

## Inhaltsverzeichnis

2.1 Modellierung der euklidischen Geometrie .....	17
2.2 Grundlegende Aussagen der Mittelstufengeometrie .....	25
2.3 Abbildungen .....	30
2.4 Sätze über Polygone am Kreis .....	34
2.5 Besondere Punkte im Dreieck .....	41
2.6 Weitere Sätze am Dreieck .....	47

Die klassischen Ergebnisse der euklidischen Geometrie sind das zentrale Thema des Geometrieunterrichts in der Unter- und Mittelstufe des allgemeinbildenden Gymnasiums. Naturgemäß sind Schüler dieser Altersstufe nicht in der Lage, einen deduktiven Theorieaufbau verstehen zu können. Vielmehr muss man an Alltagserfahrungen sowie -anschauungen anknüpfen und ausgehend von (mehr oder weniger) evidenten Sachverhalten die Geometrie entwickeln. Wir wollen hier einerseits keine „Larifari“-Mathematik betreiben, andererseits aber auch nicht zu viel Zeit auf eine theoretische Fundierung verschwenden. Daher stellen wir ein auf Grundlage analytischer Vorkenntnisse gewonnenes Modell der euklidischen Geometrie vor, auf dessen Basis wir dann die Elementargeometrie entlang der in der Schule üblichen und möglichen Wege entwickeln werden.

---

## 2.1 Modellierung der euklidischen Geometrie

In diesem Abschnitt führen wir ein System von Punkten und Geraden zusammen mit den für das Hilbert'sche Axiomensystem notwendigen Relationen ein und zeigen, dass dieses alle Hilbert'schen Axiome erfüllt. Dabei erhalten wir nebenbei einige grundlegende geometrische Aussagen, die man in der Schule üblicherweise als anschaulich gegeben voraussetzt.

**Definition 2.1.1** Unter der euklidischen Ebene  $\mathbb{E} := (\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  verstehen wir den reellen Vektorraum  $\mathbb{R}^2$ , ausgestattet mit einem Skalarprodukt (als Messinstrument). Die Punkte dieser Geometrie sind die Elemente von  $\mathbb{R}^2$ . Wir schreiben für einen Punkt  $A$  von  $\mathbb{E}$  oft einfach  $A \in \mathbb{E}$ . Weiter ist für  $A \in \mathbb{E}$  und  $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  die Menge

$$g := A + \mathbb{R}v := \{A + t \cdot v; t \in \mathbb{R}\}$$

eine Gerade in  $\mathbb{E}$ . Ein Punkt  $P$  gehört zu  $g$ , falls  $P \in g$  gilt, d. h. wenn es ein  $t \in \mathbb{R}$  gibt, sodass  $P = A + tv$  gilt.

Durch Wahl einer Orthonormalbasis kann man bekanntlich immer annehmen, dass das gewählte Skalarprodukt das Standardskalarprodukt auf dem  $\mathbb{R}^2$  ist. Dies werden wir im Folgendem oft stillschweigend ausnützen, zumal dies das auch im Schulunterricht gewöhnlich verwendete Skalarprodukt ist.

Unser Ziel ist es nun, zu überprüfen, dass unser Modell das Axiomensystem von Hilbert erfüllt. Bei einigen Axiomen ist dies mehr oder weniger offensichtlich; wir werden daher den Nachweis lediglich an einigen ausgewählten Axiomen explizit durchführen. Um einen ersten Eindruck zu gewinnen, zeigen wir exemplarisch das erste Inzidenzaxiom:

**Lemma 2.1.2** Es seien  $A, B \in \mathbb{E}$  mit  $A \neq B$ . Dann gibt es genau eine Gerade  $AB$ , zu der  $A$  und  $B$  gehören.

**Beweis** Existenz: Mit  $v := B - A$  gilt für  $g := A + \mathbb{R}v$  offenbar  $A, B \in g$ .

Eindeutigkeit: Es sei  $k := C + \mathbb{R}u$  eine weitere Gerade mit  $A, B \in k$ . Dann gibt es  $s, t \in \mathbb{R}$  mit  $C + su = A$  und  $C + tu = B$ , d. h.  $(t - s)u = B - A$ . Es sei nun  $X \in g$ . Dann gilt  $X = A + r(B - A)$  für ein  $r \in \mathbb{R}$ . Daraus folgt

$$X = C + su + r(t - s)u = C + (s + rt - rs)u \in k,$$

also  $g \subset k$ . Analog zeigt man  $k \subset g$ , also die Eindeutigkeit.  $\square$

Als Übung empfehlen wir, auch die anderen Inzidenzaxiome nachzuweisen.

Die Zwischenbeziehung definieren wir in naheliegender Weise:

**Definition 2.1.3** Es seien  $A \neq B \in \mathbb{E}$  und  $g := A + \mathbb{R}(B - A)$  sei die eindeutig bestimmte Gerade durch  $A$  und  $B$ . Ist nun  $C \in g$ , dann gibt es genau ein  $t \in \mathbb{R}$  mit  $C = A + t(B - A)$ . Dann liegt  $C$  zwischen  $A$  und  $B$ , falls  $0 < t < 1$ , gilt und die Strecke  $\overline{AB}$  ist definiert durch  $\overline{AB} := \{A + t(B - A), t \in ]0, 1[ \}$ .

Die Anordnungsaxiome aus Axiom 1.2.6 sind mit dieser Definition relativ einfach nachzuweisen. Mehr Probleme bereitet das Axiom von Pasch (Axiom 1.2.7), für dessen Nachweis wir eine einfache Charakterisierung dafür einführen, dass zwei Punkte auf verschiedenen Seiten einer Geraden liegen.

**Definition 2.1.4** Es sei  $g := A + \mathbb{R}v$  eine Gerade. Ein Vektor  $n \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  heißt Normalenvektor von  $g$ , falls  $\langle v, n \rangle = 0$  gilt. Dabei bezeichnet  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , wie erwähnt, ein Skalarprodukt im  $\mathbb{R}^2$ .

Wie man sich schnell überzeugt, unterscheiden sich zwei Normalenvektoren einer Geraden allenfalls um ein skalares Vielfaches; damit ist ein Normalenvektor einer Geraden im Wesentlichen eindeutig bestimmt.

**Aufgabe 2.1.5** Es sei  $g := A + \mathbb{R}v$  eine Gerade und  $n$  ein Normalenvektor von  $g$ . Man zeige

$$g = \{P \in \mathbb{R}^2; \langle P - A, n \rangle = 0\}.$$

**Lemma 2.1.6** Es sei  $g$  eine Gerade mit  $A \in g$  und Normalenvektor  $n$ . Dann liegen  $P, Q \in \mathbb{E} \setminus g$  genau dann auf der gleichen Seite von  $g$ , wenn  $p := \langle P - A, n \rangle$  und  $q := \langle Q - A, n \rangle$  das gleiche Vorzeichen haben.

**Beweis** Es gilt  $\overline{PQ} = \{P + t(Q - P); t \in ]0, 1[ \} = \{tQ + (1 - t)P; t \in ]0, 1[ \}$ . Für  $X = t_X Q + (1 - t_X)P \in \overline{PQ}$  hat man also

$$\langle X - A, n \rangle = t_X \langle Q - A, n \rangle + (1 - t_X) \langle P - A, n \rangle = qt_X + p(1 - t_X) =: f(t_X).$$

Offenbar ist  $f$  eine stetige, monotone (entweder wachsende oder fallende) Funktion, und es gilt  $f(0) = p$  und  $f(1) = q$ . Weiter liegt nach Aufgabe 2.1.5  $X$  genau dann auf  $g$ , wenn  $f(t_X) = 0$  gilt. Als stetige, monotone Funktion hat  $f$  aber genau dann eine Nullstelle in  $]0, 1[$ , wenn  $q$  und  $p$  verschiedenes Vorzeichen haben, woraus die Behauptung folgt.  $\square$

Damit können wir nun das Axiom von Pasch beweisen:

**Satz 2.1.7** Es seien  $A, B, C \in \mathbb{E}$  drei Punkte, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Weiter sei  $g$  eine Gerade, die keinen der drei Punkte  $A, B, C$  enthalte sowie die Strecke  $\overline{AB}$  schneide. Dann schneidet  $g$  auch  $\overline{BC}$  oder  $\overline{AC}$ .

**Beweis** Es sei  $S$  der Schnittpunkt von  $g$  mit  $\overline{AB}$  sowie  $n$  ein Normalenvektor von  $g$ . Gemäß Lemma 2.1.6 können wir (sonst ersetze man  $n$  durch  $-n$ ) annehmen, dass  $\langle A - S, n \rangle < 0$  und  $\langle B - S, n \rangle > 0$  gilt. Weiter gilt nach Voraussetzung  $\langle C - S, n \rangle \neq 0$ .

Im ersten Fall sei  $\langle C - S, n \rangle > 0$ . Wieder aufgrund von Lemma 2.1.6 liegen dann  $C$  und  $A$  auf verschiedenen Seiten von  $g$ , d. h.,  $g$  schneidet  $\overline{AC}$ . Der andere Fall geht analog.  $\square$

Der Begriff des Halbstrahls übersetzt sich folgendermaßen:

**Definition 2.1.8** Es seien  $A, B \in \mathbb{E}$  mit  $A \neq B$ . Dann heißt

$$\overrightarrow{AB} := \{A + t(B - A), t > 0\}$$

der Halbstrahl von  $A$  in Richtung  $B$ .

**Aufgabe 2.1.9** Man zeige: Sind  $A, B, C \in \mathbb{E}$  mit  $B, C \neq A$ , so sind folgende Aussagen äquivalent:

1.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ .
2. Es gibt ein  $s \in \mathbb{R}_{>0}$  mit  $C - A = s(B - A)$ .
3.  $A, B$  und  $C$  liegen auf einer Geraden und  $B$  und  $C$  liegen auf der gleichen Seite von  $A$ .

Um die metrischen Größen in  $\mathbb{E}$ , nämlich Streckenlängen und Winkel, einführen zu können, benötigen wir das Skalarprodukt als Messinstrument. Damit können wir die Länge einer Strecke wie gewohnt definieren.

**Definition 2.1.10** 1. Es seien  $A, B \in \mathbb{E}$ . Die Länge der Strecke  $\overline{AB}$  ist definiert durch

$$|AB| := \sqrt{\langle B - A, B - A \rangle}.$$

2. Zwei Strecken  $\overline{AB}$  und  $\overline{CD}$  sind kongruent, falls  $|AB| = |CD|$  gilt.

Es ist eine einfache Übung nachzurechnen, dass mit dieser Definition die Kongruenzaxiome für Strecken von Axiom 1.2.12 erfüllt sind. Mithilfe des Längenbegriffs lässt sich auch die Zwischenbeziehung einfach charakterisieren:

**Aufgabe 2.1.11** Es seien  $A, B, C$  drei verschiedene Punkte einer Geraden. Man zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

1. Der Punkt  $C$  liegt zwischen  $A$  und  $B$ .
2. Es gelten  $|AC| < |AB|$  und  $|BC| < |AB|$ .
3. Es gilt  $|AB| = |AC| + |BC|$ .

Ebenso lässt sich jedem Winkel mithilfe des Skalarprodukts und der bekannten trigonometrischen Funktionen eine reelle Zahl, seine Größe, zuordnen. Dazu bezeichnen wir mit  $\arccos$  den Hauptwert des Arkuskosinus.

**Definition 2.1.12** 1. Sind  $\overrightarrow{AB}$  sowie  $\overrightarrow{AC}$  zwei Halbstrahlen mit gleichem Anfangspunkt  $A$ , so ist der Winkelwert des durch diese Halbstrahlen definierten Winkels  $\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  definiert durch

$$\sphericalangle BAC := \sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) := \arccos \left( \frac{\langle B - A, C - A \rangle}{|AB| \cdot |AC|} \right).$$

2. Zwei Winkel  $\angle(\underline{AB}, \underline{AC})$  und  $\angle(\underline{A'B'}, \underline{A'C'})$  sind kongruent, wenn

$$\sphericalangle(\underline{AB}, \underline{AC}) = \sphericalangle(\underline{A'B'}, \underline{A'C'})$$

gilt.

Im strengen Sinne sind damit der Winkel  $\angle(\underline{AB}, \underline{AC})$  und sein Winkelwert  $\sphericalangle(\underline{AB}, \underline{AC})$  zu unterscheiden; oft werden aber diese beiden Objekte der Einfachheit halber identifiziert (man sollte sich allerdings der verschiedenen Bedeutungen durchaus bewusst sein!).

