

## 2 Differentialgleichungsformulierungen für Probleme der Strukturmechanik

Bei der Entwicklung eines Verfahrens der finiten Elemente für Probleme der Strukturmechanik geht man, wie wir im Kapitel 4 sehen werden, vom Prinzip der virtuellen Verrückungen aus. Die Bereitstellung der Differentialgleichungsformulierungen für strukturmechanische Probleme ist trotzdem notwendig, da die Verfahrensentwicklung und die Beschäftigung mit den dabei auftretenden Schwierigkeiten immer wieder Rückgriffe auf die mechanischen Grundlagen erfordern. Mit Ausnahme von Kapitel 13 beschränken wir uns dabei durchweg auf Fragestellungen, die durch

- lineare geometrische Beziehungen (kleine Verschiebungen und Verschiebungsableitungen)

und durch ein

- lineares Werkstoffverhalten (lineare Elastizitätstheorie)

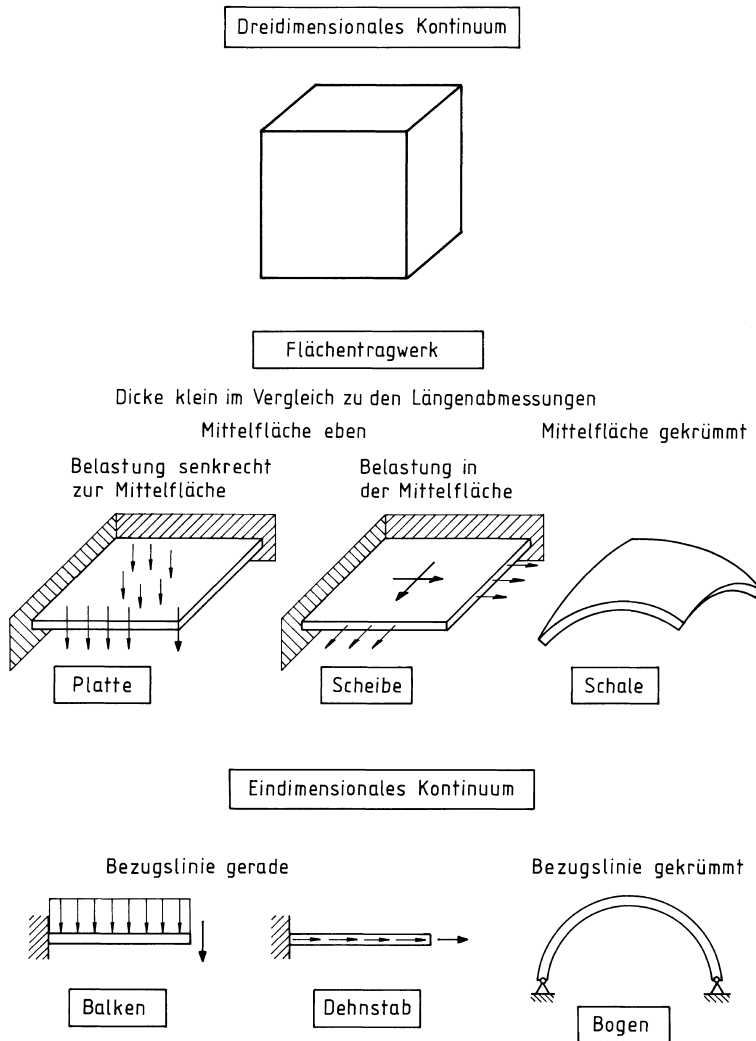
gekennzeichnet sind. Zu den linearen Problemen gehören auch Stabilitätsprobleme (Plattenbeulen) und Probleme der Theorie 2. Ordnung, bei denen das Gleichgewicht am verformten System gebildet wird. Derartige Probleme, bei denen eine konsequente Linearisierung bezüglich eines belasteten Ausgangszustandes erforderlich ist, stellen wir bis Kapitel 10 zurück.

In Abschnitt 2.1 werden die wesentlichen Tragwerkstypen der Kontinuumsmechanik erläutert. Anschließend werden in Abschnitt 2.2 die Grundgleichungen und Randbedingungen am Beispiel der Scheibe (ebener Spannungszustand) aufgestellt. In den beiden folgenden Abschnitten 2.3 und 2.4 werden für schubweiche und schubstarre Balken und Platten die Zustandsgrößen, die Grundgleichungen und die Randbedingungen in tabellarischer Form angegeben.

### 2.1 Tragwerkstypen

Jedes reale Kontinuum ist dreidimensional. Der numerische Aufwand verringert sich erheblich, wenn man sich auf ein- oder zweidimensionale Kontinua beschränken kann (Bild 2.1). Hierzu sind Annahmen erforderlich, die es gestatten, den Zustand des dreidimensionalen Kontinuums durch einen ein- oder zweidimensionalen Bezugszustand zu beschreiben.

Bei einem Flächentragwerk ist eine Dimension (die Dicke) sehr klein gegenüber den beiden anderen Dimensionen. Der Verschiebungszustand in Dickenrichtung wird durch den Verschiebungszustand der Mittelfläche (Bezugsfläche) ausgedrückt. Ist die Mittelfläche gekrümmt, so handelt es sich um eine Schale, bei einer

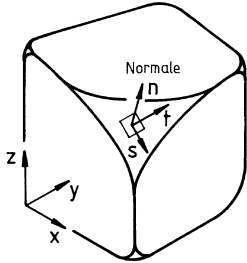
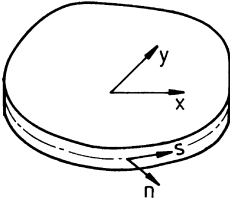
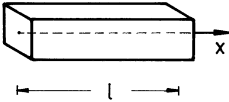


**Bild 2.1.** Dreidimensionale, zweidimensionale und eindimensionale Kontinua

ebenen Mittelfläche um eine Platte oder Scheibe, wobei Platten quer zur Mittelfläche belastet werden und nur Biegeverformungen erfahren, während Scheiben in der Mittelfläche belastet werden, wobei Dehnungen und Schubverzerrungen auftreten.

Werden bei einem Kontinuum zwei Dimensionen klein gegenüber einer dritten (der Länge), so gelangt man zu linienhaften Kontinua. Eine eben oder räumlich gekrümmte Bezugslinie liefert den Bogen, eine gerade Bezugslinie – je nach Art der Belastung – den Balken oder den Dehnstab.

Der Übergang vom dreidimensionalen zu einem zweidimensionalen Problem ist nicht nur beim Flächentragwerk möglich. Auch alle dreidimensionalen, rotations-symmetrischen Probleme lassen sich durch Fourier-Zerlegung auf zweidimensionale

Tragwerkstyp	dreidimensionales Kontinuum	Scheibe / Platte	Stab / Balken
			
Bereich B	Volumen V	Fläche F	Linie l
Rand R	Oberfläche F	Randlinie l	Endpunkte $x = 0, l$
Koordinaten- system	$(x, y, z)$	$(x, y)$	$x$
Rand- koordinaten- system	$(n, s, t)$	$(n, s)$	

**Bild 2.2.** Definitionsbereiche und Koordinatensysteme für drei-, zwei- und eindimensionale Kontinua

Probleme zurückführen. In entsprechender Weise werden in Kapitel 12 zweidimensionale, rotationssymmetrische Probleme auf eindimensionale reduziert.

### Bereich und Rand

Bei jedem Kontinuum wird zwischen einem *Bereich* und dem *Rand* des Kontinuums unterschieden. In Bild 2.2 ist dies für ein-, zwei- und dreidimensionale Kontinua erläutert.

## 2.2 Grundgleichungen und Randbedingungen für Scheibe und Stab

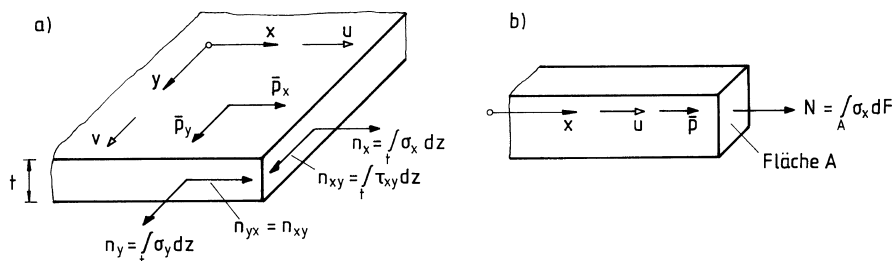
Die Vorgänge bei der Beanspruchung eines Kontinuums werden durch *Zustandsgrößen* (Feldgrößen) beschrieben. Es gibt

- Verschiebungsgrößen,
- Schnittkraftgrößen und
- Verzerrungsgrößen.

Als vierte Gruppe treten noch

- Belastungsgrößen

auf. Die Gleichungen, die die Zustands- und Belastungsgrößen miteinander verknüpfen, bezeichnen wir als *Grundgleichungen* (Feldgleichungen), wobei zwischen drei Typen unterschieden wird:



**Bild 2.3.** Verschiebungen und Schnittkräfte bei der Scheibe (a) und beim Stab (b)

- den Gleichgewichtsbedingungen,
- dem Materialgesetz (im einfachsten Fall ist das ein Elastizitätsgesetz) und
- den geometrischen (kinematischen) Aussagen.

Diese Aussagen gelten für jeden Punkt des Kontinuums. Zusätzlich ist noch die Angabe von *Randbedingungen* erforderlich, bei denen es sich (im einfachsten Fall) um Randbedingungen für die Verschiebungen oder Randbedingungen für die Schnittkräfte handeln kann.

Wir wollen alle Gleichungen – soweit möglich – parallel für die Scheibe und den Stab formulieren. Es wird weitgehend die Matrizenschreibweise verwendet [2.7, 2.8]. Eine Übersicht über die verwendeten Symbole und Bezeichnungen befindet sich auf Seite 599 ff.

### 2.2.1 Zustandsgrößen für Scheibe und Stab

Die Zustandsgrößen der Scheibe werden in einem kartesischen  $x,y$ -Koordinatensystem definiert (Bild 2.3). Sie werden in Vektoren zusammengefasst (Tabelle 2.1). Um zu verdeutlichen, dass es sich bei den Belastungen um vorgegebene Größen handelt, werden sie mit einem Querstrich gekennzeichnet.

### 2.2.2 Gleichgewichtsbedingungen

In Bild 2.4 ist ein infinitesimales, belastetes Scheiben- bzw. Stabelement mit den daran angreifenden Schnittkräften und deren Zuwächsen dargestellt.

