2 Geometrie im Raum

Übersicht

2.1 Polyeder

Eine begrenzte (beschränkte, endliche) Fläche nennt man ein Flächenstück. Ein begrenztes (beschränktes, endliches) Stück des Raumes nennt man einen *Körper*.

Ein ebenes Flächenstück heißt konvex, wenn für je zwei Punkte des Flächenstücks auch die Verbindungsstrecke zum Flächenstück gehört. Entsprechend heißt ein Körper *konvex*, wenn mit je zwei Punkten des Körpers auch die Verbindungsstrecke zum Körper gehört. Abb. 2.1.1 zeigt Beispiele für konvexe Körper, Abb. 2.1.2 für nichtkonvexe Körper.

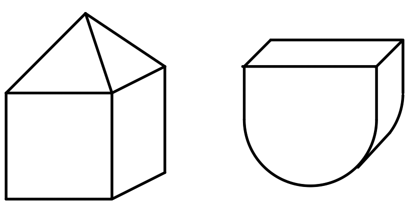


Abb. 2.1.1 Konvexe Körper

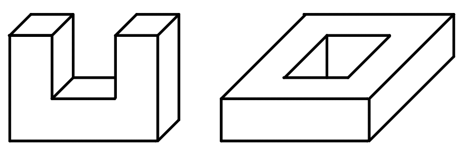


Abb. 2.1.2 Nichtkonvexe Körper

Ein Polygon (Vieleck) ist ein ebenes Flächenstück, das von endlich vielen Strecken begrenzt wird. Hat es n Begrenzungsstrecken (und damit auch n Eckpunkte), so nennt man es ein n-Eck. Entsprechend ist ein *Polyeder* ein Körper, der von endlich vielen Polygonflächen begrenzt wird. Wird ein Polyeder von n Polygonflächen begrenzt, dann nennt man es auch *n-Flächner* oder *n-Flach*.

Ein Polyeder besitzt mindestens vier Begrenzungsflächen. Besitzt es genau vier Begrenzungsflächen, dann sind dies alles Dreiecke.

H. Scheid und W. Schwarz, *Elemente der Geometrie*,
DOI 10.1007/978-3-662-50323-2_2

Ist nämlich eine Begrenzungsfläche ein n-Eck, so müssen noch mindestens n weitere Begrenzungsflächen existieren (die gemeinsame Kanten mit dem n-Eck haben), das Polyeder muss also mindestens $n + 1$ Begrenzungsflächen haben. Ein von vier Dreiecken begrenztes Polyeder heißt *Dreieckspyramide.* Sind die Dreiecke alle gleichseitig, dann handelt es sich um ein *Tetraeder* (Abb. 2.1.3).

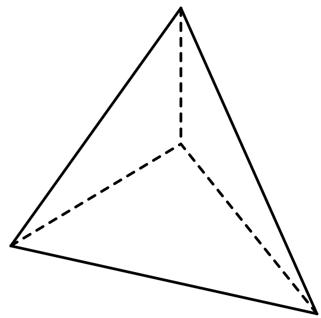


Abb. 2.1.3 Tetraeder

Schneidet man von einer Dreieckspyramide eine Ecke ab, so entsteht ein Polyeder mit fünf Flächen (zwei Dreiecke und drei Vierecke). Schneidet man von einem konvexen Polyeder mit n Flächen durch einen ebenen Schnitt eine Ecke ab, ohne dabei eine weitere Ecke zu berühren oder gar mit abzuschneiden, dann entsteht ein Polyeder mit $n + 1$ Flächen (Abb. 2.1.4). Es gibt also für jedes $n \geq 4$ ein Polyeder mit genau n Flächen. Wir bezeichnen nun mit

- e die Anzahl der Ecken,
- k die Anzahl der Kanten und
- f die Anzahl der Flächen

eines Polyeders. Treffen beim „Eckenabschneiden" in Abb. 2.1.4 in der abgeschnittenen Ecke ursprünglich a Kanten aufeinander, dann vergrößert sich e um $a - 1$, k um a und f um 1, also bleibt $e - k + f$ konstant.

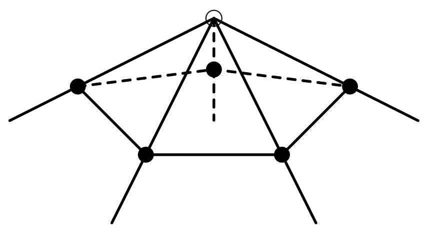


Abb. 2.1.4 Ecken, Kanten, Flächen

Berechnet man an konvexen Polyedern die Zahl $e - k + f$, so ergibt sich stets 2, wie Satz 2.1 besagt.

Satz 2.1 (Euler'scher Polyedersatz)
Für die Anzahl e der Ecken, k der Kanten und f der Flächen eines konvexen Polyeders gilt

$$e - k + f = 2.$$

Beweis 2.1 Da das Polyeder konvex ist, gibt es einen Punkt P im Inneren, von dem aus alle Ecken und Kanten (kreuzungsfrei) zu sehen sind. Wir denken uns eine Kugel um P gezeichnet und alle Ecken und Kanten von P aus auf diese Kugel projiziert. Dass aus den Kanten dabei Bögen auf der Kugel werden, stört dabei nicht weiter. Nun bauen wir das Polyeder sukzessiv durch Anfügen von Kanten auf, beginnend mit einer einzigen Kante. Zu Anfang ist demnach $e = 2$, $k = 1$ und $f = 1$, die einzige

Fläche ist die ganze Kugelfläche. Es ist daher zu Anfang $e - k + f = 2$. Nun fügen wir nacheinander die Kanten hinzu, die an eine schon vorhandene Ecke stoßen, und prüfen jedesmal den Wert von $e - k + f$. Bei einem solchen Fortsetzungsschritt sind zwei Fälle möglich:

(1) Die zweite Ecke der zugefügten Kante war noch nicht vorhanden. Dann erhöhen sich e und k um jeweils 1, während f unverändert bleibt. Daher ändert sich $e - k + f$ nicht.

(2) Die zweite Ecke war bereits vorhanden. Dann entsteht eine neue Fläche, sodass k und f jeweils um 1 wachsen, während sich e nicht ändert. Daher ändert sich $e - k + f$ nicht.

In beiden Fällen bleibt $e - k + f$ unverändert; es muss also beim ursprünglichen Wert $e - k + f = 2$ bleiben. □

Der eulersche Polyedersatz gilt natürlich auch für solche nichtkonvexen Polyeder, die sich durch eine stetige Verformung in ein konvexes Polyeder überführen lassen; er gilt aber nicht für Polyeder, die ein „Loch" haben (Aufgabe 2.2). Weiteres zum Euler'schen Polyedersatz und seinen Anwendungen findet sich in Abschn. 8.4.

Verschiebt man ein Polygon in eine Richtung, die nicht in der Ebene des Polygons liegt, dann bilden die dabei überstrichenen Punkte ein *Prisma*; die verschobene Fläche nennt man die *Grundfläche* des Prismas. Abb. 2.1.5 zeigt den allgemeinen Fall (a) eines *schiefen Prismas* sowie diverse Sonderfälle.

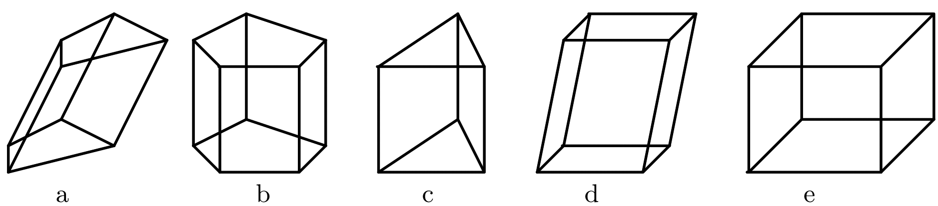


Abb. 2.1.5 Typen von Prismen

Ist die Verschiebungsrichtung orthogonal zur Ebene des Polygons, dann erhält man ein *gerades* Prisma (b). Im Alltag versteht man unter einem Prisma oft nur ein gerades Dreiecksprisma (c). Die Seitenflächen eines Prismas sind Parallelogramme. Ist die Grundfläche eines Prismas ein Parallelogramm, so heißt der Körper *Parallelepiped* oder *Spat* (d). Ein *Quader* ist ein Sonderfall eines Spats, er ist ein gerades Prisma, dessen Grundfläche ein Rechteck ist (e). Schließlich ist der Würfel ein Sonderfall eines Quaders.

Verbindet man die Punkte einer Polygonfläche mit einem Punkt S außerhalb der Ebene der Polygonfläche, so entsteht eine *Pyramide*. Die Polygonfläche heißt *Grundfläche*, der Punkt S *Spitze* der Pyramide. Die Verbindungsstrecken des Polygons mit der

Spitze heißen *Mantellinien.* Abb. 2.1.6 zeigt den allgemeinen Fall (a) einer *schiefen Pyramide* sowie diverse Sonderfälle.

