

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Beispiele aus Konstruktionsberechnung und Mechanik	1
1.2	Einordnung einer Finite-Elemente-Rechnung	5
1.3	Finite-Elemente-Verfahren für allgemeine Feldprobleme	7
1.4	Die Finite-Elemente-Methode und andere Diskretisierungsverfahren	9
1.5	Zur historischen Entwicklung der Finite-Elemente-Methode	12
1.6	Einführungsliteratur und Simulationsprogramme	18
1.7	Gliederung des Buches	19
<b>2</b>	<b>Differentialgleichungsformulierungen für Probleme der Strukturmechanik</b>	<b>23</b>
2.1	Tragwerkstypen	23
2.2	Grundgleichungen und Randbedingungen für Scheibe und Stab	25
2.2.1	Zustandsgrößen für Scheibe und Stab	26
2.2.2	Gleichgewichtsbedingungen	26
2.2.3	Materialgesetz (Elastizitätsgesetz)	28
2.2.4	Kinematische Aussagen	29
2.2.5	Verschiebungsdifferentialgleichungen	29
2.2.6	Randbedingungen	30
2.2.7	Zusammenfassung und Erweiterung auf dreidimensionale Kontinua	34
2.3	Zustandsgrößen von Balken und Platten	36
2.4	Grundgleichungen für Balken und Platten	36
2.5	Übungsaufgaben	42
<b>3</b>	<b>Das Prinzip der virtuellen Verrückungen</b>	<b>51</b>
3.1	Was ist das Prinzip der virtuellen Verrückungen?	51
3.2	Ableitung des Prinzips der virtuellen Verrückungen	56
3.3	Das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie	60
3.4	Zulässige Verschiebungszustände	64
3.5	Das Prinzip der virtuellen Verrückungen für einzelne Kontinua	66
3.5.1	Das Prinzip für dreidimensionale Kontinua, Scheiben und Dehnstäbe	66
3.5.2	Das Prinzip für Balken und Platten	66
3.6	Übertragung des Prinzips auf die Wärmeleitungsaufgabe	70
3.6.1	Grundgleichungen der Wärmeleitung	71

3.6.2	Das Prinzip der virtuellen Temperatur .....	74
3.6.3	Analogie zwischen den Grundgleichungen der Wärmelei- tung und den Grundgleichungen der Strukturmechanik	75
3.7	Übungsaufgaben .....	77
<b>4</b>	<b>Finite-Elemente-Verfahren für Scheibentragwerke und Fach- werke</b> .....	<b>87</b>
4.1	Ein Finite-Elemente-Verfahren für Scheibentragwerke .....	87
4.1.1	Vorbemerkung: Globale oder lokal begrenzte Ansätze .	88
4.1.2	Verschiebungsansatz für ein Rechteckelement .....	89
4.1.3	Stetigkeit des Verschiebungsansatzes .....	92
4.1.4	Diskretisierung des Prinzips der virtuellen Verrückungen durch Einführung des Verschiebungsansatzes .....	95
4.1.5	Ermittlung der Steifigkeitsmatrix und der Lastvektoren für Rechteckelemente .....	97
4.1.6	Aufbau und Lösen des Gleichungssystems .....	104
4.1.7	Berechnung der Schnittkräfte und der Formänderungs- energie .....	109
4.1.8	Anschauliche Interpretation .....	110
4.1.9	Zusammenfassung .....	115
4.1.10	Einfache Beispielrechnung .....	119
4.1.11	Verbesserte Schnittkraftberechnung .....	128
4.2	Mechanisch begründete Anforderungen an ein Finite-Elemente- Verfahren .....	132
4.2.1	Stetigkeit des Verschiebungsansatzes .....	133
4.2.2	Darstellbarkeit von Starrkörperverschiebungszuständen	135
4.2.3	Darstellbarkeit konstanter Verzerrungszustände .....	137
4.2.4	Symmetrie der Steifigkeitsmatrix .....	140
4.2.5	Positive Definitheit der Steifigkeitsmatrix .....	141
4.2.6	Kriterien für die Wahl von Ansatzfunktionen .....	143
4.2.7	Überprüfung der Matrizen des 4-Knoten-Rechteckelemen- tes .....	144
4.3	Ein Verfahren der finiten Elemente für Fachwerke .....	147
4.3.1	Elementierung .....	148
4.3.2	Das Prinzip der virtuellen Verrückungen .....	148
4.3.3	1. Schritt: Festlegung des Elementtyps .....	149
4.3.4	2. Schritt: Differentiation des Verschiebungsansatzes ..	150
4.3.5	3. Schritt: Auswertung der Elementintegrale .....	151
4.3.6	4. Schritt: Aufbau der Systemmatrizen .....	151
4.3.7	5. Schritt: Lösen des Gleichungssystems .....	153
4.3.8	6. Schritt: Berechnung der Schnittkräfte .....	153
4.3.9	Ermittlung des exakten Verschiebungsansatzes .....	154
4.3.10	Beispielrechnung .....	156
4.3.11	Erweiterung auf räumliche Fachwerke .....	157
4.4	Übungsaufgaben .....	159

