Dachboden: $y = 1,2$ m.

Schnittpunkt zweier Geraden: Es seien zwei Geraden $f(x) = a_1x + a_0$, $g(x) = b_1x + b_0$ gegeben, die verschiedene Richtungen besitzen: $a_1 \neq b_1$. Für den Schnittpunkt (x_0, y_0) dieser Geraden muss gelten:

$$y_0 = a_1x_0 + a_0 \quad \text{und} \quad y_0 = b_1x_0 + b_0. \quad (2.10)$$

Daraus lassen sich x_0 und y_0 berechnen: Man setzt die rechten Seiten gleich,

$$a_1x_0 + a_0 = b_1x_0 + b_0,$$

löst nach x_0 auf und setzt den gefundenen Ausdruck in (2.10), linke Gleichung, ein. Dies ergibt:

$$x_0 = \frac{b_0 - a_0}{a_1 - b_1}, \quad y_0 = \frac{b_0 a_1 - a_0 b_1}{a_1 - b_1}. \quad (2.11)$$

Im Falle $a_1 = b_1$, $a_0 \neq b_0$ sind die Geraden parallel, und es existiert kein Schnittpunkt.

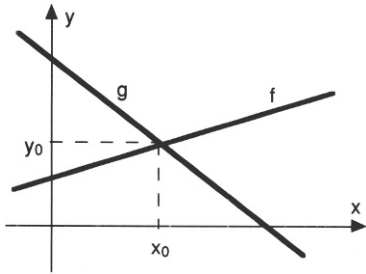


Fig. 2.6: Schnittpunkt zweier Geraden

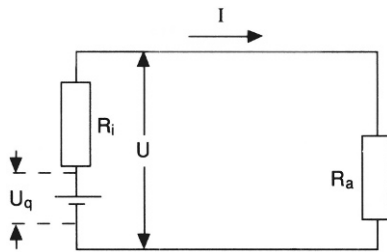


Fig. 2.7: Stromkreis mit innerem und äußerem Widerstand

Beispiel 2.6:

Der Stromkreis der Fig. 2.7 besteht aus einem Generator mit innerem Widerstand R_i , und einem Arbeitsgerät mit äußerem Widerstand R_a . Es fließt der Strom I . Die Klemmspannung am Generator ist $U = U_q - R_i I$, während sich die gleiche Spannung mit Hilfe des Widerstandes R_a durch $U = R_a I$ errechnet. Beide Gleichungen können als Geraden in der U - I -Koordinatenebene aufgefasst werden. Ihr Schnittpunkt gibt uns die Werte I und U an, die im Stromkreis vorhanden sind. Nach (2.11) erhalten wir

$$I = \frac{U_q}{R_a + R_i}, \quad U = \frac{U_q R_a}{R_a + R_i}.$$

Übung 2.1:

Durch die Punkte $(1,0)$ und $(3,2)$ verläuft die Gerade G_1 , während eine zweite Gerade G_2 durch $(1,4)$ verläuft und die Steigung $a_1 = -1/2$ besitzt. Berechne den Schnittpunkt der beiden Geraden.

Übung 2.2*:

Eine Flüssigkeit mit dem Volumen $V = 2000 \text{ cm}^3$ und der Dichte $\rho = 1,01 \text{ g cm}^{-3}$ ist durch Mischen zweier Flüssigkeiten F_1 und F_2 mit den Dichten $\rho_1 = 0,94 \text{ g cm}^{-3}$, $\rho_2 = 1,13 \text{ g cm}^{-3}$ entstanden. Wie groß sind die Volumina V_1 und V_2 der beiden Flüssigkeiten F_1 , F_2 ?

Übung 2.3:

Durch eine elektrische Leitung mit dem Widerstand R fließt ein Strom I . Vergrößert man den Widerstand R um 3Ω , so sinkt der Strom I um 1 A . Verringert man den Widerstand R um 5Ω ,

so steigt der Strom I um 2 A. Die Spannung ist dabei konstant. Wie groß sind R und I ?

2.1.3 Quadratische Polynome, Parabeln

In diesem Abschnitt studieren wir die Polynome zweiten Grades:

$$y = f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad a_2 \neq 0. \quad (2.12)$$

Sie werden auch *quadratische Polynome* genannt.