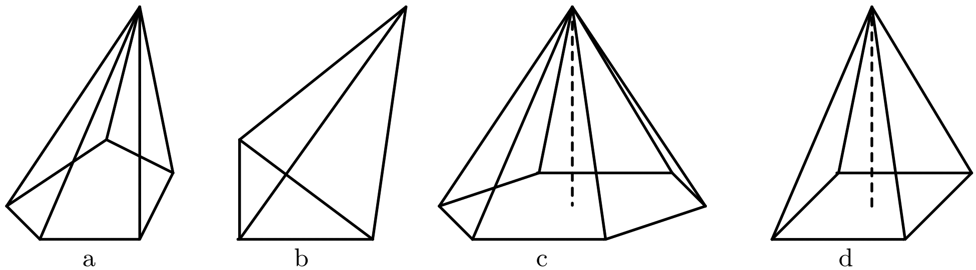


Abb. 2.1.6 Typen von Pyramiden

Ist die Grundfläche ein Dreieck, dann liegt eine *Dreieckspyramide* vor (b). Ist die Grundfläche ein regelmäßiges n-Eck und liegt die Spitze senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundfläche, so handelt es sich um eine *gerade* Pyramide (c). Im Alltag versteht man unter einer Pyramide oft nur eine gerade Pyramide über einem Quadrat, eine sog. *quadratische Pyramide* (d).

Eine Pyramide, deren Grundfläche ein n-Eck ist, kann man durch Schnitte durch die Spitze und zwei Eckpunkte der Grundfläche in $n-2$ Dreieckspyramiden zerlegen. Ein Prisma, dessen Grundfläche ein n-Eck ist, kann man durch ebene Schnitte parallel zur Verschiebung der Grundfläche zur Deckfläche in $n-2$ Dreiecksprismen zerlegen. Ein Dreiecksprisma kann man durch ebene Schnitte in drei Dreieckspyramiden zerlegen, was in Abb. 2.1.7 demonstriert wird.

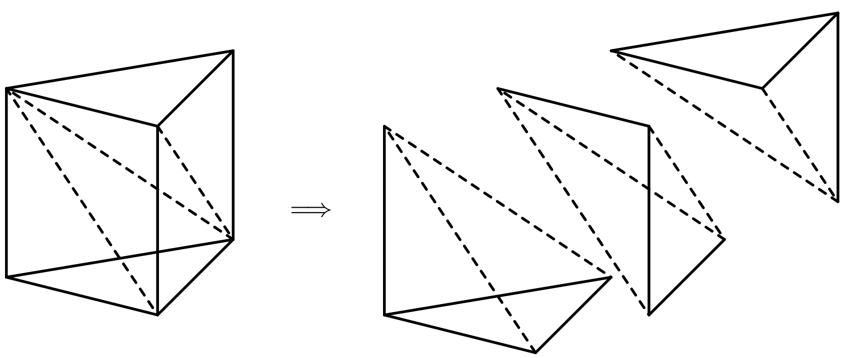


Abb. 2.1.7 Zerlegung eines Dreiecksprismas in Dreieckspyramiden

Jedes konvexe Polyeder kann durch ebene Schnitte durch die Ecken in endlich viele Dreieckspyramiden zerlegt werden. Dazu wähle man einen Punkt S im Inneren des Polyeders und betrachte die Pyramiden mit der Spitze S, deren Grundflächen die Flächen des Polyeders sind; diese Pyramiden lassen sich in endlich viele Dreieckspyramiden zerlegen.

Aufgaben

2.1 Überprüfe die Euler'sche Polyederformel an einem Prisma und an einer Pyramide, jeweils mit einem n-Eck als Grundfläche.

2.2 Zeige, dass für den durchbohrten Quader in Abb. 2.1.8 die Euler'sche Polyederformel *nicht* gilt.

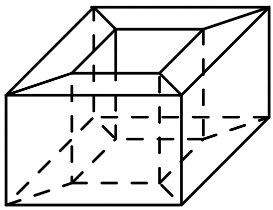


Abb. 2.1.8 Durchbohrter Quader

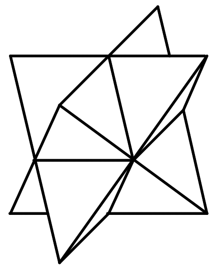


Abb. 2.1.9 Nichtkonvexer Sternkörper

2.3 Der nicht-konvexe Sternkörper in Abb. 2.1.9 besteht aus zwei ineinandergesteckten Tetraedern. Überprüfe hier die Euler'sche Polyederformel.

2.4 Eine Abbildung des Raumes, bei der ein gegebener Körper mit sich zur Deckung kommt, heißt eine *Deckabbildung* des Körpers. Nenne möglichst viele Deckabbildungen des folgenden Körpers:

a) Parallelepiped (Spat) b) Tetraeder c) Quadratische Pyramide d) Würfel

2.5 Berechne im Tetraeder mit der Kantenlänge a die Länge der Flächen- und Raumhöhen.

2.6 Berechne die Länge der Raumdiagonalen eines Quaders, der die Kantenlängen a, b, c hat.

2.7 Die Ecken des *Ikosaeders* in Abb. 2.1.10 sind die Ecken von drei symmetrisch ineinandergesteckten Rechtecken der Seitenlängen 2 und $1 + \sqrt{5}$. Überprüfe, ob die Kanten alle die Länge 2 haben.

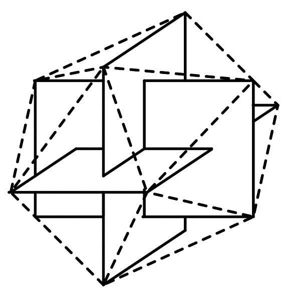


Abb. 2.1.10 Ikosaeder

2.2 Schrägbilder

Ein Fotoapparat stellt von einem Körper ein ebenes Bild her, das eine *Zentralprojektion* des Körpers auf die Ebene des Films ist, wobei die Linse des Fotoapparats das Zentrum der Projektion bildet. Solche Bilder wirken „natürlich“, weil auch das Auge eine Zentralprojektion der Körper auf die Netzhaut bewirkt.

Dabei werden aber parallele Geraden in der Regel nicht wieder auf parallele Geraden abgebildet, vielmehr schneiden sich die Bilder von parallelen Geraden in Punkten der so genannten Fluchtgeraden, deren Lage auf der Projektionsebene von der Lage des Projektionszentrums abhängt. In Abb. 2.2.1 ist ein Haus in Zentralprojektion gezeichnet.

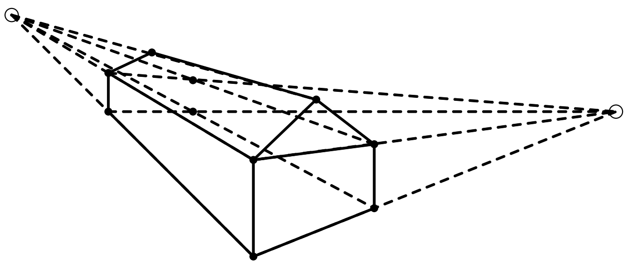


Abb. 2.2.1 Zentralprojektion

In der Geometrie verwendet man zur Darstellung von Körpern meistens eine *Parallelprojektion*. Hierbei denkt man sich die Punkte des Körpers durch parallele Strahlen auf eine Ebene (Projektionsebene) abgebildet; parallele Geraden gehen dabei wieder in parallele Geraden über.

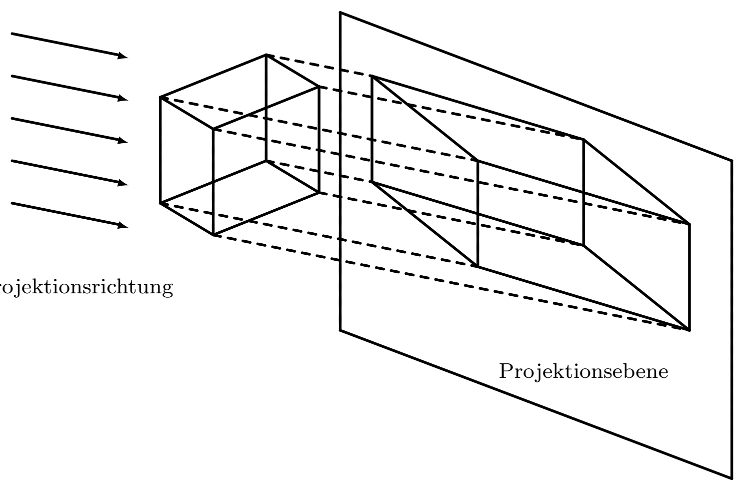


Abb. 2.2.2 Parallelprojektion

Abb. 2.2.2 zeigt die Abbildung eines Würfels durch eine Parallelprojektion. Dabei ist der abzubildende Würfel selbst schon in einer Parallelprojektion gegeben, da man ihn ja nicht anders auf ein Blatt Papier zeichnen kann.

Bei einer Parallelprojektion werden Winkel und Längen verändert, Teilverhältnisse bleiben aber erhalten: Teilt ein Punkt T eine Strecke PQ im Verhältnis $a : b$, dann teilt auch der Bildpunkt T' die Bildstrecke $P'Q'$ im Verhältnis $a : b$. Insbesondere wird der Mittelpunkt einer Strecke auf den Mittelpunkt der Bildstrecke abgebildet.

