1 Rechenverfahren

Zusammenfassung
Dieses Kapitel beschäftigt sich mit Fragen, die bei Studenten am Übergang von der Schul- zur Hochschulmathematik häufig auftauchen. Es bespricht Möglichkeiten, wie Studienanfänger auf ihren bestehenden mathematischen Fähigkeiten aufbauen können. Zudem zeigt es auch, wie sich die Erwartungen an die Mathematik verändern, wenn ein Student von der Schule an die Universität wechselt, und beschreibt verschiedene Lernansätze, wobei die Ansicht vertreten wird, dass bestimmte Methoden für das Mathematikstudium nützlicher sind als andere.

1.1 Rechnen in der Schule und an der Universität

Im ersten Teil dieses Buches geht es um das Wesen der Mathematik an der Universität. Sie hat viel gemein mit der Schulmathematik und Abiturienten besitzen bereits eine Reihe von mathematischen Fähigkeiten, die beim Studium hilfreich sein werden. Auf der anderen Seite ist die Mathematik an der Universität in vielerlei Hinsicht aber auch ganz anders als das, was sie von der Schule gewohnt sind. Daraus folgt, dass die meisten Studenten ihre bestehenden Fähigkeiten ausbauen und anpassen müssen, um weiter gut mitzukommen. Das kann für diejenigen, die sich noch nie Gedanken über das Wesen von Mathematik und die für ein Studium notwendigen Fähigkeiten gemacht haben, schwierig sein, deshalb werden letztere im ersten Teil ausführlich besprochen.

Etwas, was man sicherlich schon gelernt hat, ist mathematische Verfahren anzuwenden, um Antworten auf Standardfragen zu finden. Manche lieben diese Art von Arbeit: Sie genießen es, eine Aufgabenseite mit Antworten zu füllen in der Sicherheit, dass ihre Antworten auch tatsächlich korrekt sein werden, wenn sie regelgerecht vorgegangen sind. Das finden sie besser als manche anderen Fächer, in denen es kein Richtig oder Falsch, sondern nur plausible oder weniger plausible Meinungen gibt.

L. Alcock, *Wie man erfolgreich Mathematik studiert*, DOI 10.1007/978-3-662-50385-0_1

Andere mögen diesen Aspekt der Mathematik gar nicht. Sie finden es stumpfsinnig, lauter sich wiederholende Übungen durchzuarbeiten. Sie möchten vielmehr wissen, *warum* die verschiedenen Verfahren funktionieren und wie sie zusammenspielen. Ich werde auf diesen Unterschied später in diesem Kapitel noch genauer eingehen. Erst einmal sollten Sie wissen, dass es sehr wichtig ist, diese Verfahren anwenden zu können, denn ohne flüssiges Rechnen wird es sehr schwierig, sich auf Konzepte zu konzentrieren, die sich auf einer höheren Ebene abspielen.

Wenn Sie an die Universität kommen, erwarten die Dozenten von Ihnen, dass Sie die Methoden, die Sie in der Schule gelernt haben, wirklich beherrschen. Sie sollten in der Lage sein, algebraische Ausdrücke umzuformen, Gleichungen zu lösen, Funktionen zu differenzieren und zu integrieren usw. Dozenten gehen davon aus, dass Sie dies beherrschen, ohne ständig unterbrechen zu müssen, um eine Formel nachzuschauen, und vielleicht verlieren die Hochschullehrer auch einmal die Geduld mit jenen Studenten, die das nicht können. Nicht weil sie generell wenig Geduld mit Studenten hätten – die meisten Dozenten verbringen gerne viel Zeit dabei, mit Ihnen über neue mathematische Konzepte zu sprechen oder Studenten zu unterstützen, die sagen: „Ich weiß, wie ich das machen soll, aber ich habe nie so richtig verstanden, warum gerade so.“ Aber sie gehen nicht davon aus, Ihnen Dinge erneut beibringen zu müssen, die Sie bereits mehrere Jahre lang gelernt haben. Sie sollten deshalb Ihre Kenntnisse vor Studienbeginn eventuell noch einmal auffrischen, vor allem, wenn Sie sich den ganzen Sommer lang nicht mehr mit Mathematik beschäftigt haben.

Gleich zu Studienbeginn werden Sie feststellen, dass für die Hochschulmathematik neue Verfahren gelernt werden müssen. Es überrascht nicht, dass diese länger und komplizierter sind als jene, die Sie von der Schule her kennen. Ich mache mir keine Sorgen darüber, dass Sie nicht in der Lage sein könnten, lange und komplizierte Verfahren anzuwenden, denn wenn Sie so weit gekommen sind, werden Sie auch das schaffen. Ich möchte mich deshalb hier auf grundlegendere Änderungen in der Art und Weise konzentrieren, wie Sie mit diesen Verfahren umgehen.

1.2 Entscheidungen über und innerhalb von Verfahren

Der erste grundlegende Unterschied ist, dass Sie an der Universität mehr Verantwortung bei der Entscheidung tragen, welches Verfahren Sie anwenden wollen. Natürlich haben Sie das in gewissen Grenzen bereits gelernt. Sie wissen zum Beispiel, wie man Klammern ausmultipliziert und wie man Formeln wie die folgende schreibt:

$$(x+2)(x-5) = x^2 - 3x - 10.$$

Aber hoffentlich haben Sie auch gelernt, dass es nicht vernünftig ist auszumultiplizieren, wenn Sie die Aufgabe haben, einen Bruch wie diesen zu vereinfachen:

$$\frac{x^2(x+2)(x-5)}{x^2+2x}.$$

Beim Bruch ist die Vereinfachung leichter, wenn wir die Faktoren „sichtbar" lassen. Trotzdem multiplizieren viele automatisch aus, vielleicht weil dies das Erste war, was sie im Algebra-Unterricht gelernt haben. Sie würden aber zu effektiveren Mathematikern werden, wenn sie lernten, zunächst innezuhalten und darüber nachzudenken, was sie am besten weiterbringt. Wenn dieses spezielle Beispiel nun nicht auf Sie zutrifft, wie ist es dann aber bei anderen? Haben Sie jemals eine lange Rechnung durchgeführt und erst anschließend erkannt, dass dies gar nicht nötig gewesen wäre? Hätten Sie das vermeiden können, wenn Sie zuerst nachgedacht hätten? Ein Teil der Überlegung, welches Verfahren anzuwenden ist, sollte daraus bestehen, einen Augenblick darüber nachzudenken, statt gleich das zu tun, was einem als Erstes einfällt.

