

2. Das Wichtigste aus Kapitel 2

In Kapitel 2 werden die Vorgänge im elektrischen Strömungsfeld und im elektrostatischen Feld simuliert. Dabei lernen Sie Bauelemente ,ohmscher Widerstand R' und , Kondensator C' kennen. Untersucht werden soll die Zeitabhängigkeit von Strömen i und Spannungen u . Zu zeigen ist, dass der Strom $i=dq/dt$ der Fluss von Ladungen q ist.

Eine gelungene Darstellung der hier benötigten elektrischen Grundlagen finden Sie auf der Webseite von Dr. Stefan Schenke: <http://www.stefan-schenke.de/joomla>.

Zur Definition der positiven Zählrichtungen

Strukturen stellen die Gesetzmäßigkeiten, nach denen ein System Signale verknüpft, symbolisch dar. Das setzt voraus, dass alle Signale Namen erhalten und ihre positiven Zählrichtungen durch Zählpfeile festgelegt sind (Abb. 2-1). Die Festlegung ist prinzipiell willkürlich, sollte aber so erfolgen, dass in Berechnungen (Simulationen) möglichst wenig Minuszeichen auftreten, denn zu viele Minuszeichen führen leicht zur Verwirrung.

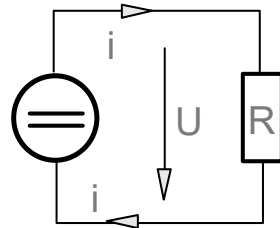


Abb. 2-1 Verbraucherzählfeilsystem

Wenn technische Systeme beschafft oder gebaut werden sollen, müssen deren Daten angegeben werden. Sie aus den Forderungen der Anwendung zu berechnen, ist ein Ziel dieses Kapitels. Es setzt das Verständnis der Systeme voraus. Dies soll in diesem Kapitel durch die Simulation der wichtigsten elektromagnetischen Bauteile und Grundschaltungen gezeigt werden.

Widerstand, Kondensator und Spule

Zur dynamischen Analyse elektrischer Schaltungen und zu deren Simulation benötigen wir drei passive Bauelemente (Abb. 2-2). Sie heißen:

Widerstand R



$$R=u/i$$

Kondensator C



$$C=q/u$$

Induktivität L



$$L=u/b \text{ mit } b=di/dt$$

Quelle: Conrad Electronic

Abb. 2-2 die passiven Bauelemente R, C und L und ihre Mess-Vorschriften mit der Ladung q , dem elektrischen Strom i und der Ladungsbeschleunigung $b=di/dt$.

Aus den Bauelementen R, C und L (Abb. 2-3) werden passive Vierpole (z.B. Filter) aufgebaut. Ihre Ausgänge sind Belastungsabhängig - müssen also hochohmig gemessen

werden (z.B. mit einem Oszilloskop oder über einen Impedanzwandler=Einheitsverstärker mit hochohmigem Eingang und niederohmigem Ausgang).

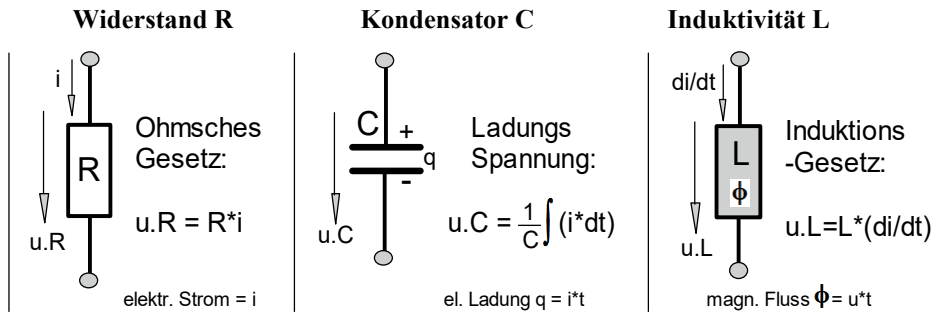


Abb. 2-3 Die Spannungen an Widerständen R sind stromproportional, Spannungen $u.C$ an Kondensatoren C zeigen gespeicherte Ladungen q an, induzierte Spannungen $u.L$ an (idealen) Induktivitäten L die Ladungsbeschleunigung.

Widerstände R und Kondensatoren C wurden bereits in Kapitel 2 behandelt. Hier fassen wir ihre Eigenschaften kurz zusammen. Anschließend folgen Spulen, deren wichtigste Eigenschaft die Induktivität L ist. Um sie zu verstehen, werden die Grundlagen des Elektromagnetismus benötigt. Wir erklären sie in Abschn. 3.4.

Hier interessieren zunächst nur die äußeren Eigenschaften dieser Bauelemente, nicht die elektromagnetischen Felder in ihrem Inneren.

Wir beginnen mit **1-Speichersystemen** (1.Ordnung, nur C und R oder L und R) und schließen das Kapitel mit 2-Speichersystemen (2.Ordnung aus L, C und R). Sie bilden elektrische Schwingkreise (Oszillatoren, Abb. 2-4). Das Verständnis von Oszillationen ist in vielen Bereichen der Technik und in der Dynamik ganz allgemein von grundlegender Bedeutung.

Ein einfacher elektrischer Schwingkreis besteht aus

- einem statischen Speicher - hier der Kondensator C
- einem magnetischen Speicher - hier die Induktivität L und
- einer inneren Reibung - hier der Widerstand R.

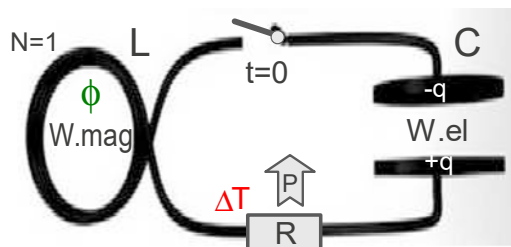


Abb. 2-4 ein elektrischer Schwingkreis aus den Speichern L und C und dem Verbraucher R

Zu zeigen ist, dass L und C die Resonanzfrequenz ω_0 des Schwingkreises und der Verbraucher R seine Dämpfung bestimmen.

Dieses Kapitel 3 der ‚Strukturbildung und Simulation technischer Systeme‘ behandelt die Grundsaltungen mit Widerständen R , Kondensatoren C und Induktivitäten L . Ihr Verhalten wird im Zeitbereich veranschaulicht und im Frequenzbereich berechnet. Das soll Sie in den Stand versetzen, Schaltungen mit R , C und L analysieren und dimensionieren zu können.

Die benötigten Grundlagen:

Um Schaltungen mit R , C und L dynamisch simulieren zu können, sind Grundlagen aus drei Bereichen erforderlich:

Elektrizität - Schlagworte: elektrischer Strom i und elektrische Spannung u , Widerstand $R=u/i$, ohmsches Gesetz, Maschen- und Knotenregel von Kirchhoff, Leistung $P=u \cdot i$.

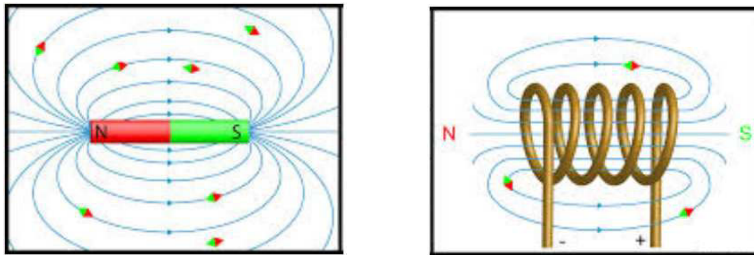
Elektrostatik - Schlagworte: elektrisches Feld, Ladung q , Kondensator $C=q/u$

Elektromagnetismus - Schlagworte: magnetisches Feld, magnetischer Fluss ϕ und Induktivität $L=N \cdot \phi/i$

Die Punkte 1 (elektrisches Strömungsfeld) und 2 (elektrostatisches Feld) haben wir bereits in Kapitel 2 behandelt. Wir werden diese Kenntnisse hier dort, wo sie gebraucht werden, kurz wiederholen. Das magnetische Feld wird zur Erklärung elektrodynamischer Systeme gebraucht. Das ist ein Thema dieses Kapitels 3 zur Elektrodynamik.

Wenn sich magnetische Felder (Abb. 2-5) räumlich durchdringen, üben sie Kräfte bzw. Drehmomente aufeinander aus. Das wird in Kapitel 5 ‚Magnetismus‘ ausführlich dargestellt und in Kapitel 6 zur Simulation elektrischer Maschinen angewendet.

Wenn sich magnetische Felder zeitlich ändern, werden Spannungen bzw. Ströme induziert. Das wird zum Bau von Transformatoren (Umspannern) genutzt. Transformatoren und Übertrager werden in Kapitel 7 simuliert. Dazu müssen Spulen berechnet werden. Die elektromagnetischen Grundlagen dazu werden hier gelegt.



<http://www.abenteuer-physik-chemie.at/Unterrichtshilfen%20Physik-4.Klasse/Jahresplanung-4.Klasse-Physik.htm#v17>

Abb. 2-5 Die Feldlinien (magnetische Kraftlinien) eines Dauer- und eines Elektromagneten: Die Ähnlichkeit zeigt, dass in Dauermagneten atomare Ströme fast verlustfrei zirkulieren.

2.1 Der Widerstand R und das ohmsche Gesetz

Bewegte Ladungen werden **elektrischer Strom** $i = q/t$ genannt. Der Strom i ist die Ladungsmenge q , die einen bestimmten Querschnitt A pro Sekunde passiert (Ladungsdurchsatz). Die äußeren Verhältnisse zwischen fließenden Strömen und Spannungen regelt das

$$\text{Gl. 2-1 ohmsche Gesetz} \quad R = \frac{u}{i} = \rho \cdot \frac{l}{A}$$

Einheiten:

elektrischer Widerstand R in $\Omega = V/A$; spezifischer Widerstand ρ in $\Omega \text{m} = \text{M}\Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$

Zahlenwerte:

Widerstände werden von $\text{m}\Omega$ bis ca. $100\text{M}\Omega$ nach **Normreihen** hergestellt. Verbreitet sind Metallfilmwiderstände von 1Ω bis zu $10\text{M}\Omega$ der Normreihe E24 (mit 24 Werten pro Dekade).

Elektrische (Verlust-)Leistung

Strom durch einen Widerstand erzeugt Spannung und damit Leistung:

$$\text{Gl. 2-2 momentan } P = u \cdot i \text{ oder effektiv } P = U \cdot I \text{ (in Watt } W = V \cdot A)$$

... und **Erwärmung** ΔT . Die Widerstände werden umso größer, je größer ihre zulässige Verlustleistung ist. Gängig sind Leistungen von $1/8\text{W}$ bis in den kW -Bereich (Abb. 2-6).



Quelle: Conrad-Electronic

Abb. 2-6 links: Leistungswiderstand für 100W (nur mit Kühlkörper) - rechts: Widerstandsnetzwerk mit 8 Widerständen, die einen gemeinsamen Anschluss haben

Ob die Wärmezeugung als Nutzen oder Verlust bezeichnet wird, hängt von der Anwendung ab. Bei linearen Widerständen steigt die Leistung – und damit die Erwärmung – mit dem Quadrat von Strom und Spannung an:

$$\text{Gl. 2-3 Wirkleistung} \quad P \cdot R = i^2 \cdot R = u^2 / R$$

Leistung kann erwünscht sein, z.B. bei einer Heizung oder unerwünscht, z.B. als Verlust bei Halbleitern. Die Erwärmung wird umso größer, je größer die Leistung und je kleiner das Bauelement ist. Um eine unzulässige Erwärmung zu vermeiden, muss es eventuell gekühlt werden (siehe Kap. 13 Wärmetechnik/Kühlkörperberechnung).

