

Mathematische Grundlagen

- 2.1 Lineare Algebra – 12
- 2.2 Felder und Ableitungen – 17
- 2.3 Vektorfelder und Flüsse – 23
- 2.4 Übungsaufgaben – 39
- 2.5 Lösungen – 39
- Literatur – 41

Dieser Abschnitt soll dem Leser einige Grundlagen der linearen Algebra sowie der Vektoranalysis in Erinnerung rufen. Dabei finden auch erste Begriffe und Konzepte der Differentialgeometrie Erwähnung. Zusätzlich werden ausgewählte Aspekte gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme behandelt. In diesem Kapitel werden nur diejenigen Aussagen bewiesen, die für regelungstheoretische Anwendungen in den folgenden Abschnitten des Buches von besonderer Bedeutung sind. Zur Festigung und Vertiefung der behandelten Konzepte seien dem Leser die Lehrbücher [Arn01, KvW07] empfohlen.

2.1 Lineare Algebra

Sei $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen. Der n -dimensionale reelle Vektorraum wird mit $\mathbb{R}^n$ bezeichnet, seine Elemente heißen **Vektoren**. Ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ wird oft in der Form eines Spaltenvektors

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

mit den Komponenten $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ dargestellt. Zur Unterscheidung von Zeilenvektoren spricht man hier auch von **kontravarianten Vektoren**.

Die n Einheitsvektoren

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden eine Basis des $\mathbb{R}^n$, die sogenannte **kanonische Basis** oder **Standardbasis**. Jeder Vektor (2.1) lässt sich eindeutig als Linearkombination der Basisvektoren darstellen:

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n.$$

Die **lineare Hülle** (engl. **linear hull**, **linear span**) von r Vektoren $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^n$ ist die Menge aller Linearkombinationen dieser Vektoren:

$$\text{spann} \{v_1, \dots, v_r\} := \{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r; \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}\}.$$

Die lineare Hülle ist damit ein **Untervektorraum**, **Unterraum** bzw. **Teilraum** (engl. **subspace**) des $\mathbb{R}^n$, d. h. eine nichtleere Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, welche selber ein Vektorraum ist.

Zu zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ definiert man durch

$$(x, y) := \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (2.2)$$

2.1 • Lineare Algebra

das (**kanonische**) **Skalarprodukt**. Die Vektoren x und y sind zueinander **orthogonal** (bzw. stehen **senkrecht aufeinander**), falls

$$(x, y) = 0.$$

Jeder Unterraum $\mathbb{U}$ des $\mathbb{R}^n$ kann mit Hilfe eines geeignet gewählten weiteren Unterraums $\mathbb{V}$ zum ursprünglichen Vektorraum $\mathbb{R}^n$ ergänzt werden, so dass

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{U} + \mathbb{V}.$$

Haben zusätzlich beide Unterräume nur den Nullvektor gemeinsam, d. h.

$$\mathbb{U} \cap \mathbb{V} = \{0\},$$

dann ist der Unterraum $\mathbb{V}$ der **Komplementärraum** (bzw. das **Komplement**) des Unterraumes $\mathbb{U}$. In diesem Fall kann man den Vektorraum $\mathbb{R}^n$ als **direkte Summe** der beiden Unterräume darstellen:

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{U} \oplus \mathbb{V}.$$

Die Zerlegung in direkte Summen bedeutet, dass es für jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Darstellung $x = u + v$ mit $u \in \mathbb{U}$ und $v \in \mathbb{V}$ gibt.

Die Ergänzung eines Unterraumes $\mathbb{U}$ um einen Komplementärraum $\mathbb{V}$ ist nicht eindeutig. Wählt man den Komplementärraum unter Zuhilfenahme des Skalarprodukts (2.2) derart, dass alle Vektoren $u \in \mathbb{U}$ und $v \in \mathbb{V}$ jeweils senkrecht aufeinander stehen, so erhält man das **orthogonale Komplement** $\mathbb{U}^\perp$ von $\mathbb{U}$:

$$\mathbb{U}^\perp := \{v \in \mathbb{R}^n; \forall u \in \mathbb{U}: (u, v) = 0\}. \quad (2.3)$$