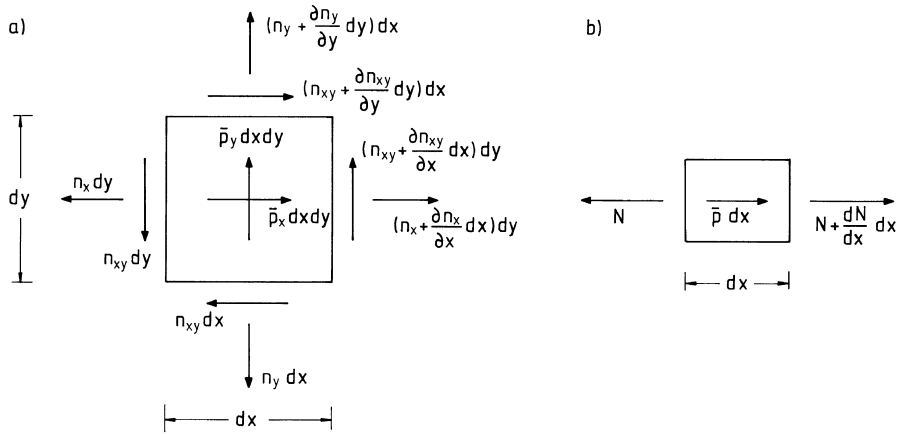
Für Scheibe und Stab gelten die folgenden *Gleichgewichtsbedingungen*:

SCHEIBE	STAB	
$\frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial y} + \bar{p}_x = 0$	$\frac{dN}{dx} + \bar{p} = 0$	(2.1)
$\frac{\partial n_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial n_y}{\partial y} + \bar{p}_y = 0$		

Mit den in Tabelle 2.1 definierten Vektoren  $\sigma$  und  $\bar{p}$  lassen sich die Gleichgewichtsbedingungen folgendermaßen formulieren:

**Tabelle 2.1.** Zustandsgrößen und Belastungen bei der Scheibe und beim Stab

	SCHEIBE	STAB
Verschiebungszustand	$\mathbf{u}^T(x, y) = \{u(x, y), v(x, y)\}$ Einheit: m	$\mathbf{u}^T(x) = \{u(x)\}$ Einheit: m
Schnittkraftzustand	$\boldsymbol{\sigma}^T(x, y) = \{n_x, n_y, n_{xy}\}$ Einheit: N/m  <i>Die Scheibenschnittkräfte sind über die Dicke aufintegrierte Spannungen</i>	$\boldsymbol{\sigma}^T(x) = \{N\}$ Einheit: N  <i>Die Stabschnittkraft ist das Integral über die im Querschnitt wirkenden Normalspannungen.</i>
Verzerrungszustand	$\boldsymbol{\varepsilon}^T(x, y) = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}$ Einheit: m/m	$\boldsymbol{\varepsilon}^T(x) = \{\varepsilon\}$ Einheit: m/m
Belastung	Flächenlasten $\bar{\mathbf{p}}^T(x, y) = \{\bar{p}_x, \bar{p}_y\}$ Einheit: N/m <sup>2</sup>	Linienlast $\bar{\mathbf{p}}^T(x) = \{\bar{p}\}$ Einheit: N/m

**Bild 2.4.** Gleichgewicht am Scheibenelement (a) und am Stabelement (b)

SCHEIBE	STAB
$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{p}_x \\ \bar{p}_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\left[ \frac{d}{dx} \right] \{N\} + \{\bar{p}\} = \{0\} \quad (2.2)$

Bei den ‚Matrizen‘, in denen die Differentiationsvorschriften zusammengefasst sind, handelt es sich um *Differentialoperatoren*, die stets auf den nachfolgenden Vektor angewandt werden. Im Interesse der Einheitlichkeit haben wir auch für die Stabgleichgewichtsbedingungen einen solchen Differentialoperator eingeführt. In kompakter, symbolischer Schreibweise lautet die Gleichgewichtsbedingung für Scheibe und Stab

$$\mathbf{D}_g \boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{p}} = \mathbf{0}. \quad (2.3)$$

### 2.2.3 Materialgesetz (Elastizitätsgesetz)

Bei einem linear-elastischen Werkstoff, auf den wir uns hier beschränken, besteht zwischen den Schnittkräften und den Verzerrungen ein linearer Zusammenhang. Dies ist für die isotrope Scheibe und den Stab das in Gl. (2.4) angegebene *Elastizitätsgesetz*. Zusätzlich werden auch noch Temperaturverzerrungen

$$\bar{\varepsilon}_T = \alpha_T (T - T_0)$$

berücksichtigt, die bei Erwärmung gegenüber einem als verzerrungs- und spannungsfrei angesehenen Zustand mit der Temperatur  $T_0$  entstehen.  $\alpha_T$  ist der Wärmeausdehnungskoeffizient.

SCHEIBE	STAB
$\varepsilon_x = \frac{1}{Et} (n_x - \nu n_y) + \bar{\varepsilon}_T$	
$\varepsilon_y = \frac{1}{Et} (n_y - \nu n_x) + \bar{\varepsilon}_T$	$\varepsilon = \frac{1}{EA} N + \bar{\varepsilon}_T$
$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{Et} n_{xy}$	

(2.4)

Für die Matrizenformulierung gehen wir zu dem inversen Zusammenhang zwischen Schnittkräften und Verzerrungen über. Die entsprechende Beziehung lautet:

SCHEIBE	STAB
$\left\{ \begin{matrix} n_x \\ n_y \\ n_{xy} \end{matrix} \right\} = \frac{Et}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \left\{ \left\{ \begin{matrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \bar{\varepsilon}_T \\ \bar{\varepsilon}_T \\ 0 \end{matrix} \right\} \right\}$	$\{N\} = [EA] \{\varepsilon - \bar{\varepsilon}_T\}$

(2.5)

oder in symbolischer Formulierung

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} (\boldsymbol{\varepsilon} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_T). \quad (2.6)$$

Die Matrix  $\mathbf{C}$  ist die elastische Stoffmatrix,  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_T$  der Temperaturverzerrungsvektor. Bei einer Scheibe mit orthotropen Materialverhalten nehmen die Matrix  $\mathbf{C}$  und der Vektor  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_T$  folgende Gestalten an:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} D_x & D_{xy} & 0 \\ D_{xy} & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_s \end{bmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_T = \begin{Bmatrix} \alpha_{xT} (T - T_0) \\ \alpha_{yT} (T - T_0) \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Bei anisotropem Materialverhalten sind Matrix und Vektor voll besetzt.

### 2.2.4 Kinematische Aussagen

Die Verzerrungen der Scheibe und des Stabes werden durch Ableitungen aus den Verschiebungen ermittelt. Die uns interessierenden linearen Beziehungen lauten:

SCHEIBE	STAB
$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$	
$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$	$\varepsilon = \frac{du}{dx}$
$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$	

(2.7)

Auch hier lässt sich wieder ein Differentialoperator einführen, der eine komprimierte Schreibweise ermöglicht:

SCHEIBE	STAB
$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$	$\{\varepsilon\} = \left[ \frac{d}{dx} \right] \{u\}$

(2.8)

In symbolischer Schreibweise erhält man mithin

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_{\varepsilon u} \mathbf{u}. \quad (2.9)$$

Die Gleichung (2.9) bezeichnen wir als *Verschiebungs-Verzerrungs-Relation*.

### 2.2.5 Verschiebungsdifferentialgleichungen

Bei Verwendung der symbolischen Schreibweise lässt sich die Elimination einzelner Zustandsgrößen sehr übersichtlich darstellen. Ersetzt man im Stoffgesetz (2.6) die Verzerrungen mit Hilfe von Gleichung (2.9) durch die Verschiebungsableitungen und führt die Schnittkräfte in die Gleichgewichtsbedingung (2.3) ein, so erhält man bei der Scheibe ein System von zwei partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung und beim Stab eine gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung. Bei Verwendung der symbolischen Formulierung ergibt sich in beiden Fällen

$$\mathbf{D}_g \{ \mathbf{C} (\mathbf{D}_{\varepsilon u} \mathbf{u} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_T) \} + \bar{\mathbf{p}} = \mathbf{0}. \quad (2.10)$$

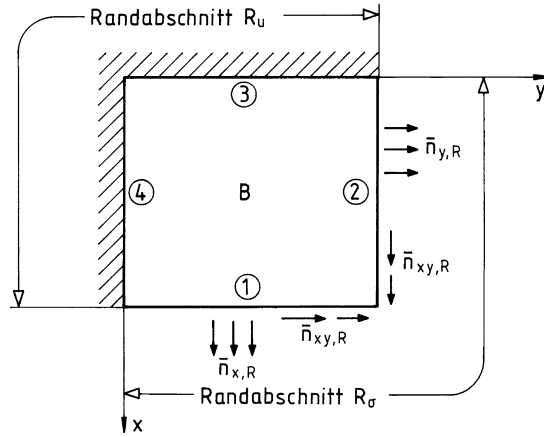


Bild 2.5. Randabschnitte und Randbelastungen

## 2.2.6 Randbedingungen

### Ein Beispiel für Scheibenrandbedingungen

Damit ein System von zwei Differentialgleichungen 2. Ordnung, wie es für die Scheibe vorliegt, gelöst werden kann, müssen in jedem Punkt des Randes zwei Bedingungen vorliegen. In Bild 2.5 werden nur Ränder betrachtet, die parallel zu den Koordinatenachsen  $x$  und  $y$  liegen.