Das Bild eines Körpers bei einer Parallelprojektion nennt man ein *Schrägbild*. Die Form des Schrägbilds legt man meistens dadurch fest, dass man das Bild eines kartesischen Koordinatensystems angibt. Abb. 2.2.3 zeigt verschiedene Formen und jeweils das Bild des Einheitswürfels.

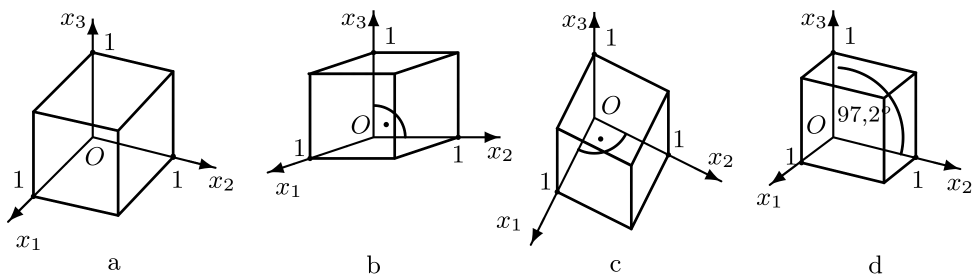


Abb. 2.2.3 Schrägbilder des Einheitswürfels

In (a) spricht man von der *isometrischen Projektion*, da die Einheiten auf den Koordinatenachsen gleich lang sind. In (b) wird die *Kavalierprojektion* gezeigt; dabei werden parallel zur x_2x_3-Ebene gelegene Flächen unverzerrt dargestellt. Bei der *Militärprojektion* (c) werden Flächen parallel zur x_1x_2-Ebene unverzerrt abgebildet. Die Projektion (d) heißt *Ingenieurprojektion*; ie Winkel zwischen den Koordinatenachsen sind hier so gewählt, dass das Bild einer Kugel als Kreis erscheint, was bei den anderen Projektionen nicht der Fall ist. Der Winkel zwischen der x_2-Achse und der x_3-Achse beträgt hier $97{,}2^o$, die x_1-Achse halbiert den Winkel zwischen der x_2-Achse und der x_3-Achse, die Einheiten auf der x_2- und der x_3-Achse sind unverkürzt, und auf der x_1-Achse ist der Verkürzungsfaktor $\frac{1}{2}$.

Wir wollen häufig die Darstellung in Abb. 2.2.4 benutzen. Hierbei handelt es sich um eine spezielle Kavalierprojektion, die so bemessen ist, dass das Eintragen von Punkten auf Karopapier besonders einfach ist. Der Winkel zwischen der x_1-Achse und der x_2-Achse beträgt 135^o und der Verkürzungsfaktor auf der x_1-Achse ist $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.
In Abb. 2.2.5 ist das Bild einer Kugel in dieser Projektion gezeichnet. Man erkennt deutlich, dass das Bild der Kugel kein Kreis ist, sondern eine Ellipse. Diese Abweichung von der Kreisgestalt wird bei Zeichnungen aber oft vernachlässigt.

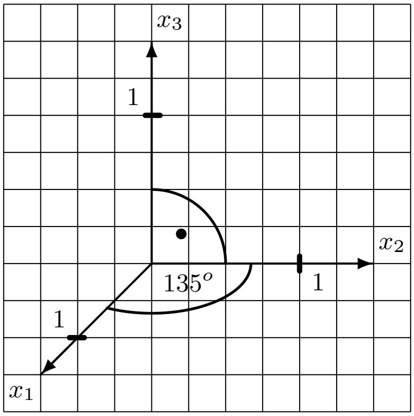


Abb. 2.2.4 Kavalierprojektion für Karopapier

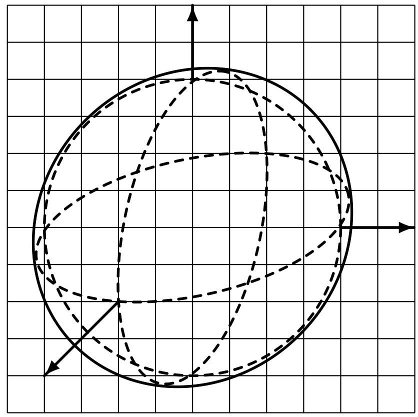


Abb. 2.2.5 Karopapierprojektion Kugel

Zum Zeichnen eines Schrägbilds eines Körpers nimmt man häufig das Schrägbild eines Würfels zu Hilfe, weil dieses recht einfach zu zeichnen ist. Dabei benutzt man meistens eine Kavalierprojektion, wobei der Winkel zwischen der x_1-Achse und der x_2-Achse sowie der Verkürzungsfaktor so gewählt werden sollten, dass sich keine Kanten oder Konstruktionslinien überdecken.

Beispiel 2.1
Es soll ein Tetraeder gezeichnet werden. In Abb. 2.2.6 benutzt man die Tatsache, dass die sechs Flächendiagonalen des Würfels ein solches Tetraeder bilden. Wählte man die "Karopapierprojektion" aus Abb. 2.2.4, so entstünde kein schönes Bild, weil eine Kante des Tetraeders von zwei anderen verdeckt würde. Daher wählen wir für die Darstellung in Abb. 2.2.6 eine andere Kavalierprojektion (Aufgabe 2.9). ■

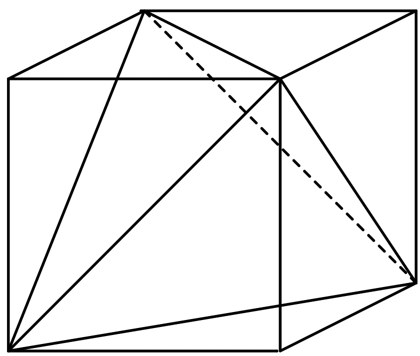


Abb. 2.2.6 Tetraeder

Beispiel 2.2
Es soll ein *Oktaeder* gezeichnet werden, also ein Körper, der von acht kongruenten gleichseitigen Dreiecken begrenzt wird. Das Schrägbild in Abb. 2.2.7 ist mithilfe eines Schrägbilds eines Würfels gezeichnet worden. Die Ecken des Oktaeders sind die Mittelpunkte der Würfelflächen. Auch hier ist eine andere Kavalierprojektion als die in Abb. 2.2.4 verwendet worden, damit sich keine Kanten des Oktaeders verdecken. ■

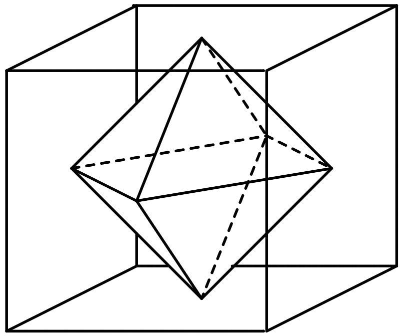


Abb. 2.2.7 Oktaeder

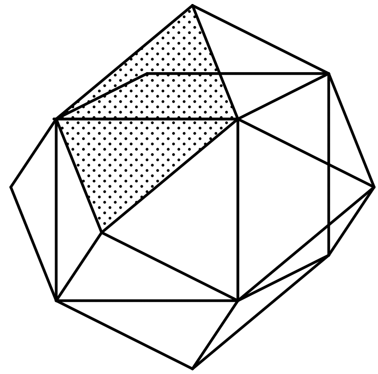


Abb. 2.2.8 Rhombendodekaeder

Beispiel 2.3
Ein *Rhombendodekaeder* ist ein Körper, der von zwölf kongruenten Rhomben begrenzt wird. In Abb. 2.2.8 ist ein solcher Körper gezeichnet. Dabei wurden auf die Flächen eines Würfels der Seitenlänge $2a$ gerade quadratische Pyramiden der Höhe a aufgesetzt. Die Kanten des Rhombendodekaeders haben dann die Länge $a\sqrt{3}$ (Aufgabe 2.11). Dabei ist die Projektionsform so gewählt, dass sich keine Konstruktionslinien verdecken. Es sind nur die sichtbaren Linien gezeichnet, da sonst das Bild zu verwirrend wäre. ■

Durch Hervorheben bzw. Unterdrücken der sichtbaren bzw. unsichtbaren Linien kann man den räumlichen Eindruck eines Schrägbilds stark verbessern. Durch falsche Anwendung dieser Technik können aber auch „unmögliche Figuren“ entstehen; das sind Figuren, die den Eindruck eines Körpers vermitteln, der überhaupt nicht existieren kann. Solche Bilder können auch dann entstehen, wenn sich Konstruktionslinien überdecken. In Abb. 2.2.9 und Abb. 2.2.10 sind einige Beispiele gezeichnet, in denen der räumliche Eindruck durch absichtlich fehlerhafte Behandlung der sichtbaren und unsichtbaren Linien verfälscht wird.