Beispiel 2.7:

Die Bewegung eines aufwärts geworfenen Körpers wird durch das quadratische Polynom

$$s = f(t) = v_0t - \frac{1}{2}gt^2$$

beschrieben. s ist dabei die nach t Sekunden erreichte Höhe des Körpers — genauer, seines Schwerpunktes. v_0 bezeichnet die Abwurfgeschwindigkeit und $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ die Erdbeschleunigung. (s. auch Beispiel 2.9. In Abschn. 3.3.1, Beispiel 3.36, wird die Bewegungsgleichung aus dem 1. Newtonschen Axiom der Mechanik hergeleitet.)

Beispiel 2.8:

Ein strömendes Medium (Luft, Wasser), das mit einer mittleren Geschwindigkeit v auf einen Körper trifft, übt die Kraft

$$F_w = c_w A \frac{1}{2} \rho v^2$$

auf ihn aus. F_w heißt auch *Strömungswiderstand* des Körpers. Dabei ist c_w der Widerstandsbeiwert, A die Querschnittsfläche des Körpers und ρ die Dichte des strömenden Mediums.

Einheitsparabel: Das einfachste aller quadratischen Polynome lautet

$$y = f(x) = x^2.$$

Die geometrische Figur, die sein Graph darstellt, wird *Parabel* genannt, s. Fig. 2.8. Sie besitzt eine *Symmetrieachse*, hier die y -Achse. Ihr Schnittpunkt mit der Parabel heißt *Scheitel* der Parabel. In unserer Figur ist es der Koordinatennullpunkt.

Man bezeichnet die Funktion $f(x) = x^2$ als *Einheitsparabel*.

Normalparabeln: Die quadratischen Polynome der Form

$$y = f(x) = cx^2, \quad c \neq 0,$$

heißen *Normalparabeln*. Ihre Graphen sind alle untereinander ähnlich.¹ Sie sind also, geometrisch gesehen, alle Parabeln.

¹ Zwei geometrische Figuren heißen *ähnlich*, wenn die eine ein maßstabsgetreues Bild der anderen ist, evtl. nach vorangegangener Spiegelung, Drehung oder Verschiebung.

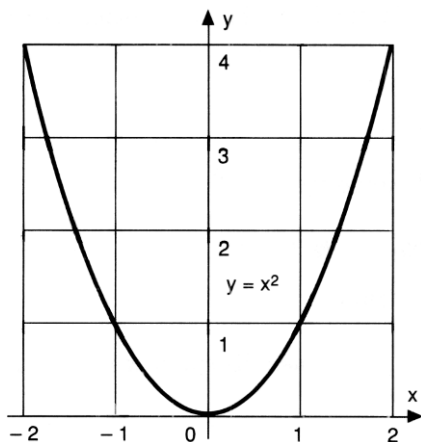


Fig. 2.8: Einheitsparabel

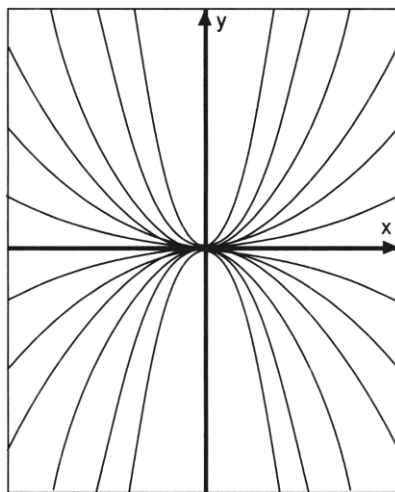


Fig. 2.9: Normalparabeln

Zum Nachweis der Ähnlichkeit genügt es zu zeigen, dass der Graph jeder Normalparabel zum Graphen der Einheitsparabel ähnlich ist. Es sei also $f(x) = cx^2$ eine beliebige Normalparabel. Ihr Graph besteht aus allen Punkten (x, y) mit

$$y = cx^2.$$

Multipliziert man rechts und links mit c , so erhält die Gleichung die Gestalt

$$cy = (cx)^2.$$

Diese Gleichung geht aus der Gleichung $y = x^2$ der Einheitsparabel dadurch hervor, dass y durch cy und x durch cx ersetzt werden. y und x werden dabei um den gleichen Faktor $|c|$ gestreckt oder gestaucht. Also ist der Graph der Normalparabel die $|c|$ -fache Vergrößerung oder Verkleinerung des Graphen der Einheitsparabel (bei $c < 0$ nach vorangegangener Spiegelung), woraus die behauptete Ähnlichkeit folgt.