Das mag nun nicht nach einer großen Erkenntnis klingen. Aber überlegen Sie doch kurz einmal, wie oft Sie *keine* Entscheidung darüber fällen müssen, welches Verfahren anzuwenden ist. Oft schreiben Ihnen die Fragen in einem Buch oder einem Test genau vor, was Sie zu tun haben. Dann heißt es zum Beispiel: „Verwenden Sie die Produktregel, um diese Funktion zu differenzieren." Und selbst wenn das nicht explizit dort so steht, geht es häufig aus dem Kontext hervor. In der Schule hat Ihnen der Lehrer eine Stunde lang demonstriert, wie man Doppelwinkelfunktionen verwendet, und dann ein Arbeitsblatt gegeben. Sie können in solch einem Fall mit Sicherheit davon ausgehen, dass die Doppelwinkelformeln benötigt werden. Das war seinerzeit natürlich hilfreich, bedeutete aber auch, dass Sie meist nicht entscheiden mussten, welches Verfahren anzuwenden war. In der universitären Mathematik und in der (Berufs-)Welt werden Entscheidungen weit höher geschätzt und auch erwartet. Deshalb heißt es dort auf Arbeitsblättern oder in Klausuren normalerweise nur: „Lösen Sie dieses Problem!", aber nicht: „Lösen Sie dieses Problem mit folgendem Verfahren."

Ein anderer Fall, bei dem Sie entscheiden müssen, welches Verfahren angewendet werden soll, betrifft solche Aufgabenstellungen, die sich zwar ähneln, aber idealerweise mit verschiedenen Methoden gelöst werden. Betrachten Sie zum Beispiel eine Integration, genauer eine partielle Integration. Vermutlich wissen Sie, dass diese verwendet wird, wenn man das Produkt zweier Funktionen integrieren möchte: Eine davon wird einfacher, wenn wir sie differenzieren, die andere wird nicht schwieriger, wenn wir sie integrieren. So wird zum Beispiel x in $\int x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$ einfacher, wenn wir es differenzieren, und e^x wird nicht komplizierter, wenn wir es integrieren. Vielleicht wissen Sie auch, dass mathematische Situationen manchmal oberflächlich betrachtet ähnlich aussehen, aber am besten mit verschiedenen Verfahren angegangen werden. Im Falle der Integration kann eine Substitution manchmal der bessere Weg sein. Bei $\int x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$ würden wir vermutlich eher mithilfe einer Substitution integrieren statt mit partieller Integration. Wissen Sie warum?

Integration mit Substitution ist ein weiterer Punkt, auf den ich hinweisen möchte. Diesmal geht es um Entscheidungen *während* eines Verfahrens. Vielleicht haben Sie das Ende des letzten Absatzes gelesen und gedacht: „Aber welche Substitutionsvariante soll ich verwenden?“ Vermutlich haben Ihnen Ihre Lehrer oder Lehrbücher immer gesagt, was Sie verwenden sollen. Das halte ich aber nicht immer für notwendig. Denn nach einer gewissen Zeit hätten Sie bemerken sollen, dass bestimmte Substitutionen im gewissen Fällen nützlich sind. Wenn Sie auf die Strukturen dieser Fälle achten – selbst bei eigener Unsicherheit, eine gute Substitution für einen neuen Fall wählen zu können –, sollten Sie so eine Vorstellung von potenziellen sinnvollen Möglichkeiten entwickeln, die dann versucht werden können. Falls Sie sich bisher darüber noch nicht ganz bewusst Gedanken gemacht haben, sollten Sie das jetzt tun. Nehmen Sie sich einige Fragen über Integration durch Substitution vor und schauen sich die vorgeschlagenen Substitutionen an, ohne die Probleme wirklich zu lösen. Können Sie nachvollziehen, warum diese Substitutionen funktionieren? Ich werde auf dieses Beispiel später in diesem Kapitel noch einmal zurückkommen.

Wie kann also ein Student seine Fähigkeiten für Entscheidungen über bestimmte Verfahren verbessern? Ich habe zwei Vorschläge: Erstens können Sie Übungsaufgaben aus einer Quelle lösen, aus der die anzuwendenden Verfahren nicht offensichtlich hervorgehen. Am besten schaut man in den Übungen am Ende eines Kapitels nach, die meist mehr Material umfassen. Eine andere Möglichkeit liefern, wenn Sie Zugang dazu haben, alte Abituraufgaben oder Oberstufenbücher. Der zweite Vorschlag lautet: Verwandeln Sie normale Übungsaufgaben in eine Gelegenheit zum Nachdenken. Wenn Sie mit einer Übungsaufgabe fertig sind, gehen Sie nicht sofort zur nächsten über, sondern machen erst einmal Halt und denken über die folgenden Fragen nach:

1. Warum hat dieses Verfahren funktioniert?
2. Was kann an der Fragestellung verändert werden, sodass das Verfahren immer noch funktioniert?

3. Was kann an der Fragestellung verändert werden, damit das Verfahren nicht mehr funktioniert?
4. Könnte ich das Verfahren verändern, damit es für einige dieser Fälle funktioniert?

All diese Fragen sollten Ihnen dabei helfen, eine gewisse Flexibilität bei der Anwendung Ihrer Kenntnisse aufzubauen.