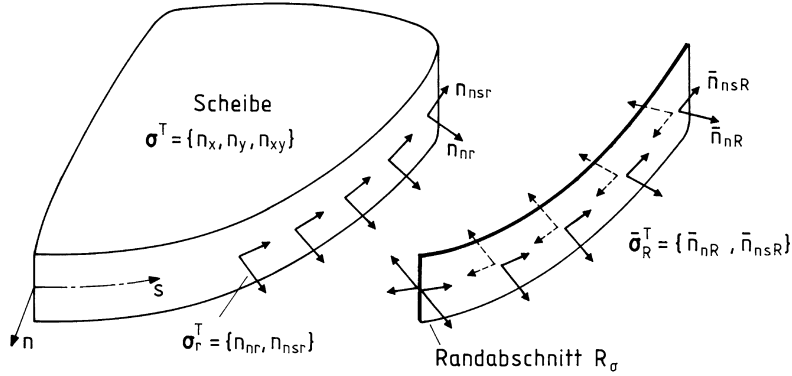
Der Rand  $R$  des Bereichs  $B$  wird unterteilt in einen Randabschnitt  $R_\sigma$  (*Kraft-rand*), auf dem Schnittkraftgrößen vorgegeben werden, und in einen Randabschnitt  $R_u$  (*Verschiebungsrand*), auf dem Verschiebungsgrößen festgelegt sind. Vorgegebene Größen werden wie die Belastung im Bereich durch Überstreichung gekennzeichnet. Der Index  $R$  gibt an, dass die jeweilige Größe nur auf dem Rand definiert ist. Randwerte von Zustandsgrößen im Bereich erhalten zur Unterscheidung den Index  $r$  (siehe auch Bild 2.6). Bei der Scheibe von Bild 2.5 gelten dann auf den vier Rändern die folgenden *Randbedingungen*:

$$\begin{aligned} \text{Rand ①} \equiv R_\sigma : \quad & n_{xr} = \bar{n}_{xR} , \\ & n_{xyr} = \bar{n}_{xyR} , \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \text{Rand ②} \equiv R_\sigma : \quad & n_{yr} = \bar{n}_{yR} , \\ & n_{xyr} = \bar{n}_{xyR} , \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \text{Rand ③ und ④} \equiv R_u : \quad & u_r = \bar{u}_R , \\ & v_r = \bar{v}_R . \end{aligned} \quad (2.13)$$

Inhomogene Verschiebungsrandbedingungen mit von Null verschiedenen Randverschiebungen  $\bar{u}_R$  und  $\bar{v}_R$  haben bei der Scheibe zwar meist nur theoretische Bedeutung, ihre Berücksichtigung ist aber aus systematischen Gründen zweckmäßig.



**Bild 2.6.** Randwerte von inneren Schnittkräften (Index r) und Schnittkräfte, die als Randbelastungen vorgegeben werden (Index R)

### Scheibenrandbedingungen bei schrägen Rändern

Im allgemeinen sind die Ränder der Scheibe nicht parallel zu den Koordinatenachsen. Dann werden Verschiebungen und Schnittkräfte in einem randparallelen Koordinatensystem definiert. In Bild 2.6 wurde an einem Rand  $R_\sigma$  der Randstreifen abgetrennt, um den Unterschied zwischen den am Rand vorgegebenen Randschnittkräften (*Randlasten*)  $\bar{\sigma}_R^T = \{\bar{n}_{nR}, \bar{n}_{nsR}\}$  und den Randwerten der inneren Schnittkräfte  $\sigma_r^T = \{n_{nr}, n_{nsr}\}$  deutlich zu machen.

Die *Verschiebungsrandbedingungen* oder geometrischen (kinematischen) Randbedingungen auf  $R_u$  lauten jetzt

$$\begin{Bmatrix} u_{nr} \\ u_{sr} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_{nR} \\ \bar{u}_{sR} \end{Bmatrix}, \quad (2.14)$$

$$\mathbf{u}_r = \bar{\mathbf{u}}_R. \quad (2.15)$$

Als *Schnittkrafttrandbedingungen* oder statische (kinetische) Randbedingungen auf  $R_\sigma$  erhält man

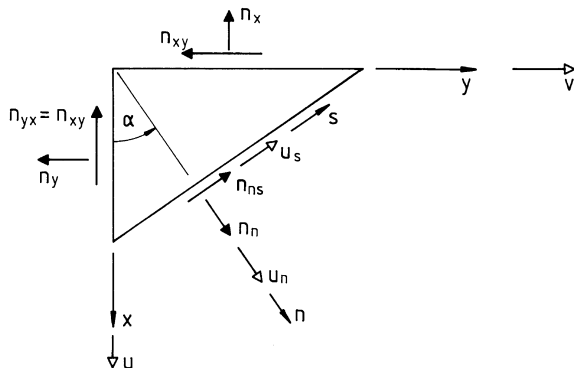
$$\begin{Bmatrix} n_{nr} \\ n_{nsr} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{n}_{nR} \\ \bar{n}_{nsR} \end{Bmatrix}, \quad (2.16)$$

$$\sigma_r = \bar{\sigma}_R. \quad (2.17)$$

Da die Zustandsgrößen im Bereich im  $x, y$ -Koordinatensystem definiert sind, müssen die Randwerte erst durch Transformation ermittelt werden (Bild 2.7). Für die Verschiebungen gilt

$$\begin{Bmatrix} u_{nr} \\ u_{sr} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}, \quad (2.18)$$

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{T}_u \mathbf{u} \quad (2.19)$$



**Bild 2.7.** Schräger Rand bei der Scheibe

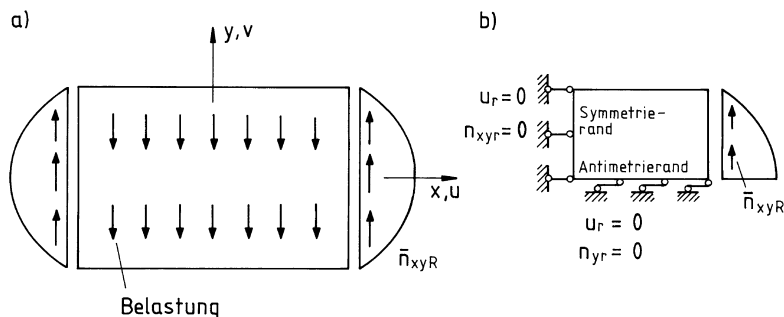
und für die Schnittkräfte

$$\begin{Bmatrix} n_{nr} \\ n_{nsr} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (2.20)$$

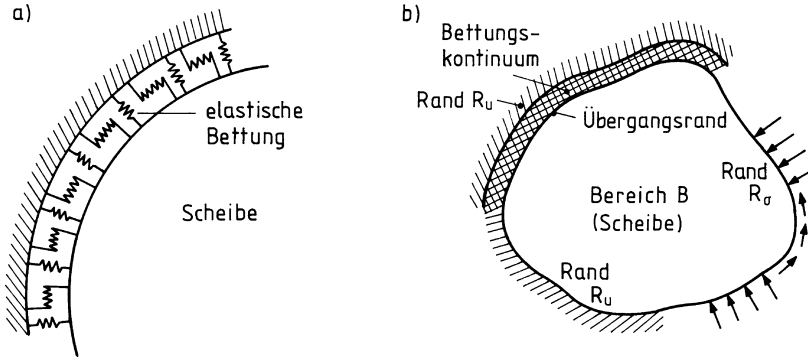
$$\sigma_r = T_\sigma \sigma. \quad (2.21)$$

### Überlappung von Verschiebungs- und Schnittkraftändern

Wenn – wie bei Scheibentragwerken – in jedem Punkt des Randes zwei Randbedingungen erforderlich sind, dann ist die Aufteilung in einen einheitlichen Randabschnitt  $R_u$  und in einen Randabschnitt  $R_\sigma$  nicht immer möglich. Es kann vorkommen, dass ein Randabschnitt bezüglich der Normalverschiebung  $u_n$  zu  $R_u$  und bezüglich der Schnittkraft  $n_{ns}$  zu  $R_s$  gehört. Dieser Fall tritt immer dann auf, wenn bei einer Scheibe Symmetrie- bzw. Antimetriebedingungen ausgenutzt werden sollen (siehe Abschnitt 14.3). Bei der Scheibe von Bild 2.8a sind beide Achsen Struktursymmetrieachsen; die Belastung ist symmetrisch zur  $y$ -Achse und antimetrisch



**Bild 2.8.** Scheibe unter Eigengewicht  $\bar{p}_y = -t \rho g$  (a) und Viertelausschnitt mit Symmetrie- und Antimetrierandbedingungen (b)



**Bild 2.9.** Elastische Bettung als Modell für eine Klebeschicht (a) und Interpretation als eigenes (eindimensionales) Kontinuum (b)

zur  $x$ -Achse. Betrachtet man anstelle der gesamten Scheibe nur einen Viertelausschnitt (Bild 2.8b), so müssen an den Rändern  $x = 0$  und  $y = 0$  die entsprechenden Antimetrie- bzw. Symmetrierandbedingungen eingeführt werden. Es kommt zu einer ‚Überlappung‘ der Verschiebungs- und der Schnittkraftänderungen in Normal- und Tangentialrichtung. Der Rand  $x = 0$  gehört bezüglich der Normalverschiebung ( $u_r = 0$ ) zu  $R_u$ , bezüglich der Tangentialkraft ( $n_{xyr} = 0$ ) zu  $R_\sigma$ . Grundsätzlich ändert sich dadurch nichts. Für ein und denselben Punkt eines Randabschnittes kann aber nie gleichzeitig eine Verschiebungsgröße ( $u_n$  bzw.  $u_s$ ) und die in die gleiche Richtung wirkende Schnittkraftgröße ( $n_n$  bzw.  $n_{ns}$ ) vorgegeben werden!

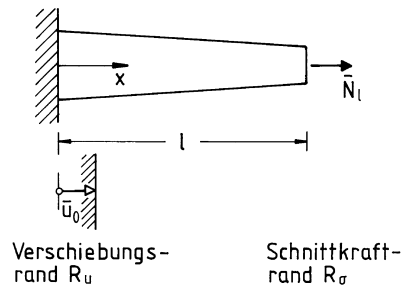
### Gemischte Randbedingungen

Neben Verschiebungsrandbedingungen und Krafterandbedingungen lassen sich auch noch ‚gemischte‘ Randbedingungen formulieren, bei denen die auf den Tragwerksrand einwirkende Schnittkraft proportional zur zugeordneten Randverschiebung ist. Derartige Randbedingungen ergeben sich bei einer Klebung (elastische oder Winklersche Bettung), bei der gedanklich Normal- und Tangentialfedern infinitesimal dicht angeordnet werden (Bild 2.9a), vergleiche Aufgabe 2.3. Man kann die elastische Bettung als ein eigenes eindimensionales Kontinuum auffassen (Bild 2.9b), das selber wieder gelagert ist.