2.2 Die Kapazität C und das Ladungsspeicherungsgesetz

Kondensatoren C (Abb. 2-7) sind statische Speicher für elektrische Ladungen $q = \int i \cdot dt$. Sie wurden bereits in Kapitel 2 behandelt. Hier wiederholen wir kurz das, was für dynamische Simulationen (Abb. 2-8) gebraucht wird.

gespeicherte Ladung $q = C \cdot u$

Gl. 2-4 Kapazität $C = q / u$ in As/V

Änderung der gespeicherten Ladung
 $\Delta q = \int i \cdot dt$

Gl. 2-5 Kondensatorstrom $i \cdot C = C \cdot du / dt$

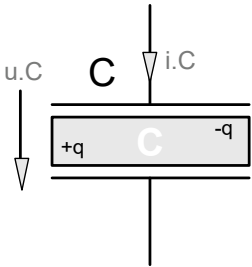


Abb. 2-7 Die Messgrößen eines Kondensators

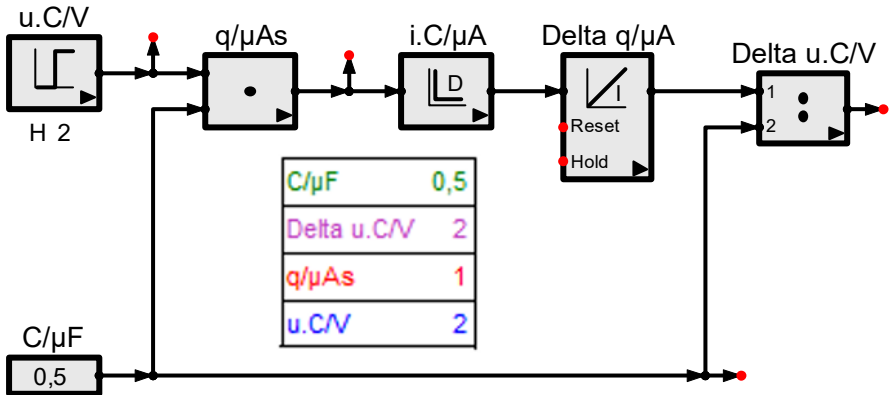


Abb. 2-8 Spannung und Strom beim Kondensator

Simulation des Ladungsspeicherungsgesetzes (Abb. 2-9)

$$q = \int i \cdot C \cdot dt = C \cdot u \cdot C$$

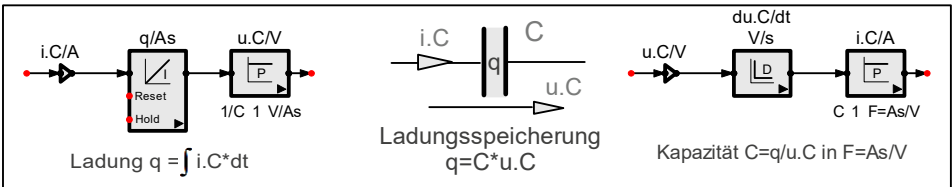


Abb. 2-9 Das Ladungsspeicherungsgesetz und seine Invertierung

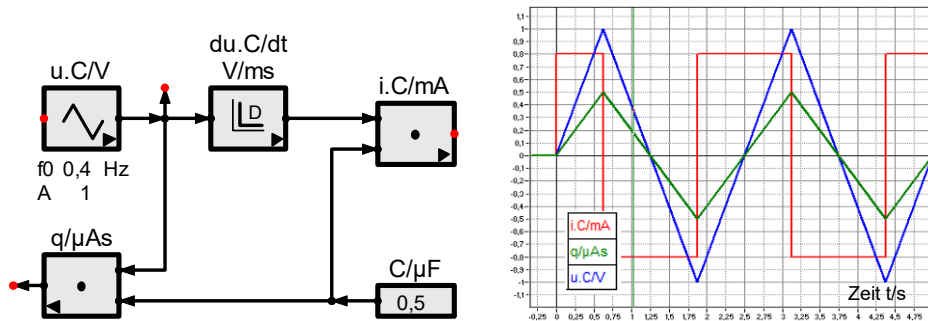
Abb. 2-10: Test eines Kondensators mit rampenförmiger Spannung: $du/dt = \text{konstant}$ 

Abb. 2-10 Der Kondensatorstrom bei linearer (zeitproportionaler) Spannungsänderung

Die auf den Belägen des Kondensators gespeicherte Ladung q ist proportional zur Klemmenspannung u und zur Kapazität:

$$\text{Kapazität } C = q/u \text{ in } F = As/V$$

Die zwischen den Belägen gespeicherte elektrostatische Energie $W_{el} = u \cdot q$ steigt mit dem Quadrat von u :

$$\text{Gl. 2-4 } W.C = C \cdot u.C^2/2$$

Die **kapazitive Blindleistung** ist

$$P.C = dW.C/dt. \text{ Aus } i.C = dq/dt \text{ folgt } P.C = |u.C| \cdot |i.C|.$$

Wenn man für die Beträge die mit einem Multimeter gemessenen Effektivwerte einsetzt, erhält man den Effektivwert der Blindleistung.

Kondensatoren bei Wechselstrom

Bei sinusförmigem Wechselstrom mit der Frequenz f und der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi \cdot f$ ist der Betrag der zeitlichen Ableitung von $u.C$ in Abb. 2-11:

$$|du.C/dt| = \omega \cdot |u.C|.$$

Damit kann ein **kapazitiver Widerstand** definiert werden:

$$X.C = |u.C|/|i.C| = 1/(\omega \cdot C)$$

Für die Beträge von $u.C$ und $i.C$ können Sie entweder mit Maximal- oder Effektivwerten rechnen.

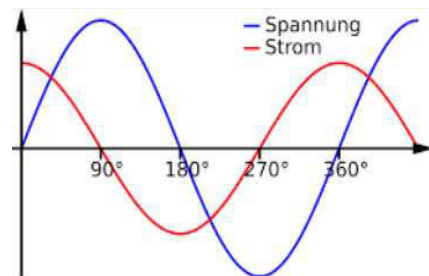


Abb. 2-11 Die Voreilung des Kondensatorstroms (rot) gegen die sinusförmige Spannung (blau) um 1/4 Periode, entsprechend einer Phase von +90°.

Durch die Differenzierung (Abb. 2-11) eilen sinusförmige Kondensatorströme den Spannungen um 90° vor. In Abb. 2-12 ist dies durch Zeigerdiagramme dargestellt. Deshalb dürfen ohmsche Ströme und Wechselspannungen nicht direkt addiert, sondern müssen geometrisch nach **Pythagoras** addiert werden.

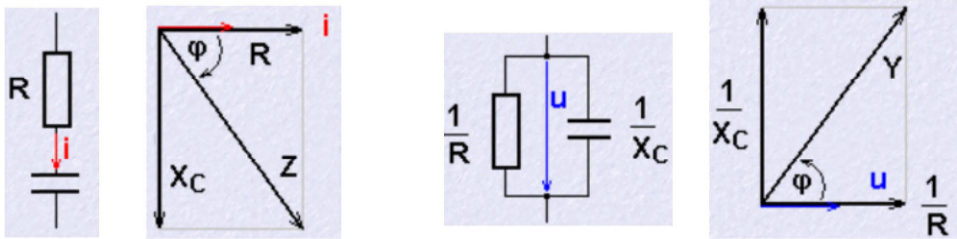


Abb. 2-12 Links: C und R in Reihe: Dann addieren sich die Widerstände geometrisch. Rechts: C und R parallel: Dann addieren sich die Leitwerte geometrisch.

Reihenschaltung von C und R: Beide durchfließt derselbe Strom i . Dann gilt:

$$u_{ges}^2 = u_R^2 + u_C^2 \rightarrow u_{ges}$$

Parallelschaltung von C und R: An beiden liegt dieselbe Spannung u . Dann gilt:

$$i_{ges}^2 = i_R^2 + i_C^2 \rightarrow i_{ges}$$

Der Kondensator im Zeitbereich

Um zu zeigen, wie sich Kondensatorspannungen bei sinusförmiger Stromeinprägung und steigender Frequenz entwickeln, soll dieses Verhalten simuliert werden.

Abb. 2-13 zeigt die Berechnung der Kondensatorspannung im Zeitbereich:

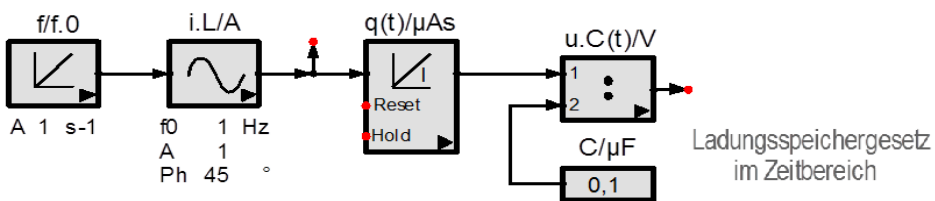


Abb. 2-13 das Ladungsspeicherungsgesetz: oben als Funktion der Zeit, darunter als Funktion der Frequenz

Abb. 2-14 zeigt das Einschwingen der Kondensatorspannung bei sinusförmiger Strom-einprägung: Die Spannung sinkt mit steigender Frequenz. Das ist die Folge der Integration des Kondensatorstroms i_C zur phasenverschobenen Ladung q .

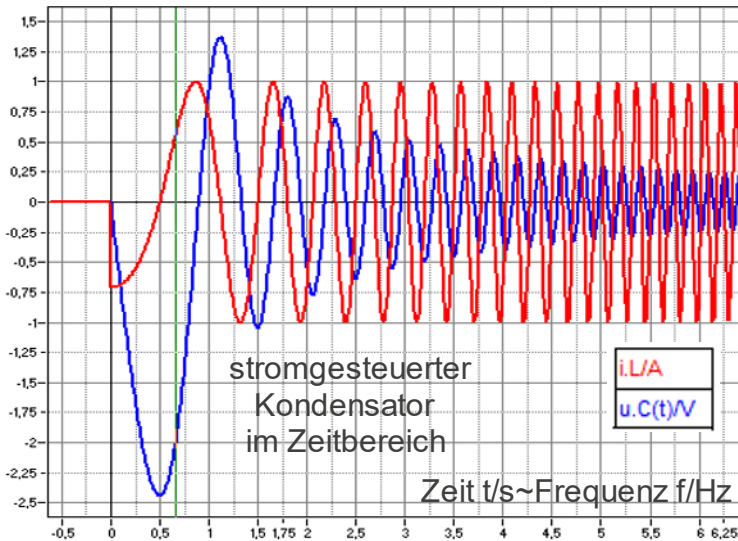


Abb. 2-14 Je größer die Frequenz mit der der Kondensatorstrom wechselt, desto kleiner werden die Spannungsänderungen. Im eingeschwungenen Zustand eilt die Spannung dem Strom frequenzunabhängig um 90° nach.

Der Kondensator im Frequenzbereich

Die Simulation im Frequenzbereich erfolgt mit einer Messsonde. Sie ist Funktions-generator (Sinus) und Oszilloskop in einem:

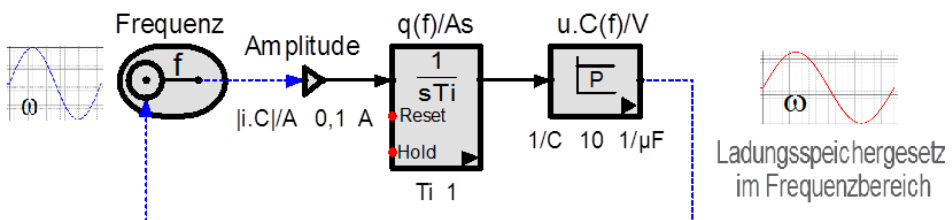


Abb. 2-15 das Ladungsspeicherungsgesetz als Funktion der Frequenz

Der Frequenzgang der Kondensatorspannung

Abb. 2-16 untersucht den stromgesteuerten Kondensator im Frequenzbereich:

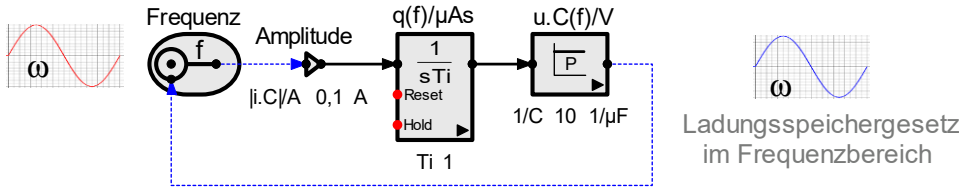


Abb. 2-16 Simulation von Ladung und Spannung beim Kondensator bei eingprägtem Strom als Funktion der Frequenz

Frequenzgänge werden im **Bode-Diagramm** dargestellt:

- Die Frequenzachse ist **logarithmisch** geteilt.
- Die Amplitudenachse stellt logarithmierte Spannungsverhältnisse in dB (deziBel) dar: $u \cdot \log = 20 \text{ dB} \cdot \lg(u.C/V)$.
- Die Phasenverschiebung wird linear geteilt und in rad oder ° angegeben.

Die Vorteile des Bode-Diagramms gegenüber allen linearen Darstellungen von Frequenzgängen werden in Abschn. 3.6.1 im Einzelnen erklärt. Abb. 2-17 zeigt, als erstes Beispiel, zu Abb. 2-16, den linearen Amplitudengraph zur Kondensatorladung $q=i.C/\omega$ bei konstantem Strom $i.C$ und steigender Frequenz $\omega=2\pi \cdot f$:

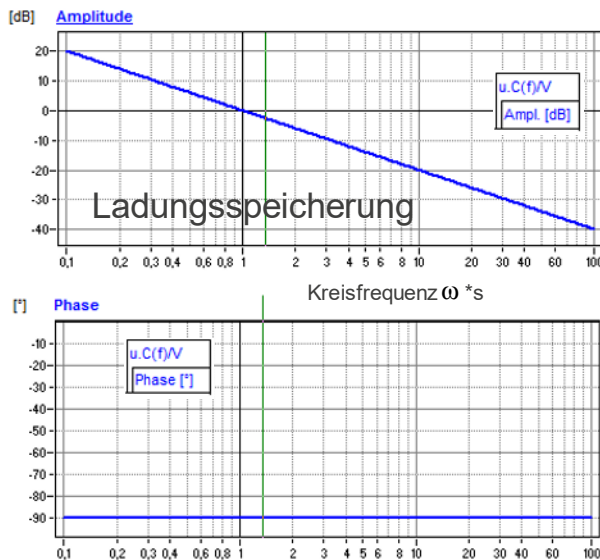


Abb. 2-17 Amplitude (oben) und Phase (unten) der Kondensatorspannung $u.C \sim 1/\omega$ über der Kreisfrequenz ω , dargestellt im Bode-Diagramm (siehe Abschn. 3.6.1)

Berechnung von Kondensatoren bei Wechselstrom

Die Kondensatorspannung u_C entsteht durch die Integration des Stroms i zur Ladung q (Abb. 2-18). Deshalb eilt u_C dem Strom i um 90° nach. Die während einer Viertelperiode aufgenommene Leistung wird in der nächsten Viertelperiode wieder abgegeben. Sie wird kapazitive Blindleistung genannt.

