

Eine Anmerkung vorweg: Es ist sehr zu empfehlen, dass Sie sich mit *Anschauungsmaterial* versorgen. Geeignet sind kugelrunde Gegenstände jeglicher Art wie z. B. Bälle oder Äpfel. Styroporkugeln in verschiedenen Größen sind in Bastelgeschäften erhältlich; ihr großer Vorteil besteht darin, dass man darauf mit Stecknadeln Punkte markieren kann, und mit Gummis lassen sich Kreise und andere Figuren spannen. Als Darstellung der Erdkugel braucht man natürlich einen Globus: Es muss kein teures Exemplar sein; eine weniger präzise, aber sehr preiswerte und zudem handliche Alternative ist ein aufblasbarer Wasserball mit aufgedrucktem Gradnetz und Kartenbild (vgl. Abb. 6.1).

Die grundlegende Eigenschaft einer Kugel mit *Mittelpunkt* M und *Radius* r ist im Prinzip die gleiche wie beim Kreis in der Ebene:

- Alle Punkte der Kugeloberfläche haben den gleichen Abstand von M , nämlich r .
Liegt der Punkt A $\left\{ \begin{array}{l} \text{innerhalb} \\ \text{außerhalb} \end{array} \right\}$ der Kugel, dann ist $\left\{ \begin{array}{l} \overline{AM} < r \\ \overline{AM} > r \end{array} \right\}$.

Die Kugel hat viele weitere schöne Eigenschaften, von denen hier nur eine erwähnt werden soll:

- Unter allen Körpern mit einem festen Volumen ist sie derjenige mit der kleinsten Oberfläche.

(Der Beweis ist nicht ganz einfach; wir werden das hier nicht weiter verfolgen.) Diese Eigenschaft ist verantwortlich dafür, dass Seifenblasen kugelförmig sind.

Zur Erinnerung: Das Volumen einer Kugel mit Radius r ist $V = \frac{4\pi}{3}r^3$, ihre Oberfläche beträgt $O = 4\pi r^2$.

Es sei A ein Punkt auf der Kugelfläche. Die Strecke AM ist der zugehörige *Radius* (dieses Wort hat somit eine doppelte Bedeutung: einerseits eine solche Strecke, andererseits deren Länge, die für alle A gleich groß ist). Die Gerade AM schneidet die Kugelfläche ein zweites Mal; der zweite Schnittpunkt heißt *Gegenpunkt* zu A und wird mit \bar{A} bezeichnet. Musterbeispiel auf dem Globus: Der Südpol ist der Gegenpunkt zum Nordpol und umgekehrt. Die Strecke $A\bar{A}$ ist der *Durchmesser* zu A , seine Länge beträgt $2r$.

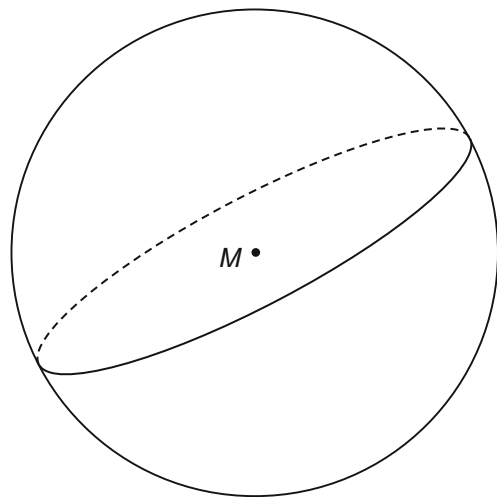
2.1 Groß- und Kleinkreise

Schnittfiguren von Ebenen mit einer Kugel

- 1. Fall** Der Kugelmittelpunkt M liegt in der Schnittebene (vgl. Abb. 2.1). Dann ist die Schnittfigur ein Kreis mit Radius r . Ein solcher Kreis heißt *Großkreis*. Musterbeispiele: Der Äquator sowie alle Längengrade (Meridiane) sind Großkreise auf der Erdkugel.
- 2. Fall** M liegt nicht in der Ebene (vgl. Abb. 2.2a). Dann hat M einen gewissen Abstand $d > 0$ von der Ebene; wir gehen davon aus, dass $d < r$ ist, sonst gibt es gar keine Schnittlinie. Fällt man von M aus das Lot auf die Ebene, mit Fußpunkt M' , dann ist $\overline{MM'} = d$ und für alle Punkte P auf der Schnittlinie sind die Dreiecke MPM' kongruent (vgl. Abb. 2.2b; die Schnittebene steht senkrecht zur Zeichenebene). Also ergibt sich ein Kreis mit Mittelpunkt M' und Radius $r' = \sqrt{r^2 - d^2} < r$. Ein solcher Kreis heißt *Kleinkreis*.