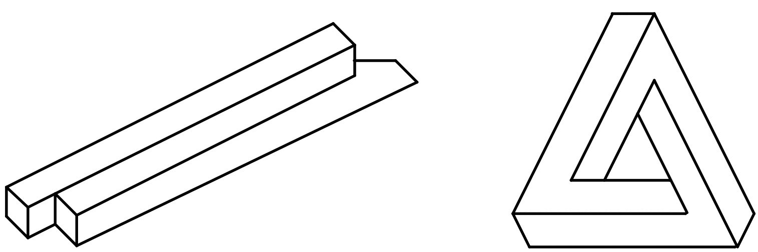


Abb. 2.2.9 Unmögliche Figuren I

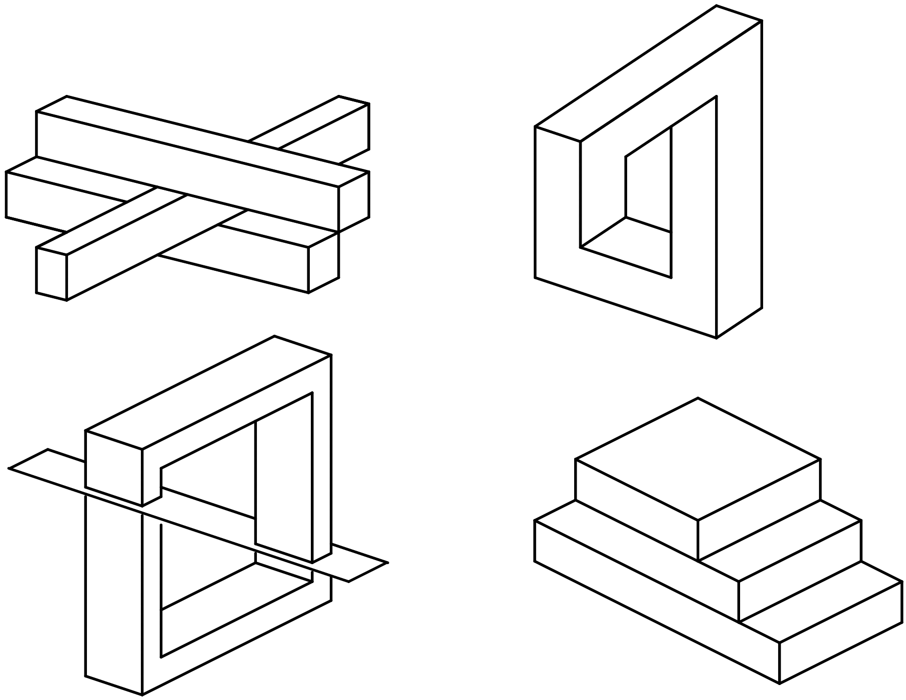


Abb. 2.2.10 Unmögliche Figuren II

Aufgaben

2.8 In Abb. 2.2.11 ist das Bild eines Würfels bei einer Parallelprojektion gezeichnet.
Wie liegen Würfel, Projektionsrichtung und Projektionsebene zueinander? Wie sieht das Bild eines Koordinatensystems bei einer entsprechenden Projektion aus?

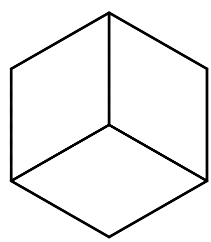


Abb. 2.2.11 Parallelprojektion Würfel

2.9 Führe die Konstruktion aus Beispiel 2.1 in dem in Abb. 2.2.4 gegebenen Bild des Koordinatensystems („Karopapierprojektion“) aus.

2.10 Berechne die Seitenlänge des Oktaeders in Abb. 2.2.7, wenn der Würfel die Seitenlänge a hat.

2.11 Berechne die Seitenlänge der Rhomben (Rauten) in Abb. 2.2.8, wenn der Würfel die Seitenlänge $2a$ hat.

2.12 Ein Würfel werde von einer Ebene geschnitten, die rechtwinklig zu einer Raumdiagonalen ist. Der Schnittpunkt teile die Diagonale im Verhältnis $a : b$. Zeichne die Schnittfiguren für folgende Teilverhältnisse:

a) $a : b = 1 : 5$

b) $a : b = 1 : 2$

c) $a : b = 1 : 1$

2.13 Die Ecken eines Tetraeders werden so abgeschnitten, dass ein von vier gleichseitigen Dreiecken und vier regelmäßigen Sechsecken begrenzter Körper („Tetraederstumpf“) entsteht (Abb. 2.2.12).
Zeichne diesen Körper in einer geeigneten Kavalierprojektion.

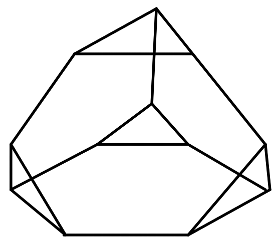


Abb. 2.2.12 Tetraederstumpf

2.14 Die Ecken eines Würfels werden so abgeschnitten, dass ein von acht gleichseitigen Dreiecken und sechs Quadraten begrenzter Körper entsteht (Abb. 2.2.13).
Zeichne diesen Körper in einer geeigneten Kavalierprojektion. Wie lang sind die Seiten der Dreiecke und Quadrate, wenn der gegebene Würfel die Seitenlänge a hat?

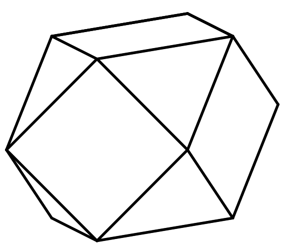


Abb. 2.2.13 Beschnittener Würfel I

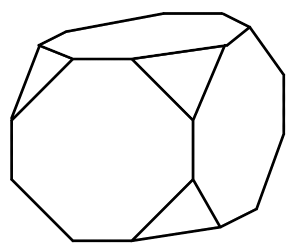


Abb. 2.2.14 Beschnittener Würfel II

2.15 Die Ecken eines Würfels werden so abgeschnitten, dass ein von acht gleichseitigen Dreiecken und sechs regelmäßigen Sechsecken begrenzter Körper entsteht (Abb. 2.2.14).
Zeichne diesen Körper in einer geeigneten Kavalierprojektion. Wie lang sind die Seiten der Dreiecke und Sechsecke, wenn der gegebene Würfel die Seitenlänge a hat?

2.16 Zeichne das Schrägbild eines Oktaeders. Verbinde dann die Mittelpunkte benachbarter Dreiecksflächen; dann erhält man das Schrägbild eines Körpers. Um welchen Körper handelt es sich?

2.3 Abwicklungen und Auffaltungen

Eine *Abwicklung* eines Polyeders ensteht, wenn man den Körper so auf der Ebene abrollt, dass jede Fläche genau einmal auf der Ebene liegt, wobei man diese Fläche dann in die Ebene kopiert.

Eine *Auffaltung* eines Polyeders entsteht, wenn man das Polyeder längs möglichst weniger Kanten aufschneidet und dann seine gesamte Oberfläche zu einem ebenen Flächenstück biegt. Aus einer Auffaltung kann man dann mit einer minimalen Anzahl von Klebekanten das Polyeder wieder zusammenfalten. Eine Abwicklung ist stets auch eine Auffaltung (nicht aber umgekehrt): Die Abrollkanten dienen als Knickkanten, die anderen als Klebekanten. Abb. 2.3.1 zeigt eine Abwicklung (a) und eine Auffaltung (b) eines Tetraeders; die Auffaltung ist aber keine Abwicklung. Dieses Beispiel belegt, dass man die Begriffe „Abwicklung“ und „Auffaltung“ unterscheiden muss.

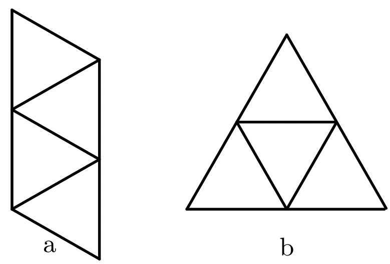


Abb. 2.3.1 Abwicklung und Auffaltung

Abb. 2.3.2 zeigt eine Abwicklung eines Quaders; Abb. 2.3.3 zeigt eine Auffaltung des Quaders, die nicht als Abwicklung entstehen kann.

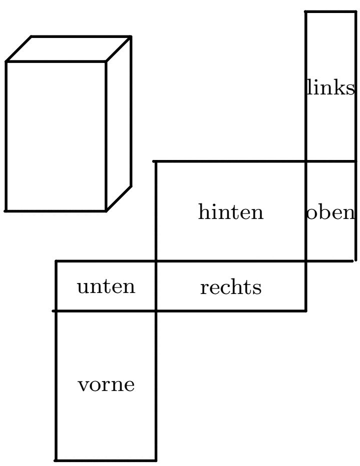


Abb. 2.3.2 Abwicklung Quader

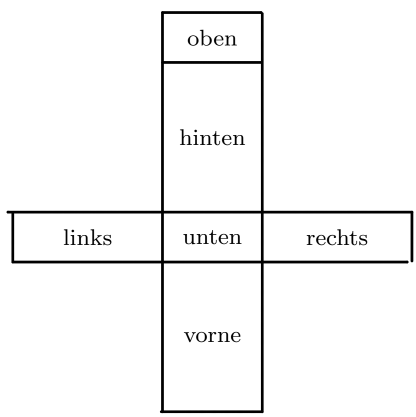


Abb. 2.3.3 Auffaltung Quader

Beide Auffaltungen des Quaders in Abb. 2.3.2 und Abb. 2.3.3 haben fünf Knickkanten und $2 \cdot 7 = 14$ Klebekanten, die zusammen die $5 + 7 = 12$ Kanten des Quaders darstellen. Abb. 2.3.4 zeigt Abwicklungen eines Würfels, Abb. 2.3.5 Auffaltungen, die nicht als Abwicklungen des Würfels gedeutet werden können. Auch hier gibt es stets fünf Knickkanten und sieben bzw. $2 \cdot 7 = 14$ Klebekanten.