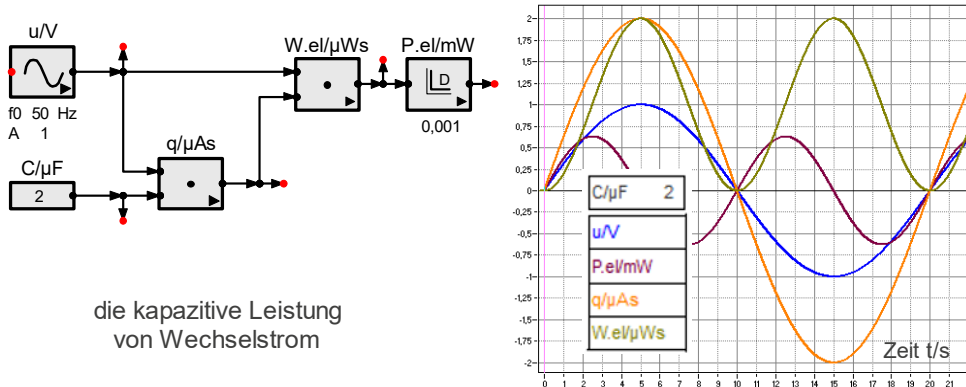


Abb. 2-18 Die kapazitive Blindleistung einer Sinusspannung oszilliert mit doppelter Frequenz.

Der kapazitive Blindwiderstand X_C

Aus dem Ladungsspeicherungsgesetz $q = C \cdot u_C$ folgt bei sinusförmigen Wechselströmen die verschobene Ladung $q = \int i_C \cdot dt = |i_C|/\omega$.

Bei sinusförmiger Spannung ist der Kondensatorstrom $i_C = C \cdot \omega \cdot u_C$ proportional zur Kondensatorspannung u_C und zur **Kreisfrequenz** $\omega = 2\pi \cdot f$. Deshalb können ω und C zum

kapazitiven Blindwiderstand $X_C = 1/\omega C$ zusammengefasst werden:

$$X_C = U_{\text{eff}}/I_{\text{eff}} = 1/\omega C$$

... mit der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi \cdot f$

$$\rightarrow \text{die Kapazität } C = 1/(\omega \cdot X_C)$$

in $1/\Omega \cdot s = As/V = F$

Mit dem X_C wird der effektive Kondensatorstrom $I_C = U_C/X_C$.



Abb. 2-19 Handmultimeter der Fa. Conrad electronic mit Kapazitätsmesser

Bei linearen Systemen können Sie u_C und i_C als Maximal- oder Effektivwerte berechnen. Maximalwerte werden mit Oszilloskopen gemessen (Abb. 3-6), Effektivwerte mit Multimetern (Abb. 2-19).

Wie bestimmt man eine Kapazität C?

Zur Bestimmung einer Kapazität C legt man den Kondensator an eine sinusförmige Wechselspannung u_{eff} mit bekannter Frequenz f und Kreisfrequenz $\omega = 2\pi \cdot f$ und misst dazu den Strom i_C ; $\text{eff} = C \cdot \omega \cdot u_C$ (Abb. 2-20). Daraus folgt die Kapazität

$$C = i_C / (\omega * u_C) \text{ in F(arad)=As/V}$$

... und der kapazitive Wechselstromwiderstand

$$X_C = 1/(\omega * C) \text{ – in } \Omega \text{ s/F=}\Omega$$

Zahlenwerte:

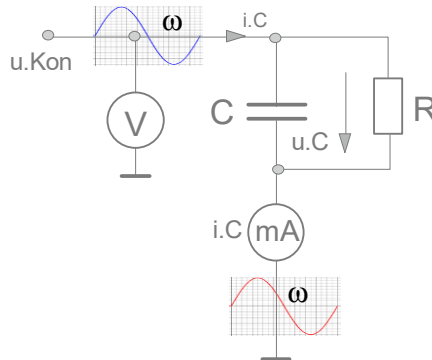
Wechselspannung

$i_C = 1 \text{ mA(eff)}$; $f = 50 \text{ Hz}$; $\omega = 314 \text{ /s}$ →

$C = 0,26 \mu\text{F}$

Wechselstromwiderstand

$X_C = 12 \text{ V} / 1 \text{ mA} = 12 \text{ k}\Omega$.



Die Nachteile des Zeitbereichs:

1. geringe Frequenzvariation auswertbar
2. nur schwer zu interpretieren

Die Vorteile des Frequenzbereichs

3. große Frequenzvariation = Auflösung
4. große Amplitidenvariation

Abb. 2-20 Zur Bestimmung einer Kapazität müssen Spannung, Strom und Frequenz bekannt sein.

2.3 Strom- und Spannungsquellen

Um elektrische Stromkreise berechnen zu können, müssen das ohmsche Gesetz, die Maschen- und Knotenregeln von Kirchhoff und das Überlagerungsprinzip bekannt sein. Außerdem soll bekannt sein, was unter Spannungs- und Stromquellen zu verstehen ist (Abb. 2-21). Sie werden den meisten Lesern bekannt sein. Das soll nun kurz wiederholt werden.

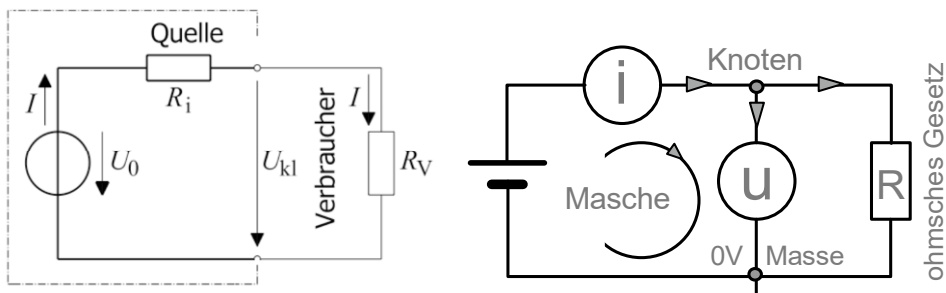


Abb. 2-21 Die Gesetze von Ohm und Kirchhoff: Die positiven Zählrichtungen für Spannungen und Ströme müssen noch durch Zählpfeile festgelegt werden. Sie sollten so gewählt werden, dass in Rechnungen möglichst wenige Minuszeichen erscheinen.

Bei **Spannungs- und Stromquellen** mit Innenwiderstand sinkt die Quellenspannung linear mit der Belastung (Abb. 2-22). Für Spannungsquellen ist der Strom die Belastung, für Stromquellen ist die Spannung die Belastung.

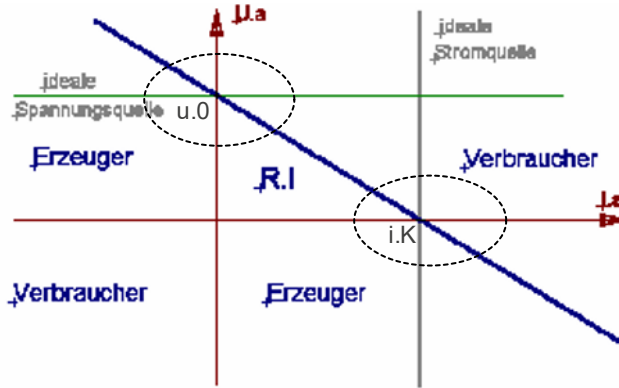


Abb. 2-22 Kennlinie einer Spannungsquelle mit Innenwiderstand $R.I$: Je Größer $R.I$, desto lastabhängiger ist die Quelle – und umgekehrt. Wenn $R.I \rightarrow 0$ geht, muss die Quelle vor Überlastung geschützt werden, z.B. durch eine Sicherung.

Simulation einer Spannungsquelle mit Innenwiderstand (Abb. 2-23)

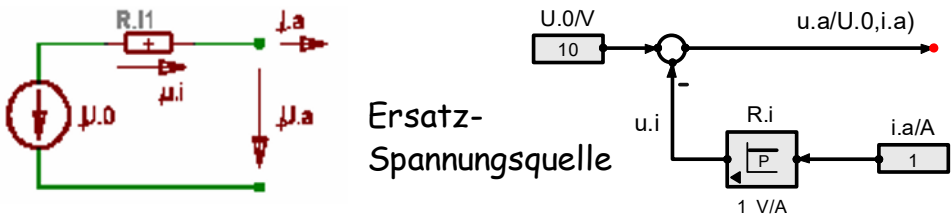


Abb. 2-23 links die Ersatzschaltung einer realen Spannungsquelle, rechts ihre Struktur: Parameter sind die Leerlaufspannung $U.0$ und der Innenwiderstand $R.i$.

Simulation einer realen Stromquelle (Abb. 2-24)

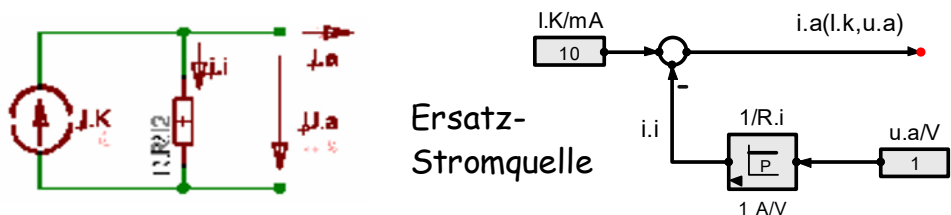


Abb. 2-24 links die Ersatzschaltung einer realen Stromquelle, rechts ihre Struktur: Parameter sind der Kurzschlussstrom $I.K$ und der Innenwiderstand $R.i$.

2.4 Die Gesetze von Ohm und Kirchhoff

Die Gesetze von Ohm und Kirchhoff ermöglichen die Berechnung des Zusammenhangs zwischen Spannungen und Strömen in elektrischen Stromkreisen.

Das ohmsche Gesetz regelt den proportionalen Zusammenhang zwischen Strom und Spannung bei linearer elektrischer Reibung (Abb. 2-25). Widerstände sind elektrische Verbraucher. Strom und Spannung sind direkt proportional:

Gl. 2-1 ohmsches Gesetz $R=u/i$

Widerstände erwärmen sich im Betrieb. Wie stark, hängt von der Leistung und ihrer Baugröße ab. Die ist das Produkt aus Spannung u und Stromstärke i:

Gl. 2-2 Leistung eines ohmschen Widerstands $P \cdot R = u \cdot i = i^2 \cdot R = u^2 / R$

Leistungen sind von der Richtung der Spannung und des Stroms unabhängig. Sie steigen quadratisch mit u und i an. Die Größe eines Widerstands bestimmt seine Nennleistung P.Nen. Bei P.Nen erreicht die Temperatur des Widerstands ihre zulässige Grenze (ca. 70°C).

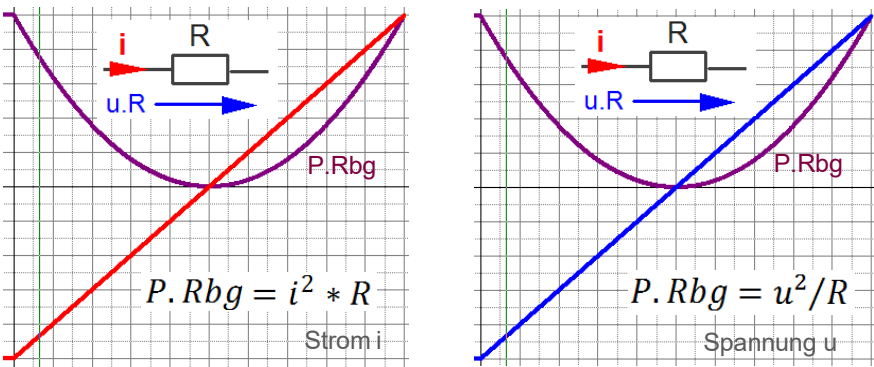


Abb. 2-25 Die Reibungsleistung elektrischer Widerstände: Nachfolgend werden wir sie P.R nennen.

Zur Simulation elektrischer Schaltungen benötigen wir das ohmsche Gesetz $i=u/R$ (Abb. 2-26).

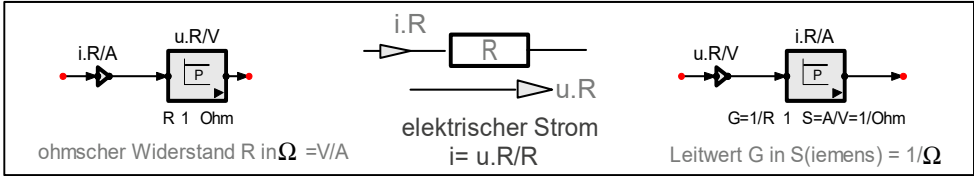


Abb. 2-26 Die Alternativen zur Simulation des ohmschen Gesetzes: Ob Spannungs- oder Stromsteuerung vorliegt, hängt von der Hochohmigkeit der umgebenden Schaltung ab.