Allgemeinfall: Wir zeigen nun, dass der Graph *jedes* quadratischen Polynoms

$$y = f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

gleich dem Graphen einer Normalparabel ist (in einem parallel verschobenen Koordinatensystem). Die *Graphen quadratischer Polynome sind also Parabeln!*

Zum Nachweis formen wir die Funktionsgleichung

$$y = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

des quadratischen Polynoms um:

Zuerst wird a_2 ausgeklammert und dann die »quadratische Ergänzung« der ersten beiden Glieder eingefügt:

$$\begin{aligned} y &= a_2 \left(x^2 + \frac{a_1}{a_2}x + \frac{a_0}{a_2} \right) = a_2 \left(x^2 + \frac{a_1}{a_2}x + \left(\frac{a_1}{2a_2} \right)^2 - \left(\frac{a_1}{2a_2} \right)^2 + \frac{a_0}{a_2} \right) \\ &= a_2 \left(x + \frac{a_1}{2a_2} \right)^2 + \left(a_0 - \frac{a_1^2}{4a_2} \right). \end{aligned}$$

Wir bringen die rechte Klammer der letzten Zeile auf die linke Seite

$$y - \left(a_0 - \frac{a_1^2}{4a_2} \right) = a_2 \left(x + \frac{a_1}{2a_2} \right)^2 \quad (2.13)$$

und setzen zur Abkürzung

$$\bar{y} = y - \left(a_0 - \frac{a_1^2}{4a_2} \right), \quad \bar{x} = x + \frac{a_1}{2a_2}. \quad (2.14)$$

Damit erhält man

$$\bar{y} = a_2 \bar{x}^2,$$

also eine Normalparabel in $\bar{x}$ - $\bar{y}$ -Koordinaten.

Fig. 2.10 zeigt die Lage des $\bar{x}$ - $\bar{y}$ -Koordinatensystems. Es entsteht durch Parallelverschiebung aus dem x - y -Koordinatensystem. Der Koordinaten-Nullpunkt wird dabei in den Punkt (x_0, y_0) mit $x_0 = -a_1/(2a_2)$ und $y_0 = a_0 - a_1^2/(4a_2)$ verschoben. Damit ist die Behauptung bewiesen. Wir fassen zusammen:

Satz 2.1:

Der Graph eines quadratischen Polynoms

$$y = f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

ist gleich dem Graphen einer Normalparabel der Form $\bar{y} = a_2 \bar{x}^2$ (s. Fig. 2.10). Der Scheitel der Parabel liegt im Punkt (x_0, y_0) mit

$$x_0 = -\frac{a_1}{2a_2}, \quad y_0 = a_0 - \frac{a_1^2}{4a_2}. \quad (2.15)$$

Im Falle $a_2 > 0$ ist der Scheitel tiefster Punkt, im Falle $a_2 < 0$ höchster Punkt der Parabel.

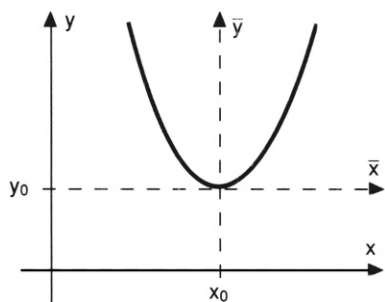


Fig. 2.10: Der Graph eines quadratischen Polynoms ist eine Parabel.