Hinsichtlich der Dimensionen besteht folgender Zusammenhang (**Dimensionsformel**):

$$\dim \mathbb{U} + \dim \mathbb{U}^\perp = n. \quad (2.4)$$

Beispiel 2.1

Die Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

spannen im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ einen zweidimensionalen Unterraum $\mathbb{U} = \text{spann}\{u_1, u_2\}$ auf. In MAXIMA [Max, Haa14] definiert man die Spaltenvektoren mit dem Befehl `columnvector` aus dem Paket `eigen`. Das orthogonale Komplement ist eindimensional und wird von dem Vektor

$$v = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

aufgespannt:

```
(%i1) load(eigen)$
(%i2) u1:columnvector([1,2,3])$
(%i3) u2:columnvector([4,5,6])$
(%i4) orthogonal_complement(u1,u2);

(%o4) span( $\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ )
```

Eine $m \times n$ -Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ besteht aus m Zeilen und n Spalten:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Gilt $m = n$, so spricht man von einer **quadratischen** Matrix. Die $n \times n$ -**Einheitsmatrix** (engl. **identity matrix**) wird mit I_n bzw. mit I bezeichnet. Bei ihr sind die Hauptdiagonalelemente Eins, alle anderen Elemente Null.

Unter dem **Bild** (engl. **image, range**) einer Matrix versteht man die Menge

$$\begin{aligned} \operatorname{im} A &:= \{y \in \mathbb{R}^m; \exists x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } y = Ax\} \\ &= \{Ax \in \mathbb{R}^m; x \in \mathbb{R}^n\}. \end{aligned}$$

Besteht die Matrix A spaltenweise aus den Vektoren $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$, d. h.

$$A = (a_1, \dots, a_n),$$

so gilt

$$\operatorname{im} A = \operatorname{spann} \{a_1, \dots, a_n\}.$$

Das Bild einer Matrix ist die lineare Hülle der Spalten. Das Bild ist somit ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^m$. Der **Rang** (engl. **rank**) der Matrix A ist die Dimension ihres Bildes:

$$\operatorname{rang} A := \dim(\operatorname{im} A). \quad (2.5)$$

Der **Kern** oder **Nullraum** (engl. **kernel, null space**) einer Matrix A ist definiert durch

$$\ker A := \{x \in \mathbb{R}^n; Ax = 0\},$$

d. h. er ist die Lösungsmenge des zur Matrix A gehörenden linearen homogenen Gleichungssystems. Der Kern ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$. Die Dimension des Kerns heißt **Defekt** (engl. **nullity, corank**):

$$\operatorname{corang} A := \dim(\ker A) = n - \operatorname{rang} A. \quad (2.6)$$

2.1 • Lineare Algebra

Der Defekt gibt den **Rangabfall** einer Matrix an.

Mit Bild und Kern sind folgende Zerlegungen der Vektorräume $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ in jeweils direkte Summen zweier Untervektorräume möglich:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^m &= \operatorname{im} A \oplus \ker A^T, \\ \mathbb{R}^n &= \ker A \oplus \operatorname{im} A^T.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Bei dieser Zerlegung wird der jeweilige Unterraum ($\operatorname{im} A$ bzw. $\ker A$) um sein entsprechendes orthogonales Komplement erweitert. Die sich zum Vektorraum $\mathbb{R}^n$ ergänzenden Unterräume haben nur den Nullvektor gemeinsam:

$$\operatorname{im} A \cap \ker A^T = \{0\} \quad \text{und} \quad \ker A \cap \operatorname{im} A^T = \{0\}.$$

Die Dimensionsformel (2.4) nimmt in diesem Fall die Gestalt

$$\dim(\ker A) + \dim(\operatorname{im} A) = n\tag{2.8}$$

an [Lor92, Beu01]. Der Zusammenhang (2.8) ist auch unter der Bezeichnung **Rangsatz** bekannt.

Beispiel 2.2

Man betrachte die 2×3 -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bild und Kern einer Matrix lassen sich in MAXIMA mit den Funktionen `columnspace` bzw. `nullspace` des Pakets `linearalgebra` berechnen:

```
(%i1) A:matrix([1,2,3],[4,5,6]);
(%o1)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ 
(%i2) columnspace(A);
(%o2)  $\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$ 
(%i3) nullspace(A);
(%o3)  $\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}\right)$ 
```

Mit `rank` und `nullity` kann man sich zusätzlich die Dimensionen (2.5) und (2.6) von Bild und Nullraum angeben lassen. Die Dimensionsformel (2.8) ist bei diesem Beispiel offensichtlich erfüllt.

Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ wird mitunter synonym zur linearen Abbildung bzw. zum linearen Operator

$$A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{mit} \quad x \mapsto Ax$$

Nichtlineare Regelungssysteme

Theorie und Anwendung der exakten Linearisierung

Röbenack, K.

2017, X, 385 S. 106 Abb., Hardcover

ISBN: 978-3-662-44090-2