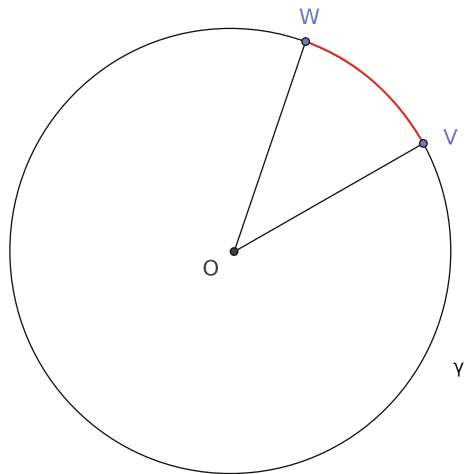
**Aufgabe 2.1.13** *Man zeige, dass die Definition des Winkelwerts wohldefiniert ist, also nicht von der Wahl der Punkte  $B$  und  $C$  auf den Halbstrahlen (den Schenkeln) abhängt.*

Mithilfe von etwas Analysis können wir zeigen, dass die Definition des Winkelwerts mit unserer intuitiven Vorstellung übereinstimmt:

**Lemma 2.1.14** (Zirkellemma) Es sei  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}, t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ , die übliche Parametrisierung des Einheitskreises, sowie  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  mit  $0 \leq t_2 - t_1 \leq \pi$ . Weiter seien  $V := \gamma(t_1)$ ,  $W := \gamma(t_2)$  und  $O := (0; 0)$  der Mittelpunkt des Kreises. Dann gilt (vgl. Abb. 2.1)

$$\int_{t_1}^{t_2} \|\gamma'(t)\| dt = \sphericalangle VOW$$

**Abb. 2.1** Zirkellemma



**Beweis** Offenbar gilt

$$\int_{t_1}^{t_2} \|\gamma'(t)\| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} dt = t_2 - t_1.$$

Wegen  $|OV| = |OW| = 1$  liefert das Additionstheorem des Kosinus nun die Behauptung, wenn man zudem beachtet, dass  $0 \leq t_2 - t_1 \leq \pi$  gilt.  $\square$

Anschaulich zeigt dieses Lemma, dass der Winkelwert des durch den Kreismittelpunkt  $M$  und die Punkte  $V$  und  $W$  bestimmten Winkels genau der Länge des zugehörigen Kreisbogens auf dem Einheitskreis entspricht. Des Weiteren folgt daraus offenbar die Additivität nebeneinanderliegender Winkel. Mithilfe dieser Charakterisierung ist es nun nicht schwierig, die Axiome 1.2.17 nachzuweisen.

**Aufgabe 2.1.15** Es sei  $X \in \mathbb{E}$  ein Punkt mit  $\|X\| = 1$ . Man zeige, dass es dann genau ein  $t \in [0; 2\pi[$  gibt mit  $(\cos(t), \sin(t)) = X$ .

**Aufgabe 2.1.16** Man zeige, dass sich in der euklidischen Ebene Winkel im Sinn von Axiom 1.2.17 eindeutig abtragen lassen.

Interessanter wird es mit dem Kongruenzsatz „sws“ 1.2.19, für den wir nun in unserem Modell einen Beweis geben:

**Satz 2.1.17** Es seien  $\triangle ABC$  sowie  $\triangle A'B'C'$  zwei Dreiecke mit  $|AB| = |A'B'|$ ,  $|AC| = |A'C'|$  und  $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$ . Dann gilt auch  $\sphericalangle CBA = \sphericalangle C'B'A'$ .

**Beweis** Zunächst sieht man

$$\begin{aligned} \langle C - A, A - B \rangle &= -\cos(\sphericalangle BAC) \cdot |AC| \cdot |AB| \\ &= -\cos(\sphericalangle B'A'C') \cdot |A'C'| \cdot |A'B'| = \langle C' - A', A' - B' \rangle. \end{aligned}$$

Daher hat man auch

$$|BC| = |C - A + A - B| = \sqrt{|AC|^2 + 2\langle C - A, A - B \rangle + |AB|^2} = |B'C'|.$$

Somit folgt nun

$$\cos \sphericalangle CBA = \frac{\langle C - B, A - B \rangle}{|BC| \cdot |AB|} = \frac{\langle C - A, A - B \rangle}{|BC| \cdot |AB|} + \frac{|AB|}{|BC|} = \cos \sphericalangle C'B'A'$$

und daraus die Behauptung.  $\square$

Die Axiomengruppe Parallelität besteht lediglich aus einem einzigen Axiom, nämlich dem Parallelenaxiom, dessen Nachweis in unserem Modell nicht allzu schwierig ist. Wir erweitern die Definition einer Parallelen geringfügig, um Parallelität zu einer Äquivalenzrelation zu machen:

**Definition 2.1.18** Zwei Geraden  $g$  und  $h$  sind parallel, falls sie keinen Schnittpunkt haben oder  $g = h$  gilt.

Parallelität erlaubt eine einfache Charakterisierung, mit deren Hilfe sich das Parallelenaxiom unmittelbar ergibt:

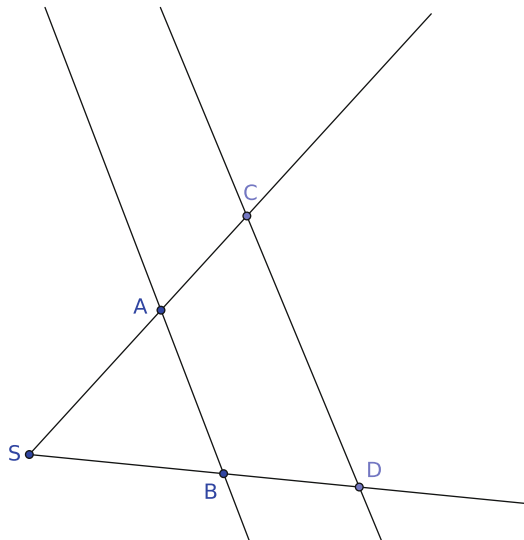
- Aufgabe 2.1.19**
1. Es seien  $g = A + \mathbb{R}v$  und  $k = B + \mathbb{R}u$  zwei Geraden. Man zeige, dass  $g$  und  $k$  genau dann parallel sind, wenn  $v = tu$  für ein geeignetes  $t \in \mathbb{R}$  gilt.
  2. Man zeige das Parallelenaxiom 1.2.26: Ist  $g$  eine Gerade und  $P \in \mathbb{E}$  ein Punkt, so gibt es maximal eine zu  $g$  parallele Gerade durch  $P$ .
  3. Sind  $g$  und  $h$  zwei Geraden und  $n$  ein Normalenvektor von  $g$ . Dann sind  $g$  und  $h$  genau dann parallel, wenn  $n$  auch ein Normalenvektor von  $h$  ist.

Eine weitere Anwendung der in Aufgabe 2.1.19 gegebenen Charakterisierung von Parallelität ist der Strahlensatz:

**Satz 2.1.20** (Strahlensatz, vgl. Abb. 2.2) Es seien  $g, h$  zwei unterschiedliche Geraden, die einen gemeinsamen Punkt  $S$  besitzen, und von zwei verschiedenen parallelen Geraden (nicht durch  $S$ ) in  $A$  und  $B$  bzw.  $C$  und  $D$  geschnitten werden (d. h.  $AB \parallel CD$ ). Dann gilt

$$\frac{|DC|}{|AB|} = \frac{|SC|}{|SA|} = \frac{|SD|}{|SB|}.$$

**Abb. 2.2** Strahlensatz



**Beweis** Nach Voraussetzung gelten  $(C - S) = \alpha(A - S)$  und  $D - S = \beta(B - S)$  sowie nach Aufgabe 2.1.9 wegen der Parallelität  $D - C = \gamma(B - A)$  für geeignete  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ . Andererseits gilt

$$\gamma(B - S + S - A) = \gamma(B - A) = D - C = D - S + S - C = \beta(B - S) - \alpha(A - S).$$

Daraus erhält man  $(\beta - \gamma)(B - S) + (\gamma - \alpha)(A - S) = 0$ . Da  $g$  und  $h$  nicht die gleiche Gerade sind, sind  $B - S$  und  $A - S$  linear unabhängige Vektoren, also folgt  $\alpha = \gamma = \beta$  und damit die Behauptung.  $\square$

**Aufgabe 2.1.21** Man zeige die Umkehrung des Strahlensatzes: Werden zwei Strahlen, die von einem gemeinsamen Punkt  $S$  ausgehen, von zwei Geraden in  $A$  und  $B$  bzw.  $C$  und  $D$  geschnitten, sodass

$$\frac{|SC|}{|SA|} = \frac{|SD|}{|SB|}$$

gilt, dann sind  $AB$  und  $CD$  parallel.

Das Axiom von Archimedes (Axiom 1.2.27) nachzuweisen, ist ebenfalls nicht weiter schwierig und bleibt dem Leser zur Übung überlassen. Etwas aufwendiger ist der Nachweis des Vollständigkeitsaxioms 1.2.28.

**Satz 2.1.22** Es seien  $\mathbb{P}'$  Punkte und  $\mathbb{G}'$  Geraden eines Systems, welches die Axiome einer ebenen euklidischen Geometrie erfüllt mit  $\mathbb{P} := \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{P}'$  und  $\mathbb{G} := \{AB; A, B \in \mathbb{E}\} \subset \mathbb{G}'$ , sodass die Relationen im System  $(\mathbb{P}', \mathbb{G}')$  die Relationen in  $\mathbb{E}$  fortsetzen. Dann gilt  $\mathbb{P} = \mathbb{P}'$  und  $\mathbb{G} = \mathbb{G}'$ .

**Beweis** Wir zeigen dies in drei Schritten: Zunächst sei  $P \in \mathbb{P}'$  ein Punkt, der zu der Geraden  $AB \in \mathbb{G}$  mit  $A, B \in \mathbb{P}$  gehört. Dann legen wir gemäß dem archimedischen Axiom die Strecke  $\overline{AB}$  so oft an  $A$  in Richtung  $P$  an, bis die Strecke  $n\overline{AB}$  den Punkt  $P$  enthält. Den Endpunkt der Strecke  $n\overline{AB}$  bezeichnen wir mit  $C$ . Offenbar gilt  $C \in \mathbb{P}$ . Daher lässt sich  $AB$  in der Form  $A + \mathbb{R}(C - A)$  schreiben, und es gilt  $C = A + 1(C - A)$ . Es sei nun

$$T := \{t \in \mathbb{R}; A + t(C - A) \text{ liegt auf der gleichen Seite von } P \text{ wie } A\}.$$

Dann gilt  $T \neq \emptyset$ , da  $0 \in T$ . Weiter gilt offenbar  $T < 1$ , also ist  $T$  beschränkt. Es sei nun  $s = \sup T$  und  $Q := A + s(C - A) \in \mathbb{P}$ . Die Idee des Beweises besteht nun darin, zu zeigen, dass  $P = Q$  gilt.

Andernfalls liegt  $Q$  entweder auf der gleichen Seite wie  $A$  von  $P$  oder nicht. Im ersten Fall, d. h.,  $Q$  ist auf der gleichen Seite wie  $A$  von  $P$ , gibt es wie oben ein  $k$ , sodass das  $k$ -fache Abtragen der Strecke  $\overline{QP}$  von  $Q$  aus den Punkt  $C$  enthält. Wir setzen nun  $s' := s + \frac{1-s}{k}$  und  $Q' := A + s'(C - A)$ . Trägt man nun die Strecke  $\overline{QQ'}$  genau  $k$ -mal von  $Q$  aus ab, so erhält man die Strecke  $\overline{QC}$ . Insbesondere gilt  $s' > s$ . Weil die Strecke  $\overline{QC}$  aber in der  $k$ -mal abgetragenen Strecke  $\overline{QP}$  enthalten ist, ist auch die Strecke  $\overline{QQ'}$  in  $\overline{QP}$  enthalten. Daher liegt  $Q'$  auf der gleichen Seite von  $P$  wie  $Q$ , was der Wahl von  $s$  als Supremum von  $T$  widerspricht.



Analog zeigt man, dass  $Q$  auch nicht auf der anderen Seite von  $P$  liegen kann, was schließlich impliziert, dass  $P = Q \in \mathbb{P}$  gilt.

Es sei nun  $P \in \mathbb{P}'$  ein beliebiger Punkt. Dann wählen wir einen Punkt  $S \in \mathbb{P}$  und betrachten die Gerade  $SP$ . Weiter wählen wir drei Punkte  $A, B, C \in \mathbb{P}$ , sodass  $A, S, B$  auf einer Geraden liegen,  $S$  zwischen  $A$  und  $B$  liegt und  $C \notin AB$  liegt. Nach dem Axiom 1.2.7 von Pasch schneidet dann  $SP$  entweder  $AC$  oder  $AB$  in  $X$ . Nach dem ersten Teil des Beweises ist  $X \in \mathbb{P}$ , und die Gerade  $SP$  stimmt mit  $SX$  überein. Wieder nach dem ersten Teil gilt dann auch  $P \in \mathbb{P}$ .

Der Abschluss des Beweises ist nun einfach: Es sei  $\Gamma \in \mathbb{G}'$  eine Gerade. Diese enthält zwei Punkte  $P, Q \in \mathbb{P}' = \mathbb{P}$ . Daher gilt  $\Gamma = PQ \in \mathbb{G}$ .  $\square$

## 2.2 Grundlegende Aussagen der Mittelstufengeometrie

In diesem Abschnitt wiederholen wir die grundlegenden Aussagen der klassischen euklidischen Geometrie, wie sie so auch üblicherweise in der Schulmathematik besprochen werden. Wir werden in Bezug auf die Reihenfolge der Ergebnisse uns an den in der Schule üblichen Wegen orientieren. Die Aussagen jedoch, von denen viele in der Schule aus der unmittelbaren Anschauung gewonnen werden, weisen wir mit unseren Methoden nach und legen diese dann für die weitere Entwicklung zugrunde.

Als erstes Ergebnis zeigen wir, wie man den in Abschn. 1.2.3 aus den Axiomen abgeleiteten Nebenwinkelsatz 1.2.22 alternativ mit analytischen Methoden in unserem Modell erhalten kann und dabei eine quantitative Aussage erhält.