1.3 Lernen von einigen (oder keinen) Beispielen

Als Sie in der Schule ein neues Verfahren lernten, hat Ihr Lehrer es vermutlich anhand einiger ausgearbeiteter Beispiele eingeführt. Diese Beispiele unterschieden sich wahrscheinlich ein wenig voneinander, sodass die ersten einfacher, die späteren schwieriger wurden. Ihr Lehrer hat Ihnen dann sicherlich einige Aufgaben vorgelegt, mit denen Sie selbst üben konnten. Sie haben dazu die besprochenen Beispiele verwendet und die Verfahren auf neuen Fälle, die Sie bekommen hatten, übertragen.

An der Universität hat man nicht so oft gleich mehrere besprochene Beispiele zur Hand, wenn man versucht, ein Problem zu lösen, sondern vielleicht nur noch eines oder zwei. Diese werden nicht die gesamten möglichen Abweichungen umfassen, bei denen man ein Verfahren anwenden kann, und deshalb sind Sie selbst dafür verantwortlich herauszufinden, ob Sie es für eine leicht abweichende Situation unverändert einsetzen oder abwandeln müssen.

Für ein einfaches Beispiel, in dem eine Anpassung notwendig wird, betrachten wir Schüler, die gelernt haben, eine quadratische Gleichung wie $x^2 + 5x + 6 = 0$ zu lösen, indem sie diese faktorisieren und dann die Faktoren gleich null setzen. Sie werden etwa Folgendes schreiben:

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 6 &= 0 \\ (x-2)(x-3) &= 0 \\ x - 2 &= 0 \text{ oder } x - 3 = 0 \\ x &= 2 \text{ oder } x = 3. \end{aligned}$$

Nehmen wir an, der Schüler soll die Gleichung $x^2 - 5x + 6 = 8$ lösen und schreibt:

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 6 &= 8 \\ (x-2)(x-3) &= 8 \\ x - 2 &= 8 \text{ oder } x - 3 = 8 \\ x &= 10 \text{ oder } x = 11. \end{aligned}$$

Was genau ist hier schiefgelaufen? Sie sollten sicher sein, dass Sie die Antwort kennen – Fehler in logischen Argumenten zu finden, ist eine wichtige Kompetenz. Können Sie erklären, wo der Fehler liegt und warum es ein Fehler ist? Können Sie trotzdem verstehen, warum jemand einen derartigen Fehler machen kann? Tatsächlich ist dies durchaus nachvollziehbar – das Verfahren sieht oberflächlich so aus, als könnte es funktionieren, weil die Gleichungen ähnlich aussehen. Es funktioniert in diesem Fall aber nicht, denn es stimmt zwar, dass für die Gleichung $a \cdot b = 0$ gelten muss: $a = 0$ oder $b = 0$, aber wenn $a \cdot b = 8$, heißt das nicht, dass $a = 8$ oder $b = 8$ ist. Eine vernünftige Veränderung des Verfahrens hätte darin bestanden, zuerst von beiden Seiten 8 zu subtrahieren und dann in der Gleichung mit der Standardform weiterzuarbeiten.

Dies war ein einfaches Beispiel. Und als Sie lernten, derartige Probleme zu lösen, haben Ihre Lehrer vermutlich nicht erwartet, dass Sie nach nur einem einzigen ausgeführten Beispiel wissen, wie mit verwandten, aber nicht identischen Fällen umzugehen ist. In der Schulmathematik lernen Schüler üblicherweise nur Fälle kennen, in denen alles gut funktioniert – es wird verhältnismäßig wenig Zeit darauf verwendet, Beispiele zu erkennen, bei denen Standardverfahren nicht funktionieren. Deshalb haben Sie bislang vielleicht noch nicht viel Übung im kritischen Denken, das notwendig ist, um die Beschränkungen von Rechenverfahren zu erkennen. Sie sollten sich zu Beginn Ihres Studiums darauf einstellen, dass Sie diese Fähigkeit entwickeln müssen.

Während Ihres Studiums werden Sie manchmal sogar aufgefordert, ein Verfahren anzuwenden, *ohne je ein ausgearbeitetes Beispiel* gesehen zu haben. Das scheint manchem zunächst unmöglich, ist es aber nicht, denn verwertbare Informationen werden Ihnen in anderer Form geliefert. Insbesondere geht es bei der Anwendung von Verfahren oft darum, etwas in Formeln einzusetzen. Zum Beispiel gibt es für die Produktregel beim Differenzieren eine Formel, die oft folgendermaßen ausgedrückt wird (Falls die Formel, die Sie verwenden, nicht genauso aussieht, können Sie dann erkennen, wie sie mit der, die Ihnen vertraut ist, zusammenhängt?):

$$\text{Wenn } f = uv, \text{ dann gilt } \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

Um die Produktregel anzuwenden, müssen wir uns zunächst entscheiden, was u und v sein sollen, dann können wir all die andere Dinge, die wir benötigen, ausrechnen und in die Formel einsetzen. Als Sie dies zum ersten Mal gesehen haben, hat Ihnen Ihr Lehrer vermutlich einige Beispiele vorgerechnet und so gezeigt, wie Sie damit umgehen können. Aber war das wirklich notwendig? Wenn Sie heute etwas Ähnliches lernen, benötigen Sie dann wirklich jemanden, der Sie Schritt für Schritt durch das Verfahren führt, oder könnten Sie all die geeigneten Substitutionen und Rechenschritte selbst vornehmen?

Um ein weiteres Beispiel anzuführen, betrachten wir die Definition der Ableitung. Diese haben Sie vielleicht schon bei der Einleitung der Differentiation kennengelernt. An der Universität werden Sie sich ausführlich damit beschäftigen, und deshalb verwenden wir sie hier, um zu zeigen, wie man eine allgemeine Formel anwendet, ohne eine Beispielrechnung zu haben. Sie lautet:

Definition

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

wenn dieser Grenzwert existiert.