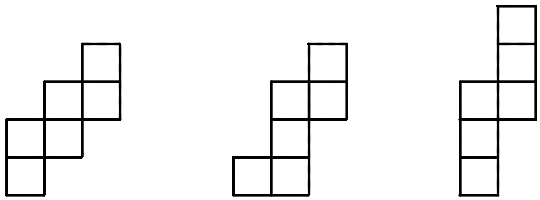


Abb. 2.3.4 Verschiedene Abwicklungen eines Würfels

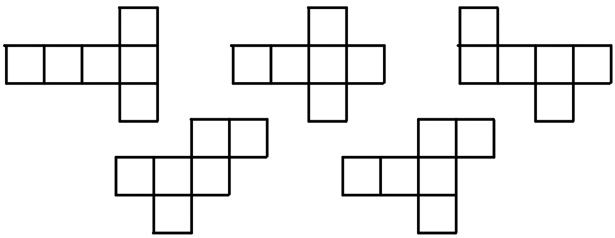


Abb. 2.3.5 Verschiedene Auffaltungen eines Würfels

Aufgaben

2.17 Verbinde in den Auffaltungen des Würfels in Abb. 2.3.4 und Abb.2.3.5 diejenigen Kanten mit einer Linie, die miteinander verklebt werden müssen.

2.18 Ein Oktaeder ist ein von acht gleichseitigen Dreiecken begrenztes Polyeder. In Abb. 2.3.6 ist eine Auffaltung gezeichnet. Verbinde diejenigen Kanten mit einer Linie, die beim Zusammenfalten des Körpers verklebt werden müssen.

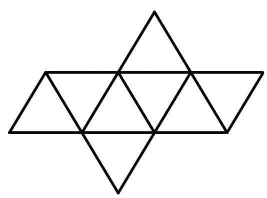


Abb. 2.3.6 Auffaltung Oktaeder

2.19 a) Ein Dodekaeder ist ein von zwölf regelmäßigen Fünfecken begrenztes Polyeder. In Abb. 2.3.7 ist eine Auffaltung gezeichnet.

b) Ein Ikosaeder ist ein von zwanzig gleichseitigen Dreiecken begrenztes Polyeder; Abb. 2.3.8 zeigt eine Auffaltung.

Verbinde in a) und b) diejenigen Kanten mit einer Linie, die beim Zusammenfalten des Körpers verklebt werden müssen.

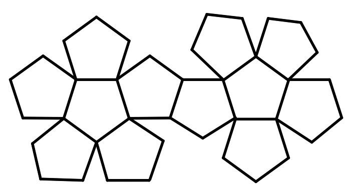


Abb. 2.3.7 Auffaltung Dodekaeder

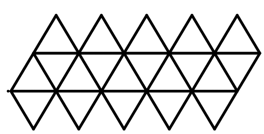
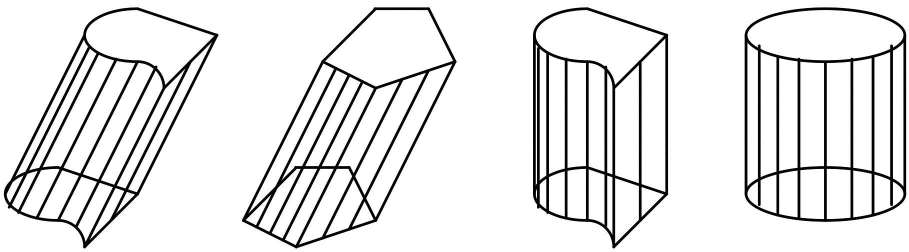


Abb. 2.3.8 Auffaltung Ikosaeder

2.4 Zylinder und Kegel

Verschiebt man ein ebenes Flächenstück in eine Richtung, die nicht in der Ebene des Flächenstücks liegt, so bilden die dabei überstrichenen Punkte einen *Zylinder*; die verschobene Fläche nennt man die *Grundfläche* des Zylinders. Abb. 2.2.1 zeigt den allgemeinen Fall (a) eines *schiefen Zylinders* sowie diverse Sonderfälle.

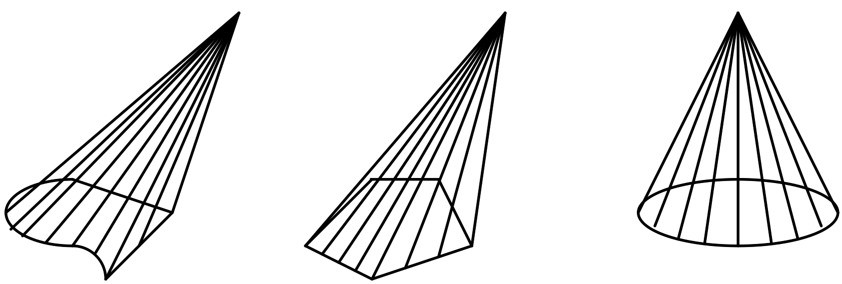


a b c d

Abb. 2.4.1 Typen von Zylindern

Ist die Grundfläche ein Polygon, dann entsteht ein Prisma (b); Prismen sind also spezielle Zylinder. Ist die Verschiebungsrichtung orthogonal zur Ebene des Kurvenstücks, dann erhält man einen *geraden* Zylinder (c). Im Alltag versteht man unter einem Zylinder oft nur einen geraden Zylinder, dessen Grundfläche ein Kreis ist, einen sog. *Kreiszylinder* (d).

Verbindet man die Punkte eines ebenen Flächenstücks geradlinig mit einem Punkt S außerhalb der Ebene des Kurvenstücks, so entsteht ein *Kegel*. Das Flächenstück heißt *Grundfläche*, der Punkt S *Spitze* des Kegels. Abb. 2.4.2 zeigt den allgemeinen Fall (a) eines *Kegels* sowie zwei Sonderfälle.



a b c

Abb. 2.4.2 Typen von Kegeln

Ist die Grundfläche eine Polygonfläche, dann liegt eine Pyramide vor (b); Pyramiden sind also spezielle Kegel. Ist die Grundfläche ein Kreis und liegt die Spitze senkrecht über dem Mittelpunkt des Kreises, dann handelt es sich um einen *geraden Kreiskegel* (c). Im Alltag versteht man unter einem Kegel meistens nur einen geraden Kreiskegel.

Schneidet man von einem Kegel durch einen ebenen Schnitt die Spitze ab, dann entsteht ein *Kegelstumpf*. Abb. 2.4.3 zeigt zwei Kegelstümpfe eines Kreiskegels, wobei die Schnittebene einmal parallel (a) und einmal nicht parallel (b) zur Grundfläche ist. Im ersten Fall ist die Schnittfläche ein Kreis, im zweiten Fall eine Ellipse. Handelt es sich bei dem Kegel um eine Pyramide (c), dann spricht man natürlich von einem *Pyramidenstumpf*.

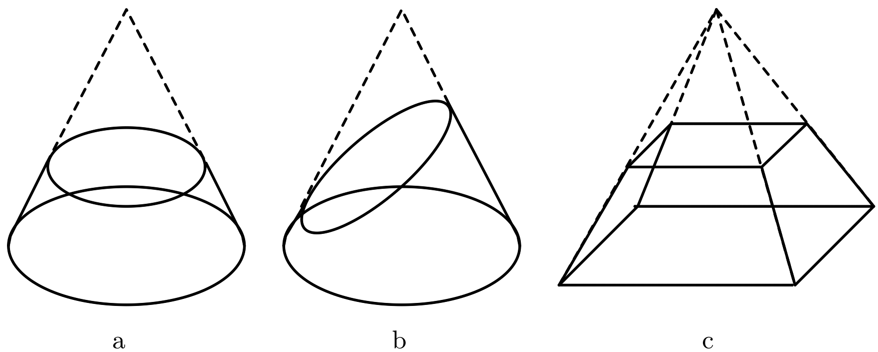


Abb. 2.4.3 Kegelstumpf und Pyramidenstumpf

Abb. 2.4.4 zeigt einen Pyramidenstumpf zu einer quadratischen Pyramide, wobei die Schnittebene nicht parallel zur Grundfläche ist. Zur Konstruktion des Schnittvierecks haben wir dabei die Schnittgerade g der Schnittebene mit der Ebene der Grundfläche und den Schnittpunkt P der Schnittebene mit der Pyramidenachse verwendet.