Die Leistung von Wechselstrom

Die folgende Simulation (Abb. 2-27) zeigt, dass die Leistung eines Widerstands immer positiv ist und mit der doppelten Netzfrequenz oszilliert (Abb. 2-28):

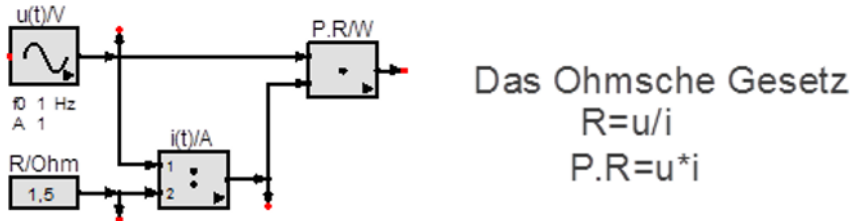


Abb. 2-27 Berechnung der (Verlust-) Leistung: Bei Wechselstrom muss mit Effektivwerten gerechnet werden.

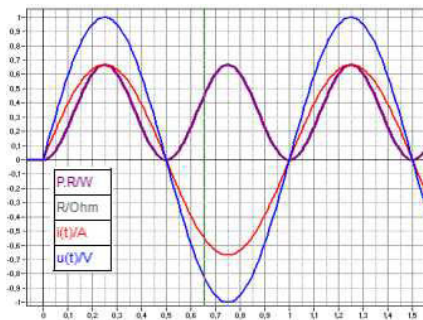


Abb. 2-28 Bei Wechselstrom sind ideale Widerstände frequenzunabhängig, die Phasenverschiebung zwischen u und i ist null.

Elektrische Widerstände entstehen durch Stöße fließender Elektronen mit den ortsfesten Atomkernen. Sie werden dadurch zu Schwingungen angeregt, die als Erwärmung empfunden wird. Die zugeführte Energie wird in den Kernen gespeichert. Der Vorgang benötigt Zeit, die sich durch thermische Trägheit beim Erwärmen und Abkühlen äußert.

Das erklärt, warum thermische Zeitkonstanten viel größer als elektrische und magnetische Zeitkonstanten sind.

- A) Thermische Zeitkonstanten werden in Kapitel 12 Wärme (Band 7) berechnet.
- B) Elektrische Zeitkonstanten $T.C = C \cdot R$ wurden bereits in Kapitel 2 Elektrizität behandelt. Ein Zusammenhang zwischen $T.C$ und den Abmessungen eines RC-Gliedes besteht nicht.
- C) Spulenzitkonstanten $T.L = L/R$ sind ein Thema dieses Kapitels.
 In Kapitel 5 Magnetismus (Band 3/7) zeigen wir, dass $T.L$ mit steigender Spulen-
 gröÙe größer wird. Durch die Berechnung magnetischer Kreise werden wir zeigen,
 warum das so sein muss.

2.5 Der Spannungsteiler und das Überlagerungsprinzip

Überlagerung ist die Addition mehrerer Teile zum Gesamten. Zur Messung oder Berechnung eines Teileinflusses müssen alle Steuergrößen x_i bis auf die zu untersuchende konstant gehalten werden. Sind die einzelnen Bewertungsfaktoren k_i bekannt, lassen sich lineare Systeme mit beliebig vielen Eingängen einfach und übersichtlich durch Überlagerung der **Teileinflüsse $k_i \cdot x_i$ (Durchgriff)** berechnen.

$$x \cdot a = k \cdot 1 \cdot x \cdot 1 + k \cdot 2 \cdot x \cdot 2 + k \cdot 3 \cdot x \cdot 3 + \dots$$

Als Beispiel für eine **statische Systemanalyse** soll ein zweiseitig gespeister Spannungsteiler berechnet werden (Abb. 2-29).

Gesucht wird die Ausgangsspannung als Funktion der beiden Eingangsspannungen u_1 und u_2 und der Belastung des Ausgangs mit dem Ausgangsstrom i_a . Parameter sind die Teilerwiderstände R_1 (hier z.B. $1\text{k}\Omega$) und R_2 (hier z.B. $2\text{k}\Omega$).

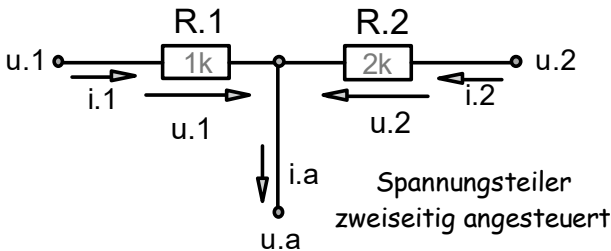


Abb. 2-29 Vor der Berechnung erhalten alle Signale Namen und eine positive Zählrichtung.

Überlagerung der Einzelverstärkungen im Leerlauf

Wir beginnen die Analyse mit der Berechnung der Ausgangsspannung u_{a0} im Leerlauf ($i_a=0$). Dazu werden **Spannungsverhältnisse v** genannt. Bei Spannungsteilern liegt v zwischen 0 und 1.

Abb. 2-30 zeigt die Überlagerung der Teileinflüsse von u_1 und u_2 auf u_a :

$$u \cdot a0 = v \cdot 1 \cdot u \cdot 1 + v \cdot 2 \cdot u \cdot 2$$

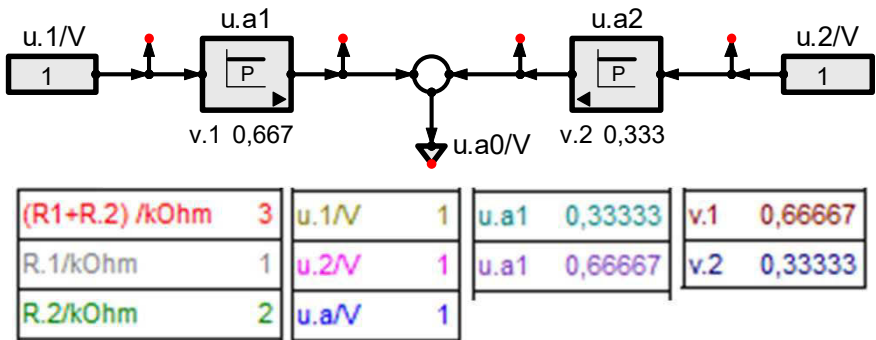


Abb. 2-30 Berechnung eines unbelasteten Spannungsteilers (Leerlauf)

Berechnung der Einzelteilungen v.1 und v.2

Zur Berechnung des Spannungsdurchgriffs v.1 von u.1 nach u.a wird u.2=0 gesetzt:

$$v.1 = \frac{u.a}{u.1} = \frac{R.2}{R.1 + R.2}$$

Zur Berechnung des Durchgriffs v.2 von u.2 nach u.a wird u.1=0 gesetzt:

$$v.2 = \frac{u.a}{u.2} = \frac{R.1}{R.1 + R.2}$$

Die Summe aus v.1 und v.2 ist 1. Wenn z.B. v.1 gefordert wird, liegt damit auch v.2 fest:

$$v.1 + v.2 = 1 \rightarrow v.2 = 1 - v.1$$

Abb. 2-31 zeigt die Berechnung der Ausgangsspannung des zweiseitig gespeisten Spannungsteilers für **bekannte Widerstände R.1 und R.2**. Aus ihnen wurden oben die Spannungsteilungen v.1 und v.2 berechnet.

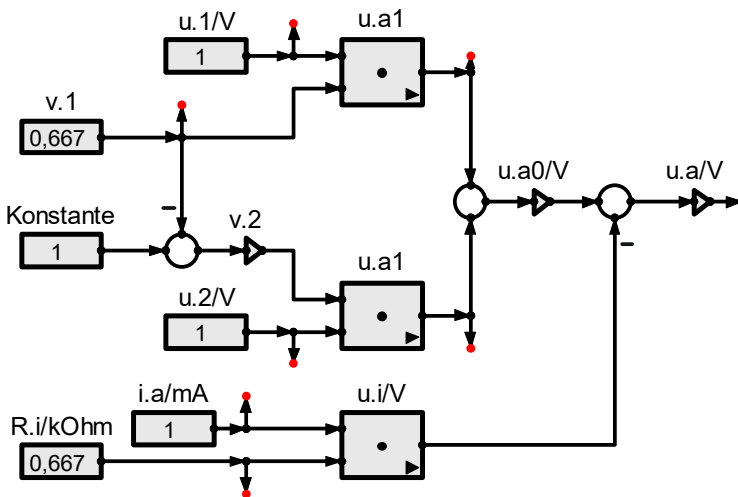


Abb. 2-31 Berechnung des belasteten Spannungsteilers für gegebene Widerstände R.1 und R.2

Der belastete Spannungsteiler

Bei Belastung des Ausgangs sinkt die Ausgangsspannung ab – und zwar umso stärker, je größer der Ausgangsstrom i_a und der noch zu berechnende Ausgangswiderstand (Innenwiderstand R_i) ist. Ihr Produkt ist der innere Spannungsabfall $u_i = R_i \cdot i_a$.

Das zeigt Abb. 2-32:

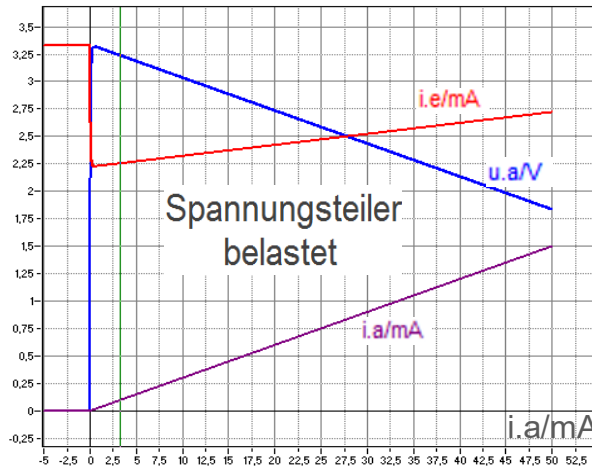


Abb. 2-32 zeigt den Abfall der Ausgangsspannung u_a und den Anstieg des Eingangsstroms i_e bei Belastung des TeilerAusgangs mit dem Ausgangsstrom i_a .

Messung und Berechnung des Ersatzinnenwiderstands R_i

Bei Belastung des Ausgangs mit Ausgangsströmen Δi_a sinkt die Ausgangsspannung u_a . $\Delta u_a = R_i \cdot \Delta i_a$. Die Proportionalitätskonstante heißt Ersatzinnenwiderstand R_i .

Zur Messung und Berechnung von R_i werden die beiden Eingangsspannungen durch Kurzschlüsse auf null gesetzt. Dadurch sind **R.1 und R.2 parallel** geschaltet. Dann addieren sich die beiden Leitwerte $1/R.1$ und $1/R.2$ zum Gesamtleitwert $1/R_i$. Das zeigt auch die folgende Rechnung:

Gl. 2-6 Innenwiderstand eines Spannungsteilers (// = parallel)

$$R_i = - \frac{\Delta u_a}{\Delta i_a} = \frac{1}{1/R.1 + 1/R.2} = \frac{R.1 * R.2}{R.1 + R.2} = R.1 // R.2$$

Zur Messung des Innenwiderstands eines Spannungsteilers wird ein negativer Ausgangsstrom $-\Delta i_a$ eingestellt und Δu_a dazu gemessen. Der Quotient ist der gesuchte R_i .

Durch ihre Parameter lassen sich ähnliche Systeme untereinander vergleichen (Herstellerangaben). So können sie zur Auswahl und Dimensionierung von Bauelementen dienen (siehe Bd. 5/7, Kap. 8 **Elektronik\Transistoren**).

Dynamische Analyse eines Spannungsteilers

Dynamische Analysen klären das zeitliche Verhalten eines Systems. Für $t \rightarrow \infty$ zeigen sie sein statisches Verhalten (Abb. 2-33).

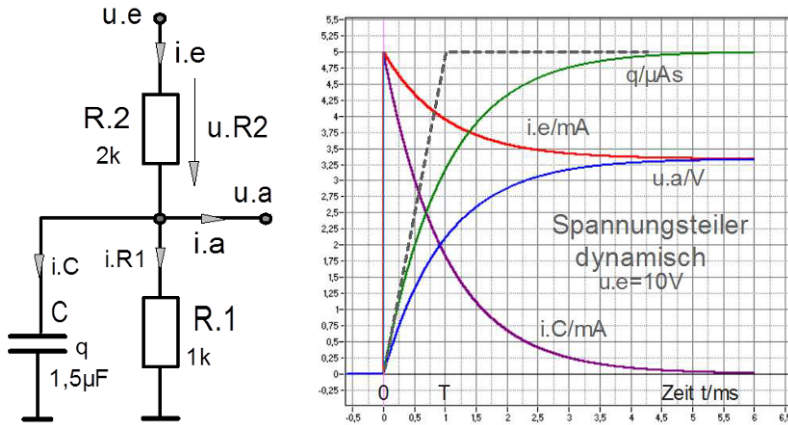


Abb. 2-33 Spannungsteiler mit Ausgangskondensator: Die Ausgangsspannung $u.a$ entsteht verzögert. Der Eingangsstrom $i.e$ hat Vorhalt. Dadurch verkürzt sich der Hochlaufvorgang (die Zeitkonstante T) im gleichen Maß, wie die Eingangsspannung $u.e$ heruntergeteilt wird.

Abb. 2-34 zeigt die Struktur zur dynamischen Analyse des Spannungsteilers von Abb.