### Stabrandbedingungen

Bei der Angabe der Randbedingungen für einen Stab ist die Einführung von Vektoren  $\bar{\sigma}_R$  und  $\bar{u}_R$  wenig hilfreich. In skalarer Formulierung gilt bei dem Beispiel von Bild 2.10

$$N(x = l) = \bar{N}_I, \quad u(x = 0) = \bar{u}_0.$$



**Bild 2.10.** Randbedingungen beim Stab

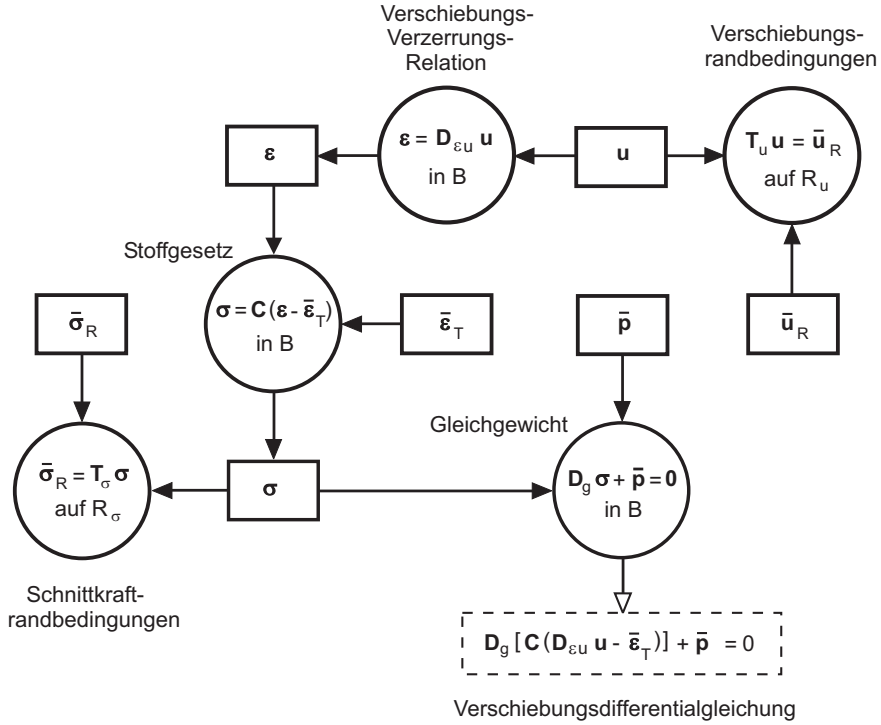


Bild 2.11. Grundgleichungen und Randbedingungen

### 2.2.7 Zusammenfassung und Erweiterung auf dreidimensionale Kontinua

Der Zusammenhang zwischen den Zustandsgrößen ist in Bild 2.11 übersichtlich dargestellt. Für jeden anderen Tragwerkstyp gilt das gleiche Schema. Man benötigt also zur Angabe der Grundgleichungen

- die Vektoren der Zustandsgrößen  $\mathbf{u}, \sigma, \varepsilon$  und den Belastungsvektor  $\bar{\mathbf{p}}$ ,
- die Stoffmatrix  $\mathbf{C}$  sowie die beiden Differentialoperatoren  $\mathbf{D}_g$  (Gleichgewichtsoperator) und  $\mathbf{D}_{\varepsilon u}$  (Verschiebungs-Verzerrungs-Operator) und
- die Transformationsvorschriften  $\mathbf{T}_u$  und  $\mathbf{T}_\sigma$  zur Ermittlung der Randwerte  $\mathbf{u}_r$  und  $\sigma_r$ .

Dies soll für ein weiteres Beispiel, und zwar für das dreidimensionale, isotrope Kontinuum, ohne Ableitung verdeutlicht werden.

Die Vektoren der Zustandsgrößen lauten:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^T &= \{u, v, w\}, \\ \sigma^T &= \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}, \\ \varepsilon^T &= \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}. \end{aligned}$$

Als Belastungsvektor führt man ein:

$$\bar{\mathbf{p}}^T = \{\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}\}.$$

Die Vektoren der Randwerte für Verschiebungen und Schnittkräfte werden in einem  $n, s, t$ -Koordinatensystem (Bild 2.2) formuliert:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_r^T &= \{u_{nr}, u_{sr}, u_{tr}\}, \\ \boldsymbol{\sigma}_r^T &= \{\sigma_{nr}, \tau_{nsr}, \tau_{ntr}\}.\end{aligned}$$

Für die Stoffmatrix (Elastizitätsmatrix) greift man auf eines der Lehrbücher der Elastizitätstheorie zurück [2.1, 2.3]:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2G + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2G + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2G + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix}$$

mit der Laméschen Konstanten

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

und dem Gleitmodul

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

wobei  $E$  der Elastizitätsmodul und  $\nu$  die Querkontraktionszahl ist.

Für die beiden Differentialoperatoren gilt

$$\mathbf{D}_g = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} = \mathbf{D}_{\varepsilon_u}^T.$$

Es fehlen noch die Transformationsmatrizen für die Randwerte der Zustandsgrößen. In skalarer Form findet man sie in [2.1], einfacher ist ihre Angabe in Tensorindex-schreibweise [2.3]:

$$\mathbf{T}_u = \begin{bmatrix} \text{cnx} & \text{cny} & \text{cnz} \\ \text{csx} & \text{csy} & \text{csz} \\ \text{ctx} & \text{cty} & \text{ctz} \end{bmatrix}$$

mit  $\text{cnx} = \cos(n, x)$ ,  $\text{csx} = \cos(s, x)$ ,  $\text{ctx} = \cos(t, x)$ , etc.,

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} \text{cnx}^2 & \text{cny}^2 & \text{cnz}^2 & 2 \text{cnx cny} & 2 \text{cny cnz} & 2 \text{cnz cnx} \\ \text{cnx csx} & \text{cny csy} & \text{cnz csz} & \text{cnx csy} + \text{cny csx} & \text{cny csz} + \text{cnz csy} & \text{cnz csx} + \text{cnx csz} \\ \text{cnx ctx} & \text{cny cty} & \text{cnz ctz} & \text{cnx cty} + \text{cny ctx} & \text{cny ctz} + \text{cnz cty} & \text{cnz ctx} + \text{cnx ctz} \end{bmatrix}.$$

Damit stehen alle Matrizen, Vektoren und Operatoren des dreidimensionalen isotropen Kontinuums für Bild 2.11 zur Verfügung.

## 2.3 Zustandsgrößen von Balken und Platten

In Tabelle 2.2 sind für die bisher behandelten Tragwerkstypen (dreidimensionales Kontinuum, Scheibe, Stab) sowie für Balken und Platte alle Zustandsgrößen und Belastungsgrößen in Form von Vektoren zusammengestellt. Die Anordnung der Komponenten in einem Vektor und die Vorzeichen sind hierbei nicht willkürlich. Die Komponenten des Verschiebungsvektors  $\mathbf{u}$  und des Belastungsvektors  $\bar{\mathbf{p}}$  sowie die Komponenten des Schnittkraftvektors  $\boldsymbol{\sigma}$  und des Verzerrungsvektors  $\boldsymbol{\varepsilon}$  sind jeweils so einander zugeordnet, dass bei der Bildung des Skalarproduktes ein Energie- oder Arbeitsausdruck entsteht! Das Skalarprodukt aus  $\boldsymbol{\sigma}$  und  $\boldsymbol{\varepsilon}$  ergibt unter der Voraussetzung, dass der Ausgangszustand spannungsfrei ist und keine Temperaturbelastung auftritt, die doppelte Formänderungsenergie. Es gilt also

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_B \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \, dB.$$

Vor der Plattenverwindung  $\kappa_{xy}$  muss der Faktor 2 eingeführt werden, da sich nur dann ein physikalisch sinnvoller Energieausdruck ergibt (siehe Abschnitt 3.2). Das Skalarprodukt aus Verschiebungs- und Belastungsvektor liefert einen Beitrag zur äußeren Arbeit oder (mit negativem Vorzeichen) zum Potential der äußeren Kräfte:

$$\Pi_{a,B} = - \int_B \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}} \, dB.$$

In Tabelle 2.3 sind für die verschiedenen Tragwerkstypen die Randlastvektoren  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_R$  und die Randverschiebungsvektoren  $\bar{\mathbf{u}}_R$  angegeben. Auch hier erfolgt die Anordnung der Komponenten und die Vorzeichenfestlegung wieder so, dass das Skalarprodukt einen Beitrag zum Potential der äußeren Kräfte leistet:

$$\Pi_{a,R} = - \int_{R_\sigma} \mathbf{u}_r^T \bar{\boldsymbol{\sigma}}_R \, dR.$$

Die Größen  $\Pi_i$  und  $\Pi_a$  werden uns in Abschnitt 3.3 wieder begegnen.

## 2.4 Grundgleichungen für Balken und Platten

Die Grundgleichungen für Balken und Platten werden ohne Ableitung in tabellarischer Form zusammengestellt, getrennt für den schubweichen Fall (Tabelle 2.4) und den schubstarken Fall (Tabelle 2.5).

**Tabelle 2.2.** Zustands- und Belastungsgrößen für unterschiedliche Tragwerkstypen

Tragwerkstyp	Verschiebungs- vektor $\mathbf{u}^T$	Belastungs- vektor $\bar{\mathbf{p}}^T$	Schnittkraft- vektor $\boldsymbol{\sigma}^T$	Verzerrungs- vektor $\boldsymbol{\varepsilon}^T$
Integrations- bereich	Bezeichnung(en)	Bezeichnung(en)	Bezeichnung(en)	Bezeichnung(en)
Einheit	Einheit(en)	Einheit(en)	Einheit(en)	Einheit(en)
Dreidimen- sionales Kontinuum	$\{u, v, w\}$	$\{\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}\}$	$\{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z;$ $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}$	$\{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z;$ $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}$
Volumen $\text{m}^3$	Verschiebungen m	Volumenlasten $\text{N}/\text{m}^3$	Normal-; Schub- spannungen $\text{N}/\text{m}^2$	Dehnungen; Schub- verzerrungen 1
Scheibe	$\{u, v\}$	$\{\bar{p}_x, \bar{p}_y\}$	$\{n_x, n_y; n_{xy}\}$	$\{\varepsilon_x, \varepsilon_y; \gamma_{xy}\}$
Fläche $\text{m}^2$	Verschiebungen in der Bezugsfläche m	Flächenlasten in der Bezugsfläche $\text{N}/\text{m}^2$	Normal- Schub- kräfte $\text{N}/\text{m}$	Dehnungen und Schubverzerrung in der Bezugsfläche 1
Dehnstab	$\{u\}$	$\{\bar{p}\}$	$\{N\}$	$\{\varepsilon\}$
Länge m	Längsverschiebung m	Längsbelastung $\text{N}/\text{m}$	Normalkraft N	Dehnung 1
Schubweiche Platte	$\{w; \beta_x, \beta_y\}$	$\{\bar{p}_z; \bar{p}_{mx}, \bar{p}_{my}\}$	$\{q_x, q_y;$ $m_x, m_y; m_{xy}\}$	$\{\gamma_{xz}, \gamma_{yz};$ $\kappa_x, \kappa_y; 2 \kappa_{xy}\}$
Fläche $\text{m}^2$	Querverschiebung; Querschnitts- neigungen m 1	Querbelastung; Momenten- belastungen $\text{N}/\text{m}^2 \text{ Nm}/\text{m}^2$	Querkräfte; Biegemomente; Drillmoment $\text{N}/\text{m}$ $\text{Nm}/\text{m} \text{ Nm}/\text{m}$	Schubverzerrungen; Krümmungen; Verwindung 1 1/m 1/m
Schubstarre Platte	$\{w\}$	$\{\bar{p}_z\}$	$\{m_x, m_y; m_{xy}\}$	$\{\kappa_x, \kappa_y; 2 \kappa_{xy}\}$
Fläche $\text{m}^2$	Querverschiebung m	Querbelastung $\text{N}/\text{m}^2$	Biegemomente; Drillmoment $\text{Nm}/\text{m} \text{ Nm}/\text{m}$	Krümmungen; Verwindung 1/m 1/m
Schubweicher Balken	$\{w, \beta\}$	$\{\bar{p}_z, \bar{p}_m\}$	$\{Q, M\}$	$\{\gamma, \kappa\}$
Länge m	Querverschiebung, Querschnitts- neigung m, 1	Querbelastung, Momenten- belastung $\text{N}/\text{m}, \text{Nm}/\text{m}$	Querkraft, Biegemoment N, Nm	Schubverzerrung, Krümmung 1, 1/m
Schubstarrer Balken	$\{w\}$	$\{\bar{p}_z\}$	$\{M\}$	$\{\kappa\}$
Länge m	Querverschiebung m	Querbelastung $\text{N}/\text{m}$	Biegemoment Nm	Krümmung 1/m