**Satz 2.2.1** (Nebenwinkelsatz) Es seien  $A, B, D \in \mathbb{E}$  drei Punkte auf einer Geraden  $g$  mit  $A$  zwischen  $B$  und  $D$ . Weiter sei  $C \in \mathbb{E}$  ein Punkt nicht auf  $g$ . Dann gilt

$$\sphericalangle CAD = \pi - \sphericalangle BAC.$$

**Beweis** Da  $A$  zwischen  $B$  und  $D$  liegt, gilt  $A = B + t(D - B)$  für ein  $t \in ]0, 1[$ . Dies impliziert  $t(D - A) = (t - 1)(B - A)$ , also  $D - A = s(B - A)$  für ein  $s < 0$ . Daher gilt

$$\frac{\langle D - A, C - A \rangle}{|AD| \cdot |AC|} = \frac{s \langle B - A, C - A \rangle}{|s| |AB| \cdot |AC|} = - \frac{\langle B - A, C - A \rangle}{|AB| \cdot |AC|}.$$

Für  $x \in [0, \pi]$  gilt  $-\cos(x) = \cos(\pi - x)$ , woraus die Behauptung folgt.  $\square$

Wir verwenden bereits im nächsten Satz das Parallelenaxiom. In den Kap. 3 und 4, speziell im Abschn. 4.5, werden wir dementsprechend sehen, dass der folgende Satz in Geometrien, in denen das Parallelenaxiom nicht erfüllt ist, nicht gilt (bzw. nicht sinnvoll formuliert werden kann).

**Satz 2.2.2** (Stufenwinkelsatz bzw. Wechselwinkelsatz) Es seien  $g, g'$  ein Paar verschiedener paralleler Geraden sowie  $h$  eine Gerade, die  $g$  und  $g'$  in  $S$  und  $S'$  schneide. Es seien  $A$  und  $A'$  Punkte auf  $g$  und  $g'$ , die auf der gleichen Seite von  $h$  liegen. Weiter sei  $B$  ein Punkt auf  $h$ , sodass  $S$  und  $S'$  auf der gleichen Seite von  $B$  liegen. Dann gilt

$$\sphericalangle ASB = \sphericalangle A'SB.$$

Den Beweis dieses Satzes überlassen wir dem Leser zur Übung (dieser folgt im Übrigen auch aus dem Beweis des Satzes 1.2.25 zusammen mit dem Parallelenaxiom 1.2.26). Eine erste, etwas interessantere Folgerung ist der Satz über die Winkelsumme im Dreieck.

**Satz 2.2.3** (Winkelsummensatz) Es sei  $\triangle ABC$  ein Dreieck. Dann gilt

$$\sphericalangle BAC + \sphericalangle CBA + \sphericalangle ACB = \pi.$$

**Beweis** Es sei  $g$  eine (die) Parallele zu  $AB$  durch  $C$  sowie  $A'$  und  $B'$  Punkte auf  $AB$  mit  $C$  zwischen  $A'$  und  $C'$ . Dann gilt aufgrund des Stufenwinkelsatzes 2.2.2 (vgl. Abb. 2.3)

$$\sphericalangle BAC + \sphericalangle CBA + \sphericalangle ACB = \sphericalangle B'CA' = \pi.$$

□

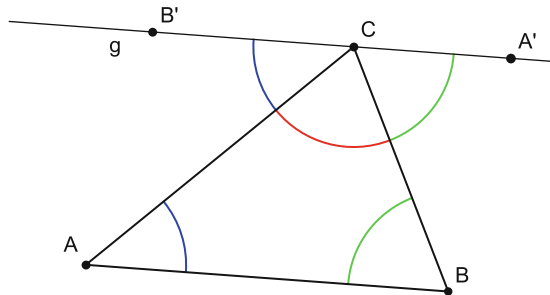
Eine unmittelbare Folgerung des Winkelsummensatzes ist der Satz vom Außenwinkel.

**Definition 2.2.4** In einem Dreieck heißen die Nebenwinkel der Innenwinkel die Außenwinkel des Dreiecks.

**Korollar 2.2.5** (Satz vom Außenwinkel) In einem Dreieck entspricht der Wert eines jeden Außenwinkels der Summe der Winkelwerte der beiden nicht anliegenden Innenwinkel; insbesondere ist jeder Außenwinkel größer als die beiden nicht anliegenden Innenwinkel.

Einer der grundlegenden Sätze der klassischen Schulgeometrie ist der Basiswinkelsatz:

**Abb. 2.3** Zum Beweis des Winkelsummensatzes 2.2.3



**Satz 2.2.6** Es sei  $ABC$  ein gleichschenkliges Dreieck mit  $|AC| = |BC|$ . Dann gilt

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle CBA.$$

**Beweis** Dies ist eine direkte Anwendung des Axioms 1.2.19 bzw. des Kongruenzsatzes sws 2.1.17 auf die Dreiecke  $ABC$  und  $BAC$ .  $\square$

**Korollar 2.2.7** In jedem Dreieck liegt der größere Winkel der größeren Seite gegenüber: In einem Dreieck  $ABC$  gilt genau dann die Ungleichung  $\sphericalangle BAC < \sphericalangle CBA$ , wenn  $|BC| < |AC|$  gilt.

**Beweis** Für „ $\Leftarrow$ “ zeigen wir die Negierung der Aussage, d. h., wir gehen von der Ungleichung  $|BC| \geq |AC|$  aus. Dann gibt es einen Punkt  $A'$  auf  $\overline{CB}$  mit  $|A'C| = |AC|$  (vgl. Abb. 2.4). Anwendung des Außenwinkelsatzes 2.2.5 auf das Dreieck  $ABA'$  liefert  $\sphericalangle CA'A \geq \sphericalangle CBA$ . Mit dem Basiswinkelsatz folgt schließlich

$$\sphericalangle BAC \geq \sphericalangle A'AC = \sphericalangle CA'A \geq \sphericalangle CBA.$$

Die umgekehrte Richtung geht analog.  $\square$

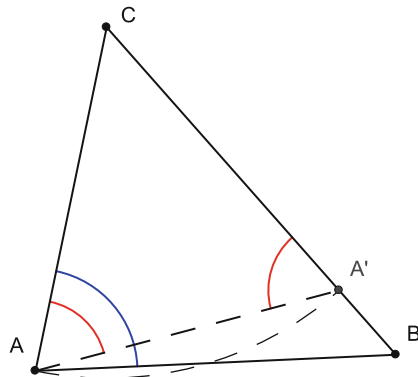
Eine unmittelbare Folgerung ist die Umkehrung des Basiswinkelsatzes.

**Korollar 2.2.8** Es sei  $ABC$  ein Dreieck, in dem zwei Winkel übereinstimmen. Dann stimmen auch zwei Seiten überein.

In vielen Anwendungen spielt der sogenannte rechte Winkel eine fundamentale Rolle:

**Definition 2.2.9** Ein Winkel mit dem Winkelwert  $\frac{\pi}{2}$  heißt rechter (oder orthogonaler) Winkel.

**Abb. 2.4** Zum Beweis von 2.2.7



**Satz 2.2.10** Es seien  $g$  eine Gerade mit drei Punkten  $A, O, B$ , sodass  $O$  zwischen  $A$  und  $B$  liegt, sowie  $C$  ein Punkt nicht auf  $g$ . Dann sind äquivalent:

1.  $\angle AOC$  ist ein rechter Winkel;
2.  $\angle BOC$  ist ein rechter Winkel;
3.  $\langle A - O, C - O \rangle = 0$ ;
4.  $\langle B - O, C - O \rangle = 0$ .

**Beweis** Die Äquivalenz von 1. und 2. ist eine direkte Folgerung aus dem analytischen Nebenwinkelsatz 2.2.1; die Äquivalenzen von 1. und 3. bzw. 2. und 4. folgen sofort aus der Definition 2.1.12 des Winkelwerts.  $\square$

Ein zentrales Thema im Schulunterricht sind die Kongruenzsätze, denen wir uns im Folgenden zuwenden.

**Definition 2.2.11** Zwei Dreiecke heißen kongruent, falls es eine Eckenbenennung  $ABC$  bzw.  $A'B'C'$  gibt, sodass

$$|AB| = |A'B'|, |AC| = |A'C'|, |BC| = |B'C'|$$

sowie

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C', \sphericalangle CBA = \sphericalangle C'B'A' \text{ und } \sphericalangle ACB = \sphericalangle A'C'B'$$

gelten.

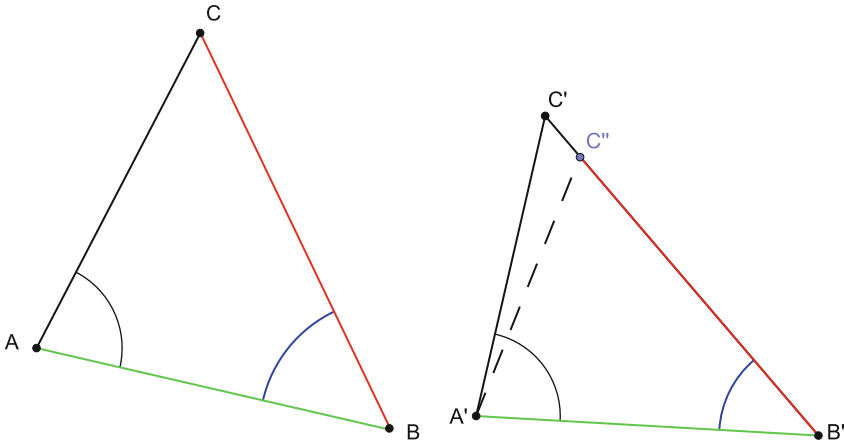
Zwei Dreiecke sind demnach kongruent, wenn sie in entsprechenden Seiten und entsprechenden Winkeln übereinstimmen. Um einzusehen, dass zwei Dreiecke kongruent sind, reicht es oft, nur von einem Teil dieser Größen zu wissen, dass sie übereinstimmen. Die Kongruenzsätze liefern Aussagen darüber, welche Größen dies sein müssen, um bereits auf Kongruenz schließen zu können. Wir werden zum Beweis dieser Sätze verschiedene Methoden – sowohl elementargeometrisch als auch analytisch – verwenden, um die Vielfalt dieser Möglichkeiten aufzuzeigen. Es ist eine gute Übung, sich für die einzelnen Aussagen alternative Beweiseideen zu überlegen.

**Satz 2.2.12** (wsw) Es seien  $ABC$  und  $A'B'C'$  Dreiecke mit  $|AB| = |A'B'|$ ,  $\sphericalangle CBA = \sphericalangle C'B'A'$  und  $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$ . Dann sind  $ABC$  und  $A'B'C'$  kongruent.

**Beweis** Für diese Aussage (vgl. Abb. 2.5) geben wir einen elementargeometrischen Beweis: Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass  $|BC| \leq |B'C'|$  ist. Trägt man nun die Strecke  $|BC|$  von  $B'$  ausgehend auf  $\overline{B'C'}$  ab, so sei  $C''$  der Endpunkt dieser Strecke: Dann sind die Dreiecke  $ABC$  und  $A'B'C''$  nach dem Kongruenzsatz 2.1.17 kongruent. Daher gilt

$$\sphericalangle B'A'C'' = \sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'.$$

Dies impliziert aber  $C'' = C'$  und damit die Behauptung.  $\square$

**Abb. 2.5** Kongruenzsatz wsw

**Satz 2.2.13** (sss) Es seien  $ABC$  und  $A'B'C'$  Dreiecke mit  $|AB| = |A'B'|$ ,  $|AC| = |A'C'|$  und  $|BC| = |B'C'|$ . Dann sind  $ABC$  und  $A'B'C'$  kongruent.

**Beweis** Dies beweisen wir mit analytischen Methoden: Für  $v, w \in \mathbb{R}^2$  gilt die Identität (Polaritätsformel)

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{2} (|v|^2 + |w|^2 - |v - w|^2). \quad (2.1)$$

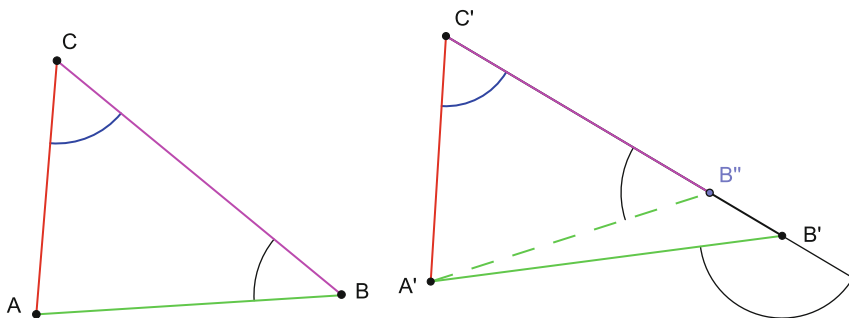
Mit  $v := B - A$ ,  $w := C - A$  sowie  $v' := B' - A'$  und  $w' := C' - A'$  zeigt (2.1), dass die Winkelwerte  $\sphericalangle BAC$  und  $\sphericalangle B'A'C'$  übereinstimmen. Dann folgt die Behauptung wieder aus Satz 2.1.17.  $\square$

**Satz 2.2.14** (ssW, oft auch Ssw) Es seien  $ABC$  und  $A'B'C'$  Dreiecke mit

$$|AB| = |A'B'| \geq |AC| = |A'C'| \text{ und } \sphericalangle ACB = \sphericalangle A'C'B'.$$

Dann sind  $ABC$  und  $A'B'C'$  kongruent.