2-33

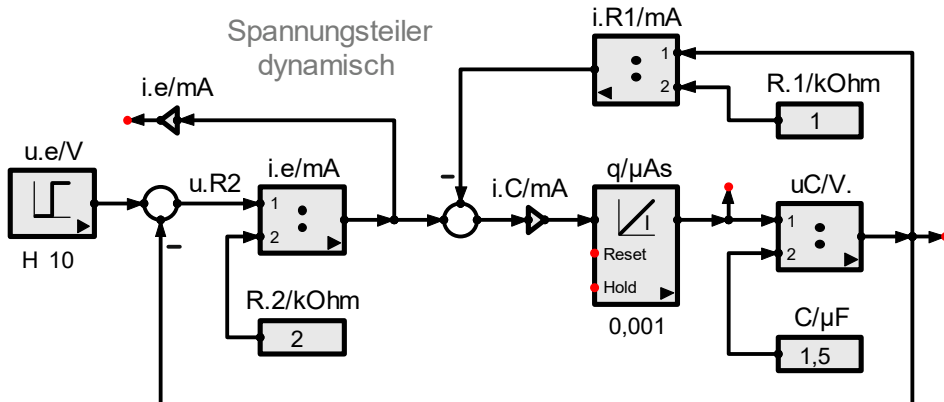


Abb. 2-34 Die dynamische Originalstruktur des Spannungsteilers von Abb. 2-33

Die Zeitkonstante T

Die Bauelemente des Spannungsteilers (C, R.1, R.2) bestimmen seine Verzögerung. Die Verzögerungszeitkonstante $T=q/i.C.\max$ in Abb. 2-35 entsteht dadurch, dass der Ausgangskondensator C durch die Ströme $i.1$ und $i.e$ über die Widerstände R.1 und R.2 ge- und entladen wird. Wie T aus C, R.1 und R.2 berechnet wird, zeigt die folgende Ableitung:

$$T = \frac{u.e}{(du.e/dt).0} = \frac{q.\max}{(i.1 + i.e)}$$

Mit $i.1=u.a/R.1$ und $i.e=u.a/R.2$ wird

$$T = \frac{C * u.a}{(u.a/R.1 + u.a/R.2)} = C * \frac{R.1 * R.2}{R.1 + R.2} = C // R.a$$

Erwartungsgemäß ist $T \sim C$. Proportionalitätskonstante ist die Parallelschaltung von R.1 und R.2. Nach Abschn. 2.6 ist dies der Ausgangswiderstand R.a des Teilers.

Zahlenwerte:

$R.1=1\text{k}\Omega$, $R.2=2\text{k}\Omega \rightarrow R.a=0,67\text{k}\Omega$ – $C=1,5\mu\text{F} \rightarrow T=1\text{ms}$

Wenn Kapazitäten C im μF -Bereich und Widerstände R im $\text{k}\Omega$ -Bereich liegen, liegen die Schaltungszeitkonstanten T im ms-Bereich.

Abb. 2-35 zeigt die Sprungantwort eines Proportionalverstärkers. Wenn er, wie hier angenommen, nur eine dominante Kapazität hat, ist dies eine e-Funktion:

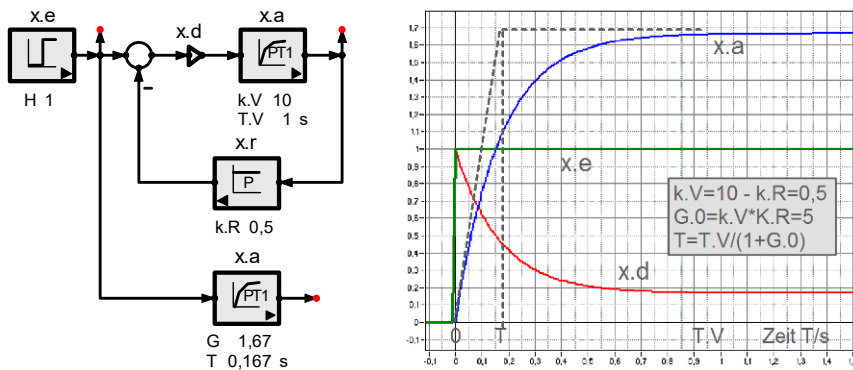


Abb. 2-35 Die Sprungantwort eines proportional beschalteten OP's: links die Original- und darunter die Ersatzstruktur

In diesem – wie in allen Fällen ohne Hilfsenergie – liegt immer Gegenkopplung vor. Es gilt dann das Pluszeichen im Nenner von Gl. 1-3.

Eingangssignale sind hier $u.e$ (eingangsseitig) und $i.a$ (ausgangsseitig). Ausgangssignale sind hier $i.e$ (eingangsseitig) und $u.a$ (ausgangsseitig).

Die Vorwärtskonstante $k.V$ ist $1/R.2$, die Rückwärtskonstante $k.R = R.1$. Damit wird die Kreisverstärkung $V.0 = R.1/R.2$. Bei $V.0 < 1$ ist der Teiler eine Steuerung, bei $V.0 > 1$ ist der Teiler eine Regelung.

2.6 Der Spannungsteiler als Vierpol

Im vorherigen Abschn. wurde ein Spannungsteiler ausgangsseitig berechnet. Zur vollständigen Berechnung gehört auch der Eingangsstrom i.e. Abb. 2-36 zeigt, wie er durch eine Brückenschaltung zu null gemacht werden kann:

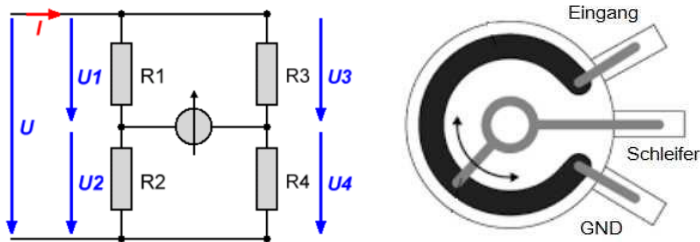


Abb. 2-36 Messbrücke mit Spannungsteilern - Potentiometer

Die Berechnung des Eingangsstrom i.e im Leerlauf und bei belastetem Ausgang (Abb. 2-37) soll nun nach der Vierpolmethode für einen einseitig gespeisten Spannungsteiler gezeigt werden.

Was ist die Vierpolmethode?

Systeme mit einem Ein- und Ausgang heißen Zweipol. Der Vierpol besitzt ein- und ausgangsseitig je eine steuernde und eine gesteuerte Messgröße (Abb. 2-37). Der Vierpol zeigt mittels vier Vierpolparametern, **was womit** berechnet werden soll. Physikalische Details des Systems zeigt er nicht (formale Beschreibung).

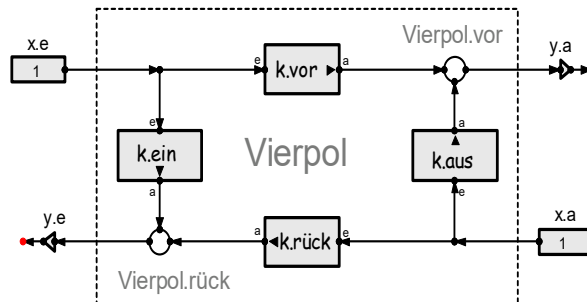


Abb. 2-37 Die Struktur eines Vierpols: Sie zeigt, was womit berechnet werden soll und welche Konstanten (Vierpolparameter) dazu benötigt werden.

Zu den physikalischen Funktionen eines Systems macht ein Vierpol keine Aussage. Das bleibt der **Originalstruktur** vorbehalten. Aus ihr können die **Vierpolparameter berechnet** werden. Das soll am Beispiel des Spannungsteilers gezeigt werden.

Wenn die Vierpolparameter eines Systems gefordert werden, können damit seine **Bauelemente dimensioniert** werden. Auch das soll für den Spannungsteiler gezeigt werden.

Bei **Spannungsverstärkern** interessiert dreierlei:

die Leerlauf-Spannungsverstärkung v_u , der Eingangswiderstand R_e und der Ausgangswiderstand R_a .

- $v_u = u_a / u_e$; $\max$ wird durch die Anwendung bestimmt. Durch die ansteuernde Quelle ist die maximale Eingangsspannung u_e gegeben. Gefordert wird die maximale Ausgangsspannung.
- Bekannt ist oder abgeschätzt wird der Ausgangswiderstand R_a der ansteuernden Quelle. Um ihre Spannung zu nutzen, muss der Eingangswiderstand $R_e > R_a$ sein.
- Gefordert wird die Belastbarkeit des Ausgangs, dargestellt durch einen Lastwiderstand R_L . Damit ausgangsseitig keine Spannungsverluste auftreten, muss $R_a \ll R_L$ sein.

Für Spannungsteiler gilt das gleiche, nur ist da die ‚Spannungsverstärkung‘ v_u immer kleiner als 1.

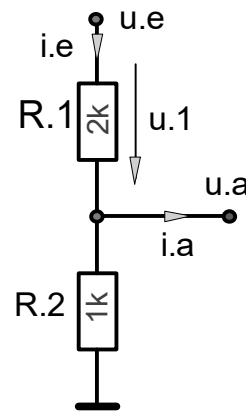
Berechnung eines Spannungsteilers als Vierpol

Gegeben ist die Reihenschaltung zweier Widerstände nach Abb. 2-38.

Abb. 2-38 Die Schaltung eines belasteten Spannungsteilers

Berechnet werden sollen

- die **Wirkung** der Eingangsspannung u_e und des Ausgangsstroms i_a auf die Ausgangsspannung u_a . Sie wird durch eine Ersatzspannungsquelle dargestellt.
- die **Rückwirkung** der Eingangsspannung u_e und des Ausgangsstroms i_a auf den Eingangsstrom i_e . Sie wird durch eine Ersatzstromquelle dargestellt.



Das zeigt die Struktur des Teilers von Abb. 2-39:

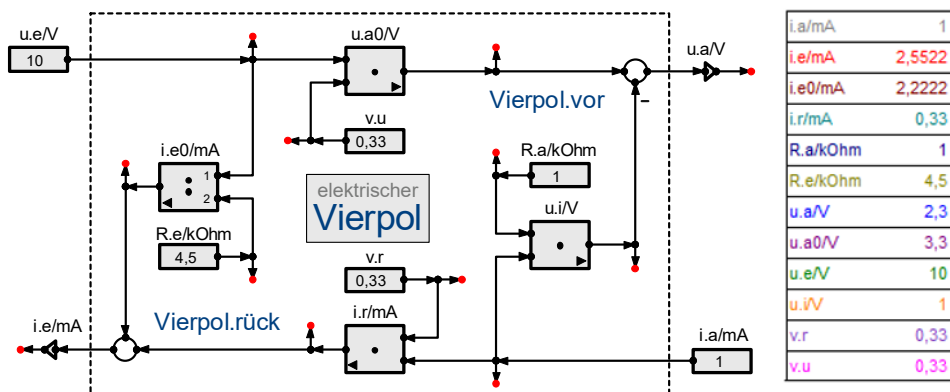


Abb. 2-39 Der Spannungsteiler als Vierpol: Im Text wird erklärt, warum die Vorwärtskonstante v_u und die Rückwärtskonstante v_r identisch sind (gilt für alle passiven Systeme).

Die Vierpolparameter des Spannungsteilers

Mit Abb. 2-38 wurde der Spannungsteiler eingangsseitig berechnet. Das ergab

- die Spannungsteilung $v.u = R.1 / (R.1 + R.2)$
- der Eingangsleitwert $1/R.e$... mit dem Eingangswiderstand $R.e = R.1 + R.2$

Abb. 2-40 zeigt den Teiler ausgangsseitig. Daraus folgen

- der Ausgangswiderstand $R.a = R.1 // R.2 = (R.1 \cdot R.2) / (R.1 + R.2)$
- und die noch zu berechnende Stromrückwirkung $v.r = \Delta i.e / \Delta i.a$ für $\Delta u.e = 0$.

Definition (Messvorschrift):

$$v.r = \frac{i.e}{i.a} = \frac{i.e}{i.e + i.1}$$

Berechnung:

$$v.r = \frac{u.a / R.2}{u.a / R.2 + u.a / R.1}$$

Resultat:

$$v.r = \frac{R.1}{R.1 + R.2} = v.u$$

Stromrückwirkung $v.r$ und Spannungsteilung $v.u$ sind gleich groß.

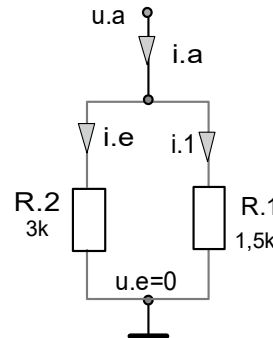


Abb. 2-40 Zur Berechnung der Stromrückwirkung $v.r = i.e / i.a$ wird $u.e = 0$ gesetzt.

Die statischen Kennlinien eines Spannungsteilers

Um die Funktionen eines Spannungsteilers zu erkennen, ist zu zeigen

- wie die Ausgangsspannung $u.a$ und der Eingangsstrom $i.e$ von der Eingangsspannung $u.e$ und dem Ausgangsstrom $i.a$ abhängen
- wie die Vierpolparameter $v.u$, $v.r$, $1/R.e$ und $R.a$ aus diesen Kennlinien ermittelt werden.

Abb. 2-41 zeigt diese Kennlinien. Sie wurden mit der Originalstruktur des Spannungsteilers (Abb. 2-34) erzeugt.