Die Frage, warum dies eine vernünftige Definition darstellt, ist natürlich wichtig, insbesondere warum „wenn dieser Grenzwert existiert" zu ergänzen ist. Doch wollen wir uns darum hier nicht kümmern (Sie werden die Antworten darauf in einem Fach wie Analysis erfahren). Jetzt stellen wir uns nur vor, dass wir diese Definition erhalten haben und aufgefordert werden, die Ableitung der Funktion f, gegeben durch $f(x) = x^3$, zu bestimmen. (Ich weiß, Sie kennen die Antwort, aber folgen Sie mir noch einen weiteren Augenblick lang.) Was können wir tun? Nun, wir wollen $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$ berechnen, deshalb kann die Formel genauso verwendet werden, wie sie ist – wir müssen sie nicht vorher umformen. Wir haben eine Formel für f, deshalb können wir einfach einsetzen:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}.$$

Dann können wir den Ausdruck, der sich daraus ergibt, vereinfachen:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 3x^2 + 3xh + h^2.\end{aligned}$$

Wenn wir schließlich bedenken, dass h gegen 0 geht, bleibt $3x^2$, wie es ist, aber sowohl $3xh$ als auch h^2 gehen gegen null. Der Grenzwert ist demnach

$3x^2$. Wenn wir also in die Definition einsetzen, haben wir bestimmt, dass gilt:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 3x^2.$$

Das ist genau das, was wir erwartet haben.

Wenn Sie erkennen, dass Sie allgemeine Formeln selbstständig auf Beispiele anwenden können, sollten Sie sich mathematisch sicherer fühlen. Vielleicht beruhigt es Sie, wenn sich jemand Ihre Beispielaufgaben ansieht, doch meist werden Sie diese Art von Unterstützung nicht mehr benötigen.

1.4 Sich selbst Beispiele überlegen

Wie ich schon sagte, rechnen Hochschuldozenten nur wenige Beispiele vor und stellen Ihnen nur wenige Übungsaufgaben zur Verfügung. Zum Beispiel wird zunächst gezeigt, wie man beweisen kann, dass die Funktion f, gegeben durch $f(x) = 2x$, stetig[1] ist, und Sie werden dann aufgefordert, einen ähnlichen Beweis für $f(x) = 3x$ durchzuführen. Danach gehen die Dozenten davon aus, dass Sie wissen, wie man einen ähnlichen Beweis für $f(x) = 4x$ und für $f(x) = 265x$ usw. durchführt. Selbst wenn Sie dazu in der Lage sind, tun Sie gut daran, trotzdem einige weitere Beweise dieser Art durchzurechnen, um mehr Routine darin zu erlangen. In der Schule hat vermutlich Ihr Lehrer darüber entschieden, wie viel Sie üben sollen, aber ein Dozent wird wahrscheinlich nur ein Beispiel präsentieren und Ihnen dann die Entscheidung überlassen, ob es für Sie hilfreich sein könnte, noch ähnliche zu untersuchen.

Es ist sicher auch empfehlenswert, einmal innezuhalten und sich selbst zu fragen, wo die Grenzen eines derartigen Beweises liegen. Funktioniert er zum Beispiel auch mit negativen Werten? Kann er sofort auch auf $f(x) = -10x$ übertragen werden? Oder müsste man in diesem Fall irgendeine Art von Anpassung vornehmen? Wie ist es mit $f(x) = 0x$? Könnte man die Formel verallgemeinern und einen Beweis für $f(x) = cx$ schreiben? Muss c irgendwie eingeschränkt werden? Für Mathematiker ist diese Art zu denken ganz natürlich. Sie haben das vermutlich immer schon aus eigenem Antrieb so gemacht, ohne dass man Sie dazu auffordern musste. Sie sollten dabei bleiben.

Das Fazit dieses Kapitels ist, dass Sie an der Universität beim Mathematikstudium keinen Erfolg haben werden, wenn Sie immer nur versuchen, Probleme zu lösen, indem Sie etwas suchen, was ähnlich aussieht, und es dann kopieren. In manchen Fällen werden Sie bei derart unreflektiertem Kopie-

[1] Wenn Sie nicht verstehen, warum es da etwas zu beweisen gibt, dann gedulden Sie sich noch bis zur Diskussion in Kap. 5.

ren nichts weiter als Unsinn niederschreiben, weil etwa eine Eigenschaft, die für die Beispielrechnung galt, in Ihrem vorliegenden Problem nicht vorausgesetzt werden kann. In anderen Fällen kann das Kopieren einer Methode auch einfach ineffizient sein – der Ansatz, den Sie wählen, wird vielleicht sehr gut funktionieren, aber doppelt so zeitaufwendig sein wie eine andere Methode. Außerdem kann auch der Fall eintreten, dass es einfach kein Beispiel gibt, an das Sie sich halten können. Sie müssen lernen zu erkennen, dass eine bestimmte Definition oder ein Satz angewendet werden kann, ihn anschließend anwenden und so durch geeignetes Einsetzen direkt von einer allgemeinen Aussage zu Ihrem speziellen Fall kommen.

Das macht die Hochschulmathematik anspruchsvoller als die Schulmathematik. Sie müssen stärker hinterfragen, ob Ihre Umformungen für das Beispiel, an dem Sie arbeiten, auch möglich sind. Das ist nicht immer leicht, aber auch dies können Sie trainieren, indem Sie sich die Fragen am Ende von Abschn. 1.2 stellen.

1.5 Rechenschritte aufschreiben

Wenn Sie die Inhaltsangabe zu diesem Buch gelesen haben, ist Ihnen vielleicht aufgefallen, dass sich ein ganzes Kapitel damit beschäftigt, wie man Mathematik aufschreibt. Ich möchte deshalb hier gar nicht viel darüber sagen, aber doch einige Anmerkungen machen, die besonders wichtig sind, wenn wir über Rechenverfahren sprechen.