**Beweis** Es genügt zu zeigen, dass  $|CB| = |C'B'|$  ist. Andernfalls können wir  $|CB| < |C'B'|$  annehmen (vgl. Abb. 2.6). Dann gibt es einen Punkt  $B''$  auf der Strecke  $C'B'$ , sodass  $|C'B''| = |CB|$  gilt. Somit sind die Dreiecke  $ABC$  und  $A'B''C'$  kongruent. Insbesondere gilt  $\sphericalangle CBA = \sphericalangle C'B''A'$  und  $|B''A| = |AB| = |A'B'|$ . Nach dem Basiswinkelsatz gilt daher  $\sphericalangle A'B'B'' = \sphericalangle A'B''B'$ . Daher ist  $\angle C'B''A'$  zum Außenwinkel von  $\angle A'B'C' = \angle A'B'B''$  kongruent. Daher hat man



**Abb. 2.6** Der Kongruenzsatz ssW

$$\sphericalangle CBA = \sphericalangle C'B''A' > \sphericalangle A'C'B'' = \sphericalangle ACB.$$

Nach Korollar 2.2.7 folgt daraus aber  $|AC| > |AB|$  im Widerspruch zur Voraussetzung.  $\square$

**Aufgabe 2.2.15** Man zeige, dass im Satz 2.2.14 (mit der dort verwendeten Notation) die Voraussetzung  $|AB| \geq |AC|$  notwendig ist.

## 2.3 Abbildungen

Wie in den meisten mathematischen Disziplinen spielen Abbildungen – typischerweise strukturverträgliche – auch in der Geometrie eine entscheidende Rolle. Beispielsweise wird in der Schule die Kongruenz von Dreiecken oftmals über Kongruenzabbildungen eingeführt. Dabei versteht man unter einer Kongruenzabbildung eine aus Translationen (Verschiebungen), Rotationen (Drehungen) und Spiegelungen zusammengesetzte Abbildung. Wir werden in diesem Abschnitt diese und allgemeinere Abbildungen untersuchen.

**Definition 2.3.1** Eine bijektive Abbildung  $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  heißt eine Ähnlichkeitsabbildung, wenn  $f$  geraden- und verhältnistreu ist, d. h., für alle  $A, B, C, D \in \mathbb{E}$  und jede Gerade  $g \in \mathbb{G}$  gilt

- (i)  $f(g) \in \mathbb{G}$  (Geradentreue),
- (ii)  $|f(A)f(B)| \cdot |CD| = |f(C)f(D)| \cdot |AB|$  (Verhältnistreue).

Offenbar ist eine Abbildung genau dann verhältnistreu, wenn es eine positive Zahl  $\lambda \in \mathbb{R}$  gibt mit  $|f(A)f(B)| = \lambda|AB|$  für alle  $A, B \in \mathbb{E}$ . Man nennt dieses  $\lambda$  auch den Streckfaktor von  $f$ .

- Aufgabe 2.3.2** 1. Man zeige, dass die Menge aller Ähnlichkeitsabbildungen zusammen mit der üblichen Verkettung von Abbildungen eine Gruppe ist.
2. Es seien  $Z \in \mathbb{E}$  und  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Eine Abbildung  $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  der Form  $X \mapsto \lambda(X - Z) + Z$  heißt *zentrische Streckung mit Zentrum  $Z$  und Streckfaktor  $\lambda$* . Man zeige, dass zentrische Streckungen Ähnlichkeitsabbildungen sind. Gibt es weitere Ähnlichkeitsabbildungen?

Als erste Beobachtung stellen wir fest, dass Ähnlichkeitsabbildungen die Zwischenrelation respektieren.

**Lemma 2.3.3** Es seien  $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  eine Ähnlichkeitsabbildung und  $A, B, C \in \mathbb{E}$  drei Punkte auf einer Geraden mit  $B$  zwischen  $A$  und  $C$ . Dann liegt auch  $f(B)$  zwischen  $f(A)$  und  $f(C)$ .

**Beweis** Angenommen,  $f(B)$  liegt nicht zwischen  $f(A)$  und  $f(C)$ . Dann kann man ohne Einschränkung annehmen, dass  $f(A)$  zwischen  $f(B)$  und  $f(C)$  liegt. Mithilfe von Aufgabe 2.1.11 erhält man

$$1 < \frac{|f(B)f(C)|}{|f(A)f(C)|} = \frac{|BC|}{|AC|} < 1,$$

was einen Widerspruch darstellt.  $\square$

**Satz 2.3.4** Jede Ähnlichkeitsabbildung  $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  mit  $f(0) = 0$  lässt sich als lineare Abbildung des  $\mathbb{R}^2$  auffassen.

**Beweis** Es seien  $U \in \mathbb{R}^2$  sowie  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dann liegen die Punkte  $0$ ,  $U$  und  $\alpha U$  auf einer Geraden. Wir betrachten nur den Fall  $\alpha > 1$  (die anderen Fälle gehen analog), d. h.,  $U$  liegt zwischen  $0$  und  $\alpha U$ . Da  $|0(\alpha U)| = \alpha|0U|$  gilt, liefert die Verhältnistreue sofort  $|0f(\alpha U)| = \alpha|0f(U)|$ . Weil  $f$  geradentreu ist, liegen  $0$ ,  $f(U)$  und  $f(\alpha U)$  auch auf einer Geraden, und aufgrund des letzten Lemmas liegt  $f(U)$  zwischen  $0$  und  $f(\alpha U)$ . Insgesamt folgt  $f(\alpha U) = \alpha f(U)$ .

Es sei nun auch  $W \in \mathbb{R}^2$ . Dann liegen  $U$ ,  $W$  und  $V := \frac{1}{2}(U + W)$  auf einer Geraden, und es gilt  $|UV| = |WV|$ . Die Verhältnistreue und die Geradentreue liefern einerseits  $|f(U)f(V)| = |f(W)f(V)|$  und andererseits, dass  $f(U)$ ,  $f(W)$  und  $f(V)$  auf einer Geraden liegen. Wegen Lemma 2.3.3 liegt zudem  $f(V)$  zwischen  $f(U)$  und  $f(W)$ . Dies impliziert

$$\frac{1}{2}(f(U) + f(W)) = f(V) = f\left(\frac{1}{2}(U + W)\right) = \frac{1}{2}f(U + W),$$

wobei die letzte Umformung aus dem ersten Teil des Beweises folgt. Dies impliziert unmittelbar  $f(U + W) = f(U) + f(W)$ .  $\square$

**Korollar 2.3.5** Jede Ähnlichkeitsabbildung  $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  lässt sich in der Form  $f(x) = Ax + b$  mit  $b \in \mathbb{E}$  und einer quadratischen Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  darstellen.

**Beweis** Die Abbildung  $g: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}, x \mapsto f(x) - f(0)$ , erfüllt die Voraussetzung von 2.3.4, d.h., es gilt  $g(x) = Ax$  für eine geeignete Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ . Setzt man  $b := f(0)$ , so erhält man  $f(x) = Ax + b$ .  $\square$

**Aufgabe 2.3.6** Man zeige, dass Ähnlichkeitsabbildungen winkeltreu sind, d.h., sind  $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  eine Ähnlichkeitsabbildung und  $A, B, C \in \mathbb{E}$ , so gilt

$$\sphericalangle f(B)f(A)f(C) = \sphericalangle BAC.$$

Ähnlichkeitsabbildungen kann man, wie bereits direkt nach Definition 2.3.1 bemerkt, dadurch charakterisieren, dass  $|f(A)f(B)| = \lambda|AB|$  mit einem geeigneten  $\lambda > 0$  gilt. Ein Spezialfall liegt vor, falls dieses  $\lambda$  den Wert eins annimmt.

**Definition 2.3.7** Eine Ähnlichkeitsabbildung  $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  heißt eine Kongruenzabbildung, falls  $f$  längentreu ist, d.h.

$$|f(A)f(B)| = |AB|$$

für alle  $A, B \in \mathbb{E}$  gilt.

**Bemerkung 2.3.8** Ist  $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  eine Ähnlichkeitsabbildung mit Streckfaktor  $\lambda$ , so ist  $\frac{1}{\lambda}f$  eine Kongruenzabbildung.

**Lemma 2.3.9** Ist  $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  eine Kongruenzabbildung mit  $f(0) = 0$ , so ist die zu  $f$  gemäß Satz 2.3.4 gehörende Matrix  $A$  orthogonal, d.h.  $A \in O_2(\mathbb{R})$  (es gilt  $A^{-1} = A^\top$ ).

**Beweis** Dies ist eine direkte Folgerung aus Satz 2.3.4 und der Gl. (2.1), die bereits im Beweis des Satzes 2.2.13 verwendet wurde.  $\square$

**Korollar 2.3.10** 1. Jede Kongruenzabbildung  $f$  ist von der Form  $f(x) = Ax + b$  mit einer orthogonalen Matrix  $A \in O_2(\mathbb{R})$ .  
2. Jede Ähnlichkeitsabbildung  $f$  ist von der Form  $f(x) = \lambda Ax + b$  mit einer orthogonalen Matrix  $A \in O_2(\mathbb{R})$  und einem  $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ .  $\square$

Dass die von uns definierten Kongruenzabbildungen gerade die in der Schule betrachteten Drehungen, Spiegelungen und Translationen sind, ist die wesentliche Aussage des folgenden Satzes:

**Satz 2.3.11** Jede Kongruenzabbildung mit  $f(0) = 0$  ist entweder eine Spiegelung an einer Ursprungsgeraden oder eine Drehung um den Ursprung.



**Beweis** Nach Lemma 2.3.4 ist  $f$  von der Form  $f(x) = Ax$  mit einer nach Lemma 2.3.9 orthogonalen Matrix  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$ . Insbesondere bedeutet das  $\det(A) = \pm 1$ . Weiter gilt für orthogonale Matrizen bekanntlich

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = A^\top = A^{-1} = \pm 1 \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Im Fall von  $\det(A) = 1$  impliziert das

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{mit } \det(A) = a^2 + b^2 = 1.$$

Daher gibt es dann ein  $\alpha \in [0; 2\pi[$  mit  $a = \cos(\alpha)$  und  $b = \sin(\alpha)$ , und  $A$  ist die Drehmatrix zum Winkel  $\alpha$

$$A = D(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Im Fall  $\det(A) = -1$  erhält man

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \quad \text{mit } -\det(A) = a^2 + b^2 = 1.$$

Man rechnet dann schnell nach, dass  $A$  genau die zwei Eigenwerte 1 und  $-1$  besitzt und  $v := (b, 1 - a)$  und  $w := (a - 1, b)$  zugehörige orthogonale Eigenvektoren sind. Also ist  $A$  Spiegelungsmatrix zur Spiegelung an  $g := \mathbb{R}v$ .  $\square$

**Aufgabe 2.3.12** Man zeige, dass sich jede Drehung um den Ursprung als Komposition von Spiegelungen an Ursprungsgeraden schreiben lässt.

**Satz 2.3.13** Zwei (nicht entartete) Dreiecke  $ABC$  und  $A'B'C'$  sind genau dann kongruent (in dieser Bezeichnung), wenn es eine Kongruenzabbildung  $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  gibt mit  $f(A) = A'$ ,  $f(B) = B'$  und  $f(C) = C'$ .

**Beweis** „ $\Leftarrow$ “ Dies ist eine unmittelbare Folgerung aus der Definition einer Kongruenzabbildung und z. B. dem Kongruenzsatz 2.2.13 oder der Aufgabe 2.3.6.

„ $\Rightarrow$ “ Weil das Dreieck  $ABC$  nicht entartet ist, sind die Vektoren  $v := B - A$  und  $w := C - A$  linear unabhängig, also eine Basis des  $\mathbb{R}^2$ . Die lineare Abbildung  $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  sei definiert durch  $h(v) := v' := B' - A'$  und  $h(w) := w' := C' - A'$ .

Es sei nun  $u \in \mathbb{R}^2$  ein beliebiger Vektor. Dieser besitzt eine Darstellung  $u = \alpha v + \beta w$ , und es gilt

$$\|u\|^2 = \langle u, u \rangle = \alpha^2 \|v\|^2 + \beta^2 \|w\|^2 + 2\alpha\beta \langle v, w \rangle.$$

Auf der anderen Seite gilt  $h(u) = \alpha v' + \beta w'$  und damit

$$\|h(u)\|^2 = \langle h(u), h(u) \rangle = \alpha^2 \|v'\|^2 + \beta^2 \|w'\|^2 + 2\alpha\beta \langle v', w' \rangle.$$

Die Kongruenz der Dreiecke  $ABC$  und  $A'B'C'$  impliziert aber  $\|v\| = \|v'\|$ ,  $\|w\| = \|w'\|$  sowie  $\langle v, w \rangle = \langle v', w' \rangle$ . Ein Vergleich der beiden obigen Gleichungen für die Skalarprodukte zeigt nun  $\|u\| = \|h(u)\|$ ; somit ist  $h$  längentreu. Setzt man nun

$$f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}, x \mapsto h(x - A) + A',$$

so ist  $f$  eine Kongruenzabbildung und erfüllt  $f(A) = A'$ ,  $f(B) = B'$  sowie  $f(C) = C'$ .  $\square$

In vielen Lehrbüchern wird die Kongruenz von zwei Dreiecken nicht wie in Definition 2.2.11 definiert, sondern über die Existenz einer Kongruenzabbildung zwischen den beiden Dreiecken (vgl. z.B. Müller-Philipp und Gorski 2012, Kap. 4, Definition 11). Die Bedeutung des Satzes 2.3.13 liegt darin, dass er aussagt, dass beide Definitionen äquivalent sind.

**Aufgabe 2.3.14** *Man nennt zwei Dreiecke ähnlich, wenn es eine Ähnlichkeitsabbildung gibt, die die beiden Dreiecke ineinander überführt. Man zeige, dass zwei Dreiecke genau dann ähnlich sind, wenn sie in entsprechenden Winkeln übereinstimmen. Trifft dies auch auf Vierecke zu?*

---

## 2.4 Sätze über Polygone am Kreis

In diesem Abschnitt besprechen wir einige Sätze, die (derzeit leider) nicht mehr verbindlich im Lehrplan der Mittelstufe verankert sind. Wir beginnen mit dem Peripheriewinkelsatz, der eine Verallgemeinerung des berühmten Satzes des Thales darstellt.