Musterbeispiele: Auf dem Globus sind alle Breitenkreise Kleinkreise (mit einer einzigen Ausnahme; welche ist es?).

Abb. 2.1 Großkreis



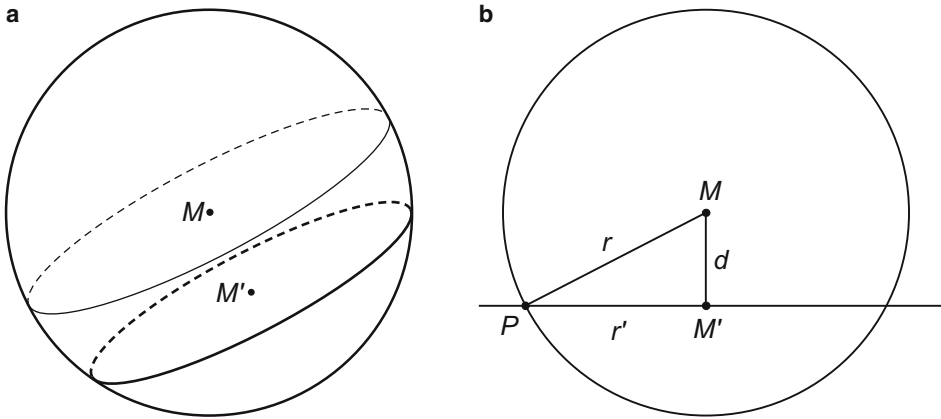
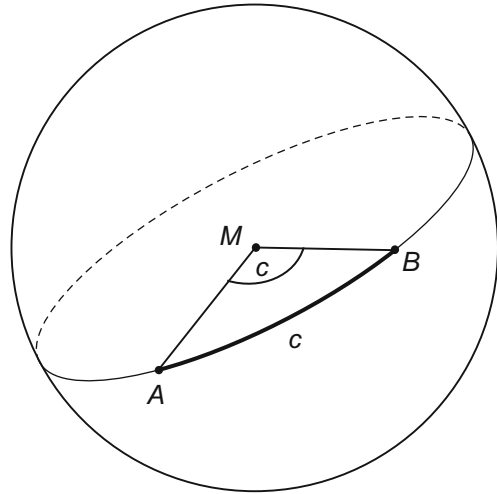


Abb. 2.2 Kleinkreis (a) und Radius eines Kleinkreises (b)

Abb. 2.3 Großkreis durch zwei Kugelpunkte



Großkreise als „Kugelgeraden“

Durch je zwei verschiedene Kugelpunkte A, B , die nicht Gegenpunkte voneinander sind, d. h. $B \neq \bar{A}$, geht genau ein Großkreis (vgl. Abb. 2.3).

Begründung: Die Punkte A, B, M liegen nicht auf einer Geraden, also bestimmen sie eindeutig eine Ebene. Diese Ebene schneidet die Kugel in dem Großkreis zu A und B .

In der ebenen Geometrie gilt: Durch zwei verschiedene Punkte kann man genau eine Gerade legen. Wegen dieser Analogie bezeichnet man die Großkreise auch als *Kugelgeraden*.

Die gegebenen Punkte A und B teilen den Großkreis in zwei Bögen, einer ist kleiner als 180° und der andere größer als 180° . Der *kleinere* von ihnen heißt *Großkreisbogen* $c = \widehat{AB}$; analog zu Strecken in der ebenen Geometrie werden Großkreisbögen zumeist

Tab. 2.1 Maße von Großkreisbögen auf der Erdkugel

Winkelmaß	Längenmaß
Vollkreis 360°	Erdumfang 40.000 km
1°	111,1 km
1' = $\frac{1}{60}^\circ$	1,852 km = 1 Seemeile
9°	1000 km

mit Kleinbuchstaben bezeichnet. Das Maß des Bogens wird durch den Mittelpunktswinkel bestimmt (vgl. Abb. 2.3):

$$c = \widehat{AB} = \angle AMB$$

In der Regel verwenden wir das Gradmaß für diese Winkel, somit gilt $\widehat{AB} < 180^\circ$.

