

2 Die Ziolkowsky-Raketengleichung

Die in diesem Kapitel hergeleitete Raketengleichung wird dem russischen Gymnasiallehrer Konstantin Ziolkowsky zugeschrieben, der diese Ende des 19. Jahrhunderts entdeckte und 1903 publizierte. Er wurde damit zum Begründer der mathematischen Theorie zur Beschreibung des Raketenfluges. Mit der Ziolkowsky-Raketengleichung, die im Wesentlichen die Impulserhaltungsgleichung einer Rakete darstellt, lässt sich das Antriebsvermögen einer Rakete berechnen, falls die Austrittsgeschwindigkeit der Raketengase an der Düse und das Verhältnis der Raketenmasse beim Brennschluss zur Startmasse bekannt sind. Umgekehrt kann bei Vorgabe einer gewünschten Geschwindigkeitsänderung der Rakete die dazu notwendige Treibstoffmasse bestimmt werden.

2.1 Die Annahme des schwerefreien Raumes

Die Raketengleichung wird gewöhnlich für den Fall oder die vereinfachte Annahme des „schwerefreien Raumes“ hergeleitet. Tatsächlich wird sich aber in der nahen Zukunft kaum jemals ein Raumfluggerät im wirklich schwerefreien Raum befinden, außer an einigen besonderen Stellen in unserem Sonnensystem, wo sich die Anziehungskräfte aller Himmelskörper zufällig gegenseitig aufheben. Normalerweise werden sich die Fluggeräte, mit denen wir uns befassen, entweder auf Keplerbahnen um die Erde, um andere Planeten oder weit von Planeten entfernt um die Sonne bewegen.

Man kann aber beweisen, dass die für den schwerefreien Raum abgeleitete Geschwindigkeitsänderung Δv auch für den praktisch brauchbaren Fall des Fluges in einer Keplerbahn übertragen werden kann. Wenn die Antriebsdauer nur einen sehr kleinen Teil der Umlaufperiode darstellt, kann man sogar meistens das während der Antriebszeit erreichte Δv direkt vektoriell zu der lokalen Bahngeschwindigkeit addieren. In anderen Fällen muss man allerdings die Flugbahn während der Schubzeit mit Berücksichtigung aller wirkenden Kräfte integrieren.

2.2 Impulsgleichung der Rakete

Für die Herleitung der Impulsgleichung einer Rakete werden zunächst folgende Definitionen getroffen:

- $m_R(t)$: Masse der Rakete zum Zeitpunkt t
- $v_R(t)$: Geschwindigkeit der Rakete relativ zu einem inertialen Bezugssystem zum Zeitpunkt t
- $\dot{m}(t)$: Massenstrom des Treibstoffes

Zur weiteren Betrachtung der Impulserhaltung einer Rakete sind außerdem die folgenden Annahmen notwendig:

- Keine äußeren Kräfte, d.h. schwebefreier Raum und kein Luftwiderstand auf die Rakete und die Brenngase.
- Inertiales Bezugssystem.
- Schubvektor parallel zur Flugrichtung (s. Abb. 2.1), d.h. die Austrittsgeschwindigkeit der Brenngase ist:

$$\vec{w}_e(t) = \begin{cases} + w_e(t) \vec{k}(t) & \text{negativer Schub} \\ - w_e(t) \vec{k}(t) & \text{positiver Schub} \end{cases}, \text{ mit } w_e(t) = |\vec{w}_e(t)|. \quad (2.1)$$

Der Raketenimpuls ergibt sich mit diesen Definitionen und Annahmen zu

$$\vec{I}_R(t) = m_R(t) \vec{v}_R(t). \quad (2.2)$$

Der Strahlimpuls ist gegeben als Integral über das Strahlvolumen V

$$\vec{I}_{\text{Str}}(t) = \int_V \vec{v}_g(x, y, z, t) \rho_g(x, y, z, t) dV = \int_{m_{\text{Str}}(t_0)}^{m_{\text{Str}}(t)} \vec{v}_{\text{Str}}(t) dm_{\text{Str}}. \quad (2.3)$$

Damit folgt der Gesamtimpuls des Systems zur Zeit t :

$$\vec{I}_{\text{ges}}(t) = \vec{I}_R(t) + \vec{I}_{\text{Str}}(t). \quad (2.4)$$

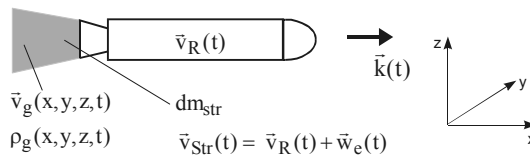


Abb. 2.1. Definition der einzelnen Vektorgößen.

Dieser Gesamtimpuls bleibt jetzt über die Zeit erhalten, d.h. der Impulserhaltungssatz der Rakete lautet

$$\frac{d\vec{I}_{\text{ges}}}{dt} = \frac{d\vec{I}_R}{dt} + \frac{d\vec{I}_{\text{Str}}}{dt} = \vec{v}_R \frac{dm_R}{dt} + m_R \frac{d\vec{v}_R}{dt} + \vec{v}_{\text{Str}} \frac{dm_{\text{Str}}}{dt} \stackrel{!}{=} \vec{0} . \quad (2.5)$$

Die Betrachtung der Massenbilanz liefert

$$dm_R = -dm_{\text{Str}} = -\dot{m}(t)dt , \quad (2.6)$$

wobei dm_{Str} bzw. $\dot{m} > 0$. Die Strahlgeschwindigkeit lässt sich darstellen als

$$\vec{v}_{\text{Str}}(t) = \vec{v}_R(t) + \vec{w}_e(t) . \quad (2.7)$$

Eingesetzt in die Impulserhaltungsgleichung folgt dann

$$m_R(t)d\vec{v}_R = \vec{w}_e(t)dm_R . \quad (2.8)$$

Die Masse der Rakete ist natürlich immer positiv und die Massenänderung negativ. ($m_R(t) > 0$ und $dm_R < 0$). Da für eine positive Geschwindigkeitsänderung die Austrittsgeschwindigkeit in die entgegengesetzte Richtung weisen muss, folgt für die skalare Schreibweise der Impulsgleichung der Rakete

$$dv_R = -w_e(t) \frac{dm_R}{m_R(t)} . \quad (2.9)$$

Statt der (idealen) Austrittsgeschwindigkeit $w_e (=c_{e,\text{ideal}})$ wird im Folgenden die *effektive Austrittsgeschwindigkeit* c_e verwendet, die auch Verluste beinhalten kann:

$$c_e := \frac{F}{\dot{m}} . \quad (2.10)$$

Der Wert für c_e ist dabei als die mittlere Austrittsgeschwindigkeit des Gases in axialer Richtung zu verstehen. Damit folgt

$$dv_R = -c_e \frac{dm_R}{m_R} . \quad (2.11)$$

Es ist bemerkenswert, dass in dieser Gleichung die Zeit nicht mehr explizit enthalten ist, d.h. dass für eine geschlossene Integration dieser Gleichung der Treibstoffdurchsatz nicht mehr konstant sein muss. Für den Fall einer konstanten Austrittsgeschwindigkeit c_e lässt sich die Impulsgleichung leicht integrieren, und es folgt die *Raketenformel von ZIOLKOWSKY* oder *Raketengrundgleichung*:

$$\Delta v_{1 \rightarrow 2} = -c_e \int_1^2 \frac{dm_R}{m_R} = +c_e \ln \left(\frac{m_1}{m_2} \right) . \quad (2.12)$$

Die Indizes 1 und 2 bezeichnen hier den Anfangs- und Endpunkt einer Antriebsphase. Aus der Raketengrundgleichung folgt für den Masseverlust $\Delta m = m_1 - m_2$ und damit für den Treibstoffverbrauch:

$$\Delta m = m_1 \left(1 - e^{-\frac{\Delta v_{1 \rightarrow 2}}{c_e}} \right) = m_2 \left(e^{\frac{\Delta v_{1 \rightarrow 2}}{c_e}} - 1 \right) . \quad (2.13)$$

Wenn der Antrieb am Punkt 2 abgestellt und zu einem späteren Zeitpunkt 3 wieder gezündet wird, kann dieselbe Gleichung nochmals für die Schubphase 3 bis 4 verwendet werden. Die Masse am Anfang der zweiten Schubphase m_3 ist gleich m_2 , da zwischenzeitlich kein Treibstoff verbraucht wurde. Es wird dann:

$$|\Delta v_{1 \rightarrow 2}| + |\Delta v_{3 \rightarrow 4}| = c_e \left[\ln \left(\frac{m_1}{m_2} \right) + \ln \left(\frac{m_2}{m_4} \right) \right] = c_e \ln \left(\frac{m_1}{m_4} \right) . \quad (2.14)$$

Für eine beliebige Anzahl n solcher Schubperioden mit einer einzigen Raketenstufe erhält man somit

$$\Delta v_{ch} = \sum_n |\Delta v_n| = c_e \ln \left(\frac{m_0}{m_b} \right) , \quad (2.15)$$

wobei m_0 die Anfangs- und m_b die Endmasse (Brennschlussmasse) der einstufigen Rakete für aufeinander folgende Schubperioden darstellt. Da nicht die Flugbahn selbst, sondern nur der gesamte Antriebsbedarf errechnet wird, werden in der obigen Summe $\Sigma |\Delta v|$ unabhängig von der Richtung nur die absoluten skalaren Werte aller Geschwindigkeitsänderungen eingesetzt. Das ist sinnvoll, da für jedes Δv eine positive Treibstoffmenge verbraucht wird. Diese Summe $\Sigma |\Delta v|$ wird als die *Charakteristische Geschwindigkeit* oder genauer als die *Charakteristische Geschwindigkeitsänderung* Δv_{ch} bezeichnet.

2.3 Wichtige Impulsdefinitionen

2.3.1 Der Gesamtimpuls

Der Gesamtimpuls ist für alle Antriebssysteme definiert als

$$I_{\text{total}}(\tau) = \int_0^{\tau} F dt \quad , \quad (2.16)$$

und bei konstantem Schub F ergibt sich

$$I_{\text{total}} = F\tau \quad . \quad (2.17)$$

Der Gesamtimpuls ist eine wichtige Größe bei der Beurteilung von Missionen.

2.3.2 Der spezifische Impuls

Der *massenspezifische Impuls* ist nach Gl. (2.10) sichtlich $F\tau / m = F / \dot{m} = c_e$. In der Raketentechnik ist es allerdings üblich, den *gewichtsspezifischen Impuls* I_s [s] zu benutzen. Der momentane Wert ist dabei definiert als

$$I_s = \frac{F\tau}{g_0 m_T} = \frac{F}{g_0 \dot{m}_T} = \frac{c_e}{g_0} = \frac{\text{Schubkraft[N]}}{\text{Treibstoffgewichtsdurchsatz[kgms}^{-3}\text{]}} \quad , \quad (2.18)$$

worin m_T die Masse des Treibstoffs und $g_0=9,81 \text{ m/s}^2$ die Erdbeschleunigung darstellen. Der Durchschnittswert, d.h. die integrale Definition ist

$$\bar{I}_s = \frac{I_{\text{total}}}{g_0 m_T} \quad . \quad (2.19)$$

Sind Schub und Treibstoffdurchsatz zeitlich konstant, dann sind beide Werte identisch, d.h.

$$I_s = \frac{F}{g_0 \dot{m}_T} = \frac{F\tau}{g_0 m_T} = \frac{I_{\text{total}}}{g_0 m_T} = \bar{I}_s \quad . \quad (2.20)$$

Der spezifische Impuls I_s ergibt im mks-System, im cgs-System, in englischen Maßsystemen und anderen stets den gleichen Zahlenwert für den Gesamtimpuls pro Treibstoffgewicht und hat sich deshalb als Vergleichsgröße weltweit eingebürgert. Beispiele sind SSME (Space Shuttle Main Engine) mit $I_{s,\text{Vakuum}} = 455 \text{ s}$, HM60-Triebwerk für Ariane 5 mit $I_{s,\text{Vakuum}} = 435 \text{ s}$ und A4-Triebwerk mit $I_{s,\text{Boden}} = 210 \text{ s}$.