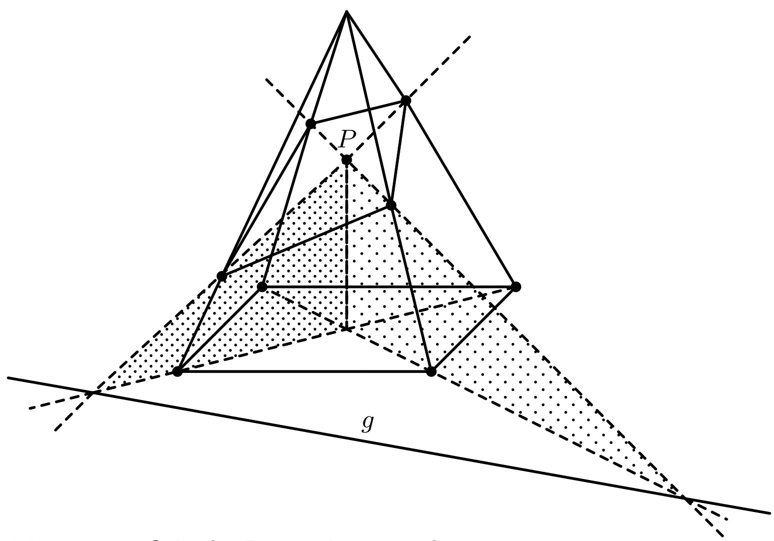


Abb. 2.4.4 Schiefer Pyramidenstumpf

Kennt man bei einem Pyramidenstumpf einer quadratischen Pyramide drei Eckpunkte des Schnittvierecks, so kann man den vierten Eckpunkt, den Schnittpunkt der Schnittebene mit der Achse und die Schnittgerade der Schnittebene mit der Ebene der Grundfläche konstruieren. Die Konstruktion ist ebenfalls Abb. 2.4.4 zu entnehmen; man konstruiert zuerst P, dann g und damit schließlich den vierten Punkt des Schnittvierecks.

Im Schrägbild eines Kreiszylinders und eines Kreiskegels erscheint der Grundkreis als eine Ellipse. Die äußeren Linien des Zylinders bzw. des Kegels sind Tangenten an diese Ellipse. Diesen Sachverhalt wollen wir in Abb. 2.4.5 und Abb. 2.4.6 etwas genauer darstellen. Als Parallelprojektion benutzen wir dabei die „Karopapierprojektion“ aus Abb. 2.2.4. Den Unterschied zu den üblicherweise (auch im vorliegenden Buch!) benutzten ungenauen Zeichnungen erkennt man nur an einer hinreichend großen Zeichnung. Abb. 2.4.5 zeigt die Verhältnisse bei einem Kreiszylinder, Abb. 2.4.6 bei einem Kreiskegel.

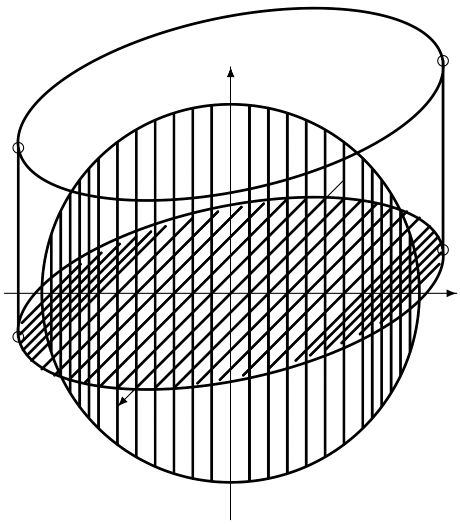


Abb. 2.4.5 Schrägbild eines Kreiszylinders

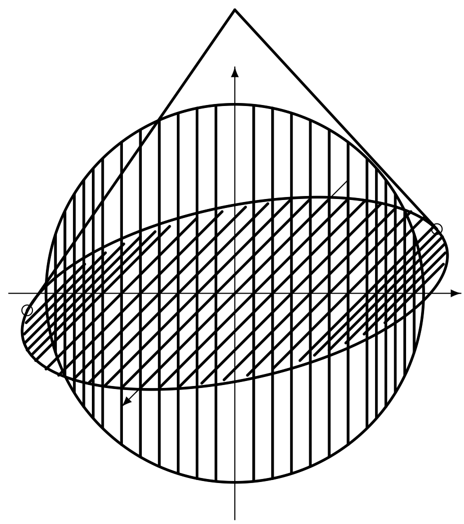


Abb. 2.4.6 Schrägbild eines Kreiskegels

Die Punkte der Ellipse erhält man, indem man die eingezeichneten Kreissehnen um 45° dreht und dann um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ verkürzt; das entspricht einer Halbierung der Koordinaten der Endpunkte der gedrehten Kreissehnen.

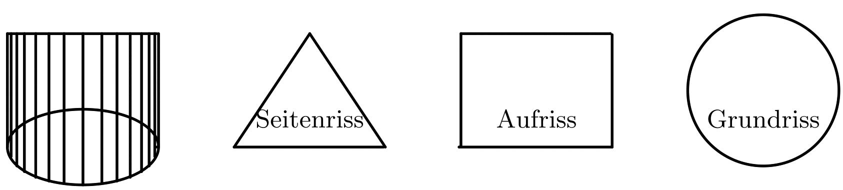


Abb. 2.4.7 Konoid

In Abb. 2.4.7 ist ein *Konoid* gezeichnet. Es entsteht, wenn man die Punkte einer Kreisfläche geradlinig mit den Punkten einer Strecke verbindet, die parallel zur Kreisfläche ist und deren Mittelpunkt senkrecht über dem Kreismittelpunkt liegt, wobei die Strecke die gleiche Länge wie der Kreisdurchmesser hat. Dieser merkwürdige Körper hat als Grundriss einen Kreis, als Aufriss ein Rechteck und als Seitenriss ein gleichschenkliges Dreieck. Ist der Aufriss ein Quadrat, so ist der Seitenriss kein gleichseitiges Dreieck; ist der Seitenriss ein gleichseitiges Dreieck, so ist der Aufriss kein Quadrat (Aufgabe 2.22).

Aufgaben

2.20 Ein Quader werde durch eine Ebene so abgeschnitten, dass vier Schnittpunkte mit den Seitenkanten des Quaders entstehen; drei der vier Schnittpunkte mit den Seitenkanten seien bekannt. Konstruiere den vierten Punkt des Schnittquadrats.
(Die Maße entnehme man aus Abb. 2.4.8.)

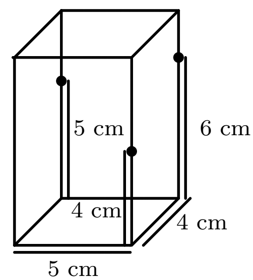


Abb. 2.4.8 Schnittpunkte und Maße

2.21 Ein Kreiskegel werde von einer Ebene geschnitten; dabei liege die Kegelachse nicht in der Schnittebene. Gegeben sind die Schnittgerade g der Schnittebene mit der Ebene des Grundkreises sowie der Schnittpunkt P der Schnittebene mit der Kegelachse. Konstruiere einige (mindestens acht) Punkte der Schnittkurve (Abb. 2.4.9).
(Hinweis: Betrachte Schnittpunkte T von Grundkreisdurchmessern mit g und die Verbindungsgeraden von T und P.)

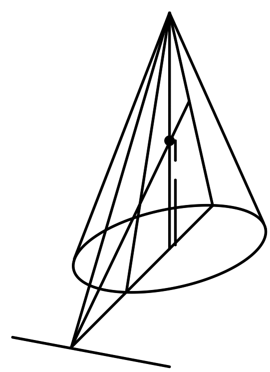


Abb. 2.4.9 Kegelschnitt

2.22 Welcher Körper passt genau („passgenau“) durch die drei Löcher der Schablone in Abb. 2.4.10?
Welche Seitenlängen hat dabei das Dreieck, wenn das Viereck ein Quadrat mit der Seitenlänge a ist?
Welche Seitenlängen hat das Viereck, wenn das Dreieck gleichseitig mit der Seitenlänge a ist?

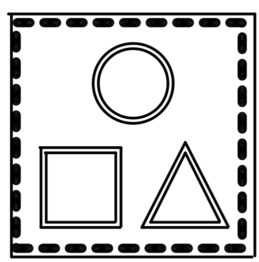


Abb. 2.4.10 Schablone

2.5 Kugeln

Eine *Kugel* (genauer: eine *Kugelfläche*) ist der geometrische Ort aller Punkte des Raumes, die von einem festen Punkt M die gleiche Entfernung r haben. Dabei heißt M der Mittelpunkt und r der *Radius* der Kugel. indexsÄußeres der Kugel Die Kugelfläche begrenzt den *Kugelkörper*; er besteht aus allen Punkten P mit $\overline{MP} \leq r$. Die Punkte P mit $\overline{MP} < r$ bilden das *Innere*, die Punkte P mit $\overline{MP} > r$ das *Äußere* der Kugel. Statt „Kugelfläche“ (engl. sphere) und „Kugelkörper“ (engl. ball) sagt man meist kurz „Kugel“, wenn aus dem Zusammenhang hervorgeht, was gemeint ist.

Eine Ebene, deren Abstand von M kleiner als r ist, schneidet die Kugel in einem Kreis und zerlegt die Kugelfläche in zwei *Kugelkappen*, den Kugelkörper in zwei *Kugelabschnitte* (*Kugelsegmente*). Hat die Schnittebene von M den Abstand d, dann hat der Schnittkreis den Radius $\sqrt{r^2 - d^2}$. Wird die Kugel von zwei zueinander parallelen Ebenen geschnitten, dann wird die Kugelfläche in zwei Kugelkappen und eine *Kugelzone* zerlegt, der Kugelkörper in zwei Kugelabschnitte und eine *Kugelschicht* (Abb. 2.5.1).