**Tabelle 2.3.** Zustandsgrößen am Rand für unterschiedliche Tragwerkstypen

Tragwerkstyp	Randbereich  Einheit	Randwert der Verschiebungen $\mathbf{u}_r^T$  Einheit(en)	Randwert der Schnittkräfte $\boldsymbol{\sigma}_r^T$  Einheit(en)
Dreidimensionales Kontinuum	Oberfläche  $\text{m}^2$	$\{u_n, u_s, u_t\}_r$  m	$\{\sigma_n, \tau_{ns}, \tau_{nt}\}_r$  $\text{N}/\text{m}^2$
Scheibe	Rand  m	$\{u_n, u_s\}_r$  m	$\{n_n, n_{ns}\}_r$  $\text{N}/\text{m}$
Dehnstab	Anfang/Ende  1	$\{u_0, u_1\}_r$  m	$\{-N_0, N_1\}$  N
Schubweiche Platte	Rand  m	$\{w, \beta_n, \beta_s\}_r$  m 1	$\{q_n, m_n, m_{ns}\}_r$  $\text{N}/\text{m}$ $\text{Nm}/\text{m}$
Schubstarre Platte	Rand  m	$\{w, \beta_n\}_r$ $\beta_n = -w_{,n}$  m, 1	$\{q_n^*, m_n\}_r$  $\text{N}/\text{m}$ , $\text{Nm}/\text{m}$
Schubweicher Balken	Anfang/Ende  1	$\{w(0), \beta(0), w(l), b(l)\}$  m, 1, m, 1	$\{-Q(0), -M(0), Q(l), M(l)\}$  N, Nm, N, Nm
Schubstarrer Balken	Anfang/Ende  1	$\{w(0), \beta(0), w(l), b(l)\}$ $\beta = -w_{,x}$  m, 1, m, 1	$\{-Q(0), -M(0), Q(l), M(l)\}$  N, Nm, N, Nm

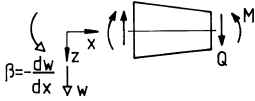
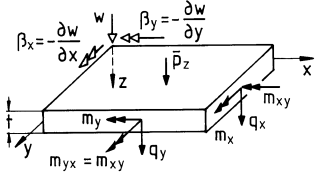
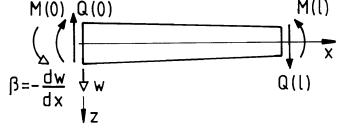
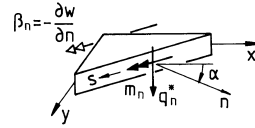
Die Vorzeichendefinition für die Verschiebungen und die Schnittkräfte bei Balken und Platte kann aus Tabelle 2.4 entnommen werden. Die gewählte Vorzeichendefinition für Plattenschnittkräfte orientiert sich an den Richtungen der zugehörigen Spannungen:

- Biegemomente ( $m_x$  und  $m_y$ ) sind dann positiv, wenn die zugehörigen Spannungen ( $\sigma_x$  und  $\sigma_y$ ) an einem positiven Schnittufer (mit der positiven  $x$ -Achse bzw. positiven  $y$ -Achse als äußere Normale) auf der positiven  $z$ -Seite positiv sind.
- Die Doppelindizes der Drillmomente entsprechen denen der zugehörigen Schubspannungen. Ein Drillmoment ( $m_{xy}$  bzw.  $m_{yx}$ ) ist dann positiv, wenn die zugehörigen Spannungen ( $\tau_{xy}$  bzw.  $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ ) an einem positiven Schnittufer (1. Index: positive  $x$ -Achse bzw. positive  $y$ -Achse als Normale) auf der positiven  $z$ -Seite in positive Koordinatenrichtung (2. Index: positive  $y$ -Achse bzw. positive  $x$ -Achse) zeigen.
- Querkkräfte ( $q_x$  bzw.  $q_y$ ) sind dann positiv, wenn die zugehörigen Spannungen ( $\tau_{xz}$  bzw.  $\tau_{yz}$ ) am positiven Schnittufer (positive  $x$ -Achse bzw. positive  $y$ -Achse) in positive  $z$ -Richtung zeigen.

**Tabelle 2.4.** Zustandsgrößen, Operatoren, (isotrope) Stoffmatrix und Transformationsmatrizen bei schubweichen Balken und Platten

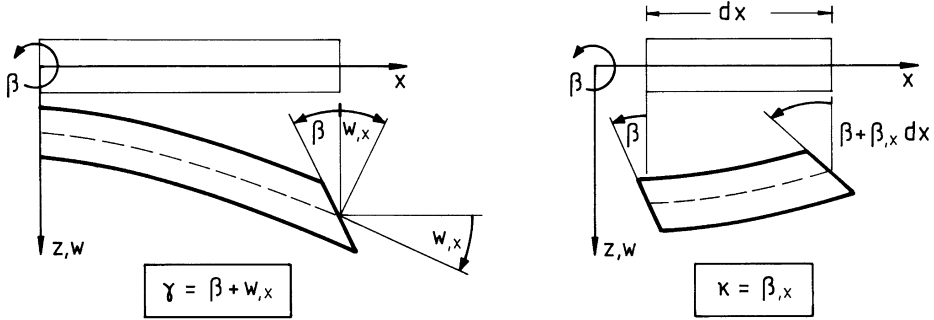
	<i>Schubweicher Balken</i>	<i>Schubweiche, isotrope Platte</i>
System Verschiebungen Schnittkräfte		
Zustandsgrößen	$\mathbf{u}^T = \{w, \beta\}$ $\bar{\mathbf{p}}^T = \{\bar{p}_z, \bar{p}_m\}$ $\boldsymbol{\sigma}^T = \{Q, M\}$ $\boldsymbol{\varepsilon}^T = \{\gamma, \kappa\}$	$\mathbf{u}^T = \{w, \beta_x, \beta_y\}$ $\bar{\mathbf{p}}^T = \{\bar{p}_z, \bar{p}_{mx}, \bar{p}_{my}\}$ $\boldsymbol{\sigma}^T = \{q_x, q_y, m_x, m_y, m_{xy}\}$ $\boldsymbol{\varepsilon}^T = \{\gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \kappa_x, \kappa_y, 2\kappa_{xy}\}$
Gleichgewichtsoperator	$\mathbf{D}_g = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 \\ -1 & \frac{d}{dx} \end{bmatrix}$	$\mathbf{D}_g = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & -1 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$
Verschiebungs- Verzerrungs- Operator	$\mathbf{D}_{\varepsilon u}^T = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 \\ 1 & \frac{d}{dx} \end{bmatrix}$	$\mathbf{D}_{\varepsilon u}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$
Elastizitätsmatrix	$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} G A_S & 0 \\ 0 & E I \end{bmatrix}$ <p><math>A_S</math>: Schubfläche (Rechteckquerschnitt: <math>A_S = \frac{5}{6} A</math>)</p>	$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} G t_S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G t_S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & \nu B & 0 \\ 0 & 0 & \nu B & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_S \end{bmatrix}$ <p><math>t_S = \frac{5}{6} t</math>, <math>B = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)}</math>, <math>B_S = \frac{1-\nu}{2} B</math></p>
Randwerte der Verschiebungen und Schnittkräfte		
	$\mathbf{u}_r^T = \{w(0), \beta(0), w(l), \beta(l)\}$ $\boldsymbol{\sigma}_r^T = \{-Q(0), -M(0), Q(l), M(l)\}$	$\mathbf{u}_r^T = \{w, \beta_n, \beta_s\}_r$ $\boldsymbol{\sigma}_r^T = \{q_n, m_n, m_{ns}\}_r$
Transformationsmatrizen		$\mathbf{T}_u = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} c = \cos \alpha \\ s = \sin \alpha \end{matrix}$ $\mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 & s^2 & 2cs \\ 0 & 0 & -sc & sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix}$

**Tabelle 2.5.** Zustandsgrößen, Operatoren, (isotrope) Stoffmatrix und Transformationsmatrizen bei schubstarrten Balken und Platten