2.4 Leistungs- oder Energiewirkungsgrade

2.4.1 Gesamtwirkungsgrad, innerer und äußerer Wirkungsgrad

Es ist vorteilhaft, den *Gesamtwirkungsgrad* η_{ges} eines Raketenantriebssystems in zwei Komponenten aufzuteilen, in einen *inneren Wirkungsgrad* η_I und einen *äußeren* oder *Vortriebs-Wirkungsgrad* η_A :

$$\eta_{\text{ges}} = \eta_I \eta_A \quad . \quad (2.21)$$

Der innere Wirkungsgrad η_I beschreibt das Antriebssystem selbst und wird daher im Zusammenhang mit jeder Gruppe von Triebwerken einzeln behandelt. Generell ist der innere Wirkungsgrad für ein raketenartiges Triebwerk immer die effektive Schubstrahlenergie (bzw. Schubstrahlleistung P_F) dividiert durch die Energie (bzw. Leistung), die unter idealen Umständen in Schubstrahlenergie hätte umgewandelt werden können. Für chemische Raketen heißt das, dass die gesamte chemische Energie ε_T , die im Treibstoff enthalten ist, umgewandelt wird. Mit

$$\varepsilon_T = \frac{1}{2} c_{e,\text{ideal}}^2 \quad , \quad (2.22)$$

und Gl. (2.18) gilt für chemische Systeme:

$$\eta_I = \frac{c_e^2}{c_{e,\text{ideal}}^2} = \frac{c_e^2}{2\varepsilon_T} = \frac{F^2}{2\dot{m}_T^2 \varepsilon_T} \quad . \quad (2.23)$$

Für kryogene H_2/O_2 -Triebwerke ist zum Beispiel die im Treibstoff enthaltene spezifische Energie (=Enthalpie h_0) $\varepsilon_T = 13,4 \text{ MJ/kg}$. Im Idealfall müsste sich

$$c_{e,\text{ideal}} = \sqrt{2\varepsilon_T} = 5183 \text{ m/s} \quad (2.24)$$

ergeben. In Wirklichkeit findet man jedoch für das SSME-System $c_e = I_{sg0} = 455 \text{ s} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = 4464 \text{ m/s}$, d.h. der innere Wirkungsgrad ist $\eta_I = (4464/5183)^2 = 0,742$.

Für Raketen mit einer vom Treibstoff getrennten Energiequelle, die dem Antriebssystem die notwendige Leistung P_{in} liefert, ist der innere Wirkungsgrad

$$\eta_I = \frac{F^2}{2\dot{m}_T P_{\text{in}}} = \frac{P_F}{P_{\text{in}}} \quad . \quad (2.25)$$

Zusätzlich hat dann die Energieversorgungsanlage noch einen eigenen Wirkungsgrad. In den beiden vorhergehenden Gleichungen erscheint die effektive Leistung des Schubstrahls

$$P_F = \frac{F^2}{2\dot{m}_T} = \frac{F c_e}{2} = \frac{\dot{m}_T c_e^2}{2} . \quad (2.26)$$

Dies ist die kleinstmögliche Leistung ($\eta = 1$), mit der man den Schub F mit dem Massendurchsatz $\dot{m}_T$ erreichen kann. Tatsächlich ist in der Praxis wegen ungleichförmiger Geschwindigkeitsverteilung und Strahldivergenz etwas mehr als diese Leistung im Schubstrahl enthalten. Diese Differenz ist im inneren Wirkungsgrad enthalten.

Der äußere oder Vortriebs-Wirkungsgrad η_A eines Raketensystems nimmt die effektive Leistung des Schubstrahls P_F als gegeben an und beschreibt, welcher Anteil dieser Leistung in Flugkörperenergie umgewandelt wird:

$$\eta_A = \frac{\text{Energiegewinn des Flugkörpers}}{\text{Schubstrahlleistung} \times \text{Antriebszeit}} \quad (2.27)$$

Es sollte betont werden, dass bei allen Energie- oder Leistungsbetrachtungen darauf zu achten ist, dass die Resultate generell nur für ein gegebenes Bezugssystem gültig sind. Sie sind *nicht* invariant in einer Lorentz-Transformation und daher nicht unverändert in einem anderen Bezugssystem gültig, das sich relativ zum ursprünglichen bewegt. Diese Tatsache kann bei Energiebetrachtungen, besonders bei den äußeren Wirkungsgraden von Raketensystemen Schwierigkeiten bereiten, was im nächsten Kapitel deutlich wird.

2.4.2 Der integrale oder mittlere äußere Wirkungsgrad

Dieser für die Praxis wichtige Wirkungsgrad ist definiert als:

$$\bar{\eta}_A = \frac{\text{kinetische Energie bei Brennschluss}}{\text{Schubstrahlleistung} \times \text{Brennzeit}} = \frac{E_b}{P_F \tau_b} , \quad (2.28)$$

wobei zu beachten ist, dass die kinetische Energie bei Brennschluss auf ein festes Bezugssystem (z.B. Erde) und die Schubstrahlleistung auf ein flugkörperbezogenes System (entspricht dem festen Bezugssystem nur bei $v = 0$ m/s) bezogen werden. D.h.

$$\bar{\eta}_A = \frac{\frac{1}{2} m_b v_b^2}{\frac{1}{2} \dot{m}_T c_e^2 \tau_b} = \frac{m_b}{(m_0 - m_b)} \frac{v_b^2}{c_e^2} = \frac{v_b^2 / c_e^2}{e^{v_b/c_e} - 1} = \frac{\left[\ln \left(\frac{m_0}{m_b} \right) \right]^2}{\frac{m_0}{m_b} - 1} . \quad (2.29)$$

Abb. 2.2 zeigt den Verlauf des integralen äußeren Wirkungsgrades als Funktion von v_b/c_e . Der integrale äußere Wirkungsgrad für die Beschleunigung von $v_R = 0$ m/s bis

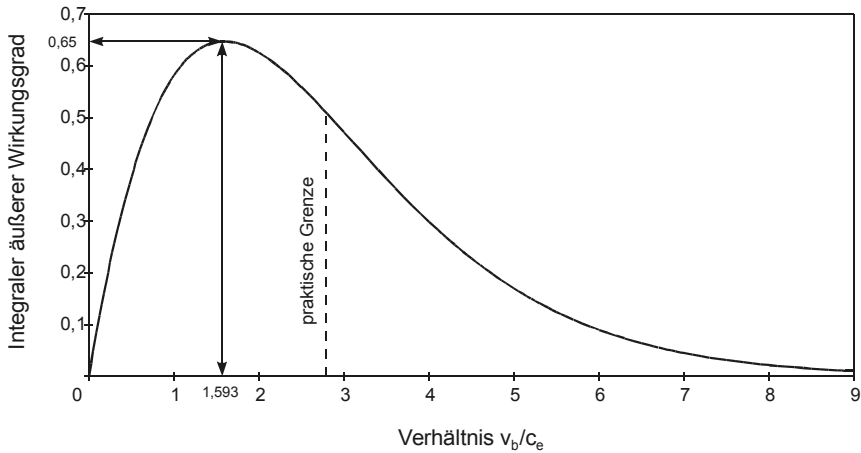


Abb. 2.2. Verlauf vom äußeren Wirkungsgrad.

v_b hat ein Maximum bei 0,65 für $v_b/c_e = 1,593$ oder $m_0/m_b = 4,92$. Diese Werte sind für chemische Raketen noch erreichbar.

Für Flugmanöver, die nicht mit $v = 0$ m/s anfangen, muss man entweder den Wirkungsgrad über das entsprechende Intervall von Δv mitteln oder aber aus den gemittelten Werten der einzelnen Phasen den zugehörigen Wirkungsgrad $\bar{\eta}_A$ für die Anfangs- und Endgeschwindigkeit entsprechend berechnen. Es ist eindeutig, dass für Beschleunigungsmanöver, die nicht bei $v = 0$ m/s beginnen, $\bar{\eta}_A$ größer als 0,65 werden kann.

Möglich wäre die Annahme, dass es für die Beschleunigung von $v = 0$ m/s (z.B. von der Erdoberfläche aus mit der Unterstufe einer Trägerrakete) besser wäre, einen Treibstoff zu nehmen, der mit einem kleineren c_e als technisch möglich ausströmt. Hiergegen ist aber zu sagen, dass mit verringertem c_e , trotz besserem Wirkungsgrad, das Massenverhältnis $m_0/m_b = \exp(\Delta v/c_e)$ stark ansteigt, d.h. schlechter wird. Die Wahl eines Treibstoffes mit kleinerem c_e lohnt sich daher nur, wenn man dann trotz des erhöhten Startgewichtes die erste Trägerstufe billiger einsetzen kann.

Für die elektrischen Antriebssysteme liegen die Verhältnisse anders, da sie nur als Oberstufen zur weiteren Beschleunigung aus der Erdumlaufbahn oder für noch spätere Flugmanöver eingesetzt werden. Für diese Systeme ist oft das Gewicht der elektrischen Energieversorgungsanlage vom Treibstoffgewicht unabhängig. Die für den Antrieb verfügbare Leistung ist allerdings begrenzt. Für solche Antriebssysteme, bei denen man die Ausströmgeschwindigkeit c_e in einem weiten Bereich wählen kann, mag es sich tatsächlich lohnen, c_e entweder stufenweise oder kontinuierlich der jeweiligen Fluggeschwindigkeit anzupassen, um so die begrenzte Leistung optimal zu nutzen.

2.5 Ein- und mehrstufige chemische Trägerraketen

2.5.1 Grenzen einstufiger chemischer Raketen

Wie bereits gezeigt, ist das Antriebsvermögen Δv_{ch} einer einstufigen Rakete definiert als die Geschwindigkeitsänderung, die diese Rakete im kräftefreien Raum erfahren würde. Das Antriebsvermögen ist eine Funktion der effektiven Austrittsgeschwindigkeit c_e des Treibgases und des Massenverhältnisses m_0/m_b aus Raketenmasse vor der Zündung m_0 zur Raketenmasse bei Brennschluss m_b . Für chemische Raketen ist die effektive Austrittsgeschwindigkeit auf ca. 4.500 m/s begrenzt. Außerdem ist es nicht möglich, das Massenverhältnis beliebig groß zu wählen, da die gesamte Rakete nicht nur aus Treibstoff bestehen kann. Damit eine Rakete überhaupt funktionieren kann, benötigt sie neben dem Brennstoff bzw. Treibstoff ein Triebwerk bzw. einen Motor, bestehend aus Düse und Brennkammer (bei Flüssigbrennstoffen zusätzlich zu den Treibstofftanks noch Brennstoff-Förderpumpen, Leitungen, Ventile etc.). Beide Systeme müssen durch eine Struktur gefestigt sein, um die Beschleunigungen und Vibrationen auszuhalten. Daneben sind Steuerungssysteme, Elektronik, Verkleidungen, Stabilisatoren, etc. zu berücksichtigen, deren Masse in die Struktur mit einbezogen wird. In einfachster Weise kann also die Raketenmasse aufgeteilt werden in

$$m_0 = m_M + m_S + m_T + m_L \quad , \quad (2.30)$$

mit der Motorenmasse m_M , Strukturmasse m_S , Treibstoffmasse m_T und Nutzlastmasse m_L . Damit wird

$$\frac{m_0}{m_b} = \frac{m_0}{m_0 - m_T} = \frac{m_M + m_S + m_T + m_L}{m_M + m_S + m_L} = \frac{1}{\sigma + \mu_L} \quad , \quad (2.31)$$

wobei hier das *Strukturmassenverhältnis*

$$\sigma = \frac{m_M + m_S}{m_0} \quad (2.32)$$

und das *Nutzlastverhältnis*

$$\mu_L = \frac{m_L}{m_0} \quad (2.33)$$

eingeführt wurden. Der dimensionslose Faktor σ variiert, je nachdem, ob es sich um sehr stark beschleunigte (militärische) Raketen oder um schwach beschleunigte (bemannte) Trägerraketen handelt, heute ungefähr zwischen 0,2 und 0,05. Er ist demnach vom Beschleunigungsvorgang der Rakete, dem technologischen Fortschritt der Leichtbauweise und auch von der Güte der Raketenkonstruktion abhängig. Je besser die Konstruktion, umso kleiner ist natürlich auch σ . Einige Beispiele zum Strukturmassenverhältnis sind in Tabelle 2.1 enthalten.