<b>5</b>	<b>Umsetzung des Verfahrens zu einem Finite-Elemente-Programm</b>	167
5.1	Dateneingabe und Ergebnisausgabe	167
5.2	Einbau der Elementmatrizen in die Systemmatrizen	169
5.3	Einbau der Verschiebungsrandbedingungen in die Systemmatrizen	174
5.4	Direkter Aufbau der Matrizen des gefesselten Systems	177
5.5	Lösen des Gleichungssystems	178
5.6	Übungsaufgaben	186
<b>6</b>	<b>Zur Klassifikation von Elementen und Ansatzfunktionen</b>	189
6.1	Finite Elemente in der Deformationsmethode	189
6.2	Problemtypen beim Kraftgrößenverfahren	195
6.3	Übungsaufgaben	198
<b>7</b>	<b>Ansatzfunktionen für Elemente vom Scheibentyp</b>	205
7.1	Einleitung	205
7.2	Ansatzfunktionen für Rechteckelemente durch Produktbildung	206
7.3	Ansatzfunktionen für Randpunkt- und Übergangselemente	214
7.3.1	Formfunktionen für Randpunktelemente	215
7.3.2	Entwicklung der Steifigkeitsmatrix von Randpunktelementen	222
7.3.3	Formfunktionen für Übergangselemente	224
7.4	Schiefwinklige und krummlinig berandete Elemente	226
7.4.1	Einleitung	226
7.4.2	Abbildungsvorschriften zur Approximation der Elementgeometrie	228
7.4.3	Einführung des Verschiebungsansatzes	231
7.4.4	Transformation des Differentialoperators und des Bereichsdifferentials	233
7.4.5	Aufbau von Elementmatrizen und -vektoren	235
7.4.6	Anmerkungen zur numerischen Integration und zur programmtechnischen Umsetzung	237
7.5	Ansatzfunktionen für Dreieckelemente	240
7.5.1	Dreieckskoordinaten	240
7.5.2	Formfunktionen für gradlinig berandete Dreieckelemente	242
7.5.3	Transformation des Differentialoperators und des Flächendifferentials	245
7.5.4	Integration	246
7.5.5	Krummlinig berandete Dreieckelemente	247
7.6	Anmerkungen zu inkompatiblen Ansätzen	248
7.7	Übungsaufgaben	251
<b>8</b>	<b>Numerische Probleme</b>	257
8.1	Hinweise für den Einsatz krummlinig berandeter Elemente	257
8.1.1	Lage der Knoten	257
8.1.2	Ordnung der numerischen Integration	261