	<i>Schubstarrer Balken</i>	<i>Schubstarre, isotrope Platte</i>
System Verschiebungen Schnittkräfte		
Zustandsgrößen	$\mathbf{u}^T = \{w\}$ $\bar{\mathbf{p}}^T = \{\bar{p}_z\}$ $\boldsymbol{\sigma}^T = \{M\}$ $\boldsymbol{\varepsilon}^T = \{\kappa\}$	$\mathbf{u}^T = \{w\}$ $\bar{\mathbf{p}}^T = \{\bar{p}_z\}$ $\boldsymbol{\sigma}^T = \{m_x, m_y, m_{xy}\}$ $\boldsymbol{\varepsilon}^T = \{\kappa_x, \kappa_y, 2 \kappa_{xy}\}$
Gleichgewichtsoperator  Verschiebungs- Verzerrungs- Operator	$\mathbf{D}_g = \left[ \frac{d^2}{dx^2} \right]$ $\mathbf{D}_{\varepsilon u}^T = \left[ -\frac{d^2}{dx^2} \right]$	$\mathbf{D}_g = \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right]$ $\mathbf{D}_{\varepsilon u}^T = \left[ -\frac{\partial^2}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2}{\partial y^2}, -2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right]$
Elastizitätsmatrix	$\mathbf{C} = [EI]$	$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} B & \nu B & 0 & 0 \\ \nu B & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_S & 0 \end{bmatrix}$ $B = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)}, B_S = \frac{1-\nu}{2} B$
Randwerte der Verschiebungen und Schnittkräfte	 $\mathbf{u}_r^T = \{w(0), -\frac{dw(0)}{dx}, w(l), -\frac{dw(l)}{dx}\}$ $\boldsymbol{\sigma}_r^T = \{-Q(0), -M(0), Q(l), M(l)\}$	 $\mathbf{u}_r^T = \{w, \beta_n\}_r$ $\boldsymbol{\sigma}_r^T = \{q_n^*, m_n\}_r$
Transformationsmatrizen		$\mathbf{T}_u = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -c & \frac{\partial}{\partial x} & -s & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} c = \cos \alpha \\ s = \sin \alpha \end{matrix}$ $\mathbf{T}_\sigma$ wegen komplizierten Aufbaus nicht angegeben

Die Richtungen der Winkelpfeile ( $\beta_x$  und  $\beta_y$ ) sind positiv, wenn sie mit den gleich indizierten Biegemomenten an einem positiven Schnittufer einen positiven äußeren Arbeitsausdruck bilden. Deshalb zeigt der  $\beta_x$ -Doppelpfeil in positive  $y$ -Richtung und der  $\beta_y$ -Doppelpfeil in negative  $x$ -Richtung.

In Bild 2.12 ist illustriert, wie die Schubverzerrung und die Krümmung beim schubweichen Balken definiert sind. Bei der schubweichen Platte gilt entsprechend



**Bild 2.12.** Definition der Schubverzerrung (links) und der Krümmung (rechts) beim Balken

$$\gamma_{xz} = \beta_x + \partial w / \partial x \quad \text{und} \quad \gamma_{yz} = \beta_y + \partial w / \partial y \quad \text{sowie}$$

$$\kappa_x = \partial \beta_x / \partial x, \quad \kappa_y = \partial \beta_y / \partial y \quad \text{und} \quad 2 \kappa_{xy} = \partial \beta_x / \partial y + \partial \beta_y / \partial x.$$

Im Schubstarren Fall sind wegen  $\gamma = 0$  bzw.  $\gamma_{xz} = 0$  und  $\gamma_{yz} = 0$  die Querschnittsneigungen keine unabhängigen Zustandsgrößen mehr. Das hat bei der Platte eine Reihe von Konsequenzen zur Folge:

- Einzige Verzerrungsgrößen einer Schubstarren Platte sind die Krümmungen  $\kappa_x$  und  $\kappa_y$  sowie die Verwindung  $\kappa_{xy}$ . Sie ergeben sich als zweite Verschiebungsableitungen.
- Die Querkräfte lassen sich nicht mehr aus dem Stoffgesetz ableiten, da die Schubsteifigkeit unendlich groß wird.
- Für jeden Punkt eines Kraftrandes können nur noch zwei Schnittkrafttrandbedingungen befriedigt werden. Die Randdrillmomente  $m_{ns}$  müssen daher in Ersatzquerkräfte umgerechnet und mit den Querkraften  $q_n$  zu Randkräften

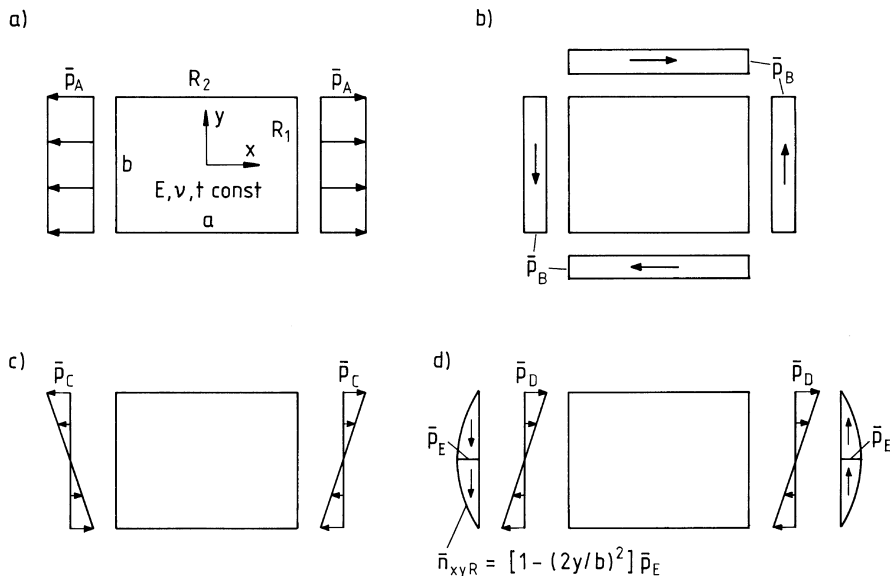
$$q_n^* = q_n + \partial m_{ns} / \partial s$$

zusammengefasst werden, siehe [2.2, 2.3, 2.6]. Auf die Angabe der Transformationsmatrix  $\mathbf{T}_\sigma$ , die recht kompliziert aufgebaut ist, wird in Tabelle 2.5 verzichtet.

- Zusätzlich können an 90°-Ecken Einzelkräfte (Eckkräfte) auftreten. Einzelheiten müssen auch hier der angegebenen Literatur entnommen werden.

Bei der Schubweichen Platte ergeben sich nach Elimination der Verzerrungen und der Schnittkräfte drei partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung. Als Verschiebungsdifferentialgleichung der Schubstarren Platte erhält man eine Differentialgleichung 4. Ordnung für die Querverschiebung  $w$ , bei der homogenen, isotropen Platte ist das eine Bipotentialgleichung.

Weitere Einzelheiten entnehme man der Literatur, z. B. [2.4, 2.5].



**Bild 2.13.** Randbelastungen einer ungelagerten Rechteckscheibe. **a** einseitiger Zug, **b** allseitiger Schub, **c** Biegung, **d** Schubbiegung

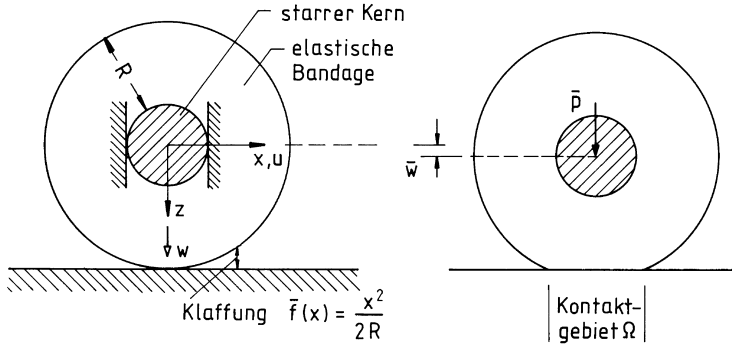
## 2.5 Übungsaufgaben

### Aufgabe 2.1. Analytische Vergleichslösungen bei Rechteckscheiben

Um die Güte der mit einem Finite-Elemente-Verfahren ermittelten Lösungen beurteilen zu können, benötigt man Vergleichslösungen für einfache Fälle. Bei den vier Beispielen aus Bild 2.13 lassen sich analytische Lösungen angeben, die dann als Vergleichslösungen verwendet werden können. Es handelt sich jeweils um Scheiben konstanter Dicke aus homogenem, isotropem Material.

- Wie lauten die Randbedingungen an den vier Rändern? (Im Fall d muss die Amplitude  $\bar{p}_E$  der parabolischen Schubspannungsverteilung durch  $\bar{p}_D$  ausgedrückt werden, so dass die globale Momentengleichgewichtsbedingung erfüllt ist.)

Um zur Lösung zu gelangen, wird folgender Weg empfohlen: Zunächst wird ein Spannungszustand ermittelt, der die Schnittkrafttrandbedingungen und die Gleichgewichtsbedingungen im Inneren erfüllt. Über das Stoffgesetz werden hierzu die Verzerrungsverläufe bestimmt. Anschließend versucht man, aus den drei Verzerrungsverläufen durch Integration die beiden Verschiebungsverläufe zu ermitteln. Beispielsweise erhält man durch Integration aus  $\varepsilon_x$  bis auf eine zunächst unbekannte Funktion  $f(y)$  die Verschiebung  $u(x, y)$  und aus  $\varepsilon_y$  bis auf eine zweite unbekannte Funktion  $g(x)$  die Verschiebung  $v(x, y)$ . Die Lösung ist nur dann gültig, wenn sich  $f(y)$  und  $g(x)$  so festlegen lassen, dass auch noch die dritte kinematische Beziehung  $\gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x}$  erfüllt wird. Ob dies gelingt, lässt sich bereits anhand des Verzerrungszustandes mit Hilfe der Verträglichkeitsbedingung [2.1]



**Bild 2.14.** Pressung einer Walze. Ausgangslage (links) und verschobene Lage (rechts)

$$\varepsilon_{x,yy} + \varepsilon_{y,xx} - \gamma_{xy,xy} = 0$$

kontrollieren.

- Wie lauten die Spannungs- und Verzerrungsverläufe?
- Welche Verschiebungszustände erhält man in den vier Fällen?
- Welche Bedeutung haben die in allen vier Fällen auftretenden drei freien Konstanten? Wie erreicht man mechanisch, dass die Konstanten zu Null werden?
- Wie lauten bei Ausnutzung der Symmetriebedingungen die Randbedingungen auf den Symmetrie- bzw. Antimetrierändern (siehe Abschnitt 14.3)? Treten bei Ausnutzung der Symmetrie- bzw. Antimetriebedingungen weiterhin drei freie Konstanten in den Lösungen für den Verschiebungszustand auf?
- Existiert eine aus Polynomansätzen aufgebaute Lösung auch dann noch, wenn es sich um orthotropes oder allgemein anisotropes Material handelt?