	Startmasse [kg]	Startbeschleunigung	σ für die 1. Stufe
Scout	18.100	2,53 g_0	0,089
Ariane 1	202.510	1,22 g_0	0,066
Saturn V	2.850.000	1,19 g_0	0,048

Tabelle 2.1. Strukturmassenverhältnis für einige Trägerraketen.

Das Antriebsvermögen errechnet sich somit zu

$$\Delta v_{ch} = c_e \ln \frac{1}{\sigma + \mu_L} \quad . \quad (2.34)$$

In Abb. 2.3 sind für vier Strukturmassenverhältnisse die Nutzlastverhältnisse μ_L als Funktion von $\Delta v_{ch}/c_e$ dargestellt. Daraus ist ersichtlich, dass selbst für äußerst günstige σ -Werte das Antriebsvermögen auf maximal dem dreifachen der effektiven Austrittsgeschwindigkeit begrenzt bleibt. Da außerdem ein von Null verschiedenes Nutzlastverhältnis wünschenswert ist, gilt für den heutigen Stand der Raketentechnologie

$$\Delta v_{ch,max} \leq 3c_e \quad . \quad (2.35)$$

Die in Abb. 2.2 eingezeichnete „praktische Grenze“ von $\Delta v_{ch}/c_e=2,8$ für einstufige Raketen entspricht einem Wert $\sigma + \mu_L = 0,05 + 0,01 = 0,06$. Die effektive Austrittsgeschwindigkeit c_e ist durch den spezifischen Energieinhalt chemischer Brennstoffe ε_T begrenzt. Werden außerdem die Verluste infolge des inneren Wirkungsgrades eines Raketenantriebes berücksichtigt, so ist heute die maximal mögliche Austrittsgeschwindigkeit $c_e < 4.500$ m/s. Die tatsächlichen Werte für heutige Trägerraketen

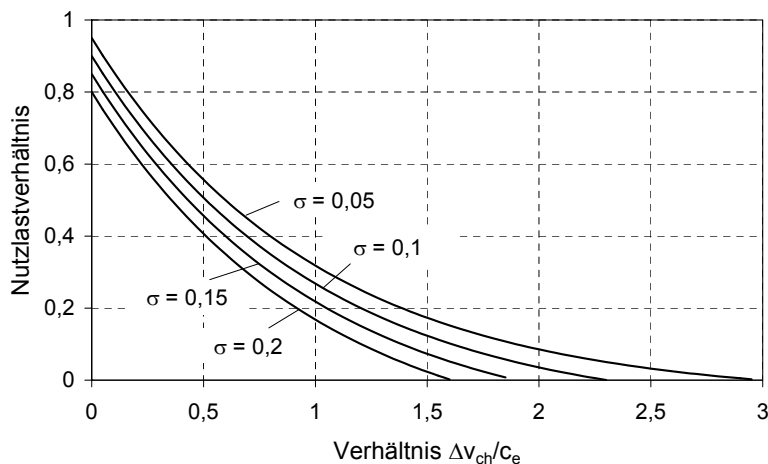


Abb. 2.3. Nutzlastverhältnis μ_L als Funktion von $\Delta v_{ch}/c_e$.

im Atmosphärenbereich der Erde liegen sogar etwas unter 3.000 m/s. Damit ist für die momentan modernen Trägerraketen das Antriebsvermögen in einstufiger Bauweise begrenzt auf ca.

$$\Delta v_{\text{ch,max}} \leq 9 \text{ km/s} \quad (2.36)$$

Um eine Rakete von der Erdoberfläche in eine erdnahe Umlaufbahn zu bringen, sind jedoch, wie noch gezeigt werden soll, Δv -Werte von dieser Größe und etwas mehr notwendig. D.h. aber, dass beim gegenwärtigen Stand der Technik mit einer einstufigen Rakete kaum eine nennenswerte Nutzlast in den Raum transportiert werden kann. Aus diesem Grund wurde das Prinzip der Raketenstufung eingeführt, das eine entscheidende Verbesserung des tatsächlichen und maximal möglichen Antriebsvermögens gestattet. Mit dem Stufenprinzip wurde demnach die Raumfahrt überhaupt erst möglich. Neuerdings zielen die Entwicklungstendenzen darauf ab, die effektive Austrittsgeschwindigkeit c_e nahe an den chemisch höchstmöglichen Wert von ca. 4.500 m/s mittels Flüssig-Wasserstoff-/Flüssig-Sauerstoff-Hochdrucktriebwerken anzugleichen oder mittels luftatmenden Hybridantrieben (Raketen-Staustrahl-Turbinen) die Atmosphäre als Stützmasse auszunützen, um damit eine einstufige Trägerrakete zu ermöglichen.

2.5.2 Stufenprinzip und Arten der Raketenstufungen

Für viele Anwendungen, also nicht nur für die Raumfahrt, war es seit jeher von Bedeutung, Wege zu finden, um die Leistungsgrenze (oder Antriebsvermögensgrenze) einer Rakete zu überschreiten, d.h. bessere Nutzlastverhältnisse μ_L und größere Endgeschwindigkeiten oder Reichweiten zu erzielen. Zu diesem Zweck liegt es nahe, eine kleinere Rakete als „Nutzlast“ (Oberstufe) mit einer größeren Rakete (Unterstufe=1. Stufe) auf deren Endgeschwindigkeiten Δv_1 zu beschleunigen, dann die Oberstufe von der leeren Unterstufe zu trennen und so die Endgeschwindigkeit der Oberstufe zu der der Unterstufe zu addieren. Dadurch wird das Antriebsvermögen der Unterstufe (Δv_1) zwar gegenüber einer einstufigen Rakete reduziert, doch ist jetzt das gesamte Antriebsvermögen durch die Summe

$$\Delta v_{\text{ges}} = \Delta v_1 + \Delta v_2 = c_{e1} \ln \left(\frac{m_{0,1}}{m_{b,1}} \right) + c_{e2} \ln \left(\frac{m_{0,2}}{m_{b,2}} \right) \quad (2.37)$$

gegeben, mit dem Antriebsvermögen der Oberstufe Δv_2 und der Startmasse der Oberstufe $m_{0,2}$ ($m_{0,2} \leq m_{b,1}$). Es ist somit meist größer als der Höchstwert einer einzigen Stufe mit gleicher Nutzlast und Treibstoffmasse. Dieses nahe liegende Prinzip der „Tandemstufung“ war schon vielen früheren Raketenexperimentatoren und auch Science-Fiction-Autoren bekannt. Es wurde von Ziolkowsky und ihm nachfolgenden Raketenpionieren ausgearbeitet.

Das Grundprinzip jeder Raketenstufung besteht also darin, unnötig gewordene Masse, wie beispielsweise leere Treibstoff- und Oxidator-Behälter, anfänglich benötigte große Raketentriebwerke, Strukturmassen bzw. Teile davon usw., stufenweise abzuwerfen, um die Antriebsenergie möglichst nur zum Beschleunigen der notwendigen Nutzlastmasse zu verwenden. Dadurch wird der insgesamt erreichbare Nutzlastanteil oder das Nutzlastmassenverhältnis μ_L und die erreichbare Endgeschwindigkeit bzw. Reichweite wesentlich erhöht. Im Folgenden werden verschiedene Möglichkeiten zum Erreichen dieses Zieles erläutert und die entsprechenden Grundgleichungen angegeben. Man unterscheidet dem Prinzip nach zwischen zwei Arten der Raketenstufung, die Stufung in Serie („Tandemstufung“) und die „Parallelstufung“.

2.5.3 Tandemstufung

Im ersten klassischen Fall der *Tandemstufung* erfolgt die Stufung durch Überinandersetzen von Raketen, wobei die Stufenmasse im Allgemeinen von der Unterstufe zur Oberstufe hin abnimmt und die Oberstufe jeweils erst nach Abwurf der unteren Stufe aktiviert wird (s. Abb. 2.4). Sind die Massen der einzelnen Raketenstufen mit $m_1, m_2, \dots, m_n$ und die Nutzlastmasse mit m_L gegeben, so folgt die Gesamtmasse bzw. Startmasse dieser n-stufigen Rakete zu

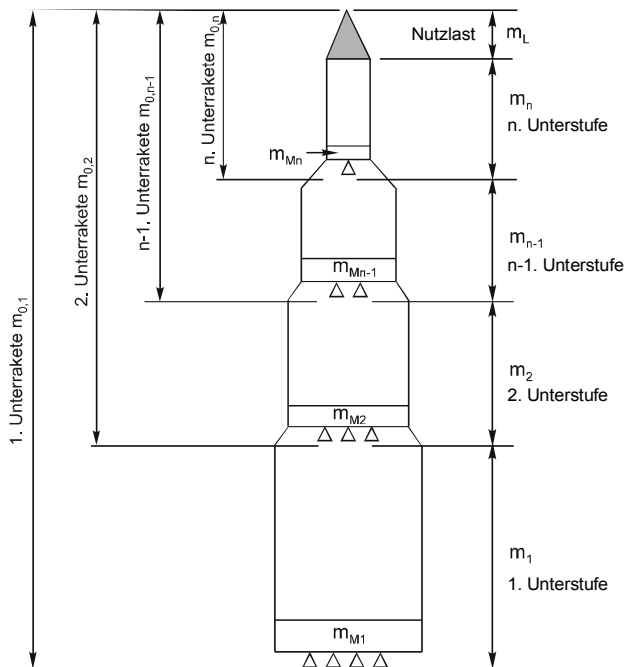


Abb. 2.4. Raketenstufung in Serie (Tandemstufung).

$$m_0 = m_1 + m_2 + \dots + m_{n-1} + m_n + m_L = \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) + m_L \quad . \quad (2.38)$$