8.2	Kontrollalgorithmen für Element- und Systemsteifigkeitsmatrizen .....	265
8.3	Genauigkeit und Konvergenzverhalten .....	268
8.3.1	Definition von Begriffen .....	269
8.3.2	Schrankencharakter von Energiegrößen .....	271
8.3.3	Fehlerquellen .....	274
8.3.4	Ein einfacher Konvergenzbeweis .....	278
8.4	Richardson-Extrapolation .....	287
8.5	Beispielrechnungen .....	290
8.5.1	Scheibenstreifen unter periodischer, treppenförmiger Randschubbelastung .....	290
8.5.2	Kragscheibe unter Rand- und Flächenlasten .....	292
8.6	Einige praktische Schlussfolgerungen .....	296
8.7	Übungsaufgaben .....	299
<b>9</b>	<b>Finite Elemente für Balken und Platten .....</b>	<b>303</b>
9.1	Vorbemerkung .....	303
9.2	Forderungen an Balken- und Plattenelemente .....	305
9.3	Elemente für schubstarre Balken und Platten .....	308
9.3.1	Hermite-Ansätze für Balkenelemente .....	308
9.3.2	Ein kompatibles Plattenrechteckelement .....	311
9.3.3	Zwei Plattenrechteckelemente mit 12 Freiheitsgraden ..	316
9.3.4	Einige Bemerkungen zu isoparametrischen Viereckelementen für schubstarre Platten .....	318
9.3.5	Dreieckelemente für schubstarre Platten .....	321
9.3.6	Schlussfolgerungen .....	328
9.4	Elemente für schubweiche Balken und Platten .....	331
9.4.1	Elemente für schubweiche Balken .....	331
9.4.2	Elemente für schubweiche Balken auf der Grundlage eines modifizierten Variationsprinzips .....	340
9.4.3	Viereckelemente für schubweiche Platten .....	344
9.5	Gemischt-hybride Verfahren zur Entwicklung von Steifigkeitsmatrizen .....	348
9.6	Verwendung von isoparametrischen Scheiben- und Volumenelementen .....	350
9.7	Zusammenfassender Vergleich .....	353
9.8	Übungsaufgaben .....	355
<b>10</b>	<b>Theorie 2. Ordnung, Stabilität, Schwingungen .....</b>	<b>359</b>
10.1	Vorbemerkung .....	359
10.2	Das Prinzip der virtuellen Verrückungen nach Theorie 2. Ordnung für Balken .....	360
10.2.1	Nichtlineare Formulierung des Prinzips der virtuellen Verrückungen .....	360
10.2.2	Linearisierte Formulierung des Prinzips der virtuellen Verrückungen .....	364

10.3	Das Prinzip der virtuellen Verrückungen nach Theorie 2. Ordnung für Platten .....	367
10.4	Das Prinzip der virtuellen Verrückungen für dynamische Probleme .....	368
10.5	Berücksichtigung von Dämpfung im Stoffgesetz .....	371
10.6	Einige numerische Ergebnisse zum Beulen und Schwingen von Platten .....	374
10.6.1	Plattenbeulen .....	374
10.6.2	Plattenschwingungen .....	378
10.6.3	Ausnutzung der Symmetrie bei Rechnungen nach Theorie 2. Ordnung .....	382
10.7	Übungsaufgaben .....	382
<b>11</b>	<b>Ein Verfahren der finiten Elemente für ebene Rahmentragwerke .....</b>	<b>389</b>
11.1	Elementierung .....	390
11.2	Das Prinzip der virtuellen Verrückungen für statische Probleme .....	390
11.3	Matrizen des schubweichen Stabelementes .....	391
11.4	Aufbau der Systemmatrizen .....	392
11.5	Berechnung der Verschiebungen und der Schnittkräfte an den Elementenden .....	394
11.6	Zustandsgrößen im Element .....	396
11.6.1	Zustandsgrößen bei einer statischen Rechnung nach Theorie 1. Ordnung .....	396
11.6.2	Zustandsgrößen bei einer statischen Rechnung nach Theorie 2. Ordnung .....	398
11.7	Beispielrechnungen .....	400
11.8	Übungsaufgaben .....	405
<b>12</b>	<b>Ein kombiniertes Verfahren für rotationssymmetrische Flächentragwerke .....</b>	<b>411</b>
12.1	Problemdefinition .....	411
12.2	Voraussetzungen und Grundgedanken des Verfahrens .....	413
12.3	Differentialgleichungsformulierung und Prinzipformulierung ...	414
12.4	Ausnutzung der Rotationssymmetrie .....	418
12.5	Numerische Integration des homogenen Differentialgleichungssystems .....	419
12.6	Teilinversion zur Ermittlung der Steifigkeitsmatrix .....	421
12.7	Ermittlung der Massenmatrix und des Belastungsvektors ....	423
12.8	Aufbau des Gleichungssystems .....	423
12.9	Einige Ergebnisse .....	425
12.10	Einsatzgrenzen des Verfahrens .....	429
12.11	Schlussfolgerungen .....	430
12.12	Kopplung von Finite-Elemente- und Mehrkörpersystem-Modellen .....	430
12.13	Übungsaufgaben .....	433