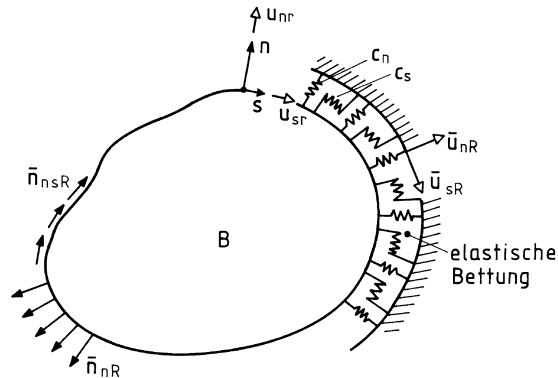
### Aufgabe 2.2. Randbedingungen bei einem Kontaktproblem

Eine elastische Walze mit starrem Kern (Bild 2.14) wird gegen eine starre Ebene gepresst. Der Kern ist in  $x$ -Richtung unverschieblich gelagert. Die Auflage zwischen Walze und Ebene ist reibungsfrei.

- Wie lauten die geometrischen Randbedingungen am Übergang von der elastischen Bandage zum starren Kern?

Bei der Behandlung des Kontaktproblems ist das Kontaktgebiet  $\Omega$  zunächst unbekannt.

- Welche Randbedingungen gelten im Kontaktgebiet, welche außerhalb des Kontaktgebietes? (Hinweis zur Bearbeitung: Die Annäherung  $w$  sei so klein, dass für die elastische Bandage weiterhin die lineare Theorie gilt. Im Kontaktgebiet und in der unmittelbaren Nähe können die Kontaktbedingungen im  $x, y$ -Koordinatensystem beschrieben werden.)
- Welche Beziehungen (Ungleichungen) können für die iterative Verbesserung des zunächst unbekannten Kontaktgebietes verwendet werden?



**Bild 2.15.** Bezeichnungen bei einem elastisch gebetteten Scheibenrand

### Aufgabe 2.3. Gemischte Randbedingungen

- Wie lauten bei einem elastisch gebetteten Scheibenrand unter Verwendung der Bezeichnungen aus Bild 2.15 die ‚gemischten Randbedingungen‘, d. h. welcher Zusammenhang besteht zwischen  $u_r$  und  $\sigma_r$ ?

### Aufgabe 2.4. Platte unter Temperaturbelastung

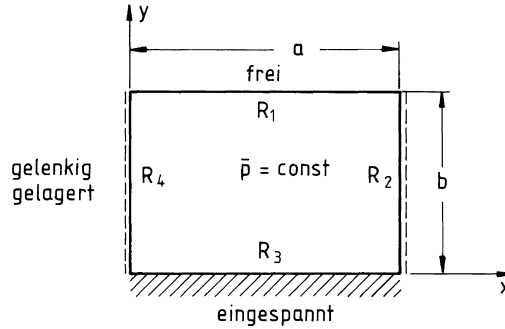
Bei den Grundgleichungen der Scheibe wurde der Lastfall ‚Temperaturverzerrungen‘ aufgenommen, bei der Platte nicht.

- Was ändert sich bei den Gleichungen für die isotrope Platte, wenn Temperaturkrümmungen berücksichtigt werden müssen?
- Wie berechnet man Temperaturkrümmungen bei einer in  $z$ -Richtung homogenen Platte, wenn die über die Dicke linear veränderliche Temperatur für  $z = +t/2$  den Wert  $T_1$  und für  $z = -t/2$  den Wert  $T_2$  annimmt?

### Aufgabe 2.5. Randbedingungen bei einer Platte

Für die in Bild 2.16 dargestellten Rechteckplatte unter Gleichlast sollen die Randbedingungen formuliert werden.

- Welche Ränder sind Schnittkraftträger  $R_\sigma$ , welche Verschiebungsränder  $R_u$ ?
- Wie lauten die Randbedingungen, wenn die Platte Schubstarr ist? (Im Schubstarren Fall können nur zwei Bedingungen pro Randabschnitt formuliert werden!)
- Wie lauten die Randbedingungen im Schubweichen Fall? (Bei der gelenkigen Lagerung soll  $\beta_s = 0$  angesetzt werden!)
- Wie lauten die Randbedingungen längs der Koordinatenlinie  $x = a/2$ , wenn die Symmetrie (siehe Abschnitt 14.3) ausgenutzt wird?
- Welche Bedingungen gelten, wenn die Belastung bezüglich  $x = a/2$  antisymmetrisch verläuft?



**Bild 2.16.** Rechteckplatte unter konstanter Flächenlast

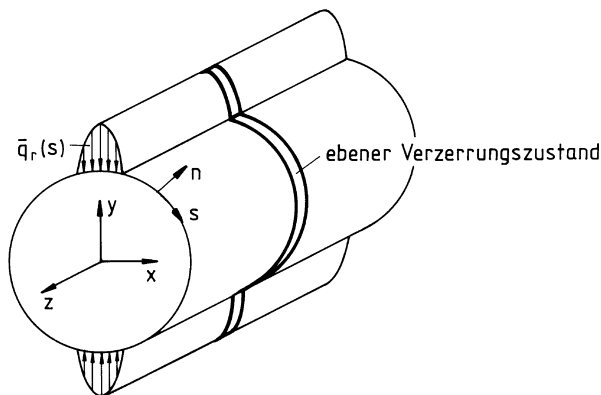
### Aufgabe 2.6. Ebener Verzerrungszustand

Ein zweidimensionales Problem als Sonderfall des dreidimensionalen Kontinuums ergibt sich nicht nur bei der Scheibe (ebener Spannungszustand:  $\sigma_z = 0$ ,  $\tau_{xz} = 0$ ,  $\tau_{yz} = 0$ ), sondern auch bei einem ebenen Verzerrungszustand ( $\varepsilon_z = 0$ ,  $\gamma_{xz} = 0$ ,  $\gamma_{yz} = 0$ ). Ein ebener Verzerrungszustand liegt beispielsweise in einer Schicht im Innern einer sehr langen, homogenen, isotropen Walze vor (Bild 2.17).

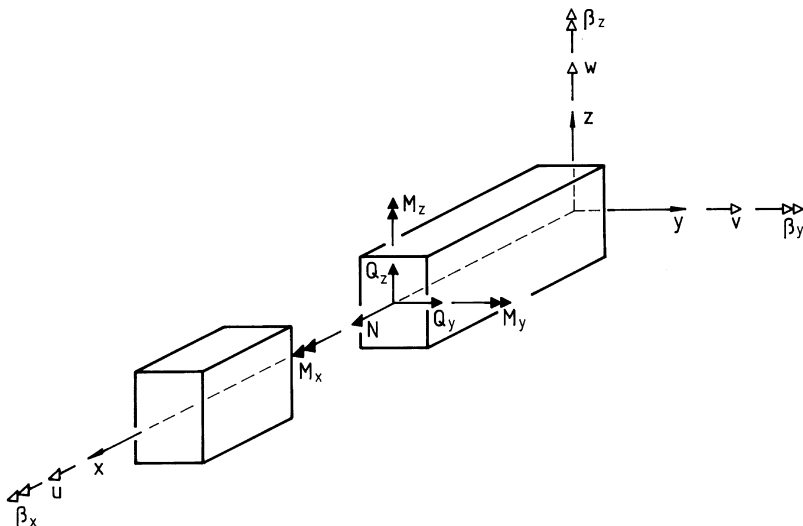
- Durch welche Zustandsgrößen wird das Problem beschrieben?
- Wie lauten die Gleichgewichtsbedingungen, das Materialgesetz und die kinematischen Beziehungen? Wie wird  $\sigma_z$  berechnet?
- Wie lauten die Randbedingungen für die Walze aus Bild 2.17 entlang des Umfangs, wenn man annimmt, dass die Belastung radial eingeleitet wird?

### Aufgabe 2.7. Stab im Raum

In Bild 2.18 ist ein dickwandiger, doppelt-symmetrischer räumlicher Stab dargestellt. Anders als bei der Platte werden alle Verschiebungs- und Schnittkraftgrößen



**Bild 2.17.** Schicht einer homogenen, isotropen Walze als Beispiel für einen ebenen Verzerrungszustand



**Bild 2.18.** Verschiebungs- und Schnittkraftgrößen eines räumlichen Stabes

mathematisch definiert: Index und Vorzeichen orientieren sich an der Koordinatenrichtung.

Der Stab besitzt Dehnsteifigkeit ( $D = E A$ ), Biegesteifigkeiten ( $B_y = E I_y$  mit  $I_y = \int z^2 dA$ ,  $B_z = E I_z$  mit  $I_z = \int y^2 dA$ ), Schubsteifigkeiten ( $K_y = G A_y$ ,  $K_z = G A_z$ ) und Torsionssteifigkeit ( $B_x = G I_T$ ). Die Schubflächen  $A_y$  und  $A_z$  sowie das Torsionsträgheitsmoment  $I_T$  erhält man als Lösung einer Potentialgleichung (siehe Aufgaben 2.9, 3.7, 3.8 und 4.10). Die Werte können auch aus Handbüchern entnommen werden.

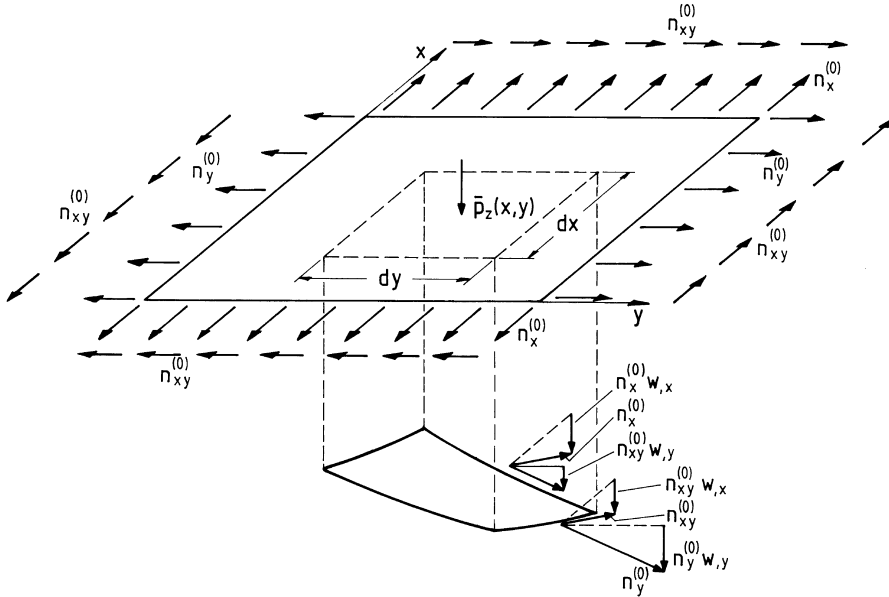
- Wie lauten der Verschiebungsvektor  $\mathbf{u}$ , der Schnittkraftvektor  $\boldsymbol{\sigma}$ , der Verzerrungsvektor und der Belastungsvektor  $\bar{\mathbf{p}}$ ?
- Wie sind die Operatoren  $\mathbf{D}_{\varepsilon\mathbf{u}}$  und  $\mathbf{D}_g$  besetzt?
- Wie lautet die Stoffmatrix  $\mathbf{C}$ ?