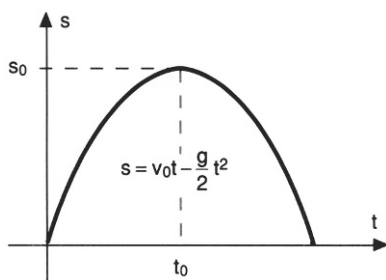


Fig. 2.11: Senkrechter Wurf: Weg-Zeit-Diagramm

Beispiel 2.9:

Wir knüpfen an Beispiel 2.7 an:

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (2.16)$$

beschreibt die Bewegung eines senkrecht nach oben geworfenen Körpers — genauer, seines Schwerpunktes (Reibung vernachlässigt). Gefragt ist nach der *Wurfhöhe* und der *Wurfzeit*, also der Zeit, die er zum Steigen und Fallen benötigt. Dazu skizzieren wir den Graphen des quadratischen Polynoms

$$s = f(t) = -\frac{g}{2} t^2 + v_0 t + 0.$$

Nach Satz 2.1 gleicht er dem Graphen einer Normalparabel der Form

$$\bar{s} = -\frac{g}{2} \bar{t}^2,$$

mit Scheitel bei

$$t_0 = \frac{v_0}{g}, \quad s_0 = \frac{v_0^2}{2g}, \quad (\text{s. Fig. 2.11}).$$

s_0 ist die *Wurfhöhe* und $2t_0$ die *Wurfzeit*. Ist z.B. $v_0 = 20 \text{ m/s}$, so folgt mit der Erdbeschleunigung $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ die *Wurfhöhe* $s_0 = 20,39 \text{ m}$ und die *Wurfzeit* $2t_0 = 4,077 \text{ s}$.

Bemerkung: Mit einer einzigen *Parabelschablone* aus Plexiglas, wie sie handelsüblich ist, lässt sich der Graph *jedes* quadratischen Polynoms $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ zeichnen. Stellt die Schablone eine Einheitsparabel mit Längeneinheit 1 cm dar, so hat man ein Koordinatensystem mit Einheitslänge $1/|a_2| \text{ cm}$ zu zeichnen, den Punkt (x_0, y_0) (s. 2.15) einzutragen und in ihm den Scheitel der Parabelschablone einzusetzen. Im Falle $a_2 > 0$ weisen dabei die »Parabeläste« nach oben) im Falle $a_2 < 0$ nach unten. Computerprogramme ersetzen heute allerdings die Parabelschablone.

Beispiele

Quadratische Polynome, also Parabeln, treten in der Technik häufig auf.

Beispiel 2.10:

Für den Untergurt einer Flussbrücke vom Typ der Fig. 2.12a ist die Parabelform vorgeschrieben. Auch Brückenformen aus zwei Parabelbögen kommen vor, s. Fig. 2.12b.

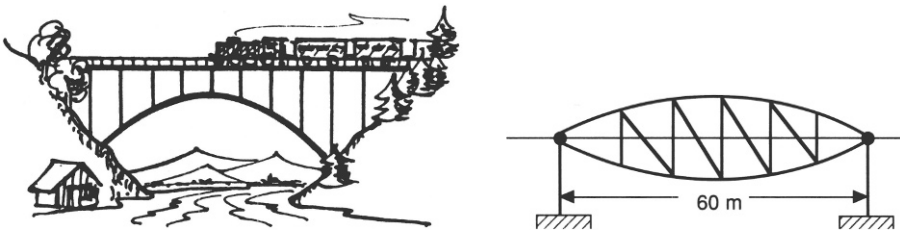


Fig. 2.12: Brücke mit (a) einem, (b) zwei Parabelbögen

Beispiel 2.11:

Schwach durchhängende Seile (Drähte) haben in guter Näherung Parabelform. Für die Berechnung von Zugkräften auf die Masten reicht dieser Ansatz aus (s. Fig. 2.13).



Fig. 2.13: Durchhängendes Seil

Beispiel 2.12:

Parabolspiegel und Parabolantennen entstehen geometrisch aus Parabeln, die um ihre Symmetrieachse gedreht werden. Von der Fahrradlampe bis zur Radioantenne für die Aufnahme von Weltraumstrahlung finden Parabeln Anwendung.

Beispiel 2.13:

Die Wurfbahn eines Körpers — genauer, seines Schwerpunktes, ist eine Parabel, sofern Reibungskräfte dabei vernachlässigt werden dürfen.

Beispiel 2.14:

Die Skelettlinie eines Tragflügels oder einer Turbinenschaufel besteht aus den Mittelpunkten aller einbeschriebenen Kreise, s. Fig. 2.14a. Beim Profil NACA 6321 besteht die Skelettlinie

Höhere Mathematik für Ingenieure Band I
Analysis

Burg, K.; Haf, H.; Wille, F.; Meister, A.

2017, XVIII, 624 S. 239 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-19427-7