**Definition 2.4.1** Es sei  $M \in \mathbb{E}$  ein Punkt und  $r > 0$ . Dann heißt

$$K(M; r) := \{X \in \mathbb{E}; |XM| = r\}$$

euklidischer Kreis mit Mittelpunkt  $M$  und Radius  $r$ .

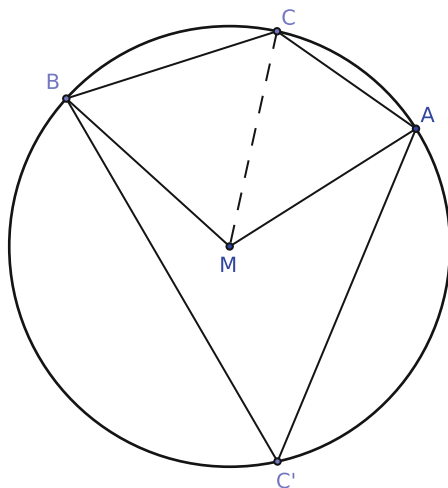
**Bemerkung 2.4.2** Bekanntlich ist  $K(M; r)$  das Bild der Abbildung

$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}; t \mapsto M + r(\cos(t), \sin(t)).$$

Wir führen noch einige Begriffe ein: Sind  $A, B$  zwei Punkte auf einem Kreis  $K(M; r)$ , so heißt die Strecke  $\overline{AB}$  eine Kreissehne. Enthält diese den Mittelpunkt  $M$  des Kreises, so spricht man von einem Durchmesser des Kreises. Dieser teilt den Kreis in zwei Halbkreise.

**Abb. 2.7**

Peripheriewinkelsatz



**Satz 2.4.3** (Peripheriewinkelsatz) Es sei  $K$  ein Kreis mit Mittelpunkt  $M$  sowie  $A, B, C, C' \in K$ , wobei  $C$  auf der anderen Seite von  $AB$  wie  $M$  liege,  $C'$  aber auf der gleichen Seite (vgl. Abb. 2.7). Dann gelten

$$\sphericalangle BCA = \pi - \frac{\sphericalangle AMB}{2} \text{ sowie } \sphericalangle AC'B = \frac{\sphericalangle AMB}{2}.$$

**Beweis** Wir beweisen nur die erste Aussage und überlassen die zweite dem Leser. Dazu setze man  $\alpha := \sphericalangle AMC$  und  $\beta := \sphericalangle CMB$ . Weil die Dreiecke  $MAC$  und  $MCB$  gleichschenkelig sind, gelten aufgrund des Basiswinkelsatzes 2.2.6 und des Winkelsummensatzes 2.2.3

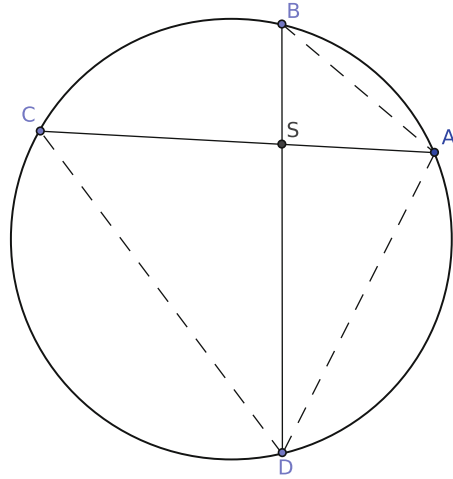
$$\sphericalangle MCA = \frac{1}{2}(\pi - \alpha) \text{ und } \sphericalangle BCM = \frac{1}{2}(\pi - \beta).$$

Addition liefert die Behauptung. □

Eine etwas vereinfachte, für viele Anwendungen aber ausreichende Form des Peripheriewinkelsatzes, der manchmal auch Umfangswinkelsatz genannt wird, ist offenbar, dass alle Winkel eines Kreisbogens über einer Sehne gleich sind. Ist die Sehne ein Durchmesser, so erhält man den Satz des Thales, dessen Beweis identisch zum Beweis des Peripheriewinkelsatzes ist.

**Satz 2.4.4** (Satz des Thales) Sind  $A, B \in K(M; r)$ , sodass  $M \in AB$  gilt (d.h.  $\overline{AB}$  ist ein Kreisdurchmesser), und ist  $C \in K(M; r)$ , so gilt  $\sphericalangle BCA = \frac{\pi}{2}$ .

**Aufgabe 2.4.5** Man zeige die Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes (und des Satzes des Thales): Ist  $ABC$  ein Dreieck und  $K(M; r)$  ein Kreis mit  $A, B \in K(M; r)$ ,

**Abb. 2.8** Sehnensatz

sodass  $C$  nicht auf der gleichen Seite von  $AB$  wie  $M$  liegt und  $\sphericalangle ACB = \pi - \frac{\sphericalangle BMA}{2}$  gilt, dann liegt  $C$  auf dem Kreisbogen:  $C \in K(M; r)$ .

Es gibt eine Vielzahl weiterer Aussagen über Punkte auf einem Kreis, die sich aus dem (oder ähnlich wie der) Peripheriewinkelsatz ableiten lassen. Wir stellen beispielhaft eine weitere davon vor und animieren den Leser dazu, sich weitere Aussagen selbst zu überlegen oder in der Literatur nachzulesen (vgl. Agricola und Friedrich 2001, Abschn. 2.3).

**Satz 2.4.6** (Sehnensatz, vgl. Abb. 2.8) Es seien  $K(M; r)$  ein Kreis und  $A, B, C, D \in K(M; r)$  paarweise verschieden, sodass  $S := \overline{AC} \cap \overline{BD}$  im Inneren des Kreises liege. Dann gilt  $|AS| \cdot |CS| = |BS| \cdot |DS|$ .

**Beweis** Mit dem Peripheriewinkelsatz 2.4.3 hat man  $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD$ . Ferner gilt wegen des Scheitelwinkelsatzes 1.2.23  $\sphericalangle ASB = \sphericalangle CSD$ . Somit sind aufgrund Aufgabe 2.3.14 die Dreiecke  $ABS$  und  $DSC$  ähnlich, woraus unmittelbar die Behauptung folgt.  $\square$

**Aufgabe 2.4.7** (Sekantensatz) Es seien  $K(M; r)$  ein Kreis und  $A, B, C, D \in K(M; r)$  paarweise verschieden, sodass der Schnittpunkt  $S = \overline{AC} \cap \overline{BD}$  der Geraden  $AC$  und  $BD$  außerhalb von  $K$  liege. Dann gilt  $|AS| \cdot |CS| = |BS| \cdot |DS|$ .

Für Dreiecke, die den Satz des Thales erfüllen, folgt, dass alle Eckpunkte des Dreiecks auf einem Kreis liegen. Diese Aussage gilt jedoch in der euklidischen Geometrie immer.

**Definition 2.4.8** Es sei  $\overline{AB}$  eine Strecke mit Mittelpunkt  $M$ . Eine Gerade  $m$  mit  $M \in m$ , die orthogonal zu  $AB$  ist, heißt Mittelsenkrechte von  $AB$ .

Dass die Mittelsenkrechte einer Strecke eindeutig bestimmt ist, folgt aus folgendem Lemma.

**Lemma 2.4.9** Es sei  $m$  eine Mittelsenkrechte von  $\overline{AB}$ . Dann gilt

$$m = \{P \in \mathbb{E}; |AP| = |BP|\}.$$

**Beweis** Zunächst sei  $M$  der Mittelpunkt von  $\overline{AB}$ .

„ $\Leftarrow$ “: Es sei  $P \in m$ . Im Fall  $P = M$  ist die Aussage klar. Gilt  $P \neq M$ , so sind die Dreiecke  $AMP$  und  $PMB$  nach dem Kongruenzsatz 2.1.17 kongruent, woraus die Behauptung folgt.

„ $\Rightarrow$ “: Es sei  $P$  mit  $|AP| = |BP|$ . Dann sind die Dreiecke  $AMP$  und  $MBP$  nach dem Kongruenzsatz 2.2.13 kongruent, also sind die Nebenwinkel  $\angle PMA$  und  $\angle BMP$  gleich groß. Damit folgt die Behauptung aus dem Nebenwinkelsatz 2.2.1.  $\square$

Als unmittelbare Folgerung erhält man

**Satz-Definition 2.4.10** *Die Mittelsenkrechten des Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, der von allen Eckpunkten den gleichen Abstand hat. Dieser heißt Umkreismittelpunkt des Dreiecks.*

**Beweis** Der Beweis ist eine direkte Folgerung aus der Transitivität der Gleichheitsrelation und Lemma 2.4.9. Die Tatsache, dass sich je zwei Mittelsenkrechten eines euklidischen Dreiecks immer schneiden, folgt aus dem Parallelenaxiom, und der Beweis bleibt dem Leser überlassen.  $\square$

Der Peripheriewinkelsatz hilft auch bei der Frage, wann ein Viereck einen Umkreis besitzt. In unserer Notation ist ein Viereck  $ABCD$  ein konvexes  $n$ -Eck mit vier Eckpunkten  $A, B, C$  und  $D$ , sodass die Strecken (Seiten)  $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$  und  $\overline{DA}$  sich nicht schneiden, die *Diagonalen*  $\overline{AC}$  und  $\overline{BD}$  dagegen einen gemeinsamen Punkt besitzen. Vierecke, die einen Umkreis besitzen, nennen wir Sehnenvierecke. Wir werden die Ecken eines Vierecks immer positiv orientiert bezeichnen: Für ein Sehnenviereck heißt das, dass es vier Zahlen  $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$  mit  $t_4 - t_1 < 2\pi$  gibt, sodass  $A = \gamma(t_1), B = \gamma(t_2), C = \gamma(t_3)$  und  $D = \gamma(t_4)$  gelten, wobei  $\gamma$  die Abbildung aus 2.4.2 ist.

**Satz 2.4.11** Ein Viereck ist genau dann ein Sehnenviereck, wenn sich gegenüberliegende Winkel zu  $\pi$  ergänzen.

**Beweis** Die Richtung „ $\Rightarrow$ “ ist eine unmittelbare Folgerung aus dem Satz 2.4.3. Für die umgekehrte Richtung stellt man zunächst fest, dass drei der vier Eckpunkte wegen

Satz 2.4.10 auf einem gemeinsamen Kreis liegen. Dass auch der vierte Eckpunkt auf diesem Kreis liegt, folgt dann aus der Umkehrung des Peripheriwinkelsatzes 2.4.5.  $\square$

Für Sehnenvierecke ergibt sich ein interessanter Zusammenhang zwischen den Seitenlängen und den Diagonalenlängen eines solchen Vierecks.

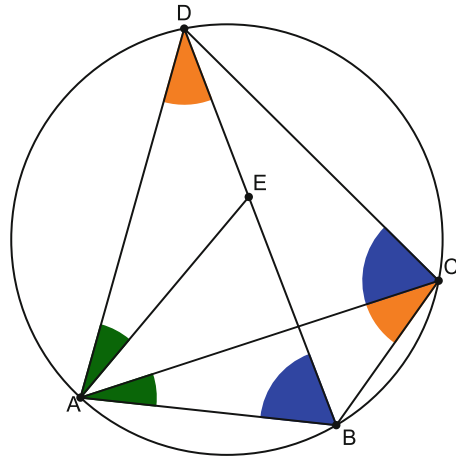
**Satz 2.4.12** (Satz von Ptolemäus) Ist  $ABCD$  ein Sehnenviereck in positiver Orientierung, so gilt

$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| = |AC| \cdot |BD|.$$

**Beweis** Wir wählen einen Punkt  $E \in |BD|$ , sodass  $\sphericalangle EAD = \sphericalangle BAC$  gilt (dies geht wegen der Möglichkeit, Winkel abzutragen). Wir beschränken uns nun auf den in Abb. 2.9 dargestellten Fall, dass  $2 \cdot \sphericalangle BAC < \sphericalangle BAD$  gilt, und überlassen die (analog zu behandelnden) anderen Fälle dem Leser. Wegen des Peripheriwinkelsatzes 2.4.3 gilt dann  $\sphericalangle ADE = \sphericalangle ACB$ , weil beides Winkel über der Sehne  $\overline{AB}$  sind. Da die beiden Dreiecke  $ABC$  und  $AED$  nach Konstruktion zudem in den Winkeln bei  $A$  übereinstimmen, sind sie nach Aufgabe 2.3.14 ähnlich. Daher gilt

$$\frac{|BC|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|AD|}, \text{ also } |BC| \cdot |AD| = |AC| \cdot |DE|.$$

**Abb. 2.9** Satz von Ptolemäus



Weiter gelten  $\sphericalangle BAE = \sphericalangle CAD$  sowie  $\sphericalangle DCA = \sphericalangle EBA$  (Ersteres nach Wahl von  $E$ , Letzteres wieder nach Satz 2.4.3). Somit sind auch die Dreiecke  $ABE$  und  $ACD$  ähnlich, d. h.

$$\frac{|CD|}{|BE|} = \frac{|AC|}{|AB|}, \text{ also } |AB| \cdot |CD| = |AC| \cdot |BE|.$$

Addition der beiden Gleichungen liefert die Behauptung.  $\square$

Im Folgenden betrachten wir noch Kreistangenten.

**Definition 2.4.13** Eine Gerade  $g$  heißt Tangente an den Kreis  $K(M; r)$ , wenn die Menge  $g \cap K(M; r)$  aus genau einem Punkt besteht.

**Bemerkung 2.4.14** Es sei  $g$  eine Gerade,  $K(M; r)$  ein Kreis sowie  $B \in K(M; r) \cap g$ . Dann ist  $g$  genau dann Tangente an  $K(M; r)$ , falls  $g \perp MB$  (d. h.,  $g$  und  $MB$  sind orthogonal) gilt.