Es gibt vermutlich einige Verfahren, bei denen Sie alles im Kopf behalten und nur wenig aufschreiben müssen, doch auch andere, bei denen sich schnell einmal ein Fehler einschleicht, sodass es lohnend ist, Schritt für Schritt vorzugehen und alles auch so niederzuschreiben. Wenn Sie bislang gelernt (und verinnerlicht) haben, *immer* alles aufzuschreiben, ist es jetzt an der Zeit, sich davon zu verabschieden. Eines der großartigen Dinge an Mathematik ist, dass sie sich als sehr verdichtbar erweist: Wir können komplexe Ideen verstehen, indem wir sie im Geiste in ihre einzelnen Bestandteile zerlegen, die für sich selbst stehen. Wenn Sie zum Beispiel Klammern ausmultiplizieren, haben Sie vermutlich ursprünglich gelernt, alles auszuschreiben, etwa so:

$$(x+2)(x-5) = x^2 + 2x - 5x + 2(-5) = x^2 - 3x - 10.$$

Aber weil Sie vermutlich einiges davon im Kopf rechnen können, schreiben Sie nur:

$$(x+2)(x-5) = x^2 - 3x - 10.$$

Dadurch können Sie Rechnungen viel schneller durchführen und sich besser auf das Problem konzentrieren, das Sie eigentlich lösen wollen.

In der Schule lag es vielleicht in Ihrem eigenen Interesse, ein bestimmtes Arbeitspensum hinzuschreiben, um Ihren Lehrer zufriedenzustellen, aber Sie können jetzt selbst überlegen, was Sie wirklich benötigen. An der Universität werden Sie nun feststellen, dass Dozenten davon ausgehen, dass Routinerechnungen beherrscht werden; sie lassen Schritte aus und erwarten, dass Sie diese selbst einfügen können. Wenn wir als Beispiel noch einmal zur Integration durch Substitution zurückkehren, bin ich froh, nur Folgendes hinschreiben zu müssen:

$$\int x\cos(x^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin(x^2) + c.$$

Ich kann die Integration sehr schnell im Kopf durchführen, weil ich weiß, dass ich nach etwas suche, was nach dem Differenzieren $x\cos(x^2)$ ergibt. Ich weiß schon, dass die Antwort etwas wie $\sin(x^2)$ sein muss, also schreibe ich das schon einmal hin. Ich erkenne, dass ich, wenn ich $\sin(x^2)$ differenziere, $2x\cos(x^2)$ erhalte, also muss ich $\sin(x^2)$ noch durch 2 teilen, damit sich das ergibt, was ich brauche. Wenn Sie das so noch nicht gemacht haben, sollten Sie einen ähnlichen Gedankengang einmal für das Integral $\int xe^{x^2}\mathrm{d}x$ versuchen, das in diesem Kapitel bereits verwendet wurde.

Jede Rechnung kann vollständig mit der Substitution $u = x^2$ ausgeschrieben werden (wenn Sie unsicher sind, dann versuchen Sie es und werden feststellen, dass Sie mehr oder weniger die gleichen Überlegungen anstellen werden wie ich gerade). In einer Vorlesung für Studienanfänger erwarte ich vielleicht noch, dass ein Student alles ausführlich aufschreibt, aber in höheren Semestern gehe ich davon aus, dass Studenten das im Kopf erledigen. Ich hätte vermutlich auch nichts dagegen, wenn sie einfach nur die Antwort hinschreiben würden. Der Unterschied liegt darin, dass sie diese Berechnungen als Teil eines größeren Problems ausführen, und ihre Antworten darauf sind prägnanter, wenn nicht jedes kleinste Detail aufgeführt wird. Wenn ich diese Berechnung also in einer Vorlesung benötige, werde ich nur die Antwort hinschreiben und erwarten, dass die Studenten selbst in der Lage sind zu prüfen, ob sie richtig ist. Wenn Sie sich erst einmal daran gewöhnt haben, dass Mathematik kompakt dargestellt wird, werden Sie damit keine Probleme mehr haben.

Ich möchte allerdings betonen, dass Ihre Lehrer nichts falsch gemacht haben mit der Vorgabe, Ihre gesamte Rechnung niederzuschreiben. Denn das hat sicherlich auch Vorteile: Es ermöglicht, dass Sie Ihre Arbeit auf Fehler prüfen und sich leichter daran erinnern können, welche Gedankengänge Sie entwickelt haben, falls später noch einmal auf dieses Problem zurückgegriffen werden muss. Aber auch die kompakte Schreibweise ist wichtig, womit gezeigt wird, dass Sie sich Gedanken darüber gemacht haben, wie Sie einem Leser Ihre Argumentationsweise insgesamt verständlich machen. Wir werden auf diese Überlegungen im Laufe dieses Buches immer wieder zurückkommen.

1.6 Fehlersuche

Wenn Sie in der Mathematik bereits so weit gekommen sind, haben Sie vermutlich auch schon zahlreiche mathematische Fehler gemacht. Manche davon waren unbedeutend, etwa eine Konstante übersehen oder unabsichtlich „+" statt „−" geschrieben zu haben. Einige davon werden Sie sofort bemerkt haben, andere dagegen werden länger für Verwirrung gesorgt haben. Bei meinen eigenen Abiturprüfungen war ich zum Beispiel vollkommen durcheinander, weil bei einer einfachen Rechnung etwas Falsches herausgekommen ist. Mein Lehrer hat mich erst einige Tage lang suchen lassen, dann hat er gelacht (nicht unfreundlich) und mich darauf hingewiesen, dass ich an einer Stelle addiert statt multipliziert hatte. Das Gefühl, ein bisschen dämlich gewesen zu sein, wurde deutlich durch die Erleichterung übertroffen, dass ich nicht über Nacht alles verlernt oder das ganze Problem grundlegend falsch verstanden hatte. Jedenfalls werden Sie vermutlich Ihre Arbeit gewohnheitsmäßig nach kleineren Rechenfehlern prüfen, und das ist gut so.