Die Masse einer Raketenstufe m_i kann wiederum unterteilt werden in

$$m_i = m_{Si} + m_{Mi} + m_{Ti} \quad , \quad (2.39)$$

wobei m_{Si} die Strukturmasse, m_{Mi} die Motorenmasse und m_{Ti} die Treibstoffmasse der i -ten Raketenstufe darstellen. Die Nettomasse der i -ten Stufe, also nach Brennschluss und unter der Voraussetzung, dass der gesamte Treibstoff dieser Stufe verbraucht wurde, ist

$$m_{bi} = m_i - m_{Ti} = m_{Si} + m_{Mi} \quad . \quad (2.40)$$

Die tatsächliche Masse der Rakete nach Brennschluss der i -ten Stufe ist jedoch

$$m_{bi}^* = m_{bi} + m_{i+1} + \dots + m_n + m_L \quad (2.41)$$

und nach Abtrennung der unnötig gewordenen, leeren i -ten Stufe mit Brennschlussmasse m_{bi} beträgt die Raketenmasse noch

$$m_{0,i+1} = m_{i+1} + m_{i+2} + \dots + m_n + m_L \quad . \quad (2.42)$$

Beispielsweise ist die nach Abtrennung der 1. Stufe noch vorhandene Raketenmasse $m_{0,2}$, nach Abtrennung der 2. Stufe noch $m_{0,3}$, usw. Damit folgt allgemein unter Einführung der Begriffe der Unterraketen $m_{0,i}$ ($i=1, 2, \dots, n$) für eine n -stufige Rakete, das Antriebsvermögen als Summe der Antriebsvermögen aller Unterraketen:

$$m_0 = m_{0,1} = \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) + m_L, \quad \text{1. Unterrakete (Startmasse),} \quad (2.43)$$

$$m_{0,2} = \left(\sum_{i=2}^n m_i \right) + m_L, \quad \text{2. Unterrakete,} \quad (2.44)$$

$$m_{0,i} = \left(\sum_{i=i}^n m_i \right) + m_L, \quad \text{i. Unterrakete,} \quad (2.45)$$

$$m_{0,n} = m_n + m_L, \quad \text{n. Unterrakete,} \quad (2.46)$$

$$m_{0,n+1} = m_L, \quad \text{Nutzlastmasse.} \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned}\Delta v &= c_{e1} \ln \left(\frac{m_{0,1}}{m_{0,1} - m_{T1}} \right) + c_{e2} \ln \left(\frac{m_{0,2}}{m_{0,2} - m_{T2}} \right) + \dots + c_{en} \ln \left(\frac{m_{0,n}}{m_{0,n} - m_{Tn}} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n c_{ei} \ln \left(\frac{m_{0,i}}{m_{0,i} - m_{Ti}} \right) .\end{aligned}\quad (2.48)$$

Es wird nun ein Strukturmassenverhältnis für jede Raketenstufe i definiert mit

$$\sigma_i = \frac{m_{0,i} - m_{Ti} - m_{0,i+1}}{m_{0,i}} = \frac{m_{Mi} + m_{Si}}{m_{0,i}} , \quad (2.49)$$

ähnlich wie bei der einstufigen Rakete, nur dass jetzt die Summe aller Oberstufen plus der Nutzlastmasse die „Nutzlast“ der i -ten Unterrakete darstellt. Anders ausgedrückt, ist das hier definierte Strukturmassenverhältnis das Verhältnis der momentan aktiven, zum Antrieb eingesetzten Struktur- und Motorenmasse zur gesamten, momentan beschleunigten Raketenmasse. Es ist also

$$m_{0,i} - m_{Ti} = \sigma_i m_{0,i} + m_{0,i+1} = \sigma_i m_{0,i} + m_{0,i} - m_i . \quad (2.50)$$

Es ergibt sich somit für das Antriebsvermögen

$$\Delta v = \sum_{i=1}^n c_{ei} \ln \left(\frac{m_{0,i}}{\sigma_i m_{0,i} + m_{0,i+1}} \right) = \sum_{i=1}^n c_{ei} \ln \left(\frac{1}{\sigma_i + \frac{m_{0,i+1}}{m_{0,i}}} \right) . \quad (2.51)$$

Wenn die Massen der Unterraketen $m_{0,i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) auf die Startmasse m_0 bezogen werden, folgt mit der Definition von Relativmassen

$$\mu_i = \frac{m_{0,i}}{m_0} , \quad (2.52)$$

für das Antriebsvermögen einer n -stufigen Rakete:

$$\Delta v = \sum_{i=1}^n c_{ei} \ln \left(\frac{1}{\sigma_i + \frac{\mu_{i+1}}{\mu_i}} \right) , \quad (2.53)$$

$$\mu_1 = 1 , \quad (2.54)$$

$$\mu_{n+1} = \mu_L = \frac{m_L}{m_0} . \quad (2.55)$$

Für eine einstufige Rakete ist $n = 1$, $\sigma_1 \equiv \sigma$ und $\mu_2 / \mu_1 = \mu_L / 1 = \mu_L$ zu setzen, so dass diese Formel in die bekannte Ziolkowsky-Gleichung übergeht.

In den Abbildungen 2.5–2.6 sind für die Trägerraketentypen „Ariane 1“ und „Saturn V“ die technischen Daten zusammengestellt. Es handelt sich hier um typische Tandemstufungen. Aus diesen Daten können die Werte für $c_{ei} = I_{si} \cdot g_0$ – zumindest Mittelwerte, weil in Bodennähe der spezifische Impuls im Allgemeinen etwas kleiner ist als unter Vakuumbedingungen – und die Massen der Unterraketen $m_{0,i}$ sowie die Treibstoffmassen m_{Ti} entnommen und somit nach Gl. (2.48) oder (2.53) unter Zuhilfenahme der Gleichungen (2.49) und (2.52) das Antriebsvermögen Δv berechnet werden.

Um die Vorteile der Raketenstufung noch einmal zu veranschaulichen, ist in Abb. 2.7 mit den Ariane-1-Daten (s. Tabelle 2.2) der Zusammenhang zwischen Nutzlastverhältnis $\mu_L = m_L / m_0$ und Antriebsvermögen Δv einer 1-, 2-, 3- und 4-stufigen Rakete einander gegenübergestellt. Es ist ersichtlich, dass das Antriebsvermögen der einstufigen Rakete, d.h. wenn außer Struktur- und Motorenmasse der gesamte restliche Anteil der Startmasse der Ariane 1 aus Treibstoff bestünde, auf ca. 6,5 km/s begrenzt bleibt. Bei einem Nutzlastverhältnis von $\mu_L = 0,01$ erreicht die einstufige Rakete ein Antriebsvermögen von $\Delta v_{1st} = 6,2$ km/s, die zweistufige Rakete 8,6 km/s und die dreistufige Rakete 11,3 km/s.

In Abb. 2.8 ist in entsprechender Weise, jedoch unter Verwendung der Saturn-V-Daten das Nutzlastverhältnis μ_L als Funktion des normierten Antriebsvermögens für ein- und mehrstufige Raketen dargestellt. Die eingezeichneten Kreise entsprechen den erreichten Nutzlast- und Antriebsvermögenswerten der angegebenen Raketen. Die benutzten Werte für die Strukturgewichts- oder Strukturmassenverhältnisse σ_i entsprechen für $i = 1, 2, 3$ denen der Saturn-V-Raketenstufen, und für $i \geq 4$ wurden sie $\sigma_i = 0,07$ gesetzt bzw. extrapoliert.

	1. Stufe	2. Stufe	3. Stufe	4. Stufe
m [kg]	153.270	36.271	9.369	807
m_T [kg]	140.000	33.028	8.238	685
m_{SM} [kg]	13.270	3.243	1.131	122
m_0 [kg]	202.510	49.240	12.969	3.600
m_b^* [kg]	62.510	16.212	4.731	2.915
c_e [m/s]	2.400	2.585	3.998	2.708
σ [–]	0,06553	0,06586	0,08721	0,03389
μ [–]	1,0	0,24315	0,06404	0,01778
Δv [m/s]	2.821	2.872	4.032	572

Tabelle 2.2. Daten der Ariane 1-Rakete (Nutzlast Kickstufe $m_L = 2.793$ kg, Startmasse $m_0 = 202.510$ kg).

Diese Werte dürften auch heute nur geringfügig übertroffen werden, so dass die einhüllende Kurve etwa die gegenwärtig erreichbare Grenze des Nutzlastverhältnisses über dem normierten Antriebsvermögen darstellt. Selbst bei höherer Stufung mit zunehmendem Antriebsvermögen wird demnach das Nutzlastverhältnis immer kleiner und kleiner.

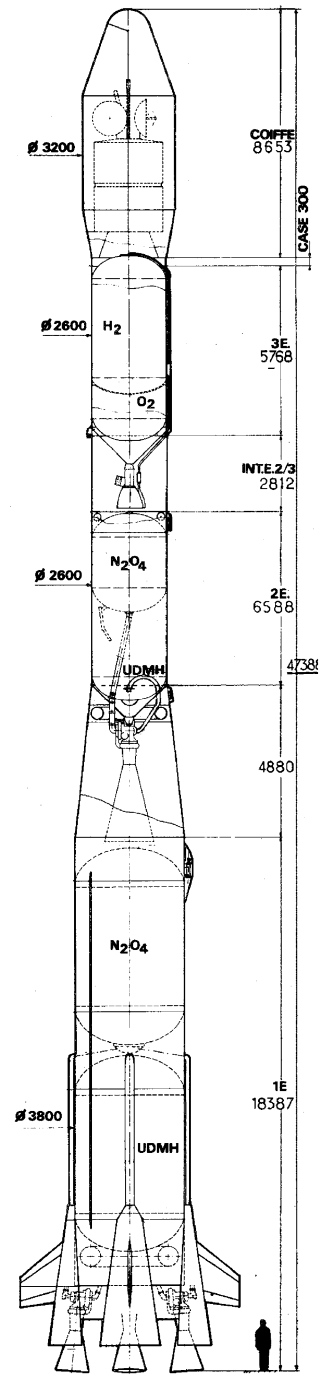
Dies ist leicht ersichtlich, da für eine n-stufige Rakete, bei der jede Stufe dieselbe Austrittsgeschwindigkeit c_e und dasselbe Massenverhältnis $R = m_{0i}/(m_{0i} - m_{Ti})$ hat, der Zusammenhang gilt:

$$\Delta v = n c_e \ln(R) \quad , \quad (2.56)$$

oder
$$R^n = e^{\Delta v / c_e} \quad (2.57)$$

und
$$\mu_L = \frac{m_L}{m_0} \approx R^{-n} \quad . \quad (2.58)$$

Das heißt, dass zwar die Geschwindigkeitszunahme linear mit der Stufenzahl n zunimmt, aber das Nutzlastverhältnis exponentiell mit n abnimmt.