<b>13</b>	<b>Einstieg in nichtlineare Berechnungsmethoden</b>	437
13.1	Spannungs- und Verzerrungsmaße	438
13.2	Materialgesetz	440
13.3	Prinzip der virtuellen Verrückungen	442
13.4	Geometrie- und Verschiebungsansätze	443
13.5	Transformationen	444
13.6	Aufstellen des Gleichungssystems	446
13.7	Iterationsvorschrift	448
13.8	Elementsteifigkeitsmatrix	449
13.9	Kontrolle der Elementmatrizen	452
13.10	Ablauf des Verfahrens	454
13.11	Beispiel	459
13.12	Hinweise zu einer Berechnung mit einem elastisch-plastischen Materialmodell	461
13.12.1	Eindimensionaler Spannungszustand	461
13.12.2	Mehrdimensionaler Spannungszustand	462
13.12.3	Ein elastisch-plastisches Stoffgesetz mit isotroper Verfestigung	465
13.12.4	Physikalisch nichtlineare Berechnung	468
13.13	Übungsaufgaben	470
<b>14</b>	<b>Anhang</b>	475
14.1	Einige Bemerkungen zu den Integralsätzen	475
14.1.1	Greensche Formel	475
14.1.2	Integralsatz für die Membran	477
14.1.3	Integralsatz für die Scheibe	477
14.1.4	Integralsatz für die schubstarre Platte	479
14.2	Grundlagen und Grundbegriffe der Variationsrechnung	480
14.2.1	Fundamentalsatz der Variationsrechnung	480
14.2.2	Variationsprinzip, Funktional, Nebenbedingungen, wesentliche Randbedingungen	481
14.2.3	Durchführung der Variation	484
14.2.4	Eulersche Differentialgleichung	486
14.2.5	Einbau von Nebenbedingungen mit Lagrangeschen Multiplikatoren	487
14.2.6	Kanonisches Variationsprinzip	491
14.2.7	Übergang zum Castiglianoschen Funktional	492
14.2.8	Einbau von Übergangsbedingungen mit Lagrangeschen Multiplikatoren: Das Funktional von Pian	493
14.2.9	Einbau von Randbedingungen mit Lagrangeschen Multiplikatoren in das diskretisierte Dirichletsche Funktional	495
14.3	Ausnutzung von Symmetrieeigenschaften	497
14.3.1	Struktursymmetrie	497
14.3.2	Symmetrische und antimetrische Belastung	497
14.3.3	Behandlung einer Teilstruktur	498
14.3.4	Mehrfachsymmetrie	502
14.3.5	Zyklische Rotationssymmetrie	504

14.4	Übungsaufgaben .....	508
<b>15</b>	<b>Lösungen der Übungsaufgaben.....</b>	<b>513</b>
15.1	Vorbemerkungen .....	513
15.2	Lösungen zu Kapitel 2 .....	513
15.3	Lösungen zu Kapitel 3 .....	522
15.4	Lösungen zu Kapitel 4 .....	529
15.5	Lösungen zu Kapitel 5 .....	539
15.6	Lösungen zu Kapitel 6 .....	545
15.7	Lösungen zu Kapitel 7 .....	552
15.8	Lösungen zu Kapitel 8 .....	562
15.9	Lösungen zu Kapitel 9 .....	565
15.10	Lösungen zu Kapitel 10 .....	570
15.11	Lösungen zu Kapitel 11 .....	575
15.12	Lösungen zu Kapitel 12 .....	583
15.13	Lösungen zu Kapitel 13 .....	586
15.14	Lösungen zu Kapitel 14 .....	595
	<b>Symbole und Bezeichnungen .....</b>	<b>599</b>
	<b>Literatur .....</b>	<b>611</b>
	<b>Sachregister .....</b>	<b>631</b>

Finite Elemente

Eine Einführung für Ingenieure

Knothe, K.; Wessels, H.

2017, XV, 641 S. 362 Abb., Hardcover

ISBN: 978-3-662-49351-9