Doch manche Fehler sind schwerwiegender. In unserem Problem der Faktorisierung einer quadratischen Gleichung zeigt der geschilderte Fehler, dass die Person nicht verstanden hat, warum die Methode funktioniert. Sie sollten also die Augen nach solchen Problemen offen halten und dann prüfen, ob jeder Schritt wirklich so funktioniert, wie Sie zu wissen glauben. Dabei kann es natürlich passieren, dass Sie nicht die erwartete Antwort erhalten. In diesem Fall sollten Sie sich dann nicht scheuen, mit jemandem darüber zu sprechen. Viele Fragen, mit denen sich Studenten an mich wenden, klingen nach: „Ich weiß, dass das nicht funktioniert, aber ich finde den Fehler in meinem Ansatz nicht." Der Lernzugewinn bei einer anschließenden gemeinsamen Untersuchung ist dann oft groß, weil die Studenten dann feststellen, dass sie unbewusst mit Annahmen arbeiten. Wenn man sich eine Eigenschaft und ein Prinzip klarer bewusst gemacht hat, wird man sie/es später in anderen Situationen wiedererkennen und bei weiteren Überlegungen aktiv mit einbeziehen.

Andere Fehler wiederum sind zwar nicht schwerwiegend, aber für Dozenten ärgerlich, weil sie Schlampigkeit vermuten lassen. Etwa wenn Studenten Lösungen abgeben, bei denen leicht zu erkennen ist, dass sie nicht richtig sein können. Wenn die Lösung eine Zahl ist, könnte sie beispielsweise viel zu groß oder viel zu klein sein. Oft passieren derartige Fehler durch den Taschenrechner. Doch wir alle wissen: Elektronische Geräte sind zwar schnell, aber auch dumm. Sie geben liefern immer eine Antwort, ganz unabhängig davon, ob die Frage richtig gestellt wurde. Wenn Sie die falsche Taste drücken oder nicht wissen, wie Ihr Taschenrechner mit einer bestimmten Art von Eingabe umgeht, oder wenn Sie in Grad statt Radiant rechnen, wird Ihr Taschenrechner das nicht erkennen können. Er wird Ihnen dennoch pflichtbewusst auf die Frage antworten, von der er ausgeht, dass Sie sie gestellt haben. Und nur Sie können entscheiden, ob das Ergebnis auch plausibel ist.

Aber so etwas kann auch in anderer Hinsicht passieren. Manchmal geben Studenten eine Antwort, die *nicht einmal die richtige Art von mathematischem Objekt* beinhaltet. So nennen sie eine Zahl, wenn ein Vektor die Antwort sein sollte, oder eine Funktion, wenn die Antwort eine Zahl ist usw. Das ist schnell mal der Fall: etwa wenn Studenten nach der Lösung von $f'(2)$ gefragt werden und dann $f'(x)$ (eine Funktion) nennen, aber vergessen, in der endgültigen Antwort 2 für x einzusetzen, und so keine Zahl erhalten. Oder es passiert auf komplexere, was oft Anzeichen dafür ist, dass ein Student die Frage nicht wirklich verstanden, sondern nur ein Verfahren kopiert hat, welches vordergründig Ähnlichkeiten aufweist, aber eben nicht das Erforderliche leistet. Ich werde in Kap. 2 noch einmal darauf zurückkommen, wie man diese Art von Fehlern erkennt und wie man sie vermeidet.

Bis dahin gebe ich Ihnen aber schon hier einen kleinen Rat, vor allem für Klausuren: Wenn Sie eine Rechnung durchgeführt haben und wissen, dass Ihr Ergebnis falsch sein muss, dann fügen Sie eine kurze Bemerkung an, um darauf hinzuweisen (etwa: „Muss falsch sein, weil es zu klein ist.“). Die Person, die Ihre Arbeit korrigiert, erkennt so zumindest, dass Sie über die Frage nachgedacht haben. Natürlich ist es besser, wenn Sie angeben können, wo der Fehler passiert ist, und noch besser, wenn Sie ihn ausbessern. Doch wenn das in der zur Verfügung stehenden Zeit nicht mehr machbar ist, können Sie auf diese Weise zumindest zeigen, dass Sie wissen, wie eine vernünftige Antwort hätte aussehen müssen.

1.7 Mathematik besteht nicht nur aus Rechnen

In diesem Kapitel ging es vor allem um Rechenverfahren. Aber ich möchte noch einmal betonen: Das Wissen darum, wie man ein Verfahren anwendet, ist nur eine Seite für das umfassende Verständnis von Mathematik. Die Meisten wissen um den Unterschied zwischen dem mechanischen Lernen, ein Verfahren anzuwenden, und dem Verständnis dafür, warum ein Verfahren funktioniert. Das mechanische Rechnen hat einige Vorteile: Es ist im Allgemeinen schnell und ziemlich unkompliziert. Doch es birgt auch Nachteile: Wenn Sie lernen, Verfahren ohne Reflexion anzuwenden, werden Sie diese schneller vergessen, falsch anwenden oder vermischen. Die Entwicklung eines sorgfältigen Verständnisses dafür, warum etwas funktioniert, ist im Allgemeinen schwieriger und zeitaufwendiger, doch Sie werden es nicht mehr so schnell vergessen und es hilft Ihnen besser dabei, flexibel und genau nachzudenken.

Welche Erfahrungen Sie auch immer bislang gemacht haben, es gibt sicherlich einiges, das Sie sehr gut verstanden haben, und anderes, bei dem Sie nur die mathematischen Verfahren kennen. Zum Beispiel können Sie wahrscheinlich erklären, warum wir das Vorzeichen ändern, wenn wir 5 auf die linke Seite bringen, um die Gleichung $x + 3 = 2x - 5$ zu lösen. Sie könnten sagen: „Was wir in Wirklichkeit tun, ist auf beiden Seiten 5 zu addieren. Damit sind sie immer noch gleich, weil die beiden Seiten vorher gleich waren und wir auf beiden Seiten das Gleiche getan haben." Dies zeigt ein gutes Verständnis, weil Sie nicht nur wissen, *dass* wir bestimmte Dinge tun, sondern auch, *warum* das vernünftig ist. Sie sind in der Lage, eine wirklich mathematische Erklärung zu liefern, und das ist weit besser als zu sagen: „So steht es im Buch", oder: „So hat es mir mein Lehrer beigebracht."