Gesamtsystem

Auftraggeber-Management	CNES, Toulouse
Systemintegration	AEROSPATIALE, Les Mureaux
Entwicklungszeitraum	1973–1980
Entwicklungskosten (+4 Versuchgeräte)	1,3 Mrd. DM
Startmasse	200.933 kg
Höhe	47,4 m
Max. Durchmesser	3,8 m
Nutzlast 185 km-Orbit	4.500 kg
geostationäre Transferbahn	1.500 kg
Nutzlast-Volumen	35 m ³
Masse der Nutzlast-Verkleidung	810 kg

1. Stufe (L 140)

Höhe	18,39 m
Durchmesser der Tanks	3,8 m
Spannweite Stabilisierungsflossen	7,6 m
Gesamtmasse (ohne Stufenadapter)	153.270 kg
Treibstoffmasse ($UDMH/N_2O_4$)	140.000 kg
Schub bei Start	2.400.000 N
bei Brennschluss	2.720.000 N
Triebwerke (4)	SEP VIKING 2
Spez. Impuls am Boden / Vakuum	239 s / 278 s
Brennkammerdruck	53–54 bar
Triebwerksmasse	695 kg
Brennzeit	138 s
Masse Stufenadapter (h=3.848 m)	600 kg

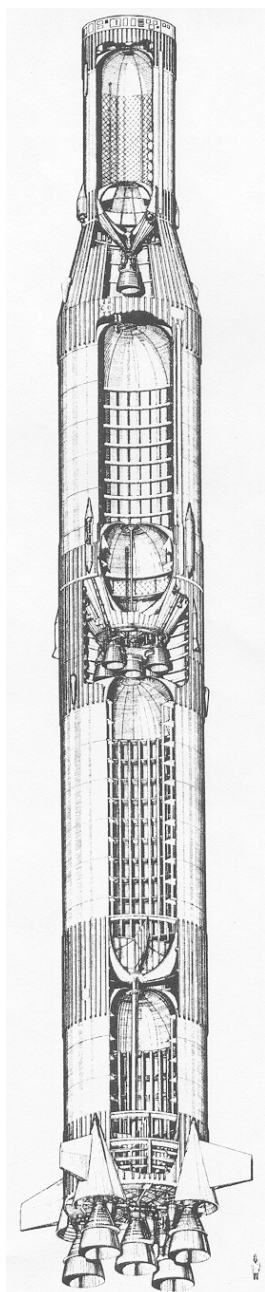
2. Stufe (L33)

Höhe	11,49 m
Durchmesser	2,6 m
Gesamtmasse (ohne Stufenadapter)	36.271 kg
Treibstoffmasse ($UDMH/N_2O_4$)	33.028 kg
Schub im Vakuum	710.000 N
Triebwerk	SEP VIKING 4
Spez. Impuls im Vakuum	285 s
Brennkammerdruck	53 bar
Triebwerksmasse	750 kg
Brennzeit	130 s
Masse Stufenadapter (h=2.8 m)	340 kg

3. Stufe (H 8)

Höhe	8,88 m
Durchmesser	2,6 m
Gesamtmasse (ohne Lenkausrüstungsteil)	9.369 kg
+ Ausrüstungsabteil	273 kg
Treibstoffmasse (LH_2/LO_2)	8.238 kg
Schub im Vakuum	59.000 N
Triebwerk	SEP (MBB) HM-7
Brennkammerdruck	30 bar
Triebwerksmasse	140 kg
Brennzeit	563 s

Abb. 2.5. Trägersystem Ariane 1.

**Gesamtsystem**

Auftraggeber	NASA, Washington
Entwicklungsleitung	NASA Marshall Space Flight Cent.
Entwicklungszeitraum	1962–1967
Startmasse ohne Nutzlast	2.728.500 kg
Höhe ohne Nutzlast	85,7 m
Max. Durchmesser	ca. 13 m
Nutzlast 500 km-Orbit	120.000 kg
Fluchtgeschwindigkeit	45.000 kg

1. Stufe (S-IC)

Höhe	42 m
max. Durchmesser	ca. 13 m
Spannweite Stabilisierungsflossen	ca. 18 m
Gesamtmasse	2.145.000 kg
Treibstoffmasse (LOX/RP-1)	2.010.000 kg
Schub bei Start	5 x 6.700.000 N
bei Brennschluss	5 x 7.600.000 N
Triebwerke (5)	Rocketdyne-F-1
Spez. Impuls am Boden / Vakuum	254 s / 289 s
Brennzeit	150 s

2. Stufe (S-II)

Höhe	25 m
Durchmesser	10,1 m
Gesamtmasse	458.700 kg
Masse Stufenadapter zur 1. Stufe	3.400 kg
Treibstoffmasse (LOX/LH2)	416.000 kg
Schub im Vakuum	5 x 1.020.000 N
Triebwerke	5 x Rocketdyne J-2
Spez. Impuls im Vakuum	430 s
Brennzeit	400 s

3. Stufe (S-IVB)

Höhe mit Adapter	17,8 m
Durchmesser	6,61 m
Gesamtmasse	117.250 kg
Masse Stufenadapter (zur 2. Stufe)	1.800 kg
Treibstoffmasse (LOX/LH2)	104.500 kg
Schub im Vakuum	1.020.000 N
Triebwerk	Rocketdyne J-2
Spez. Impuls im Vakuum	430 s
Brennzeit	500 s

Abb. 2.6. Trägersystem Saturn V.

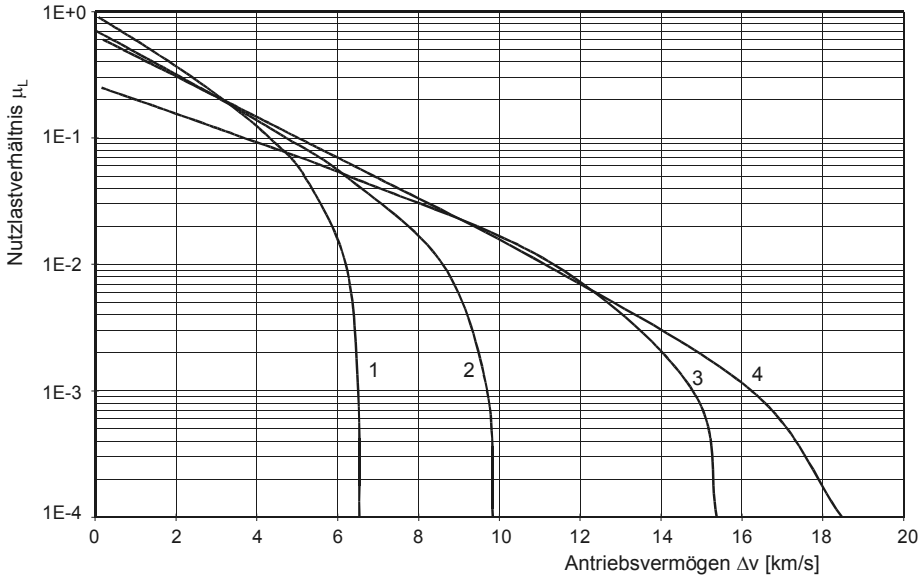


Abb. 2.7. Nutzlastmassenverhältnis einer 4-stufigen Rakete (Werte für μ_i und σ_i wurden aus Tabelle 2.2 entnommen. Die Zahlen neben den Kurven geben die jeweiligen Stufenzahlen an).

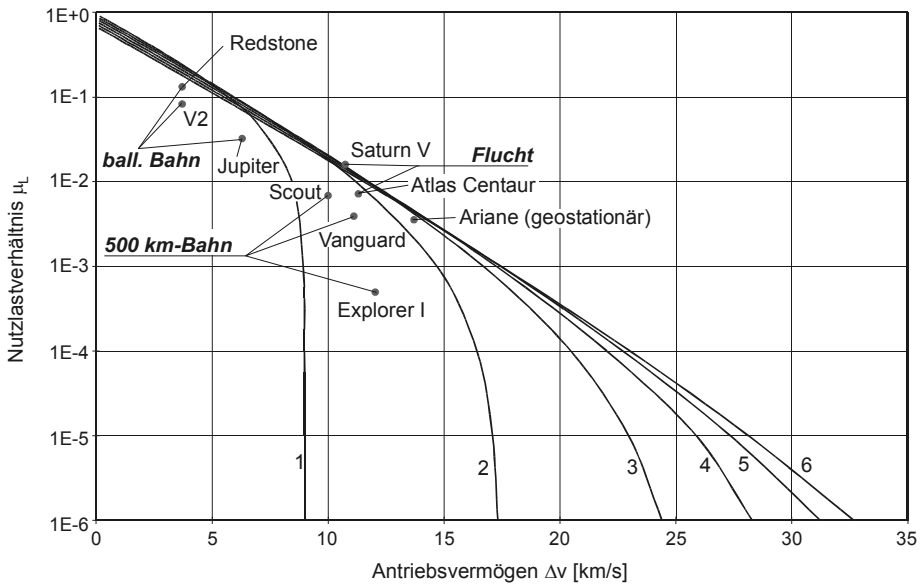


Abb. 2.8. Nutzlastmassenverhältnis von mehrstufigen Raketen mit $\sigma_1=0,05$, $\sigma_2=\sigma_3=0,06$ (in Anlehnung an Saturn V) $\sigma_4=\sigma_5=\sigma_6=0,07$, $c_{ei}=3$ km/s. Die Zahlen neben den Kurven geben die jeweiligen Stufenzahlen an.

2.5.4 Parallel-Stufung

Im Falle der *Parallel-Stufung* werden die Einzelstufen parallel angeordnet und auch parallel aktiviert, wobei allerdings oft ein Teil der Parallelstufen kürzere Zeit betrieben und dann abgeworfen wird. Der wesentliche Vorteil dieser Anordnung besteht darin, dass das gesamte installierte Triebwerksgewicht während der ganzen Antriebszeit voll ausgenutzt wird. Kein Triebwerk muss als „tote“ Nutzlast während der Antriebsphase mitgeführt werden. Hierdurch sind größere Startbeschleunigungen auf Gewicht sparende Art möglich oder allgemein höhere Beschleunigungen, falls dies erwünscht ist. Dies führt zu geringeren Verlusten im Gravitationsfeld der Erde, da die Rakete schneller eine horizontale Fluglage erreicht. Ebenso kann durch ein verhältnismäßig einfaches Anbringen von zusätzlichen Boostern das System sehr flexibel auf die jeweilige Nutzlast angepasst werden (s. Abb. 2.9). Dem stehen Strukturbelastungsprobleme und erhöhte aerodynamische Widerstandsverluste des allgemein kompakteren Geräts gegenüber.

Ein weiterer Nachteil entsteht dadurch, dass die meistens nicht variablen Düsenendquerschnitte der Triebwerke derjenigen Stufen, die über eine große Antriebsphase hinweg vom Start an mitarbeiten, schlechter an ihren breiten Einsatzbereich angepasst sind, als dies bei Tandemstufen mit einem schmalen Einsatzbereich der Fall ist. Dies führt zu einem Verlust an spezifischem Impuls bzw. effektiver Austrittsgeschwindigkeit.

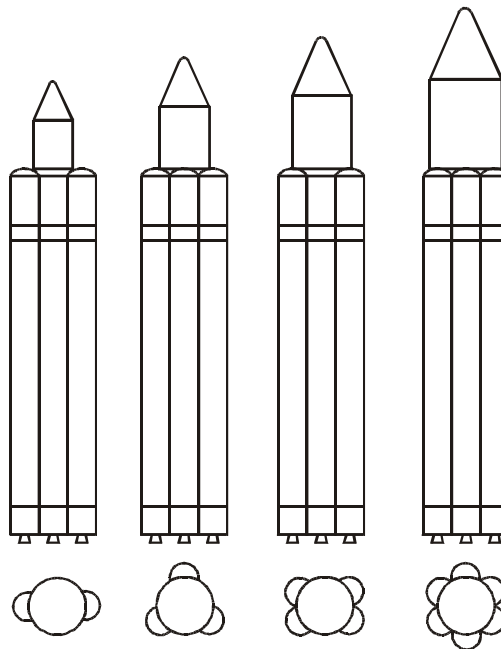


Abb. 2.9. Prinzip der Parallelstufung, dargestellt an der Endversion mit bis zu 6 Außenmodulen.

Eine zusätzliche technische Verbesserung der parallel gestuften Raketen mit Flüssigtreibstoff ist durch so genannten Treibstofftransfer möglich. Hierbei sind alle Triebwerke durch eine Sammelleitung mit allen Stufentanks verbunden. Dadurch ist es möglich, dass zwar alle Triebwerke gleichzeitig arbeiten, aber jeweils nur aus denjenigen Stufentanks versorgt werden, die als nächste abgeworfen werden. Hierdurch muss nur ein Minimum an leerer Tankmasse beschleunigt werden. Flexibilität in Bezug auf die Nutzlast und geringe Entwicklungskosten durch Typisierung von Struktur und Triebwerken sind weitere Merkmale dieses Konzepts.