Hinweis: Die zu  $M_y$  und  $M_z$  gehörenden Krümmungen werden als  $\kappa_y$  und  $\kappa_z$ , die zu  $M_x$  gehörende Verdrehung wird als  $\kappa_x$  bezeichnet.

### Aufgabe 2.8. Grundgleichungen einer Membran

Eine Membran ist eine dünne, ebene, elastische Haut ohne Biegesteifigkeit, die in ihrer Mittelebene vorgespannt ist. Der Vorspannzustand  $\{n_x^{(0)}, n_y^{(0)}, n_{xy}^{(0)}\}$  muss aus einer Vorabrechnung bekannt sein. Bei einer Querverschiebung infolge einer Querbewegung  $\bar{p}_z(x, y)$  oder infolge einer Randverschiebung ergeben sich Schnittkraftkomponenten in  $z$ -Richtung, die mit der Belastung im Gleichgewicht stehen müssen (Bild 2.19).

- Wie lauten die Beziehungen für die Querkraftkomponenten  $q_x(x, y)$  und  $q_y(x, y)$ ? Wie lauten die Gleichgewichtsbedingungen an einem infinitesimalen Element  $dx dy$ ?

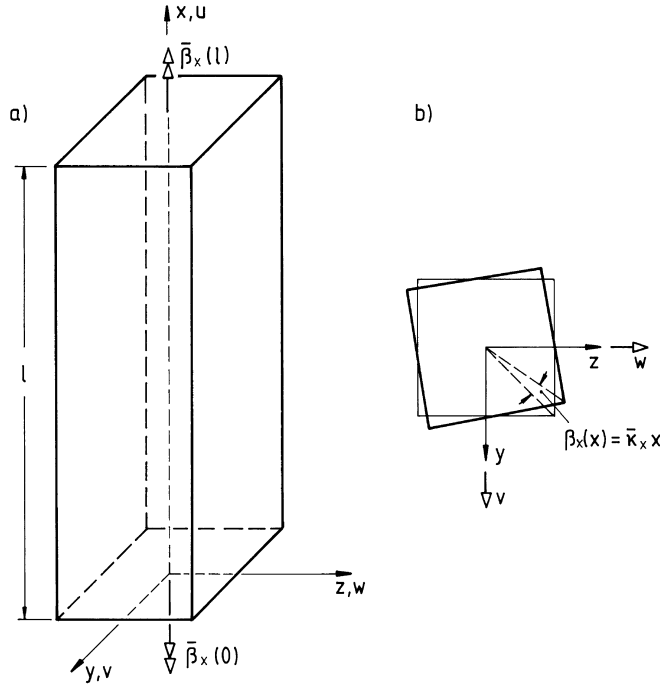


**Bild 2.19.** Zum Gleichgewicht am Membranelement

- Wie lauten die Randbedingungen an einem Rand  $R_u$ , an dem eine Randverschiebung  $\bar{w}_R$  vorgegeben ist?
- Wie lauten die Randbedingungen an einem durch eine äußere Normale  $n$  gekennzeichneten Rand  $R_\sigma$ , an dem eine Randbelastung  $\bar{q}_{nR}$  eingeleitet wird? Wie berechnet man den Randwert der Querkraft  $q_{nR}$  aus den inneren Querkraften  $q_x$  und  $q_y$ ?
- Lege in Analogie zu den Scheibengleichungen fest, welche Größen im Verschiebungsvektor  $\mathbf{u}$ , im Schnittkraftvektor  $\boldsymbol{\sigma}$ , im Verzerrungsvektor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  und im Belastungsvektor  $\bar{\mathbf{p}}$  zusammengefasst werden!
- Wie ist die Stoffmatrix  $\mathbf{C}$  besetzt?
- Wie lautet die Differentialgleichung für die unbekannte Querverschiebung  $w$  im Fall einer isotropen Vorspannung, d. h.  $n_x^{(0)} = n_y^{(0)} = n^{(0)}$  und  $n_{xy}^{(0)} = 0$ ?
- Nicht jeder Vorspannungszustand  $\{n_x^{(0)}, n_y^{(0)}, n_{xy}^{(0)}\}$  ist als Membranspannungszustand möglich, da die biegeschlaife Haut keine Reserven gegen Ausbeulen besitzt. Welche Bedingungen muss der Membranspannungszustand erfüllen?

### Aufgabe 2.9. Torsion zylindrischer Stäbe

Das Problem der Torsion eines dickwandigen, zylindrischen Stabes, also eines geraden Stabes mit beliebigem aber in Stablängsrichtung konstantem Querschnitt, soll nach der Deformationsmethode behandelt werden. Hierzu ist die Lösung einer Randwertaufgabe erforderlich. Saint-Venant hat als erster gezeigt, dass bei geeigneter Einleitung der an den Stabenden angreifenden Torsionsmomente  $M_x$  jeder Querschnitt sich nur verdreht (Erhaltenbleiben der Querschnittsform), die Querschnitte



**Bild 2.20.** **a** Zylindrischer Stab mit gegenseitiger Verdrehung der Stabenden, **b** Relativverschiebung eines Stabquerschnittes  $x = \text{const}$  bei einer Verdrillung  $\bar{\kappa}_x$

allerdings verwölben können (kein Ebenbleiben der Querschnitte). Die Verwölbung darf durch die Lagerung nicht behindert werden.

Gesucht sind die Schubspannungsverteilung im Querschnitt und die Torsionssteifigkeit  $B_x = G I_T$ . Es sollen alle zur Lösung dieser Aufgabe erforderlichen Grundgleichungen aus den Grundgleichungen des dreidimensionalen Kontinuums (siehe Abschnitt 2.2.7) hergeleitet werden.

Der Verschiebungszustand des zylindrischen Stabes unter Torsion (Bild 2.20) wird durch die folgenden kinematischen Ansätze beschrieben, wobei darauf verzichtet wurde, Starrkörperverschiebungen mit anzugeben. Es gilt:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \bar{\kappa}_x \omega(y, z), \\ v(x, y, z) &= -\beta_x(x) z, \\ w(x, y, z) &= \beta_x(x) y \\ \text{mit } \beta_x(x) &= \bar{\kappa}_x x. \end{aligned}$$

Die Verschiebungen  $v(x, y, z)$  und  $w(x, y, z)$  in jedem Querschnitt  $x = \text{const}$  wurden hierbei so angesetzt, als verdrehe dieser Querschnitt sich wie eine starre Scheibe. Die Querschnittsfläche kann sich aber zusätzlich in  $x$ -Richtung verwölben, wobei  $\omega(y, z)$  die Wölbfunktion ist. Wir nehmen an, dass die gegenseitige Verdrehung der beiden Stabendquerschnitte und damit die Verdrillung  $\bar{\kappa}_x$  gegeben sind.

- Welche Verzerrungen treten auf? Wie lauten die *Verschiebungs-Verzerrungs-Relationen*?
- Welche *Spannungen* werden aufgrund der kinematischen Annahmen nicht zu Null? Wie lauten die verbleibenden *Elastizitätsgleichungen*?
- Welches sind die nicht identisch erfüllten *Gleichgewichtsbedingungen*? Wie lauten die *Schnittkrafttrandbedingungen*, die bei der Betrachtung eines Stabquerschnittes am Rand des Querschnittes eingehalten werden müssen?
- Wie lauten die *Verschiebungsdifferentialgleichung* und die *Randbedingungen*, die die Wölbfunktion  $\omega(y, z)$  erfüllen muss?
- Zeige, dass zu den Schubspannungen  $\tau_{xy}(y, z)$  und  $\tau_{xz}(y, z)$  keine resultierenden Querkräfte  $Q_y$  und  $Q_z$  gehören! Verwende hierzu die Greensche Formel und die daraus abgeleiteten Beziehungen aus Abschnitt 14.1.1!
- Wir nehmen an, dass die Randwertaufgabe gelöst ist, d. h., dass die Wölbfunktion bekannt ist. Wie ermittelt man dann das Torsionsmoment  $M_x$ ?
- Die Torsionssteifigkeit  $G I_T$  ist über das Stoffgesetz für den Torsionsstab

$$M_x = G I_T \bar{\kappa}_x$$

definiert. Welche Beziehung ergibt sich für  $I_T$ ?

- Weise nach, dass das Torsionsflächenmoment  $I_T$  stets kleiner als das polare Trägheitsmoment  $I_p$  ist! (Auch hier wird für die Lösung die Verwendung der Formeln aus dem Abschnitt 14.1.1 empfohlen.)

### Aufgabe 2.10. Matrizenoperationen

Im Hinblick auf die im vorliegenden Buch durchgängig benutzte Matrizenschreibweise [2.9] hat diese Übung zum Ziel, sich mit den dabei verwendeten Matrizenoperationen vertraut zu machen. Ausführliche Beschreibungen der Matrizenrechnung findet man beispielsweise auch in [2.10–2.14].

Gegeben seien die Matrix  $\mathbf{A}$  der Abmessung  $m \times n$ , die Matrix  $\mathbf{B}$  mit  $k \times l$ , der Vektor  $\mathbf{c}$  der Abmessung  $p$  und der Vektor  $\mathbf{d}$  der Länge  $q$ .

Welche Bedingungen hinsichtlich der Matrizenabmessungen müssen gelten, damit die Operationen  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  und  $\mathbf{c} + \mathbf{d}$  sinnvoll sind? Was ergeben damit die Additionen  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  und  $\mathbf{c} + \mathbf{d}$ ?

Welche Voraussetzungen müssen die Matrizenabmessungen erfüllen, damit die Operationen  $\mathbf{A}\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{A}^T\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{A}\mathbf{c}$  und  $\mathbf{d}^T\mathbf{B}$  definiert sind? Welche Ergebnisse liefern dann diese Multiplikationen? Ist das Produkt  $\mathbf{d}\mathbf{B}$  zulässig? Zeige, dass  $(\mathbf{d}^T\mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{d}$  zutrifft!

Was ergeben die Kombinationen  $\mathbf{c}\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{c}^T\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{c}\mathbf{c}^T$  und  $\mathbf{c}^T\mathbf{c}^T$ ?

Finite Elemente

Eine Einführung für Ingenieure

Knothe, K.; Wessels, H.

2017, XV, 641 S. 362 Abb., Hardcover

ISBN: 978-3-662-49351-9