**Beweis** Man kann  $g$  in der Form  $g = B + \mathbb{R}v$  mit  $v \neq 0$  schreiben; insbesondere hat man  $|BM| = r$ . Im Folgenden wenden wir 2.2.10 an:

„ $\implies$ “: Ist  $\langle v, B - M \rangle \neq 0$ , so hat man auch

$$s := -\frac{2\langle B - M, v \rangle}{\langle v, v \rangle} \neq 0.$$

Nachrechnen zeigt, dass für  $B' := B + sv \in g$  ebenfalls  $|B'M| = r$  gilt. Nun gilt offenbar dann  $B' \neq B$ , somit besitzt  $K(M; r) \cap g$  mindestens zwei Elemente, also ist  $g$  dann keine Tangente.

„ $\impliedby$ “: Im Fall  $\langle v, B - M \rangle = 0$  gilt für jedes  $t \neq 0$  offenbar

$$|B + tv - M|^2 = |B - M|^2 + t^2|v|^2 > r^2,$$

somit haben  $g$  und  $K(M; r)$  dann außer  $B$  keine weiteren gemeinsamen Punkte, also ist  $g$  dann Tangente an  $K(M; r)$ .  $\square$

**Aufgabe 2.4.15** Es sei  $K$  ein Kreis in der euklidischen Ebene sowie  $A, B, C \in K$  paarweise verschieden. Weiter seien  $t_A$  die Tangente an  $K$  in  $A$  sowie  $S := BC \cap t_A$ , wobei  $S$  auf der anderen Seite von  $AB$  wie  $C$  liege. Man zeige

a) (Satz vom Sehnen tangentialen Winkel)  $\sphericalangle SAB = \sphericalangle ACB$ .

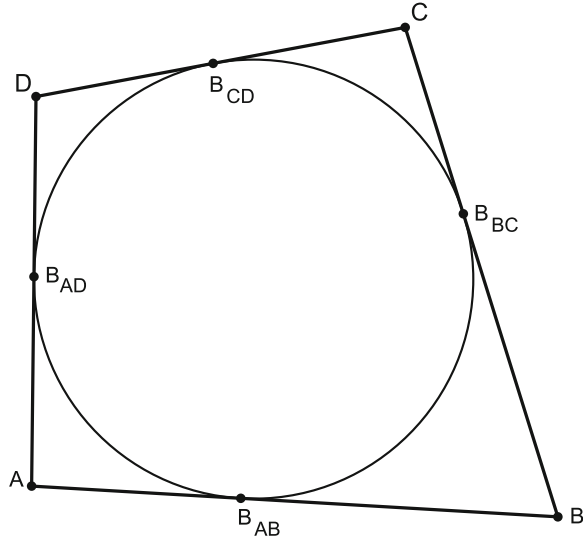
b) (Sehnen tangentialensatz)  $|BS| \cdot |CS| = |AS|^2$ .

**Lemma 2.4.16** (Kreistangentensatz) Es sei  $K$  ein Kreis und  $t_1$  bzw.  $t_2$  Tangenten an  $K$  in den Punkten  $B_1$  und  $B_2$ . Weiter sei  $S := t_1 \cap t_2$  der Schnittpunkt der beiden Tangenten. Dann gilt  $|B_1S| = |B_2S|$ .

**Beweis** Der Beweis ist eine einfache Anwendung des Kongruenzsatzes ssW 2.2.14.  $\square$

**Abb. 2.10**

Tangentenviereck



**Definition 2.4.17** Ein Viereck  $ABCD$  heißt ein Tangentenviereck (vgl. Abb. 2.10), wenn es einen Kreis  $K$  gibt, sodass alle Seiten  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  und  $AD$  Tangenten an  $K$  sind.

**Satz 2.4.18** Ist das Viereck  $ABCD$  ein Tangentenviereck, dann gilt für die Viereckseiten  $|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$ .

**Beweis** Es seien  $B_{AB}$ ,  $B_{BC}$ ,  $B_{CD}$  und  $B_{AD}$  die Berührungspunkte der entsprechenden Viereckseiten. Wegen des Kreistangentsatzes gelten dann

$$|AB_{AB}| = |AB_{AD}|, |BB_{AB}| = |BB_{BC}|, |CB_{BC}| = |CB_{CD}|, |DB_{CD}| = |DB_{AD}|.$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} |AB| + |CD| &= |AB_{AB}| + |BB_{AB}| + |CB_{CD}| + |DB_{CD}| \\ &= |AB_{AD}| + |BB_{BC}| + |CB_{BC}| + |DB_{AD}| = |AD| + |BC|. \quad \square \end{aligned}$$

**Aufgabe 2.4.19** (Fermat-Torricelli-Punkt) Es sei  $ABC$  ein Dreieck derart, dass jeder Innenwinkel kleiner als  $\frac{2\pi}{3}$  sei. Die Punkte  $A'$ ,  $B'$  und  $C'$  seien außerhalb des Dreiecks  $ABC$  so gewählt, dass  $A'BC$ ,  $AC'B$  und  $CB'A$  gleichseitige Dreiecke sind. Man zeige:

- Die Umkreise der Dreiecke  $A'BC$ ,  $AC'B$  und  $CB'A$  schneiden sich in einem Punkt  $F$  mit  $\angle AFB = \angle BFC = \angle CFA = \frac{2\pi}{3}$ .
- Es gilt  $F = AA' \cap BB' \cap CC'$ .
- Für jeden weiteren Punkt  $F'$  gilt

$$|AF| + |BF| + |CF| \leq |AF'| + |BF'| + |CF'|.$$



## 2.5 Besondere Punkte im Dreieck

In Dreiecken gibt es einige besonders ausgezeichnete Punkte, denen wir uns in diesem Abschnitt zuwenden wollen. Zunächst gehen wir auf zwei Sätze ein, die besondere Lagen in einem Dreieck kennzeichnen.

**Definition 2.5.1** Es sei  $P \in AB \setminus \{A, B\}$  ein Punkt auf der Geraden  $AB$ . Dann lässt sich  $P$  schreiben als  $P = \tau A + (1 - \tau)B$  für ein  $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ . Der Quotient  $[P; A, B] := \frac{1 - \tau}{\tau}$  heißt dann das Teilverhältnis von  $P$  bzgl. des (geordneten) Paares  $(A, B)$ .

Das Teilverhältnis trägt seinen Namen zurecht, wie folgende Aufgabe zeigt:

**Aufgabe 2.5.2** Es seien  $A, B$  und  $P$  drei Punkte auf einer Geraden. Man zeige:

1. Ist  $[P; A, B]$  das Teilverhältnis von  $P$  bzgl.  $(A, B)$ , so ist  $\frac{1}{[P; A, B]}$  das Teilverhältnis von  $P$  bzgl.  $(B, A)$ .
2. Der Punkt  $P$  liegt genau dann zwischen  $A$  und  $B$ , wenn  $[P; A, B] > 0$  gilt.
3. Ist  $[P; A, B]$  das Teilverhältnis von  $P$  bzgl.  $(A, B)$ , so gilt

$$\frac{|AP|}{|BP|} = |[P; A, B]|.$$

**Satz 2.5.3** (Satz von Menelaos) Es seien  $ABC$  ein Dreieck,  $A' \in BC \setminus \{B, C\}$ ,  $B' \in CA \setminus \{C, A\}$ ,  $C' \in AB \setminus \{A, B\}$  sowie  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  so gewählt, dass,

$$A' = \alpha B + (1 - \alpha)C, \quad B' = \beta C + (1 - \beta)A \text{ und } C' = \gamma A + (1 - \gamma)B$$

gilt. Dann liegen die Punkte  $A', B'$  und  $C'$  genau dann auf einer Geraden, wenn für das Produkt der Teilverhältnisse

$$\frac{1 - \alpha}{\alpha} \cdot \frac{1 - \beta}{\beta} \cdot \frac{1 - \gamma}{\gamma} = -1$$

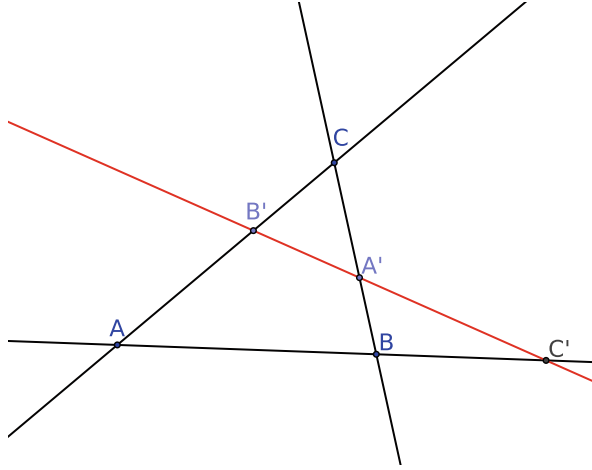
gilt (vgl. Abb. 2.11).

**Beweis** Es gelten

$$A' - B' = (1 - \beta)(C - A) + \alpha(B - C) = (1 - \beta - \alpha)(C - A) + \alpha(B - A)$$

und

$$A' - C' = (1 - \alpha)(C - B) + \gamma(B - A) = (1 - \alpha)(C - A) + (\alpha + \gamma - 1)(B - A).$$



**Abb. 2.11** Satz von Menelaos

Die Punkte  $A'$ ,  $B'$  und  $C'$  liegen genau dann auf einer Geraden, wenn  $A' - B'$  und  $A' - C'$  linear abhängig sind. Da die Vektoren  $C - A$  und  $B - A$  eine Basis des  $\mathbb{R}^2$  bilden, ist dies genau dann der Fall, wenn die Matrix  $M := \begin{pmatrix} 1 - \beta - \alpha & \alpha \\ 1 - \alpha & \alpha + \gamma - 1 \end{pmatrix}$  singulär ist, also

$0 = \det(M) = (1 - \beta - \alpha)(\alpha + \gamma - 1) - \alpha(1 - \alpha) = -1 + \alpha + \beta + \gamma - \alpha\beta - \beta\gamma - \alpha\gamma$  gilt. Addition von  $\alpha\beta\gamma$  und Division durch  $-\alpha\beta\gamma$  liefert die Behauptung.  $\square$

**Satz 2.5.4** (Satz von Ceva) Es seien  $ABC$  ein Dreieck sowie  $A' \in BC \setminus \{B, C\}$ ,  $B' \in CA \setminus \{C, A\}$  und  $C' \in AB \setminus \{A, B\}$  mit

$$A' = \alpha B + (1 - \alpha)C, \quad B' = \beta C + (1 - \beta)A \quad \text{und} \quad C' = \gamma A + (1 - \gamma)B.$$

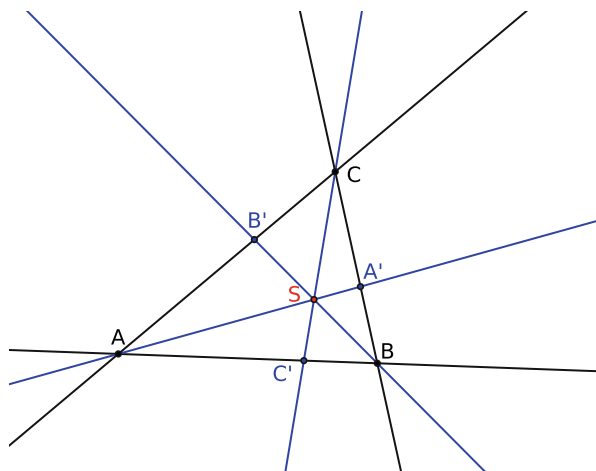
Dann schneiden sich die Geraden  $AA'$ ,  $BB'$  und  $CC'$  genau dann in einem Punkt  $S$ , wenn

$$\frac{1 - \alpha}{\alpha} \cdot \frac{1 - \beta}{\beta} \cdot \frac{1 - \gamma}{\gamma} = 1$$

gilt (vgl. Abb. 2.12).

**Beweis** Wir zeigen nur „ $\Rightarrow$ “ und überlassen die andere Richtung dem Leser. Es sei  $S = \sigma A' + (1 - \sigma)A$ . Aus  $A' = \alpha B + (1 - \alpha)C$  erhält man

$$C = \frac{-\alpha}{1 - \alpha}B + \frac{1}{1 - \alpha}A' \quad \text{und} \quad B = \frac{1}{\alpha}A' + \frac{\alpha - 1}{\alpha}C.$$

**Abb. 2.12** Satz von Ceva

Wendet man nun den Satz von Menelaos 2.5.3 einmal auf das Dreieck  $ABA'$  und die Gerade  $CC'$  und ein weiteres Mal auf das Dreieck  $A'CA$  und die Gerade  $CC'$  an, so erhält man

$$\frac{1-\gamma}{\gamma} \cdot \frac{\frac{1}{1-\alpha}}{\frac{-\alpha}{1-\alpha}} \cdot \frac{1-\sigma}{\sigma} = -1 \text{ und } \frac{\sigma}{1-\sigma} \cdot \frac{\frac{a-1}{\alpha}}{\frac{1}{\alpha}} \cdot \frac{1-\beta}{\beta} = -1.$$

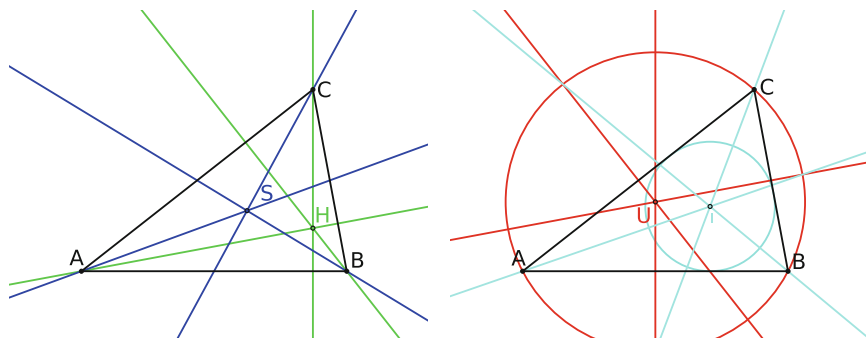
Multiplikation der zwei Gleichungen liefert die Behauptung.  $\square$

**Definition 2.5.5** Es sei  $ABC$  ein (nicht entartetes) Dreieck.

1. Die Gerade, die den Winkel  $\angle BAC$  halbiert, heißt Winkelhalbierende von  $\angle BAC$ . Die Gerade durch  $A$  und den Mittelpunkt von  $\overline{BC}$  heißt Seitenhalbierende von  $\overline{BC}$ . Die zu  $BC$  orthogonale Gerade durch  $A$  heißt Höhe von  $\overline{BC}$  (analog für die anderen Winkel und Seiten).
2. Der Schnittpunkt  $I$  der Winkelhalbierenden heißt Inkreismittelpunkt, der Schnittpunkt  $H$  der Höhen Höhenschnittpunkt und der Schnittpunkt  $S$  der Seitenhalbierenden Schwerpunkt des Dreiecks  $ABC$  (vgl. Abb. 2.13).