Zur mathematischen Darstellung der Parallelstufung werden v parallel laufende Triebwerke mit verschiedenem spezifischen Impuls (I_{sv}) und Schub (F_v) angenommen. Damit ist der Gesamtschub

$$F = \sum_v F_v, \text{ mit } F_v = \dot{m}_v c_{ev} . \quad (2.59)$$

Das Antriebsvermögen Δv dieser parallel gestuften Rakete mit Gesamtmasse $m(t)=m_R$ ist dann:

$$dv = -c_e \frac{dm}{m} = -\frac{F}{\dot{m}} \frac{dm}{m} = \frac{F}{m} dt , \quad (2.60)$$

$$\Delta v = \int_{t=0}^{t_b} \frac{F}{m(t)} dt , \quad (2.61)$$

wobei die momentane Raketenmasse $m(t)$ – unter der Voraussetzung, dass $\dot{m}$ zeitlich konstant bleibt – gegeben ist durch

$$m(t) = m_0 - \dot{m} t . \quad (2.62)$$

Da jetzt mehrere verschiedene Raketenmotoren berücksichtigt werden, setzt sich der gesamte zeitliche Gasdurchsatz aus den Durchsätzen der einzelnen Triebwerke zusammen, d.h.

$$\dot{m} = \sum_v \dot{m}_v . \quad (2.63)$$

Unter der Annahme, dass sowohl F als auch $\dot{m}$ zeitlich konstant sind, lässt sich das Integral für Δv leicht lösen. Es folgt

$$\Delta v = \frac{F}{m_0} \int_{t=0}^{t_b} \frac{1}{1 - \frac{\dot{m}}{m_0} t} dt = \frac{F}{\dot{m}} \ln \left(\frac{m_0}{m_b} \right) . \quad (2.64)$$

Dabei ist $m_b = m_0 - \dot{m}t_b$ wieder die Raketenmasse bei Brennschluss. Wird der Schub und der Gesamtmassendurchsatz (Brennstoffverbrauch pro Zeiteinheit) durch die obigen Beziehungen ersetzt, so folgt:

$$\Delta v = \frac{\sum_v \dot{m}_v c_{ev}}{\sum_v \dot{m}_v} \ln \left(\frac{m_0}{m_b} \right) . \quad (2.65)$$

Das heißt, dass die effektive Austrittsgeschwindigkeit einer parallel gestuften Rakete für jede einzelne Stufe wegen

$$\Delta v = c_e \ln \left(\frac{m_0}{m_b} \right) \quad (2.66)$$

gegeben ist durch

$$c_e = \frac{\sum_v \dot{m}_v c_{ev}}{\sum_v \dot{m}_v} = \frac{\sum_v F_v}{\sum_v \dot{m}_v} . \quad (2.67)$$

Damit lässt sich nun jede kombinierte oder parallele Stufung rechnerisch so wie eine Tandemstufung behandeln.

Eine besondere Stufungsart stellt die Kombination von Tandem- und Parallelstufung dar. Sie wird bei größeren Satellitenträgern praktiziert, z.B. „Space Shuttle“ (Abb. 2.10) und „Ariane 5“ (Abb. 2.12). Bei der „Titan IIIC“ (Abb. 2.13) wird ein Paar Feststoffbooster parallel zur Zentraleinheit eingesetzt, bei „Wostok“ (Abb. 2.14) werden ausschließlich Flüssigtreibstoffe verwendet, jedoch ohne Treibstofftransfer. Die Gründe für diese Kombinationen liegen meist darin, dass eine bereits vorhandene Erststufe, die zunächst für eine kleinere Mission ausgelegt war, durch Parallelschaltung einiger Booster während der ersten Flugphase wesentlich verstärkt wird. Außerdem wird die Gesamtlänge der Rakete nur wenig vergrößert, so dass die meisten Teile der alten Startanlage weiterverwendet werden können.

Durch die kürzere Gesamtlänge der Rakete im Vergleich zur Tandemanordnung werden die Biegemomente in der Struktur nicht stark vergrößert, was sich in einem weniger veränderten Strukturgewicht niederschlägt. Die Vor- und Nachteile der Tandem- und der Parallelstufung sind in Tabelle 2.3 zusammengefasst.

Weitere Stufungsarten sind die Teilstufungen von Tankmasse (*Tankstufung*), Triebwerksmasse (*Triebwerksstufung*) oder Treibstoffmasse (*Treibstoffstufung*). Diese Teilstufungsarten können sowohl mit Tandem- als auch mit Parallelstufungen verbunden werden.

Die Tankstufung kommt in Frage, wenn bei Treibstoffen mit geringer Dichte (z.B. flüssiger Wasserstoff) gegen Ende der Antriebsphase einer Stufe besonders

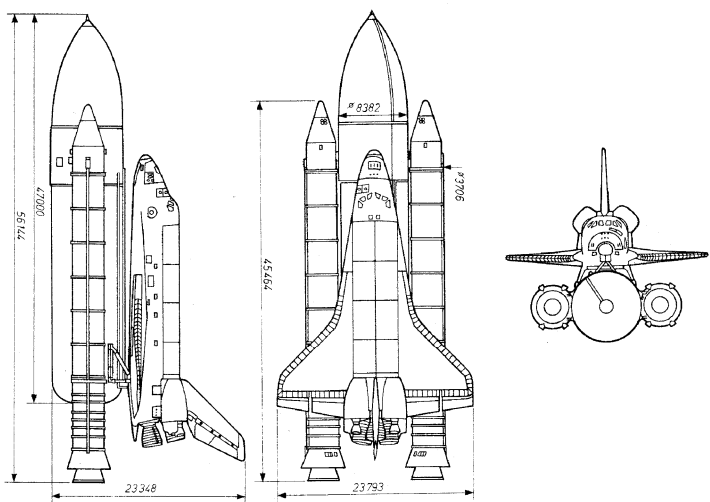
	<i>Tandemstufung</i>	<i>Parallelstufung</i>
Nutzung von m_M	teilweise	voll
Startbeschleunigung	kleiner	größer
→ Strukturbelastung	kleiner	größer
→ Biegemomente	größer	kleiner
Gravitationsverluste	größer	kleiner
Aerodynamische Verluste	kleiner	größer
Düsenanpassung	besser	(schlechter)

Tabelle 2.3. Vor- und Nachteile der einzelnen Stufungsarten.

viel leere Behältermasse und leeres Volumen entsteht (z.B. Space-Shuttle-Oberstufe).

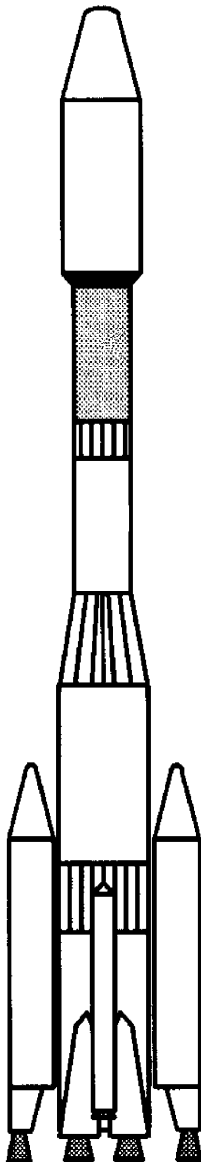
Die Triebwerksstufung wird bei Flüssigkeitsraketen in der ersten Stufe verwendet, um eine ausreichende Startbeschleunigung zu erzielen und doch gegen Ende der Antriebsphase ein hohes Nutzmassenverhältnis ohne die schweren Boostertriebwerke zu erreichen (z.B. „Atlas“, Abb. 2.15).

Eine erst seit 1971 diskutierte Stufungsart stellt die Treibstoffstufung dar. Hier wird bei Stufenbrennschluss nur vom Treibstoff hoher Dichte zu solchem mit niedrigerer Dichte, dafür aber höherer spezifischer Energie umgeschaltet (z.B. 1. Kerosin (oder Propan) und flüssiger Sauerstoff, 2. flüssiger Wasserstoff und flüssiger Sauerstoff). Dabei wird keine Masse abgeworfen, und dieselben Triebwerke werden für beide Treibstoffsorten eingesetzt (Dual Fuel Propulsion). Diese Stufungsart könnte eines Tages aus Gründen der Wirtschaftlichkeit und Zuverlässigkeit die Stufentrennung bei großen Trägerraketen überflüssig machen.



Gesamtsystem			
Man.:	NASA, Johnson Space Center	Entwicklungszeitraum	1972–1979
Startmasse (29,5 t Nutzlast)	1.992.500 kg	Höhe 59 m	
Nutzlast 278 km-Orbit	29.500 kg	Max. Nutzlast für Rückflug	14.500 kg
Besatzung	3–7 (10)	Missionsdauer	bis 7 (30) Tage
Orbiter			
Höhe	37,2 m	Spannweite	23,8 m
Bauhöhe Leitwerk	17,4 m	Flügelfläche	250 m ²
L/D-Verhältnis	1,20	Eintrittswinkel	34,5°
Landegeschwindigkeit	350 km/h	Gesamtmasse (29,5 t Nutzlast)	110.900 kg
Trockengewicht	68.060 kg	Besatzung	550 kg
Resttreibstoffe – Flüssigkeiten	1.620 kg	Verlustmassen	1.800 kg
Treibstoffe für OMS und RCS	9.370 kg	Landemasse ohne Nutzlast	70.800 kg
Struktur	22.450 kg	Wärmeschutz	11.400 kg
Land- und Dock-Einrichtungen	4.300 kg	Haupttriebwerke und Ausrüstung	12.000 kg
Hilfstriebwerkssystem	2.370 kg	Elektr. Energieversorgung	3.670 kg
Hydrauliksystem	2.370 kg	Steuerruder System	835 kg
Elektronik-Ausrüstung	2.050 kg	Klimasystem	1.940 kg
Besatzungs- u. Missionsaur.	630 kg	Reserve	5.700 kg
OMS-System (Orbital Maneuvring System)			
Treibstoffe	N2O4/MMH	Schub2 x 26.700 N	
Spezifischer Impuls	308 s	Antriebsverm. je zusätzl. OMS-Kit	152 m/s
RCS System			
Triebwerke (Hydrazin)	38 Marquardt	Schub je Triebwerk	3.870 N
Energieversorgung			
Erzeugung 3 Brennstoffzellen mit je 7 (max. 10) kW		3 Hilfsgeneratoren (Hydrazin-Turbine)	je 5 kW
Speicherung 3 NiCd-Batterien, 10 Ah		Hydrauliksystem 4 x 150 PS-Hydrazin-Turbinen	
Datenverarbeitung 5 unabhängige Bordrechner			
Haupttriebwerk (SSME, LOX/LH2)			
Triebwerksmasse	2.880 kg	Schub bei Start	1.668.000 N
Schubregelbereich	50%...109%	Schub im Vakuum	2.277.000 N
Baulänge des Triebwerks	4,3 m	Spez. Impuls (min.)	455 s
Brennkammerdruck	200 bar	Brennzeit	480 s
Feststoff-Booster			
Höhe / Durchmesser	45,4 m / 3,71 m	Gesamtmasse	je 573.700 kg
Leergewicht	je 82.500 kg	Schub am Boden	je 11.830.000 N
Spez. Impuls	295 s	Brennzeit	120 s
Trennhöhe	40 km		
Externe Tankeinheit			
Höhe / Durchmesser	46,85 m / 8,38 m	Gesamtmasse (betankt)	734.200 kg
Leergewicht	31.300 kg	Tankvolumen	LOX 555 m ³ , LH2 1.535 m ³

Abb. 2.10. Trägersystem U.S. Space Shuttle.