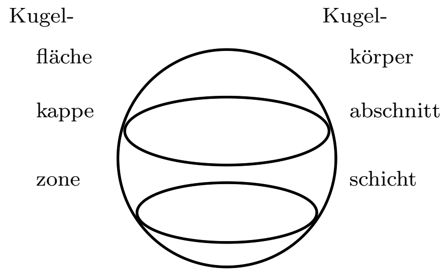


Abb. 2.5.1 Kugelteile

Eine Ebene durch den Mittelpunkt einer Kugel schneidet aus dieser einen *Großkreis* aus. Ein Großkreis zerlegt die Kugel in zwei Halbkugeln. Zwei verschiedene Großkreise schneiden sich in diametral gegenüberliegenden Punkten (*Antipodenpaar*) und zerlegen die Kugelfläche in vier *Kugelzweiecke*, den Kugelkörper in vier *Kugelkeile* (Abb. 2.5.2).

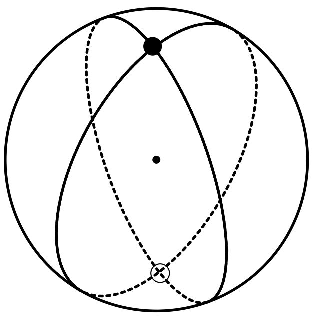


Abb. 2.5.2 Antipodenpaar

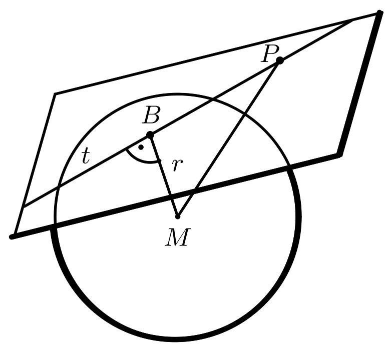


Abb. 2.5.3 Tangentialebene

Eine Ebene, die von M den Abstand r hat, ist eine *Tangentialebene* der Kugel.

Ist B der Berührpunkt, dann ist die Strecke MB orthogonal zur Ebene; Berührradius und Tangentialebene sind also orthogonal zueinander. Dasselbe gilt für eine Gerade, die die Kugel in einem Punkt berührt (Abb. 2.5.3).

Ist P ein Punkt außerhalb der Kugel und t eine Tangente mit dem Berührpunkt B, dann ist $\overline{PB}^2 = \overline{PM}^2 - r^2$. Daher haben die *Tangentenabschnitte* PB für einen gegebenen Punkt P alle die gleiche Länge.

Die Tangenten von einem Punkt P aus an eine Kugel berühren die Kugel in einem Kreis (Abb. 2.5.4). Die Tangentenabschnitte bilden einen Kreiskegel, dessen Grundkreis dieser *Berührkreis* ist. Diesen Kegel nennt man den *Tangentialkegel* mit der Spitze P an die gegebene Kugel. Hat die Kugel den Mittelpunkt M und den Radius r, dann haben die Mantellinien des Tangentialkegels die Länge

$$s = \sqrt{\overline{PM}^2 - r^2}.$$

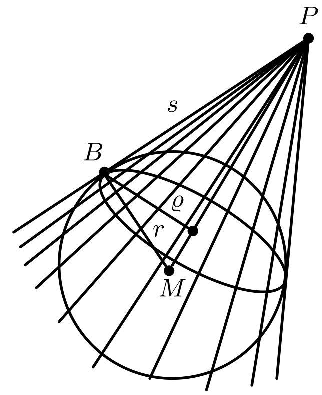


Abb. 2.5.4 Tangentialkegel

Zwischen dem Grundkreisradius ϱ und der Höhe h des Tangentialkegels besteht aufgrund des Höhensatzes die Beziehung

$$\varrho^2 = h(\overline{PM} - h).$$

Zwei Kugelflächen mit den Mittelpunkten M_1, M_2 und den Radien r_1, r_2 schneiden sich in einem Kreis. Es seien P ein Punkt der Schnittkreisebene E außerhalb der Kugeln sowie B_1, B_2 die Berührpunkte zweier Tangenten von P aus an die Kugeln (Abb. 2.5.5).

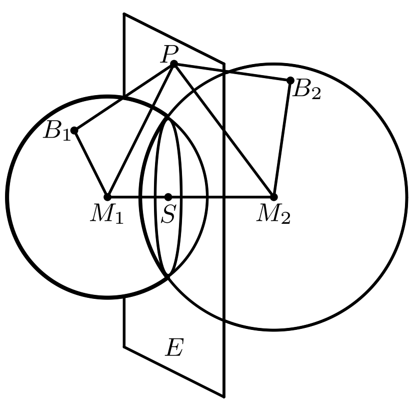


Abb. 2.5.5 Chordalebene

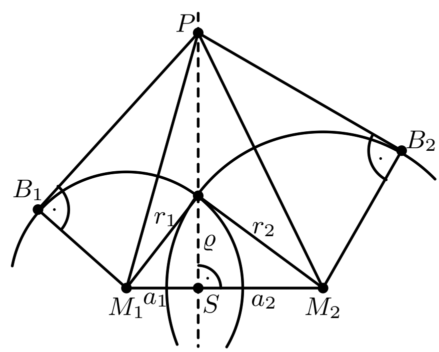


Abb. 2.5.6 Tangentenabschnitte

Weiterhin seien S der Schnittpunkt von E und M_1M_2 sowie $a_1 = \overline{M_1S}, a_2 = \overline{M_2S}$ und ϱ der Radius des Schnittkreises (Abb. 2.5.6). Dann gilt

$$\overline{PB_1}^2 = \overline{PM_1}^2 - r_1^2 = \overline{PS}^2 + a_1^2 - r_1^2 = \overline{PS}^2 - \varrho^2,$$

$$\overline{PB_2}^2 = \overline{PM_2}^2 - r_2^2 = \overline{PS}^2 + a_2^2 - r_2^2 = \overline{PS}^2 - \varrho^2,$$

also $\overline{PB_1} = \overline{PB_2}$. Die Tangentenabschnitte von einem Punkt der Ebene E aus an die beiden Kugeln sind demnach gleich lang. Man nennt die Ebene E die *Chordalebene* der beiden Kugeln (Aufgabe 2.23).

Eine Dreieckspyramide besitzt eine *Umkugel*, d.h., eine Kugel, die durch alle vier Ecken der Dreieckspyramide geht. Man denke sich den Umkreis eines der Begrenzungsdreiecke gezeichnet, in diesen eine Kugel gesetzt und deren Radius und Mittelpunkt so lange variiert, bis die Kugel auch durch den vierten Punkt geht (Abb. 2.5.7). Der Umkugelmittelpunkt ist der Schnittpunkt der *mittelsenkrechten Ebenen* der sechs Kanten. Dabei ist die mittelsenkrechte Ebene einer Strecke diejenige Ebene durch den Mittelpunkt der Strecke, die orthogonal zu der Strecke ist. Diese Ebene besteht aus allen Punkten, die von den Endpunkten der Strecke die gleiche Entfernung haben.

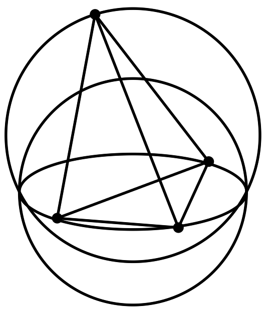


Abb. 2.5.7 Umkugel

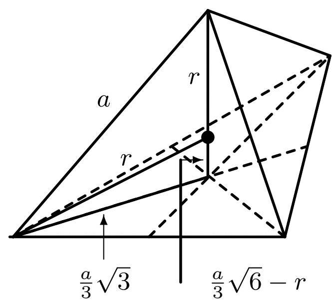


Abb. 2.5.8 Umkugelradius

Bei einem Tetraeder kann man den Mittelpunkt und den Radius der Umkugel leicht berechnen, wenn die Kantenlänge a gegeben ist (Abb. 2.5.8). Der Radius ist $r = \frac{a}{4}\sqrt{6}$, und der Mittelpunkt liegt auf den Raumhöhen in der Entfernung r von den Ecken bzw. im Abstand $\frac{r}{3}$ von den Seitenflächen (Aufgabe 2.25). Der Mittelpunkt teilt also die Raumhöhen im Verhältnis $3 : 1$.

Eine Dreieckspyramide besitzt auch eine *Inkugel*, d.h., eine Kugel, die alle vier Seitenflächen der Dreieckspyramide berührt. Man denke sich eine Kugel so in eine der Ecken gelegt, dass sie die drei dort zusammenstoßenden Seitenflächen berührt und dann den Radius und den Mittelpunkt so lange variiert, bis die Kugel die vierte Seitenfläche berührt (Abb. 2.5.9). Die Inkugel eines Tetraeders mit der Seitenlänge a hat den Radius $\frac{a}{12}\sqrt{6}$ (Aufg. 2.25).