Es ist unsinnig, ein „vollständiges" mathematisches Verständnis fordern zu wollen, denn es gibt derart viele Verbindungen zwischen verschiedensten Gebieten der Mathematik, dass heutzutage kaum jemand noch mit allem vertraut sein kann (vor allem nicht in einer Welt, wo ständig neue Mathematik entwickelt wird, vgl. Kap. 14). Wenn Sie zum Beispiel die Diskussion über die Definition der Ableitung nachvollzogen haben, sollten Sie erklären können, warum die Ableitung von $f(x) = x^3$ gleich $f'(x) = 3x^2$ ist. Das wäre für sich genommen sehr gut, aber diese Erklärung sagt noch nichts darüber, wie die Graphen der Funktionen mit diesem Ergebnis zusammenhängen oder warum die Ableitung von $f(x) = x^n$ gleich $f'(x) = nx^{n-1}$ ist. Sie sagt uns auch nicht, warum Mathematiker vor allem diese Definition benutzen. (Vielleicht wissen Sie warum. Wenn dem nicht so ist, dann denken Sie darüber nach, lesen Sie es irgendwo nach bzw. halten Sie danach im Laufe Ihres ersten Studienjahrs Ausschau.)

Tatsächlich sollten Sie Ihr Verständnis nicht überschätzen, selbst bei scheinbar unkomplizierter Mathematik. Es gibt vielleicht Dinge, die Sie seit Langem kennen und sicher anwenden, aber dann doch nicht so gut erklären können, wie Sie glauben. Sie wissen zum Beispiel, dass man bei der Multiplikation zwei negative Zahlen multipliziert, eine positive erhält. Aber wissen Sie wirklich warum? Könnten Sie es so erklären, dass Sie einen skeptischen Dreizehnjährigen damit überzeugen? Weitere Beispiele: Sie wissen, dass $5^0 = 1$ ist, aber warum ist das so? Sie wissen, dass man nicht durch null teilen darf, aber warum? Warum können wir nicht einfach sagen: $1/0 = \infty$? Wenn Sie versucht sind, auch nur eine dieser Fragen mit „Das ist eben so!" zu beantworten, müssen Sie sich darüber klarwerden, dass es für all das gute Gründe gibt, die Sie eben nur noch nicht kennen. Vielleicht wollen Sie dann in der weiterführenden Literatur nachlesen, um herauszufinden, wie professionelle Mathematiker auf diese Fragen antworten.

In der Zwischenzeit wird es andere neue Dinge geben, die Sie nur verstehen, weil Sie das Rechenverfahren kennen. Vielleicht können Sie die quadratische Formel anwenden, würden sich aber schwertun zu erklären, warum sie funktioniert (wir werden uns das in Kap. 5 ansehen). Vielleicht sind Sie sehr gut beim partiellen Integrieren, haben aber nicht die geringste Idee, woher die Formel stammt. Vielleicht können Sie mit den Formeln für eine einfache harmonische Schwingung umgehen, wissen aber nicht wirklich, was die Symbole bedeuten oder warum es vernünftig ist, besagte Gleichungen zu verwenden, um diese Art von Bewegung zu beschreiben. Eines der großartigen Dinge an der Universität ist, dass Sie Erklärungen für viele dieser Formeln und Beziehungen erwarten dürfen.

Tatsächlich werden Ihnen viele Mathematiker sagen, dass es schlecht ist, mechanische Rechenverfahren zu lernen, und Sie immer nach einem tieferen Verständnis streben sollten. Eine gut gemeinte Forderung, aber auch ein wenig unrealistisch. Anfangs wird es viele Situationen geben, in denen ein gutes Verständnis, realistisch gesehen, nicht zugänglich ist. Die Grenzwerte haben Sie vielleicht schon im Mathematik-Leistungskurs gelernt, sie wurden aber eher informell behandelt. An der Universität werden Sie die formelle Definition eines Grenzwertes lernen, außerdem erfahren, wie man sie anwendet und wie man damit verschiedene Sätze beweist. Doch die Definition ist logisch komplex und wenn es Ihnen wie den meisten Menschen geht, werden Sie sich anstrengen müssen, um den Umgang damit zu lernen. Wenn das dann erst einmal geschafft ist, werden Sie feststellen, dass sich Ihr Verständnis wesentlich verbessert hat … und dass Ihre Lehrer auf der Schule recht daran taten, sie nicht eher einzuführen.

Die Forderung erscheint auch deshalb unrealistisch, weil es sehr nützlich ist, automatisierte Rechenverfahren anwenden zu können. Typische Beispiele aus dem echten Leben sind das Autofahren oder die Bedienung eines Computers. Vermutlich beherrschen Sie mindestens eines davon, haben aber keine Ahnung, wie ein Verbrennungsmotor genau funktioniert oder ein Computer Ihre Eingabe an der Tastatur in Buchstaben umwandelt, die dann auf dem Bildschirm erscheinen. Sie könnten dieses Wissen erlangen, werden aber ohne dieses vermutlich genauso gut durchs Leben kommen. In der Mathematik gibt es viele analoge Situationen. Manchmal lernen wir aus ganz pragmatischen Gründen nichts über gewisse Details – zum Beispiel weil wir nicht genug Zeit haben. Manchmal lernen wir nichts darüber, weil die Hintergründe sehr kniffig sind und deren Erarbeitung uns davon abhalten würde, zu verstehen, was ein Verfahren leisten kann. Es wird also auch an der Universität derartige Situationen geben, dennoch werden Sie aber nun beginnen, mehr und mehr von der Theorie zu verstehen, die dem mathematischen Wissen zugrunde liegt.