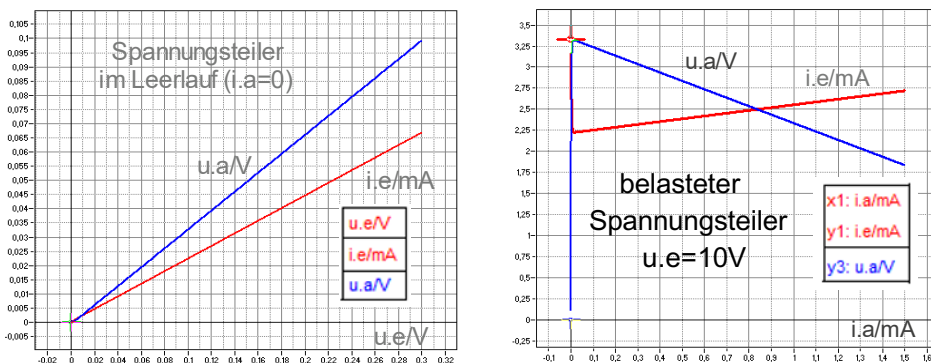


Abb. 2-41 zeigt die Ein- und Ausgangskennlinien eines Spannungsteilers.

Dimensionierung der Vierpolparameter eines Spannungsteilers

Ein wichtiger Zweck von Systemanalysen ist die Dimensionierung der Systemkomponenten entsprechen den Vorgaben der Anwendung. Das soll hier am Beispiel eines Spannungsteilers für Netzspannungen gezeigt werden.

Wenn Spannungen von einigen 100V benötigt werden, bietet sich die Netzspannung als Quelle an: sinusförmige Wechselspannung, 50Hz, effektiv 230V, maximal 311V.

Diese Spannung möchte man gefahrlos beobachten. Dazu soll sie durch einen Spannungsteiler in den ungefährlichen Volt-Bereich verkleinert werden (Abb. 2-42).

Als Messmittel wird ein Multimeter (Eingangswiderstand $10\text{M}\Omega$) oder ein Oszilloskop (Eingangswiderstand $1\text{M}\Omega$) verwendet.

Gefordert wird: $v.u = 1/100 = 1\%$ und $R.a = 100\text{k}\Omega$

Gesucht werden die Teilerwiderstände $R.1 \gg R.\text{Last}$ und $R.2$ und ihre Verlustleistungen.

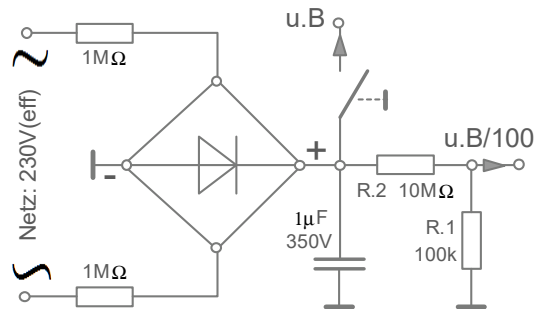


Abb. 2-42 Hochspannungsmessung: Der Spannungsteiler dient als Monitor. Ein 1:100-Teiler ermöglicht die Messung von 1% der geteilten Hochspannung. Durch die beiden $1\text{M}\Omega$ -Vorwiderstände ist die Berührung des Hochspannungsausgangs U.B ungefährlich.

Dimensionierung der Widerstände R.1 und R.2

Zur Dimensionierung von $R.1$ und $R.2$ müssen zwei Parameter gefordert werden: hier z.B. $v.u < 1$ und $r.a$.

Die Umstellung der Spannungsteilergleichungen ($R.a$ und $v.u$) ergibt

$$R.2 = r.a / v.u \quad \text{und} \quad R.1 = R.2 / (1/v.u - 1)$$

Über $R.2$ fällt fast die gesamte Netzspannung ab. $R.2$ erzeugt fast die gesamte Leistung des Teilers:

$$P.2 \approx u.\text{Netz}^2 / R.2.$$

Zahlenwerte:

Gefordert sei $v.u = 0,01 = 1\%$ und $R.a = 100\text{k}\Omega$.

Dann wird $R.2 = 10\text{M}\Omega$ und $R.1 = 100\text{k}\Omega$.

Die Leistung von $R.2$ ist $P.2 \approx (230\text{V})^2 / 10\text{M}\Omega = 5,3\text{mW}$

Die Leistung von $R.1$ ist ein Bruchteil davon $P.1 = P.2 \cdot v.u = 53\mu\text{W}$

Mit $R.1$ und $R.2$ liegen auch die beiden übrigen Parameter fest:

$$v.r = v.u = 1\% \quad \text{und} \quad R.e = R.1 + R.2 = 10,1\text{M}\Omega$$

2.7 Operationsverstärker

Operationsverstärker sind Differenzverstärker mit sehr hoher statischer Verstärkung V_0 .

Mit ihnen und der Beschaltung mit passiven Bauelementen R , C und L lassen sich gewünschte Rechenoperationen realisieren, z.B.

- proportionale Verstärkung
- Integration und
- Differenzierung

Wie – soll nun gezeigt werden.

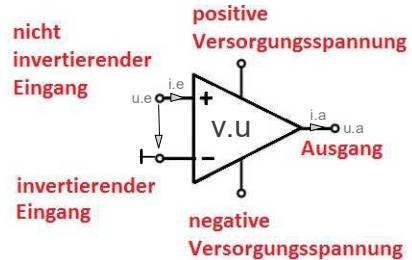


Abb. 2-43 Symbol und Anschlüsse eines differenzbildenden Spannungsverstärkers

Der Spannungsverstärker als Vierpol

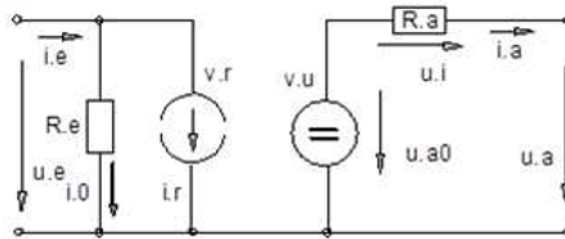


Abb. 2-44 Verstärkervierpol - links: Symbol mit Anschlussklemmen; rechts: elektrische Ersatzschaltung. Sie zeigt den Verstärker eingangsseitig als Widerstand mit Stromrückwirkung und ausgangsseitig als reale, steuerbare Spannungsquelle. Wie der Verstärker zu berechnen ist, zeigt die Darstellung nur indirekt.

Die Vierpolparameter eines Verstärkers

In Abb. 2-39 haben wir mit der Vierpolstruktur das Äquivalent zur Ersatzschaltung von Abb. 2-44 angegeben. Sie zeigt die Bedeutung und Verwendung der Verstärkerparameter:

- die Leerlaufspannungsverstärkung $v.u = u.a_0 / u.e$
Gefordert wird, dass $v.u$ durch ein Widerstandsverhältnis präzise einstellbar ist.
- der Eingangswiderstand $r.e = \Delta u.e / \Delta i.e$
Gefordert wird, dass $r.e$ entweder sehr groß oder aber genau definiert ist.
- der Ausgangswiderstand $r.a = -\Delta u.a / \Delta i.a$
Da Lastunabhängigkeit der Ausgangsspannung gefordert wird, soll $r.a$ gegen null gehen.
- die Stromrückwirkung $v.r = \Delta i.e / \Delta i.a$
Bei Spannungsverstärkern soll keine Rückwirkung von $i.a$ auf $i.e$ bestehen, denn sie würde die ansteuernde Quelle zusätzlich belasten. Gefordert wird $v.r = 0$.

Gezeigt werden soll, wie gut diese Forderungen durch Operationsverstärker erfüllt werden.

Proportionale Differenzverstärker (Abb. 2-45) realisieren die Gleichung

$$u.a = V.Dif * (u.1 - u.2)$$

Sie können invertierend ($u.1=0$) und nichtinvertierend ($u.2=0$) verwendet werden. Abb. 2-46 zeigt die Vierpolstruktur dazu.

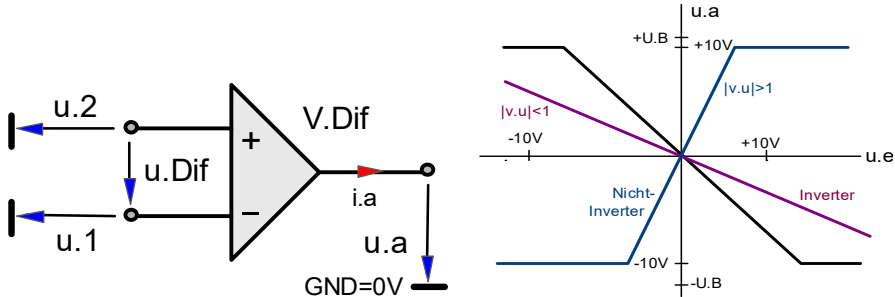


Abb. 2-45 links: das Symbol eines Differenzverstärkers - rechts: invertierende Abschwächung und nichtinvertierende Verstärkung

Beispiele für OP-Schaltungen:

- schaltendes Verhalten, z.B. als Rechteck-Oszillator und Schmitt-Trigger
- lineares Verhalten als Inverter, Nichtinverter und Differenzverstärker mit definierter Verstärkung
- Zeitverhalten, z.B. als Integrator, Verzögerung, Differenzierer oder Vorhalt

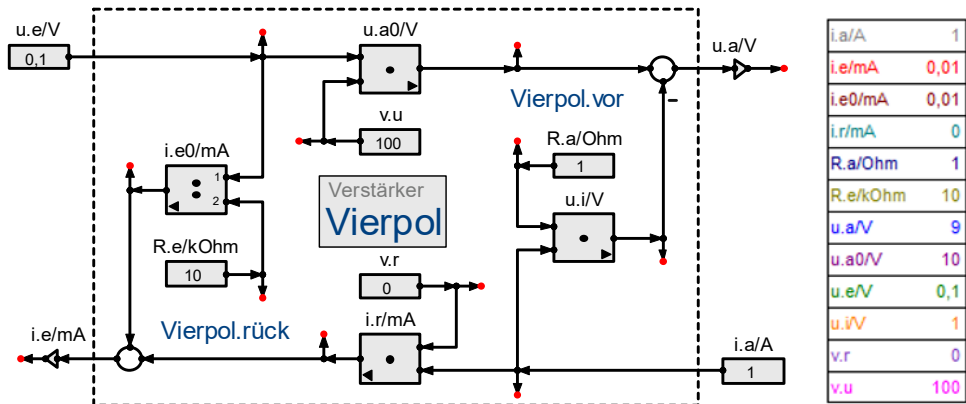


Abb. 2-46 Die Vierpolstruktur eines Spannungsverstärkers – rechts: die damit berechneten Signale

Der unbeschaltete (offene) OP

Um den beschalteten OP berechnen zu können (Abb. 2-47), müssen die Daten des offenen OP's bekannt sein. Hier verwenden wir typische Zahlenwerte:

- $v.u$ ist die offene Verstärkung $V.0$ ($V.0=10^5=0,1V/\mu V$). Hohe $V.0$ sind die Voraussetzung zum Aufbau von Präzisionsregelungen. Durch Gegenkopplung sollen benötigte Spannungsverstärkungen $v.u \ll V.0$ eingestellt werden.
- $r.e$ wird der Differenzeingangswiderstand $r.d$ (Bereich $M\Omega$)
- $r.a$ wird der Innenwiderstand $r.i$ (Bereich 100Ω).

Durch Spannungsgegenkopplung sollen daraus Ausgangswiderstände $r.a \rightarrow 0$ entstehen. Damit der OP bei Kurzschluss nicht zerstört wird, ist der Signalstrom begrenzt. Er liegt bei 10mA. Für größere Ströme muss ein individuell an die Belastung angepasster Treiber nachgeschaltet werden.

- Die Stromrückwirkung $v.r$ ist vernachlässigbar klein ($v.r=0$).

Der nichtinvertierende OP

Durch einen Spannungsteiler als Gegenkopplung erhält der OP dessen Teilung als Verstärkung von $u.e$ nach $u.a$. Der Grund: $u.a$ wird vom OP so eingestellt, dass die Differenzeingangsspannung $u.d=u.a/V.0$ gegen null geht.

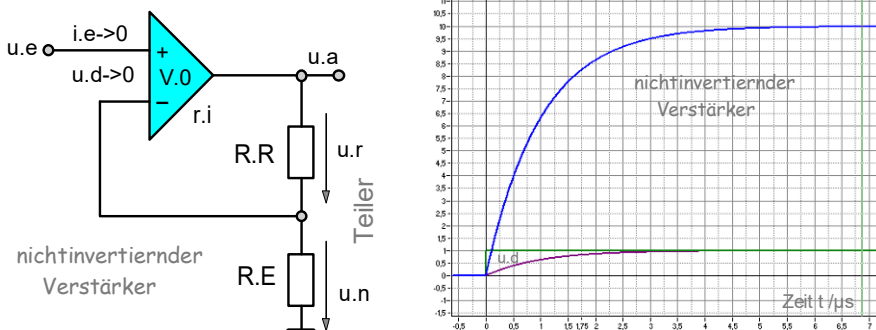


Abb. 2-47 Nichtinvertierender OP: Seine Spannungsverstärkung $v.u=1+R.R/R.E > 1$ wird durch das Widerstandsverhältnis $R.R/R.E$ eingestellt.

Abb. 2-48 zeigt die Struktur des nichtinvertierenden OP's. Damit können die Daten seiner Ersatzschaltung nach Tab. 2-1 berechnet werden.