**Gesamtsystem**

Startmasse	420.000 kg
Höhe	58,4 m
Max. Durchmesser	4,0 m
Nutzlast geostationäre Transferbahn	4.170 kg

1. Stufe (L 220)

Höhe / Durchmesser	23,60 m / 3,8 m
Gesamtmasse	251.000 kg
Treibstoffmasse (UH25/N ₂ O ₄)	233.000 kg
Schub bei Start	677.000 N
bei Brennschluss	758.000 N
Triebwerke (4)	VIKING5C
Spez. Impuls am Boden / Vakuum	249 s / 278 s
Brennzeit	205 s

+ 2 Feststoffbooster (PAP)

Höhe / Durchmesser	12,2 m / 1,0 m
Masse je Booster	12.600 kg
Treibstoffmasse je Booster (CTPB)	9.500 kg
Schub	720.000 N
Spez. Impuls am Boden	241 s
Brennzeit	34 s

+ 2 Flüssigtreibstoffbooster (PAL)

Höhe / Durchmesser	18,6 m / 2,2 m
Masse je Booster	43.500 kg
Treibstoffmasse je Booster (UH25/N ₂ O ₄)	39.000 kg
Schub bei Start	667.000 N
bei Brennschluss	737.000 N
Triebwerke	VIKING6
Spez. Impuls am Boden / Vakuum	248 s / 278 s
Brennzeit	140 s

2. Stufe (L33)

Höhe / Durchmesser	11,4 m / 2,6 m
Masse	38.500 kg
Treibstoffmasse (UH25/N ₂ O ₄)	35.200 kg
Schub	785.000 N
Triebwerke	VIKING4B
Spez. Impuls (Vakuum)	294 s
Brennzeit	126 s

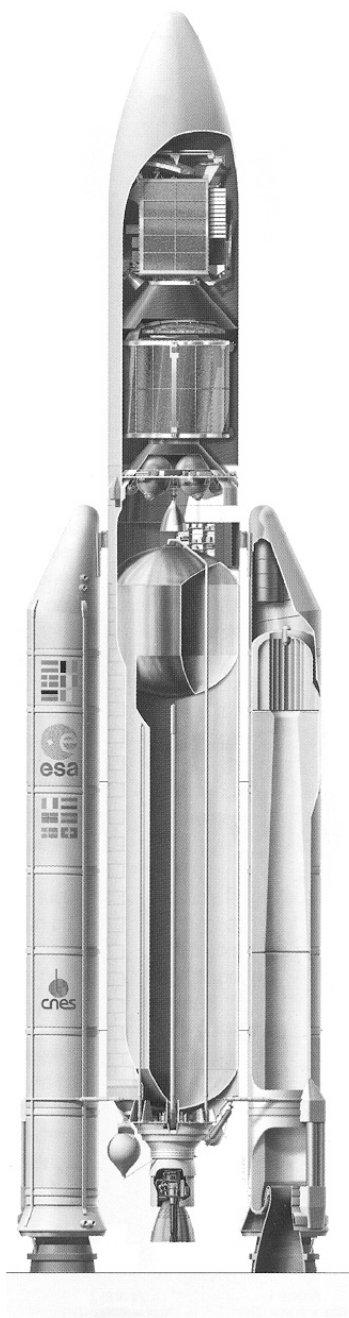
3. Stufe (H10)

Höhe / Durchmesser	10,9 m / 2,6 m
Masse	12.100 kg
Treibstoffmasse (LOX/LH ₂)	10.700 kg
Schub	62.700 N
Triebwerk	HM7B
Spez. Impuls (Vakuum)	444,2 s
Brennzeit	725 s

Nutzlast

Höhe / Durchmesser	12,5 m / 4,0 m
--------------------	----------------

Abb. 2.11. Trägersystem ARIANE 4 (Version AR44 LP).

**Gesamtsystem**

Startmasse	725.000 kg
Höhe	54,05 m
Nutzlast geostationäre Transferbahn	
Single payload	6.800 kg
Double payload	5.970 kg
Startschub	11.400.000 N

Zentralstufe (H155)

Höhe / Durchmesser	29 m / 5,4 m
Gesamtmasse	170.000 kg
Treibstoffmasse (LOX/LH2)	155.000 kg
Schub am Boden	800.000 N
im Vakuum	1.120.000 N
Triebwerk	Vulcain HM60
Spez. Impuls am Boden / Vakuum	310 s / 435 s
Brennzeit	590 s

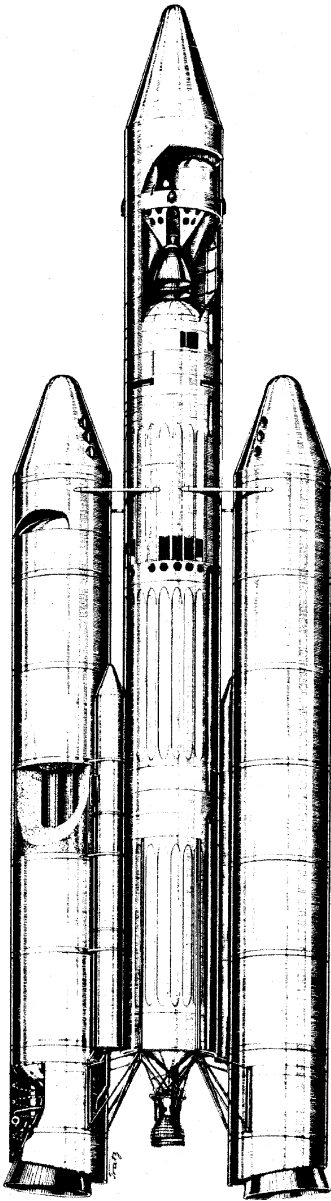
2 Feststoffbooster (P230)

Höhe / Durchmesser	31,2 m / 3,04 m
Gesamtmasse	je 265.000 kg
Treibstoffmasse	je 237.000 kg
Schub	je Booster 6.360.000 N
Spez. Impuls am Boden	336 s
Brennzeit	123 s

Oberstufe (L9)

Höhe / Durchmesser	4,5 m / 5,4 m
Gesamtmasse	10.900 kg
Treibstoffmasse (N_2O_4/MMH)	9.700 kg
Schub (Vakuum)	27.500 N
Spez. Impuls	231 s
Brennzeit	800 s

Abb. 2.12. Trägersystem Ariane 5.



Gesamtsystem

Auftraggeber:

Space Systems Division der U.S. Air Force

Entwicklungszeitraum 1962–1966

Höhe 31,4 m

Max. Durchmesser 9,7 m

Startmasse ohne Nutzlast 560.000 kg

Nutzlast für 160 km-Orbit ca. 11.400 kg

Nutzlast für Fluchtgeschwindigkeit ca. 2.000 kg

1. Stufe (2 Feststoffbooster)

Höhe / Durchmesser 25,9 m / je 3,05 m

Gesamtmasse 2 x 215.000 kg

Treibstoff: Polybutadien-Akrylsäure-Akrylnitril
mit Al-Pulver-Zusatz/Ammoniumperchlorat

Treibstoffmasse: je 170.000 kg

Schub bei Start je ca. 4.400.000 N

Brennzeit 120 s

2. Stufe

Höhe mit Stufenadapter/ Durchmesser 21,3 m / 3 m

Masse ? kg

Treibstoff (50%Hydrazin/50%UDMH/ N_2O_4) ? kg

Schub im Vakuum ca. 2.200.000 N

Brennzeit ? s

3. Stufe

Höhe / Durchmesser 7,5 m / 3 m

Masse ? kg

Treibstoff (50%Hydrazin/50%UDMH/ N_2O_4) ? kg

Schub im Vakuum ca. 450.000 N

Brennzeit ? s

4. Stufe

Höhe / Durchmesser ca. 4,9 m / 3 m

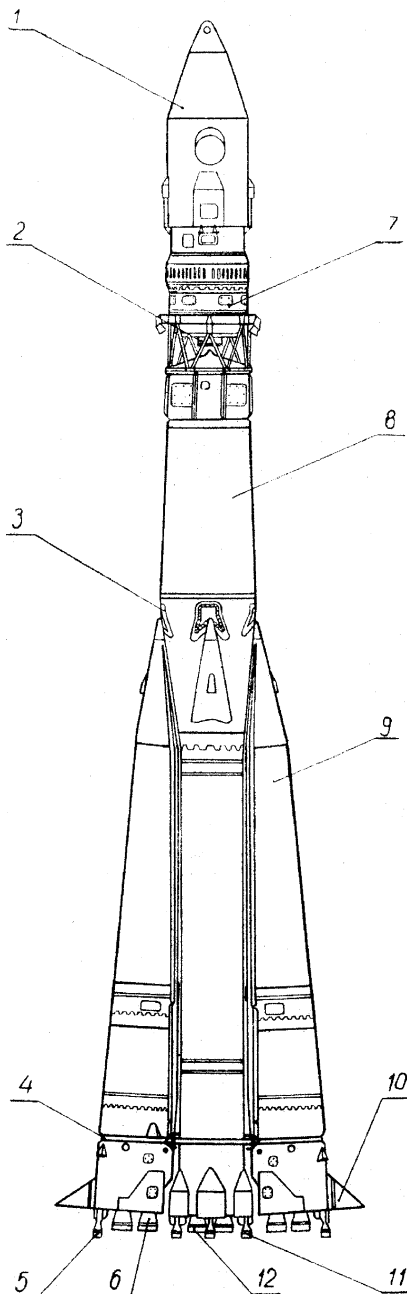
Masse ca. 13.000 kg

Treibstoffmasse (UH_{25}/N_2O_4) ? kg

Schub ca. 70.000 N

Brennzeit 480 s

Abb. 2.13. Trägersystem Titan IIIC.



Gesamtsystem

Auftraggeber:	Akademie der Wiss., UdSSR
Entwicklungszeitraum	1957–1960
Höhe ohne 3. Stufe u. Nutzlast	27,7 m
Höhe mit Nutzlast	38,7 m
Max. Durchmesser	10,3 m
Startmasse	287.000 kg
Nutzlast für 200 km-Orbit	ca. 5.000 kg
Nutzlast für 500 km-Orbit	ca. 3.000 kg
Nutzlast für 1.000 km-Orbit	ca. 1.000 kg

1. Stufe

Höhe / Durchm. Zentralkörper	27,8 m / 3 m
Höhe/ Durchm. der 4 Booster	19,8 m / 2,7 m
Treibstoffmasse Zentralkörper	94.500 kg
Treibstoffmasse je Booster	39.600 kg
Leermasse Zentralkörper	6.500 kg
Leermasse je Booster	3.700 kg
Stufen-Gesamtgewicht	ca. 274.200 kg
Treibstoffe	Kerosin/LOX
Brenndauer Booster	120 s
Brenndauer Zentralkörper	310 s
Schub bei Start	ca. 4.000.000 N

2. Stufe

Höhe / Durchmesser	ca. 3 m / 2,6 m
Treibstoffmasse	7.000 kg
Leermasse	1.100 kg
Schub im Vakuum	54.500 N
Brennzeit	ca. 440 s

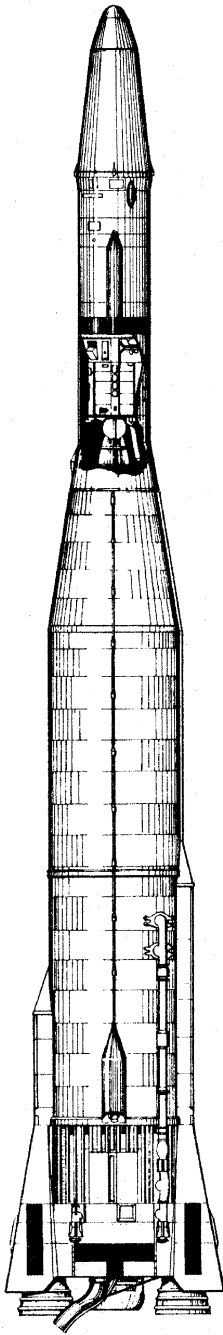
Nutzlastverkleidung

Länge / Durchmesser	7,7 m / 3,28 m
Masse	2.500 kg

Legende:

- 1: Nutzlastverkleidung
- 2: Triebwerk der 2. Stufe
- 3: Verstärkungen des Zentralkörpers
- 4: Verstärkungen u. Halterungen an der 1. Stufe
- 5: Steuertriebwerke Booster
- 6: Haupttriebwerke Booster
- 7: Treibstofftanks der 2. Stufe
- 8: Treibstofftanks der 1. Stufe
- 9: Boostereinheiten der 1. Stufe, abwerfbar
- 10: Steuerflossen
- 11: Steuertw. der Erststufen-Zentraleinheit
- 12: Haupttw. der Erststufen-Zentraleinheit

Abb. 2.14. Trägersystem Vostok.