Manchmal wird ein Student auch erst gar kein tiefes mathematisches Verständnis entwickeln wollen, da es für jene Aufgaben, die er zu erledigen hat, nicht vonnöten ist. So sind etwa Studenten der Ingenieurswissenschaften bekannt dafür, ungeduldig zu werden, wenn Mathematikdozenten Ihnen zu erklären versuchen, warum ein Verfahren funktioniert, und fordern dann: „Sagen Sie uns einfach, was wir tun sollen!“ Wenn Sie eher praktisch orientiert sind, werden Sie vermutlich geneigt sein, ähnlich zu reagieren, zumindest in den Vorlesungen der reinen Mathematik. In der angewandten Mathematik (Mechanik, Statistik, Entscheidungstheorie usw.) liegt der Schwerpunkt tendenziell mehr auf der Problemlösung als auf der Entwicklung abstrakter Theorien. Doch selbst in diesen Fächern werden Sie feststellen, dass es für Mathematiker sehr wichtig ist, zu verstehen, warum eine Berechnungsmethode vernünftig ist. Ein Grund dafür ist, dass Sie dadurch Fehler wie die bereits besprochenen vermeiden können, ein anderer, dass Sie so flexibler bei der Anpassung eines Verfahrens auf ein neues Problem sind, und schließlich auch, weil es einfach Spaß macht.

Ich bin unbedingt der Meinung, dass Sie sich, wann immer möglich, um ein tiefes Verständnis bemühen sollten, warum mathematische Verfahren funktionieren und warum mathematische Konzepte so miteinander zusammenhängen, wie es der Fall ist. Ein derartiges Verständnis ist leistungsfähiger und einprägsamer. Seine Erarbeitung ist harte Arbeit, aber zugleich sehr befriedigend. Trotzdem erwarte ich, dass Sie manches nur durch Rechenverfahren lernen werden, entweder weil es der einzig zugänglich Weg ist oder weil Sie nicht wirklich an einem bestimmten Fach interessiert sind, aber die Klausur bestehen wollen. Meiner Ansicht nach ist das in Ordnung, solange Sie sich darüber im Klaren sind, dass damit die Anfälligkeit für Fehler wächst. Wie viele Vorschläge in diesem Buch überlasse ich auch Ihr persönliches Lernverhalten ganz Ihrer eigenen Verantwortung.

Fazit

- Bevor Sie zu studieren beginnen, sollten Sie Ihre Kenntnisse in Bezug auf Standard-Rechenverfahren auffrischen, denn Dozenten gehen davon aus, dass Sie diese flüssig beherrschen.
- An der Universität werden Sie selbstverantwortlich entscheiden müssen, welche Verfahren Sie anwenden. Vielleicht ist es eine gute Idee, dies zu üben, indem Sie Übungen aus Quellen bearbeiten, in denen Ihnen nicht gesagt wird, was Sie genau tun sollen.
- Er wird auch erwartet, dass Sie in der Lage sind, Verfahren auf eine vernünftige Art und Weise anzupassen und zu bestimmen, wie Sätze und Definitionen angewendet werden können, ohne viele Beispielrechnungen gesehen zu haben.

- Es werden Ihnen vielleicht nur wenige Übungsaufgaben gestellt; um mehr zu üben, müssen Sie sich vielleicht eigene überlegen.
- Sie werden in Mathematik an der Universität nicht weit damit kommen, Probleme zu lösen, indem Sie etwas suchen, was ähnlich aussieht, und es dann kopieren. Sie werden mehr nachdenken müssen.
- Sie müssen Rechnungen nicht immer voll ausschreiben. Ihre Dozenten werden zuweilen Schritte überspringen und Sie sollten das Gleiche tun, wenn es die Lösung eines Problems deutlicher macht.
- Versuchen Sie Taschenrechnerfehler zu vermeiden, indem Sie sich fragen, ob die Antwort auf eine bestimmte Fragestellung plausibel ist. Überlegen Sie auch, welche Art von Objekt (z. B. eine Zahl oder eine Funktion) als Antwort auf eine Frage zu erwarten ist.
- In der Mathematik geht es nicht nur um Rechenverfahren. Natürlich ist es wichtig, diese gut zu beherrschen, doch in vielen Fällen sollten Sie nach einem tieferen Verständnis darüber streben, warum ein Verfahren funktioniert.

Weiterführende Literatur

Für die Leistungskurse in der Oberstufe gibt es je nach Bundesland verschiedene Lehrbücher mit unzähligen Übungsaufgaben am Ende jedes Kapitels.

Anleitungen, um effektiver beim Lösen mathematischer Probleme zu werden, sind:

- Mason, J., Burton, L. & Stacey, K: *Mathematisch denken, Mathematik ist keine Hexerei*. Oldenbourg, München (2012)
- Pólya, G.: *Vom Lösen mathematischer Aufgaben: Einsicht und Entdeckung, Lernen und Lehre*. Birkhäuser, Basel (2013)

Einblicke, wie Mathematiker auf eine komplizierte Art über Zahlen und Rechnen nachdenken, erhalten Sie bei:

- Gowers, T.: *Mathematics: A Very Short Introduction*. Oxford University Press, Oxford (2000)

Wenn Sie tiefer über Schulmathematik nachdenken wollen, können Sie Folgendes lesen:

- Usiskin, Z., Peressini, A., Marchisotto, E. A. & Stanley, D.: *Mathematics for High School Teachers: An Advanced Perspective*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ (2003)

Mehr über das Verständnis mathematischer Begriffe von Kindern finden Sie in:

- Ryan, J. & Williams, J.: *Children's Mathematics 4–15: Learning from Errors and Misconceptions*. Open University Press, Maidenhead (2007)

http://www.springer.com/978-3-662-50384-3

Wie man erfolgreich Mathematik studiert
Besonderheiten eines nicht-trivialen Studiengangs
Alcock, L.
2017, XVIII, 272 S. 45 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-662-50384-3