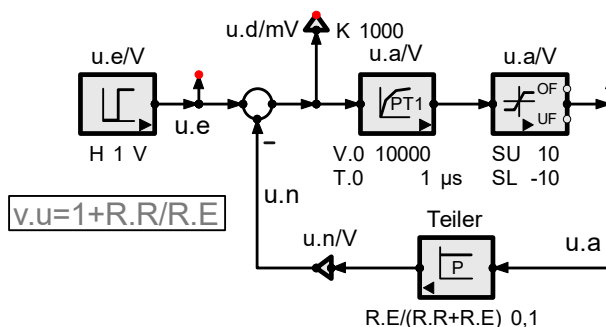


Abb. 2-48 nichtinvertierender Verstärker: Spannungsregelung durch Spannungsvergleich

Der invertierende OP (Abb. 2-49) ändert die Polarität des Ausgangs gegenüber dem Eingang. Seine Spannungsverstärkung ist auch kleiner 1 einstellbar. Im Gegensatz zum passiven Spannungsteiler ändert sich $v.u$ auch bei Belastung nicht.

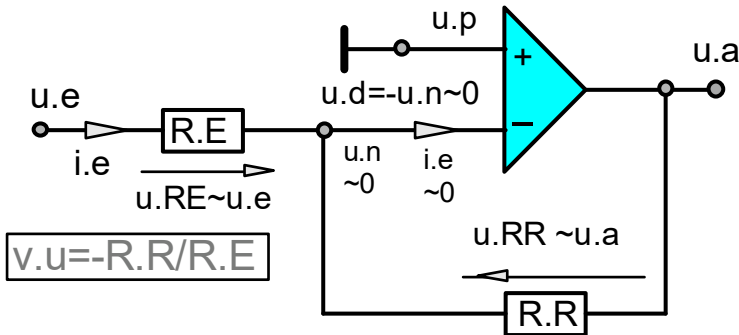


Abb. 2-49 Die Schaltung des invertierenden OP's: Der Pegel des invertierenden Eingangs $u.n$ liegt wie der des nichtinvertierenden Eingangs $u.p$ bei null (Stromsummenpunkt, virtueller Nullpunkt).

Abb. 2-50 zeigt die Sprungantwort des invertierenden Spannungsverstärkers von Abb. 2-49. Darunter in Abb. 2-51 ist seine Struktur angegeben.

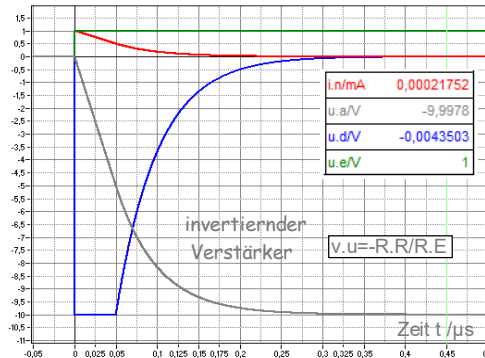


Abb. 2-50 Die Sprungantwort eines Inverters: Bitte beachten Sie die Zeitskala.

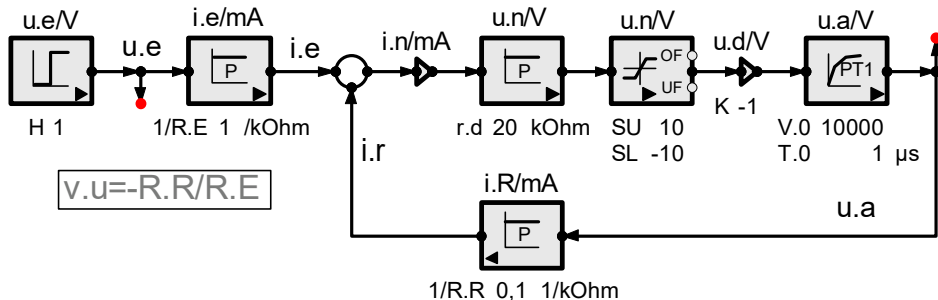


Abb. 2-51 die Struktur zum nichtinvertierenden OP: Er realisiert eine Spannungsregelung durch Stromvergleich.

Der differenzbildende OP realisiert die Gleichung $u_a = u_1 - u_2$. Abb. 2-52 zeigt seine Realisierung mit zwei hochohmigen Eingängen durch drei OP's. Sie heißen Instrumentenverstärker.

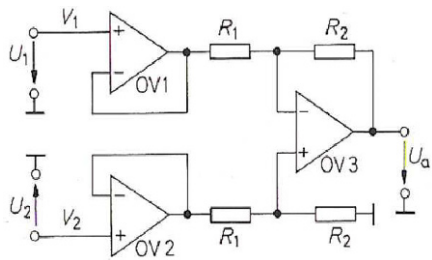


Abb. 2-52 Instrumentenverstärker: Er hat zwei hochohmige Eingangsstufen und eine durch das Widerstandsverhältnis R_2/R_1 einstellbare Spannungsverstärkung. Abb. 2-53 zeigt die Struktur dazu.

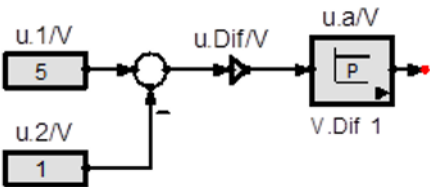


Abb. 2-53 die Ersatzstruktur eines Differenzverstärkers

Tab. 2-1 Die Daten wichtiger OP-Schaltungen

	v.u	r.e	r.a
Offener OP	$V.0 > 10^5$	$r.d \approx 1 M\Omega$	$r.i \approx 100 \Omega$
Nichtinvertierender OP	$1 + R.R/R.E$	$r.d \cdot v.u \rightarrow \infty$	$r.i/v.u \rightarrow 0$
Invertierender OP	$R.R/R.E$	$R.E$	$r.i/v.u \rightarrow 0$

Vergleich der OP-Daten:

1. Durch die Auswahl des OP's liegen seine offenen Daten fest.
2. Die Spannungsverstärkung $v.u$ ist durch das Widerstandsverhältnis $R.R/R.E$ einstellbar.
3. Der Eingangswiderstand $r.e$ des nichtinvertierenden OP's geht gegen unendlich, der des invertierenden OP's ist durch $R.E$ einstellbar.
4. Die Ausgangswiderstände $r.a$ gehen durch die Spannungsgegenkopplung gegen null.

Fazit

Der gegengekoppelte OP ist eine ideale programmierbare Spannungsquelle.

Einzelheiten zu und Anwendungen von Instrumentenverstärkern finden Sie in der Schrift ‚Simulierte Messtechnik‘ von diesem Verfasser.

Sonderfälle des OP's mit Zeit- und Frequenzverhalten sind

Differenzierer und Integrator, Verzögerung und Vorhalt 1. und 2.Ordnung.

Wir behandeln sie in Kapitel 3.11.

2.8 Das thermische Rauschen

In mehreren Abschnitten dieses Kapitels sollen Antennensignale berechnet werden. Ihre Spannungen haben Amplituden im μV bis mV -Bereich mit Frequenzen bis zu einem GHz. Dazu werden wir in Teil 2, Abschn. 3.13.5 die Empfindlichkeiten einer Rahmenantenne und einer Ferritantenne berechnen.

Ihre Nutzsignale an **Widerständen R** werden immer durch **thermisches Rauschen** überlagert (Abb. 2-54). Das wird z.B. bei der Fa. DigitalVD anschaulich erklärt:

<http://www.digitalvd.de/hardware.php4?ID=18>

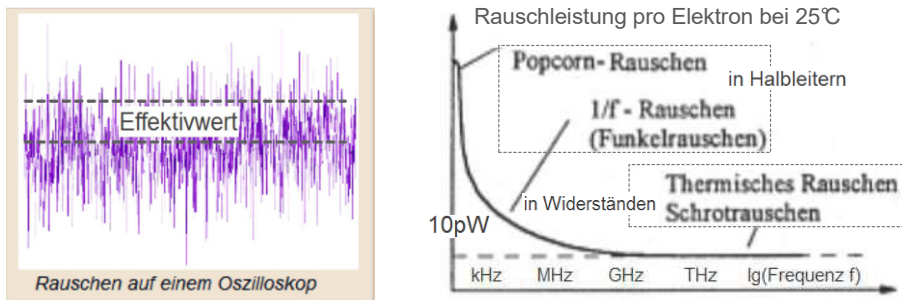


Abb. 2-54 links: Rauschen im Zeitbereich – rechts: die Rauschleistungen von Leitern und Halbleitern

Die **Wellenlänge λ** von Signalen bestimmt, ob die Abmessungen der sie verarbeitenden Geräte eine Rolle spielen. Die folgende Rechnung zeigt, dass das bei technischen Frequenzen bis zu 1GHz nicht der Fall ist.

Wellenlängen λ sind reziprok zu ihren **Frequenzen f** . Das ergibt sich nach Einstein (um 1900) aus der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit $c = \lambda \cdot f \approx 300 \text{ Mm/s}$. Daraus folgt

$$\text{Gl. 2-7 Wellenlänge und Frequenz } \lambda = c/f.$$

Höchste technische Signalfrequenzen liegen bei 1GHz. Sie haben Wellenlängen über 330m. Deshalb stellt sich nur noch die Frage nach der **Frequenzabhängigkeit des thermischen Rauschens**. Sie soll nun durch Berechnung und Simulation geklärt werden.

Berechnung effektiver Rauschspannungen und -ströme

Um das thermische Rauschen minimieren zu können, muss man wissen, wie es berechnet wird. Das soll im Folgenden geschehen.

Bei Überlagerung statistisch verteilter (stochastischer) Signale ergibt sich das Gesamtsignal als **geometrische Summe der Effektivwerte** von Nutz- und Rauschsignalen. Bei Radiofrequenzen (um 100MHz) wird der Effektivwert des Gesamtsignals gemessen. Ihre Effektivwerte der Überlagerung von Nutz- und Rauschspannungen errechnen sich nach Pythagoras (Gl. 1-1) aus den Effektivwerten der Einzelsignale:

$$\text{Gl. 2-8 Effektivwert statistisch verteilter Spannungen (Pythagoras) } u_{\text{eff}}^2 = u_{\text{Sig}}^2 + u_{\text{Rausch}}^2$$

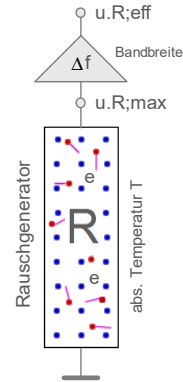
Die thermische Rauschleistung

Thermisches Rauschen entsteht durch ungeordnete Bewegungen von Ladungsträgern infolge Erwärmung (Abb. 2-55). Es führt zu regellosen Spannungsschwankungen an den Klemmen des Leiters.

- Thermische Elektronen rauschen mit Frequenzen bis in den THz-Bereich (10^{12} Hz).
- Technisch nutzbar sind ‚nur‘ Frequenzen bis in den GHz-Bereich (10^9 Hz).
- Mit Oszilloskopen sind Frequenzen im MHz-Bereich messbar.

Deshalb interessieren die Rauschspannungen und -ströme in diesen Bereichen.

Abb. 2-55 Die Entstehung von Rauschspannungen durch die regellose Bewegung von Leitungselektronen infolge der Temperatur T



Die Berechnung des thermischen Rauschens erfolgt nach Boltzmann und Nyquist. Wir entnehmen sie Wikipedia:

- Die thermische Energie der Leitungselektronen ist proportional zur absoluten Temperatur T: **$W_{th} = 4 \cdot k \cdot B \cdot T$** .

Darin ist T die absolute Temperatur. Wir rechnen hier mit $T = 300\text{K} = 27^\circ\text{C}$.

$k \cdot B$ ist die Elektronenenergie pro Kelvin der Erwärmung. Boltzmann hat sie gemessen, Nyquist hat sie berechnet: **$k \cdot B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{Ws/K}$** .

Bei 300K ist **$k \cdot B \cdot T = 0,41 \cdot 10^{-20} \text{Ws}$** die thermische Bewegungsenergie eines Elektrons.

- Die **thermische Leistung** **$P_{th} = W_{th} \cdot \Delta f$** ist proportional zur

$$\text{Gl. 2-9} \quad \text{Bandbreite } \Delta f = f.2 - f.1$$

der Frequenzen, mit der Leitungselektronen oszillieren. Darin ist $f.1$ ihre untere und $f.2$ ihre obere Grenzfrequenz (Amplitudenabsenkung auf 70% der Maximalwerte).

- $f.1$ wird durch die Anwendung gefordert. Sie muss durch die Dimensionierung des Systems eingerichtet werden. Für Gleichstrom ist $f.1 = 0$.
- Falls $f.2$ eines Systems zu hoch ist, kann sie durch ein Tiefpassfilter (Teil 2, Kap. 3.13.3) auf den notwendigen Wert begrenzt werden.

Das minimiert die Rauschspannung. Meist ist $f.2 \gg f.1$. Dann ist **$\Delta f = f.2$** (die obere Grenzfrequenz der Signalübertragung).

Bei **Raumtemperatur** **$T = 300\text{K}$** und einer Bandbreite **$\Delta f = 1\text{GHz}$** ist die Rauschleistung pro Elektron **$k \cdot B \cdot T \cdot \Delta f = 4,1\text{pW}$** .

Dazu gehören entsprechend kleine Rauschspannungen und -ströme. Um die Wirkung des Rauschens bezüglich des Nutzsignals beurteilen zu können, sollen seine Effektivwerte berechnet werden.