**Gesamtsystem**

Auftraggeber:

Air Research and Development
Command U.S. Air Force

	Agena A	Agena B,D
Entwicklungszeitraum	1958–1960	1960–1963
Höhe ohne Nutzlast	26,4 m	28,2 m
Max. Durchmesser	4,9 m	4,9 m
Startmasse ohne Nutzlast	123.500 kg	130.000 kg
Nutzlast für 160 km-Orbit		2.300 kg
Nutzlast für 500 km-Orbit	1.200 kg	1.800 kg
Nutzlast für Fluchtgeschw.	–	350 kg

1. Stufe

Treibstoffe: Kerosin RP-1/LOX

	Agena A	Agena B,D
Höhe / Durchmesser	20,6 m/3,05 m	20,6 m/3,05 m
Stufen-Gesamtmasse	ca. 107.100 kg	105.100 kg
Treibstoffmasse	100.000 kg	98.000 kg
Triebwerke	2 LR-89 NA 5 1 LR-105 NA 5 2 LR-101 NA 7	2 LR-89 NA 7 1 LR-105 NA 7 2 Vernier
Schub bei Start	2 x 670.000 N 1 x 267.000 N 2 x 4.400 N	2 x 740.000 N 2 x 356.000 N 2 x 2.250 N
Brennzeit nominal	145 s	130 s

2. Stufe

Treibstoffe: Kerosin RP-1/LOX

	Agena A	Agena B,D
Stufen-Gesamtmasse	ca. 17.900 kg	23.400 kg
Treibstoffmasse	12.500 kg	18.000 kg
Triebwerke	1 LR-105 - 3 (Rocketdyne) 2 Vernier	
Brennzeit		
Haupttriebwerk nominal	105 s	120 s
Vernier nominal	135 s	150 s

3. Stufe

Treibstoffe: UDMH/rotr. Salpetersäure

	Agena A	Agena B,D
Höhe ohne Nutzlast	5,8 m	7,6 m
Durchmesser	1,525 m	1,525 m
Stufen-Gesamtmasse	3.860 kg	7.050 kg
Treibstoffmasse	3.070 kg	6.140 kg
Triebwerke	Bell 8048	Bell 8096
Schub im Vakuum	69.200 N	71.200 N
Spez. Impuls	275 s	285 s
Brennzeit nominal	120 s	240 s

Abb. 2.15. Trägersystem Atlas.

2.6 Stufenoptimierung (Tandemstufung)

Die Aufgabenstellung der Stufenoptimierung ist es, für eine bestimmte vorgegebene Mission mit Antriebsbedarf Δv und Nutzlastmasse m_L , die Massenaufteilung auf die einzelnen Raketenstufen so festzulegen, dass das benötigte Gesamtgewicht der Rakete minimal wird. Diese Optimierung wird erreicht, indem für einen vorgegebenen Antriebsbedarf Δv und vorgegebene effektive Austrittsgeschwindigkeiten c_{ei} der einzelnen Stufen $i=1,2,\dots,n$, sowohl die Zahl n der Raketenstufen als auch die Massenverhältnisse $\mu_i = m_{0,i} / m_0$ so gewählt werden, dass das Nutzlastverhältnis $\mu_L = m_L / m_0$ einen Maximalwert erreicht.

Oder in anderer Formulierung, die jedoch zum gleichen Ziel führt, weil für beliebig gestufte Raketen mit stetig wachsendem μ_i die charakteristische Geschwindigkeit stetig abnimmt, lautet die Optimierungsbedingung: Gesucht sind für ein gegebenes μ_L die günstigste Stufenzahl n und die Massenaufteilungen $\mu_i = m_{0,i} / m_0$, so dass das Antriebsvermögen $\Delta v = \sum \Delta v_i$ bei gegebenem c_{ei} ein Maximum erreicht.

Dabei werden die Strukturfaktoren σ_i der einzelnen Stufen, die Funktionen der Beschleunigungsbelastung, der Güte der Konstruktion, usw. sind und somit auch vom technologischen Stand der Leichtbauweise abhängen, als gegebene Konstanten vorausgesetzt. In der Praxis werden bei der Auslegung großer Raketen sehr viel differenziertere Überlegungen durchgeführt, die aber hier im Einzelnen nicht behandelt werden. Das hier aufgeführte Verfahren ist dazu nützlich, einen ersten Anhaltspunkt für einen optimalen Entwurf zu erhalten.

Der gesamte Antriebsbedarf

$$\Delta v = \sum_{i=1}^n \Delta v_i = \sum_{i=1}^n c_{ei} \ln \left(\frac{1}{\sigma_i + \frac{\mu_{i+1}}{\mu_i}} \right) \Rightarrow \text{Maximum} , \quad (2.68)$$

der maximiert werden soll, ist also eine Funktion von μ_i mit $i = 2, 3, \dots, n$. Alle anderen Größen $\mu_1 = 1$, $\mu_{n+1} = \mu_L$ und σ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) sind bekannt und konstant. Die Bedingungen für das Maximum lauten somit:

$$\frac{\partial}{\partial \mu_i} [\Delta v(\mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n)] = 0, \quad \text{für } i=2,3,\dots,n . \quad (2.69)$$

Da nur die Terme $(i-1)$ und i die Variable μ_i enthalten, folgt:

$$\frac{\partial}{\partial \mu_i} \left[-c_{e,i-1} \ln \left(\sigma_{i-1} + \frac{\mu_i}{\mu_{i-1}} \right) - c_{e,i} \ln \left(\sigma_i + \frac{\mu_{i+1}}{\mu_i} \right) \right] = 0 . \quad (2.70)$$

Nach Differentiation und einiger Umformung folgen schließlich quadratische Gleichungen für μ_i ($i = 2, 3, \dots, n$) in der Form

$$\mu_i^2 - \frac{c_{e,i} - c_{e,i-1}}{c_{e,i-1}} \frac{\mu_{i+1}}{\sigma_i} \mu_i - \frac{c_{e,i}}{c_{e,i-1}} \frac{\sigma_{i-1}}{\sigma_i} \mu_{i-1} \mu_{i+1} = 0 \quad . \quad (2.71)$$

Nach μ_i umgeformt ergibt sich:

$$\mu_i = A_i \mu_{i+1} + \sqrt{(A_i \mu_{i+1})^2 + B_i \mu_{i+1} \mu_{i-1}} \quad , \quad (2.72)$$

mit
$$A_i = \frac{c_{e,i} - c_{e,i-1}}{2c_{e,i-1} \sigma_i} \quad , \quad (2.73)$$

und
$$B_i = \frac{c_{e,i} \sigma_{i-1}}{c_{e,i-1} \sigma_i} \quad , \quad (2.74)$$

wobei $i = 2, 3, \dots, n$ ist. Für eine *zweistufige Rakete* lautet somit die Optimierungsbedingung

$$\mu_2 = A_2 \mu_L + \sqrt{(A_2 \mu_L)^2 + B_2 \mu_L} \quad . \quad (2.75)$$

Für eine *dreistufige Rakete* ergibt sich:

$$\mu_3 = A_3 \mu_L + \sqrt{(A_3 \mu_L)^2 + B_3 \mu_L \mu_2} \quad , \quad (2.76)$$

und
$$\mu_2 = A_2 \mu_3 + \sqrt{(A_2 \mu_3)^2 + B_2 \mu_3} \quad . \quad (2.77)$$

Diese Gleichungen können nicht ohne weiteres nach μ_2 und μ_3 aufgelöst werden. Es lässt sich aber eine Gleichung für μ_3 angeben, die analytisch gelöst werden kann:

$$\mu_3^3 - b\mu_3^2 + c\mu_3 - d = 0 \quad , \quad (2.78)$$

mit
$$b = 2\mu_L (2A_3 + A_2 B_3) \quad , \quad (2.79)$$

$$c = 4A_3 \mu_L^2 (A_3 + A_2 B_3) \quad , \quad (2.80)$$

und
$$d = B_2 B_3^2 \mu_L^2 \quad . \quad (2.81)$$

Für Raketen mit mehr als drei Stufen ergibt sich ein Gleichungssystem, das nicht mehr analytisch lösbar ist.

Für chemische Trägerraketen ist im Allgemeinen die effektive Austrittsgeschwindigkeit der 1. Stufe, die noch zum Großteil innerhalb der Erdatmosphäre aktiv ist, kleiner als bei höheren Stufen. Typische Werte liegen heute bei $c_{e1} = 2.500 \text{ m/s}$, während die höheren Stufen je nach Treibstoffwahl nahezu $c_{ei} = 3 \text{ km/s}$ und für Flüssig- $\text{H}_2\text{-O}_2$ -Triebwerke $c_{ei} = 4 - 4,5 \text{ km/s}$ erreichen.

Die optimale Stufenzahl n_{opt} kann mit Hilfe der Faustformel

$$n_{\text{opt}} = \frac{1,12\Delta v}{\bar{c}_e}, \quad (2.82)$$

mit

$$\bar{c}_e = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c_{ei} \quad (2.83)$$

bestimmt werden. Da für die Anwendung dieser Regel bereits ein Raketenentwurf existieren muss, um $\bar{c}_e$ zu berechnen, dient sie eher der Erfolgskontrolle für das Design, d.h. im Idealfall sollte sich als n_{opt} wieder die Stufenzahl des Raketenentwurfs ergeben. Es sollte bei nicht ganzzahligen Resultaten für n_{opt} für den nächsten Iterationsschritt eher abgerundet werden, um ein weniger kompliziertes Design anzustreben.

In der Literatur werden auch andere Optimierungsverfahren angegeben, die aber meist numerisch etwas aufwändiger sind. Es sollte noch einmal betont werden, dass sich die hier vorgestellte Optimierungsmethode für die exakte Behandlung von hochkomplexen realen Trägersystemen nicht unbedingt eignet, insbesondere wenn eine eventuelle Kickstufe, die den Satelliten auf seine endgültige Position bringt, in den Optimierungsprozess mit einbezogen werden soll. Ebenso sind in der Praxis auch Kostenaspekte von entscheidender Bedeutung, so dass beispielsweise identische Stufen Vorteile bezüglich Produktionskosten aufweisen können. Außerdem können auch Aspekte der Wiederverwendbarkeit einzelner Stufen von wirtschaftlich relevant sein. Eine etwas ausführlichere, qualitative Beleuchtung dieser Aspekte ist in Kapitel 10 über Raumtransportsysteme gegeben.

Raumfahrtssysteme

Eine Einführung mit Übungen und Lösungen

Messerschmid, E.; Fasoulas, S.

2017, XVIII, 635 S. 347 Abb., Hardcover

ISBN: 978-3-662-49637-4