Wir überlassen es dem Leser, nachzuweisen, dass die Schnittpunkte aus Definition 2.5.5 wohldefiniert sind, sich also die entsprechenden Geraden tatsächlich jeweils in einem gemeinsamen Punkt schneiden (Hinweise: Satz von Ceva sowie die nachfolgenden Ergebnisse).

Im Allgemeinen sind alle diese vier Punkte paarweise verschieden; in einem regelmäßigen Dreieck (mit drei gleich langen Seiten) fallen alle vier zusammen. Je nach Blickwinkel könnte man jeden als eine Art Mittelpunkt betrachten, wobei dabei Vorsicht angesagt ist: Der Höhenschnittpunkt etwa braucht im Allgemeinen nicht im



**Abb. 2.13** „Mittelpunkte“ eines Dreiecks

Inneren des Dreiecks zu liegen! Die Wahl des Namens Inkreismittelpunkts für den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden wird durch folgende Aufgabe klar:

**Aufgabe 2.5.6** Es sei  $ABC$  ein (nicht entartetes) Dreieck sowie  $I$  der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden. Weiter seien  $L_a, L_b, L_c$  die Lotfußpunkte von  $I$  auf die Dreiecksseiten  $BC, AC$  bzw.  $AB$ . Man zeige:

- $|L_a I| = |L_b I| = |L_c I| =: \rho$ , d.h., die Dreiecksseiten sind Tangenten des Kreises  $K(I, \rho)$ ,
- die Geraden  $AL_a, BL_b$  und  $CL_c$  schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt.

**Definition 2.5.7** Sind  $ABC$  ein Dreieck und  $h_A, h_B$  und  $h_C$  die Höhen zu den Seiten  $\overline{BC}, \overline{AC}$  bzw.  $\overline{AB}$ , so heißen die Schnittpunkte

$$H_A := h_A \cap BC, \quad H_B := h_B \cap AC \text{ und } H_C := h_C \cap AB$$

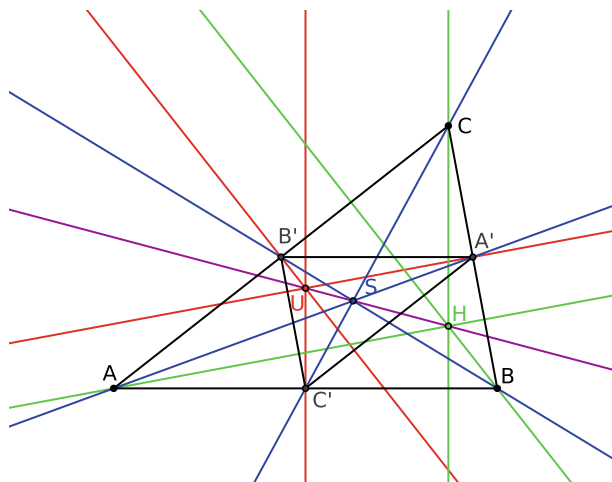
die Höhenfußpunkte des Dreiecks  $ABC$ . Die Längen der Strecken  $h_a := |AH_A|$ ,  $h_b := |AH_B|$  und  $h_c := |CH_C|$  werden als Höhenlängen (oft einfach auch nur ebenfalls als Höhen) des Dreiecks  $ABC$  bezeichnet.

**Lemma 2.5.8** Es sei  $ABC$  ein Dreieck mit Höhenfußpunkten  $H_A, H_B$  und Höhenschnittpunkt  $H$ .

- Für die Höhenabschnitte gilt  $|H_A H| \cdot |HA| = |H_b H| \cdot |HB|$ ,
- für die Höhen- und Seitenlängen gilt  $|AH_A| \cdot |BC| = |AC| \cdot |BH_B|$ .

Analoge Aussagen gelten entsprechend für den Höhenfußpunkt  $H_C$ .

**Beweis** a) Die Dreiecke  $ABH_A$  und  $ABH_B$  sind rechtwinklig, also liegen  $H_A$  und  $H_B$  nach der Umkehrung des Satzes des Thales 2.4.5 auf dem Thales-Kreis über  $\overline{AB}$ . Damit folgt die Aussage direkt aus dem Sehnensatz 2.4.6.

**Abb. 2.14** Euler'sche Gerade

- b) Die Dreiecke  $AH_A C$  und  $H_B B C$  stimmen in den rechten Winkeln  $\angle CH_A A$  und  $\angle BH_B C$  sowie im gemeinsamen Winkel bei  $C$  überein, woraus man sofort die Behauptung erhält.  $\square$

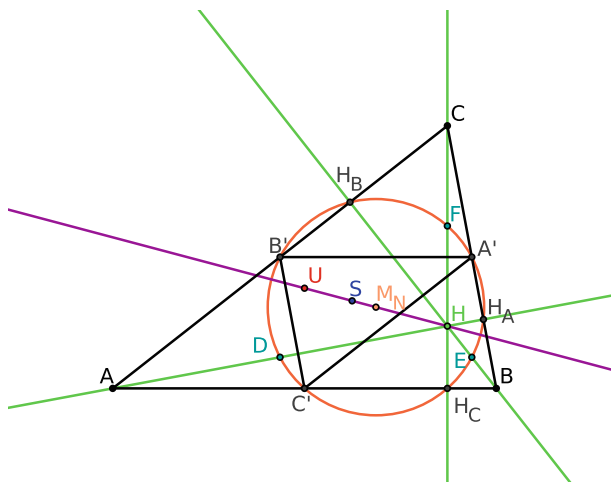
**Aufgabe 2.5.9** Es seien  $ABC$  ein nicht entartetes Dreieck,  $w_\alpha$  die Winkelhalbierende des Winkels bei  $A$  und  $I$  Schnittpunkt der Winkelhalbierenden. Weiter sei  $W_A := w_\alpha \cap BC$  der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden  $w_\alpha$  mit der Dreiecksseite  $BC$ . Dann gelten

- a)  $\frac{|BW_A|}{|CW_A|} = \frac{|AB|}{|AC|}$  (eine Winkelhalbierende teilt die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten),  
 b)  $\frac{|AI|}{|IW_A|} = \frac{|AB| + |AC|}{|BC|}$ .

Für den Höhenschnittpunkt, den Umkreismittelpunkt und den Schwerpunkt eines Dreiecks gilt eine erstaunliche Aussage:

**Satz 2.5.10** (Euler'sche Gerade, vgl. Abb. 2.14) In jedem euklidischen Dreieck liegen der Umkreismittelpunkt  $U$ , der Höhenschnittpunkt  $H$  und der Schwerpunkt  $S$  auf einer Geraden. Weiter gilt  $|SH| = 2|SU|$ .

**Beweis** Es seien  $A', B', C'$  die Seitenmitten der Seiten  $a, b, c$  und  $A'B'C'$  das resultierende Mittendreieck des Dreiecks  $ABC$ . Wegen der Umkehrung des Strahlensatzes 2.1.21 sind dabei die Seiten von  $ABC$  und entsprechende Seiten von  $A'B'C'$  parallel und halb so lang. Weil  $A$  und  $A'$  sowie  $B$  und  $B'$  und auch  $C$  und  $C'$  auf Gera-



**Abb. 2.15** Neunpunktekreis

den durch  $S$  liegen, entsteht  $A'B'C'$  somit aus  $ABC$  durch eine zentrische Streckung mit Streckfaktor  $\lambda = -\frac{1}{2}$  und Zentrum  $S$ . Dabei wird die Höhe  $h_C$  auf die Höhe  $h_{C'}$  abgebildet, d.h. auf die Mittelsenkrechte von  $c = |AB|$ . Analoge Aussagen gelten ebenso für die anderen Höhen. Dies impliziert, dass  $U$  das Bild von  $H$  unter dieser zentrischen Streckung ist, also liegen  $U$ ,  $S$  und  $H$  auf einer Geraden, und es gilt  $|SH| = 2|SU|$ .  $\square$

**Satz 2.5.11** (Neunpunktekreis, vgl. Abb. 2.15) In jedem Dreieck  $ABC$  liegen die Seitenmitten, die Höhenfußpunkte und die Höhenabschnittsmitten auf einem Kreis.

Die Höhenabschnittsmitte der Höhe zu  $\overline{BC}$  ist dabei der Mittelpunkt der Strecke  $\overline{AH}$ .

**Beweis** Wir bezeichnen die Seitenmitten wieder mit  $A'$ ,  $B'$  und  $C'$ , die Höhenfußpunkte mit  $H_A$ ,  $H_B$  und  $H_C$  sowie die Höhenabschnittsmitten mit  $D$ ,  $E$  und  $F$ . Die Dreiecke  $B'A'C$ ,  $A'B'C'$  sowie  $A'B'H_C$  sind jeweils paarweise kongruent, damit folgt

$$\sphericalangle A'H_C B' = \sphericalangle B' C A'.$$

Damit liegen nach der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes 2.4.5 die Punkte  $H_C$ ,  $A'$ ,  $B'$  und  $C'$  auf einem Kreis, der zwangsläufig der Umkreis des Dreiecks  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  sein muss. Analog sieht man, dass auch  $H_A$  und  $H_B$  auf diesem Kreis liegen. Die Punkte  $H_A$ ,  $H_B$  und  $H_C$  können auch als Höhenfußpunkte des Dreiecks  $ABH$  angesehen werden. Sie liegen also auch auf dem Umkreis des Seitenmittendreiecks des Dreiecks  $ABH$ . Da Kreise durch drei Punkte eindeutig festgelegt sind, stimmt dieser somit mit dem Umkreis des Dreiecks  $A'B'C'$  überein. Somit liegen auch die

Seitenmitten des Dreiecks  $ABH$  auf diesem Kreis, also speziell die Punkte  $D$  und  $E$ . Analog zeigt man schließlich, dass auch  $F$  darauf liegt.  $\square$

**Aufgabe 2.5.12** Man zeige, dass der Mittelpunkt des Neunpunktekreises auf der Euler-Geraden liegt und (in den Bezeichnungen von Definition 2.5.5) mit dem Mittelpunkt der Strecke  $UH$  übereinstimmt.

## 2.6 Weitere Sätze am Dreieck

In diesem Abschnitt ergänzen wir einige weitere Ergebnisse über Dreiecke, unter anderem den wohl berühmtesten mathematischen Satz, den Satz des Pythagoras, von dem wir mehrere Beweisvarianten vorstellen wollen.

Wir beginnen mit einer Verallgemeinerung des Satzes des Pythagoras, dem Kosinussatz, der sich praktisch direkt aus unserer Definition des Winkelwertes ergibt.

**Satz 2.6.1** (Kosinussatz) Es sei  $ABC$  ein nicht entartetes Dreieck mit Seitenlängen  $a = |BC|$ ,  $b = |AC|$  und  $c = |AB|$  sowie Innenwinkelwerten  $\alpha = \angle BAC$ ,  $\beta = \angle CBA$  und  $\gamma = \angle ACB$ . Dann gilt (entsprechend für die anderen Winkel)

$$2ab \cos(\gamma) = a^2 + b^2 - c^2.$$

**Beweis** Sind  $v := B - C$  und  $w := A - C$ , so gilt

$$\cos(\gamma) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} = \frac{\frac{1}{2}(\|v\|^2 + \|w\|^2 - \|v - w\|^2)}{\|v\| \cdot \|w\|} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab},$$

woraus die Behauptung folgt.  $\square$

Eine unmittelbare Folgerung ist der erwähnte Satz des Pythagoras:

**Korollar 2.6.2** (Satz des Pythagoras) Ist  $ABC$  ein Dreieck mit rechtem Winkel bei  $C$  und Seitenlängen  $a = |BC|$ ,  $b = |AC|$  und  $c = |AB|$ , so gilt  $a^2 + b^2 = c^2$ .