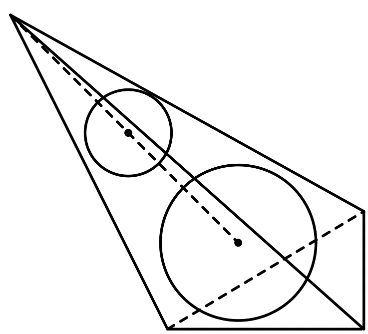


Abb. 2.5.9 Inkugel

Die Mittelpunkte der quadratischen Begrenzungsflächen eines Würfels bilden die Ecken eines Oktaeders, und die Mittelpunkte der dreieckigen Begrenzungsflächen eines Oktaeders bilden die Ecken eines Würfels. Sei nun ein Oktaeder einem Würfel einbeschrieben, und dem Oktaeder sei ein Würfel einbeschrieben. Dann ist die Inkugel des großen Würfels die Umkugel des Oktaeders, und die Inkugel des Oktaeders ist die Umkugel des kleinen Würfels (Abb. 2.5.10).

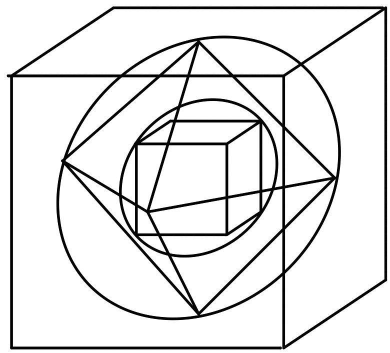


Abb. 2.5.10 Würfel und Oktaeder

Die vier Kugeln in Abb. 2.5.11 berühren sich gegenseitig. Es soll die Höhe h der „Kugelpyramide“ berechnet werden, wenn der Kugelradius r bekannt ist. Die Mittelpunkte der Kugeln bilden ein Tetraeder der Seitenlänge $2r$. Dessen Raumhöhe ist d$\frac{2}{3}r\sqrt{6}$. Also ist

$$h = \left(2 + \frac{2}{3}\sqrt{6}\right) r \approx 3{,}63\, r.$$

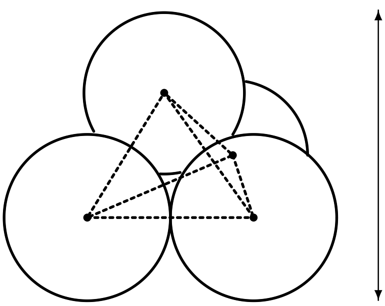


Abb. 2.5.11 Kugelpyramide Tetraeder

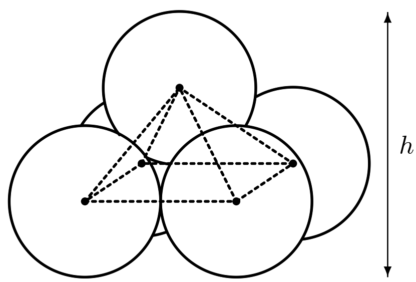


Abb. 2.5.12 Quadratische Kugelpyramide

Für die Höhe h der „Kugelpyramide“ in Abb. 2.5.12 findet man einen anderen Wert. Die aus den Mittelpunkten gebildete quadratische Pyramide hat die Höhe $r\sqrt{2}$, also ist hier

$$h = \left(2 + \sqrt{2}\right) r \approx 3{,}41\, r.$$

Eine quadratische „Kugelpyramide“ mit n Schichten enthält

$$1 + 4 + 9 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Kugeln. Die Mittelpunkte der Kugeln an den vier Ecken der untersten Lage und an der Spitze bilden eine quadratische Pyramide mit den Kantenlängen $(n-1)\cdot 2r$. Die Höhe der gesamten Kugelpyramide ist

$$h = (2 + (n-1)\sqrt{2})\, r.$$

Aufgaben

2.23 Es seien zwei Kugeln mit den Mittelpunkten M_1, M_2 und den Radien r_1, r_2 gegeben. Dabei sei $\overline{M_1M_2} > r_1 + r_2$, die Kugeln sollen also keine gemeinsamen Punkte haben. Es sei S der Punkt der Strecke M_1M_2 mit

$$\overline{M_1S} = a_1\,,\ \overline{M_2S} = a_2 \quad \text{und} \quad a_1^2 - r_1^2 = a_2^2 - r_2^2\,.$$

Es sei ferner E die Ebene durch S orthogonal zu M_1M_2. Beweise, dass die Tangentenabschnitte $\overline{PB_1}$ und $\overline{PB_2}$ von einem Punkt P der Ebene E aus an die beiden Kugeln gleich lang sind (Abb. 2.5.13).

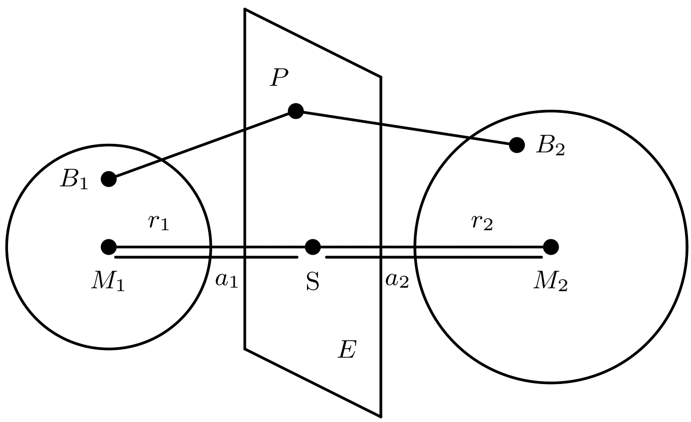


Abb. 2.5.13 Tangentenabschnitte an zwei Kugeln

2.24 Eine quadratische Pyramide besitzt eine Umkugel und eine Inkugel (Abb. 2.5.14).

Für die Umkugel denke man sich den Umkreis des Quadrats gezeichnet, in diesen eine Kugel gesetzt und deren Radius und Mittelpunkt so lange variiert, bis die Kugel auch durch den vierten Punkt geht. Für die Inkugel denke man sich eine Kugel so in die Spitze der Pyramide gelegt, dass sie die vier dort zusammenstoßenden Seitenflächen berührt, und dann den Radius und den Mittelpunkt so lange variiert, bis die Kugel die Grundfläche berührt.

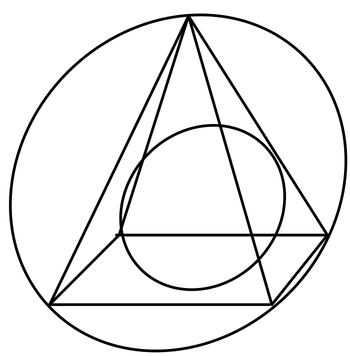


Abb. 2.5.14 Inkugel und Umkugel

Berechne den Radius dieser Kugeln in Abhängigkeit von der Grundseitenlänge a und der Höhe h.

2.25 Berechne den Mittelpunkt und den Radius der Inkugel und der Umkugel eines Tetraeders mit der Kantenlänge a.

2.26 Welche der folgenden Körper besitzen eine Inkugel bzw. eine Umkugel?

a) Quader b) Dreieckspyramide c) Parallelepiped mit gleichlangen Seiten

d) Dreiecksprisma e) Kreiskegel

2.27 Berechne in Abb. 2.5.10 den Radius der dem kleinen Würfel umbeschriebenen bzw. dem Oktaeder einbeschriebenen Kugel, wenn die Kantenlänge a des großen Würfels gegeben ist.

2.28 In einen Torus (Ringkörper, Abb. 2.5.15) sollen acht gleichgroße Kugeln vom Radius 2 cm hineinpassen, die sich reihum berühren. Konstruiere den Grundriss des Torus.

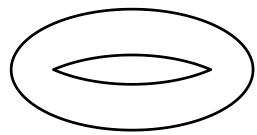


Abb. 2.5.15 Torus

2.29 Legt man den Boden einer Kiste wie in Abb. 2.5.16 mit Kugeln vom Durchmesser 1 cm aus, so benötigt man pro Kugel einen Platz von 1 cm^2. Man kann das aber auch platzsparender machen, nämlich wie in Abb. 2.5.17. Mindestens wie viele Kugeln kann man unterbringen, wenn der Boden der Kiste ein Quadrat mit der Seitenlänge 50 cm ist?

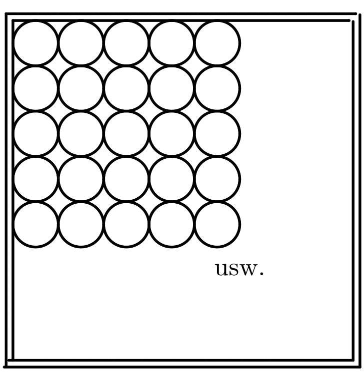


Abb. 2.5.16 Kugelpackung I

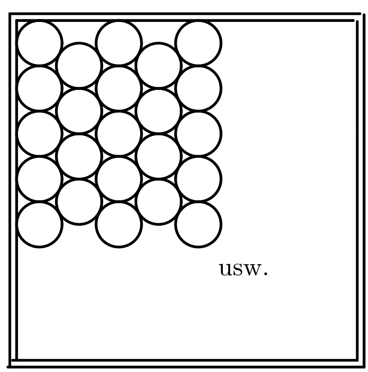


Abb. 2.5.17 Kugelpackung II

http://www.springer.com/978-3-662-50322-5

Elemente der Geometrie
Scheid, H.; Schwarz, W.
2017, IX, 373 S. 644 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-662-50322-5