Die thermische Rauschspannung

Aus der thermischen Rauschleistung $P_{th}=u.R^2/R$ folgt die

Gl. 2-10 effektive Rauschspannung (T, R, Δf) $u.R = \sqrt{4 \cdot k \cdot B \cdot T \cdot \Delta f \cdot R}$

$u.R$ erscheint zeitlich aufgelöst, wenn die Spannung $u.R$ an einem Widerstand mit einem Oszilloskop gemessen wird. Die folgende Rechnung zeigt, dass der Widerstand R dabei keine Rolle spielt, denn die Messkapazität C und der Widerstand R bestimmen die Bandbreite $\Delta f=1/2\pi \cdot C \cdot R$ des Rauschens. Damit wird aus Gl. 2-10 die

Gl. 2-11 effektive Rauschspannung (T/C) $u.R = 0,8 \cdot \sqrt{4 \cdot k \cdot B \cdot T/C}$

Effektive Rauschspannungen sind unabhängig vom Widerstand R ! Sie steigen mit der Wurzel aus der absoluten Temperatur T und sinken mit der Wurzel aus der Messkapazität C .

Die manuelle Berechnung der Rauschspannung $u.R$ eines Widerstands R ist recht aufwändig. Deshalb soll sie mittels Simulation erfolgen. Das zeigt Abb. 2-56:

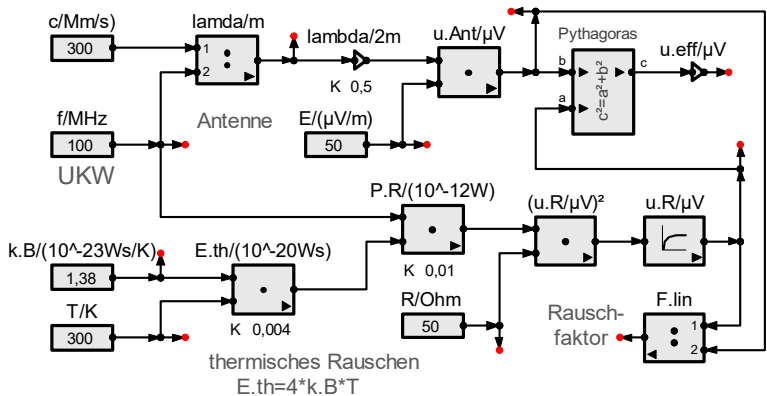


Abb. 2-56 Berechnung der Messgrößen einer Antenne

Beispiel:
Berechnet werden sollen Signal und Rauschen eines UKW-Senders ($\Delta f=f=100\text{MHz}$) am Abschlusswiderstand $R=50\Omega$ einer Antenne. Angenommen wird eine Empfangsfeldstärke $E=50\mu\text{V/m}$.

Abb. 2-57 zeigt die mit Abb. 2-56 berechneten Messwerte und den **linearen Rauschfaktor**

$F_{lin}=u.R/u.Ant=12\%$.

Abb. 2-57 Messwerte und Parameter zur Rauschberechnung einer Antenne nach Abb. 2-56

E/(μV/m)	50
F.lin	0,12133
f/MHz	100
k.B/(10 ⁻²³ Ws/K)	1,38
lambda/2m	1,5
lamda/m	3
R/Ohm	50
T/K	300
u.Ant/μV	75
u.eff/μV	75,55
u.R/μV	9,0995

Rauschspannungen und -ströme

Mittels Abb. 2-56 soll untersucht werden, wie die Rauschspannung $u_R;0$ und der Rauschstrom $i_R;K$ der Rauschquelle vom Widerstand R und dem unvermeidlichen Messkondensator C abhängen. Abb. 2-58 zeigt das Ergebnis: Je größer R , desto kleiner werden Rauschstrom und Bandbreite. Die Rauschspannung ist von R unabhängig.

Beispiel: Parallelschaltung von C und R

Die untere Grenzfrequenz f_l ist null, die obere Grenzfrequenz – und damit die Bandbreite $\Delta f = f_g$ wird mit steigendem Widerstand R immer kleiner:

$$\text{Gl. 2-12 Bandbreite und Grenzfrequenz } \Delta f \approx f_g = 1/(2\pi * C * R)$$

C=konstant, z.B. die Eingangskapazität eines Oszilloskops:

$$C = 20\text{pF}$$

T=konstant, z.B. $27^\circ\text{C} = 300\text{K}$

R=variabel,

z.B. von 50Ω bis $12\text{k}\Omega$

→ sinkende Grenzfrequenz

Gesucht wird der Verlauf der **Grenzfrequenz f_g** , der **Rauschspannung $u_R;0$** und des **Kurzschlussstroms $i_R;K$** .

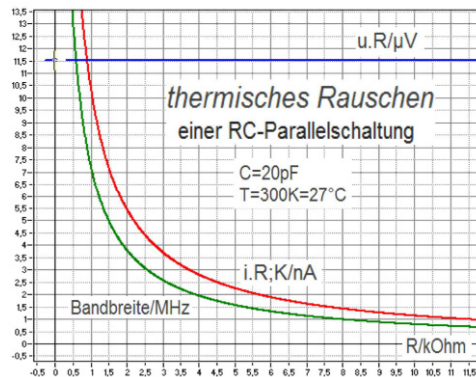


Abb. 2-58 Bandbreite, Rauschspannung und -strom bei variierendem Widerstand R

Zur Berechnung von $u_R;0$ und $i_R;K$ wird die Bandbreite Δf nach Gl. 2-12 in die Rauschgleichung Gl. 2-10 eingesetzt. Damit erhalten wir

1. die effektive Rauschspannung (R beliebig)

$$U.R = \sqrt{2/\pi} * \sqrt{k.B * T/C} \sim \sqrt{T/C}$$

Effektive Rauschspannungen u_R sind bei konstantem C unabhängig von R . Das macht die Messung einfach, denn die Bandbreite Δf wird dazu nicht benötigt. u_R steigt mit der Wurzel aus der absoluten Temperatur T . Das bedeutet, dass T nicht so genau bekannt sein muss, um u_R genau zu messen.

2. den effektiven Rauschkurzschlussstrom ($R \rightarrow 0$)

$$I.R = u.R/R = \sqrt{2/\pi} * \sqrt{k.B * (T/C)/R} \sim \sqrt{(T/C)/R}$$

Der effektive Rauschstrom $I.R$ sinkt mit steigendem Widerstand R . $I.R$ ist, wie die Rauschspannung $U.R$, nur schwach von der Temperatur T abhängig.

Das thermische Stromrauschen

Wenn mehrere Signal- und Rauschquellen auf einen gemeinsamen Widerstand R arbeiten, müssen die Effektivwerte ihrer Ströme nach Pythagoras geometrisch addiert werden (Gl. 1-1). Dann sind auch die thermischen Rauschquellen als Stromquellen zu beschreiben. Der effektive Rauschstrom $i.R=u.R/R$ folgt aus der Rauschspannung $u.R$. Mit Gl. 2-11 erhalten wir den

Gl. 2-13 effektiven Rauschstrom
$$I.R = \sqrt{4 \cdot k \cdot B \cdot (T/C)/R}$$

Abb. 2-59 zeigt eine Schaltung, in der sich ein Signalstrom und ein Rauschstrom überlagern. In beiden können die Frequenzen statistisch verteilt sein. Für das Rauschen ist nur die Differenz aus oberer und unterer Grenzfrequenz, genannt Bandbreite $f.2-f.1$, maßgeblich.

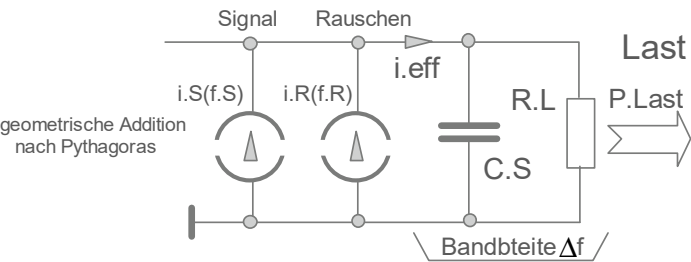


Abb. 2-59 Die Überlagerung von Signal- und Rauschströmen: Ihr Effektivwert muss durch geometrische Addition nach Pythagoras berechnet werden.

Abb. 2-60 berechnet das thermische Stromrauschen eines RC-Gliedes. Weil die untere Grenzfrequenz $f.1=0$ ist, ist die Kreisfrequenz der Bandbreite $\Delta\omega=2\pi \cdot \Delta f=1/(C \cdot R)$.

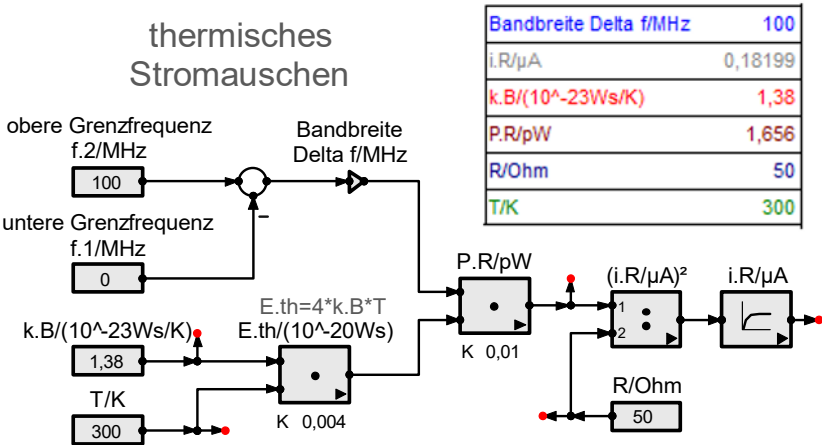


Abb. 2-60 Berechnung eines effektiven Rauschstroms

Rauschen und Rauschreduzierung

Nach Gl. 2-10 ist das effektive Rauschen proportional zur Wurzel aus der Systembandbreite Δf . Deshalb ist die Reduzierung von Δf auf die benötigte

Gl. 2-14 Bandbreite $B = f_2 - f_1 \approx f_2$ (obere Grenzfrequenz)

der einfachste Weg zur Reduzierung des Rauschens. Ein Beispiel dazu ist ein Rauschfilter mit Ferritperle für den 100MHz-Bereich. Wir bringen es in Teil 2 in Abschn. 3.13.7.

Um die Wirkung solch eines Filters zu zeigen, soll er hier simuliert werden. Dazu dient ein Verzögerungsglied mit der Zeitkonstante T . T bestimmt die obere Grenzfrequenz: $2\pi B = 1/T$. Daraus folgt die Dimensionierung der Verzögerung: **$T = 1/(2\pi \cdot B)$** .

Abb. 2-61 zeigt die Auswahl der Rauschquelle in SimApp:

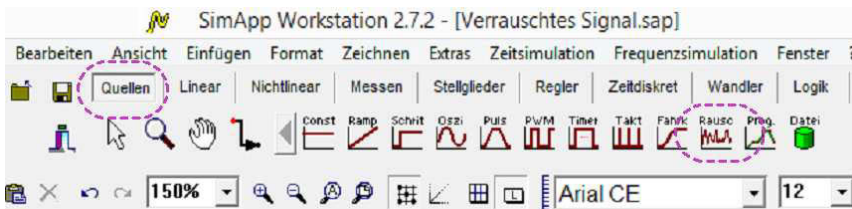


Abb. 2-61 Auswahl der Rauschquelle in SimApp in der Gruppe ‚Quellen‘

Abb. 2-62 zeigt die Struktur zur Simulation eines verrauschten Signals:

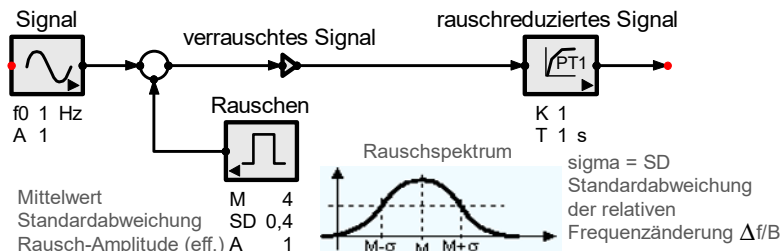
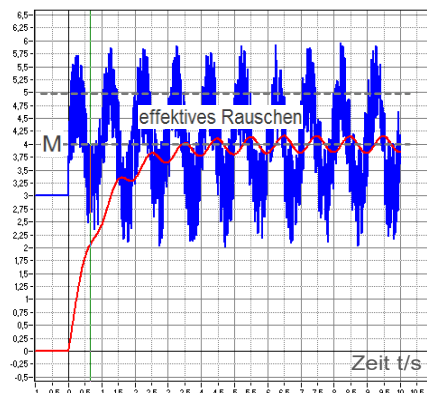


Abb. 2-62 Struktur zur Rauschsimulation: Einzustellen sind der Effektivwert des Rauschens A , sein Mittelwert M und die Standardabweichung $SD = \sigma$.

Was eine **Standardabweichung SD** ist, wird im Teil 2, Abschn. 3.17.15 beim Thema ‚Normalverteilung‘ erklärt.

Abb. 2-63 zeigt das mit Abb. 2-62 simulierte Rauschen vor und nach der Bandbreitereduzierung durch einen Tiefpass.

Abb. 2-63 Simuliertes Rauschen im Zeitbereich um einen Mittelwert M : blau ungeglättet, rot geglättet



Strukturbildung und Simulation technischer Systeme

Band 2, Teil 1: Elektrische Dynamik

Rossmann, A.

2017, X, 466 S. 328 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-662-48305-3