**Satz 2.6.3** (Sinussatz) Ist  $ABC$  ein Dreieck wie in Satz 2.6.1, so gilt

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}.$$

**Beweis** Quadriert man die Gleichung des Kosinussatzes, so erhält man

$$4a^2b^2 \cos^2(\gamma) = a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2a^2c^2.$$

Beachtet man  $\cos^2(\gamma) = 1 - \sin^2(\gamma)$ , erhält man damit

$$-4a^2b^2 \sin^2(\gamma) = a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2.$$

In dieser Gleichung ist die rechte Seite invariant unter Permutationen von  $a$ ,  $b$  und  $c$ , also muss auch die linke invariant sein: Es gilt also

$$-4a^2b^2 \sin^2(\gamma) = -4c^2a^2 \sin^2(\beta) = 4b^2c^2 \sin^2(\alpha).$$

Offenbar impliziert dies

$$\frac{\sin^2(\alpha)}{a^2} = \frac{\sin^2(\beta)}{b^2} = \frac{\sin^2(\gamma)}{c^2};$$

da in einem Dreieck alle Sinuswerte der Winkel und alle Seitenlängen positiv sind, ergibt sich die Behauptung.  $\square$

**Aufgabe 2.6.4** 1. *Man begründe, dass Sinus- und Kosinussatz auch als analytische Versionen der Kongruenzsätze angesehen werden können.*

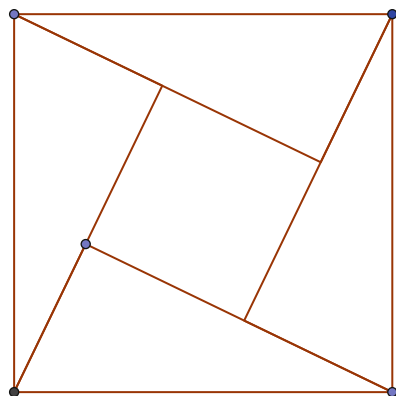
2. *Ist  $ABC$  ein rechtwinkliges Dreieck mit rechtem Winkel bei  $C$  sowie Seitenlängen  $a = |BC|$ ,  $b = |AC|$  und  $c = |AB|$  sowie Innenwinkel  $\alpha = \sphericalangle BAC$ , so zeige man*

$$b = c \cos(\alpha) \text{ und } a = c \sin(\alpha) = b \tan(\alpha).$$

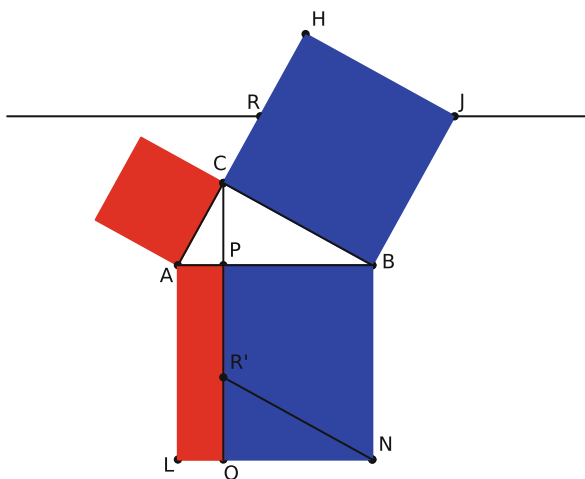
Aufgrund der zentralen Rolle des Satzes des Pythagoras geben wir im Folgenden mehrere Beweisvarianten für diesen an. Wir verwenden dabei naiv den Begriff des Flächeninhalts (eine systematische Behandlung des Flächeninhalts findet man im fünften Kapitel von Hartshorne 2000) und benutzen ebenso ohne Beweis die Beobachtung, dass zerlegungsgleiche Figuren den gleichen Flächeninhalt besitzen. Insbesondere verwenden wir, dass ein Rechteck mit Seitenlängen  $a$  und  $b$  den Inhalt  $ab$  besitzt.

**Beweis** (Variante 1) Dieser Beweis findet sich bereits in Werken der indischen und chinesischen Mathematik und wird dort oftmals nur als Zeichnung (vgl. Abb. 2.16) angegeben. Die Details überlassen wir dem Leser.  $\square$

**Abb. 2.16** Beweisvariante des Satzes des Pythagoras





**Abb. 2.17** Satz des Euklid

Der wohl älteste bekannte Beweis geht auf Euklid zurück und zeigt eine exakte Flächenzerlegung.

**Beweis** (Variante 2) Man errichte über den Seiten des Dreiecks  $ABC$  jeweils die Quadrate und benenne die Eckpunkte des Quadrats über der Seite  $CB$  mit  $J$  und  $H$ . Weiter seien  $L$  und  $N$  die weiteren Eckpunkte des Quadrats über  $AB$ . Es sei  $h$  die Höhe zu  $AB$  (d.h. die zu  $AB$  senkrechte Gerade durch  $C$ ), welche  $AB$  in  $P$  und  $LN$  in  $Q$  schneide. Die Gerade  $g$  sei parallel zu  $AB$  und enthalte  $J$ . Der Schnittpunkt von  $CH$  mit  $g$  sei  $R$ . Zur Veranschaulichung betrachte man Abb. 2.17.

Dann gilt: Das Dreieck  $ABC$  und das Dreieck  $RHJ$  sind nach dem Stufenwinkelsatz 2.2.2 und dem Kongruenzsatz 2.2.12 kongruent, also sind das Quadrat  $CBJH$  und das Parallelogramm  $ABJR$  flächengleich. Es sei  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  die Drehung um  $B$  mit Drehwinkel  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . Dann gelten  $f(J) = C$ ,  $f(R) = R' (\in \overline{CQ} - \text{warum?})$ ,  $f(A) = N$  sowie  $f(B) = B$ , insbesondere sind auch  $BJHC$  und  $BCR'N$  flächengleich. Die Dreiecke  $NR'Q$  und  $BCP$  sind nach dem Kongruenzsatz 2.1.17 kongruent, da  $|R'C| = |QP|$  gilt. Somit sind  $BJHC$  und  $QNB P$  flächengleich. Analog zeigt man die Flächengleichheit des Quadrats über  $AC$  mit dem Viereck  $LQPA$ , woraus man die Behauptung erhält.  $\square$

Im Beweis von Euklid wurde genauer sogar folgende Aussage gezeigt, die daher auch als Satz des Euklid (oder Kathetensatz) bezeichnet wird:

**Korollar 2.6.5** In den Bezeichnungen des letzten Beweises gelten  $|BC|^2 = |BP| \cdot |AB|$  und  $|AC|^2 = |AP| \cdot |AB|$ .

**Aufgabe 2.6.6** Man zeige den Höhensatz: In obiger Situation gilt  $|PC|^2 = |AP| \cdot |BP|$ .

Wir geben noch eine sehr einfache Beweisvariante, die auf die Ähnlichkeit der Dreiecke in der Abb. 2.17 zurückgeht.

**Beweis** (Variante 3) Wir verwenden die Bezeichnungen der Abb. 2.17. Das Dreieck  $BCP$  und das Dreieck  $ABC$  sind ähnlich (vgl. Aufgabe 2.3.14), daher gilt

$$\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|BP|}{|BC|},$$

also  $|BC|^2 = |BP| \cdot |AB|$ , also genau die erste Aussage des Satzes des Euklid. Analog sieht man die zweite Aussage ein und erhält wie im euklidischen Beweis des Satzes des Pythagoras daraus die Behauptung.  $\square$

Abschließend geben wir noch eine etwas ausgefalleneren Variante (in Winter 2005 findet der Leser eine Reihe weiterer Beweisvarianten), die den Satz des Ptolemäus 2.4.12 verwendet:

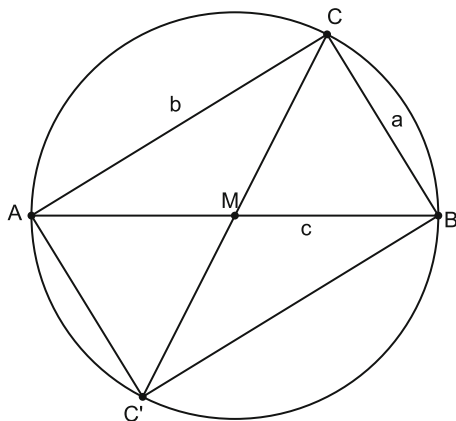
**Beweis** (Variante 4) Es sei  $K := K(M, r)$  der Umkreis des Dreiecks  $ABC$  sowie  $C'$  der zweite Schnittpunkt von  $CM$  mit  $K$  (vgl. Abb. 2.18). Nach der Umkehrung (vgl. Aufgabe 2.4.5) des Satzes des Thales gilt  $M \in \overline{AB}$ . Weiter ist das Viereck  $AC'BC$  nach dem Satz des Thales 2.4.4 ein Rechteck. Insbesondere gelten  $c = |AB| = |CC'|$ ,  $a = |BC| = |AC'|$  und  $b = |AC| = |BC'|$ . Der Satz des Ptolemäus 2.4.12 liefert nun

$$c^2 = |AB| \cdot |CC'| = |AC'| \cdot |BC| + |BC'| \cdot |AC| = a^2 + b^2,$$

also die Behauptung.  $\square$

**Aufgabe 2.6.7** Man zeige die Umkehrung des Satzes 2.4.18 vom Tangentenviereck: Gilt in einem positiv orientierten Viereck  $ABCD$  die Identität  $|AB| + |CD| = |BC| + |AD|$ , so ist  $ABCD$  ein Tangentenviereck.

**Abb. 2.18** Anwendung des Satzes von Ptolemäus



**Aufgabe 2.6.8** Es sei  $ABC$  ein spitzwinkliges Dreieck sowie  $H_A$  der Höhenfußpunkt der Höhe zu  $BC$  und  $H$  der Höhenschnittpunkt. Weiter seien  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  die Innenwinkelwerte des Dreiecks  $ABC$  in üblicher Notation. Man zeige:

$$\frac{|AH|}{|HH_A|} = \frac{\tan(\beta) + \tan(\gamma)}{\tan(\alpha)}.$$

Bereits in der Antike wurde auch die Umkehrung des Satzes des Pythagoras verwendet, die sich offenbar ebenfalls unmittelbar aus Satz 2.6.1 ergibt: Gilt in einem Dreieck mit den Seitenlängen  $a$ ,  $b$  und  $c$  die Beziehung  $a^2 + b^2 = c^2$ , so ist das Dreieck rechtwinklig. Man kann sich fragen, wann in dieser Gleichung die Größen  $a$ ,  $b$  und  $c$  ganzzahlig sind.

**Definition 2.6.9** Ein ganzzahliges Tripel  $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$  heißt primitives pythagoräisches Tripel, wenn  $a^2 + b^2 = c^2$  gilt und  $a$ ,  $b$ ,  $c$  nur die gemeinsamen Teiler  $-1$  und  $1$  besitzt.

**Lemma 2.6.10** Ist  $(a, b, c)$  ein primitives pythagoräisches Tripel, so ist genau eine der Zahlen  $a$  und  $b$  gerade, und  $c$  ist ungerade.

**Beweis** Angenommen,  $c$  ist gerade. Dann ist  $c^2$  durch 4 teilbar. Reduziert man die Gleichung  $a^2 + b^2 = c^2$  modulo 4, so erhält man

$$a^2 + b^2 \equiv_4 0.$$

Da nicht sowohl  $a$  als auch  $b$  gerade sein können (sonst wäre 2 gemeinsamer Teiler von  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ), kann man ohne Einschränkung  $a^2 \equiv_4 1$  annehmen. Daraus folgt der Widerspruch  $b^2 \equiv_4 3$ . Daher ist  $c$  ungerade und damit zwangsläufig genau einer der Zahlen  $a$  und  $b$  gerade.  $\square$

**Satz 2.6.11** Ein Tripel  $(a, b, c)$  ist genau dann ein primitives pythagoräisches Tripel mit geradem  $b$ , wenn es teilerfremde Zahlen  $n, m \in \mathbb{Z}$  gibt, von denen genau eine gerade ist, mit  $n^2 - m^2 = a$ ,  $2nm = b$  und  $c = n^2 + m^2$ .

**Beweis** Die Richtung „ $\Leftarrow$ “ ist offenbar richtig. Es bleibt zu zeigen, dass jedes primitive pythagoräische Tripel in der angegebenen Form dargestellt werden kann.

Weil  $a$  und  $c$  nach Lemma 2.6.10 beide ungerade sind, sind beide Zahlen  $c + a$  und  $c - a$  durch 2 teilbar. Damit erhält man

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4} = \frac{c^2 - a^2}{4} = \underbrace{\frac{c+a}{2}}_{=:r} \underbrace{\frac{c-a}{2}}_{=:s}.$$

Es sei nun  $p$  eine Primzahl, die  $r$  teilt. Dann teilt  $p$  auch  $\frac{b}{2}$ , also teilt eine gerade Potenz von  $p$  die linke und damit auch die rechte Seite der Gleichung. Würde  $p$  auch  $s$  teilen, dann würde

$$p|c = \frac{c+a}{2} + \frac{c-a}{2} \text{ und } p|a = \frac{c+a}{2} - \frac{c-a}{2}$$

folgen, was ein Widerspruch zur Primitivität des Tripels ist. Somit sind  $\frac{c+a}{2}$  und analog  $\frac{c-a}{2}$  selbst Quadratzahlen. Es gilt also etwa  $c + a = 2n^2$  und  $c - a = 2m^2$ . Daraus folgt direkt  $c = n^2 + m^2$ ,  $a = n^2 - m^2$  und  $b = \pm 2nm$ , und es folgt (ggf. durch Ersetzen von  $n$  durch  $-n$ ) die Behauptung. Die Aussagen über die Teilbarkeitsbeziehungen zwischen  $n$  und  $m$  bleiben dem Leser überlassen.  $\square$

Geometrie

Von Euklid bis zur hyperbolischen Geometrie mit  
Ausblick auf angrenzende Gebiete

Berchtold, F.

2017, X, 210 S. 59 Abb., 25 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-662-49953-5