Falls die *Bogenlänge* in üblichen Längeneinheiten gesucht ist, muss man den Winkel mithilfe des Radius oder des Umfangs der Kugel in das Längenmaß umrechnen, z. B. bei der Erdkugel wie in Tab. 2.1 angegeben (für den Erdumfang verwenden wir im Allgemeinen den gerundeten Wert 40.000 km, wenn es nicht auf hohe Genauigkeit ankommt, weil er einfach zu merken ist).

Die Messung eines Großkreisbogens in Grad ist also eine ganz natürliche Sache, und sie wird auch als Basis für die in der Nautik übliche Längeneinheit *Seemeile* genommen (auch *nautische Meile* genannt; Abkürzung sm bzw. NM).

Zwei Großkreise

- Je zwei verschiedene Großkreise schneiden einander in zwei Gegenpunkten.

Begründung (vgl. Abb. 2.4): Beide Großkreisebenen enthalten den Kugelmittelpunkt M , also schneiden sie einander in einer Geraden, die M enthält. Die Schnittpunkte dieser Geraden mit der Kugelfläche sind die Schnittpunkte der beiden Großkreise, mithin zwei Punkte, die einen Durchmesser bilden.

Musterbeispiel Erdkugel: Je zwei Längengrade schneiden einander in Nord- und Südpol.

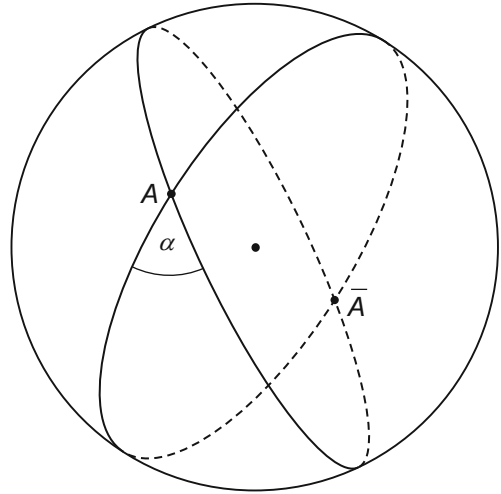
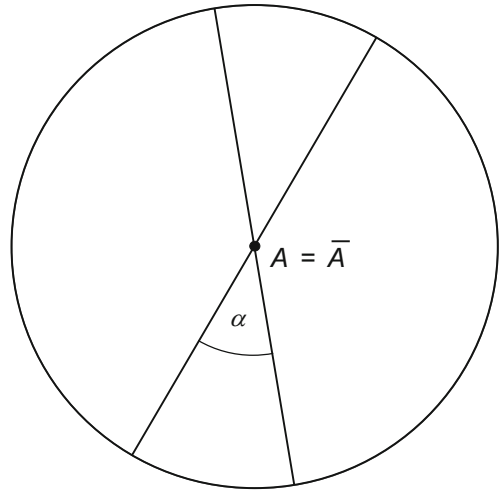
Wie oben gesagt, haben die Großkreise einiges mit den Geraden in der ebenen Geometrie gemeinsam, aber hier bekommt die Analogie einen empfindlichen Knacks:

- Es gibt keine parallelen Großkreise!

Der *Winkel zwischen zwei Großkreisen* ist der Schnittwinkel der Großkreisebenen (vgl. Abb. 2.4). Man kann ihn folgendermaßen messen:

Legt man in einem Schnittpunkt A der Großkreise eine Tangentialebene an die Kugel (senkrecht zum Durchmesser $A\bar{A}$), dann schneiden die Großkreisebenen diese Tangentialebene in den Tangenten an die Kugel, die in Richtung der Großkreise verlaufen; der Winkel zwischen diesen Tangenten ist der Winkel α zwischen den Großkreisen.

Eine andere Interpretation, die aber das Gleiche besagt: Blickt man in Richtung des Durchmessers $A\bar{A}$ auf die Kugel, dann fallen die Punkte A und \bar{A} aufeinander und man

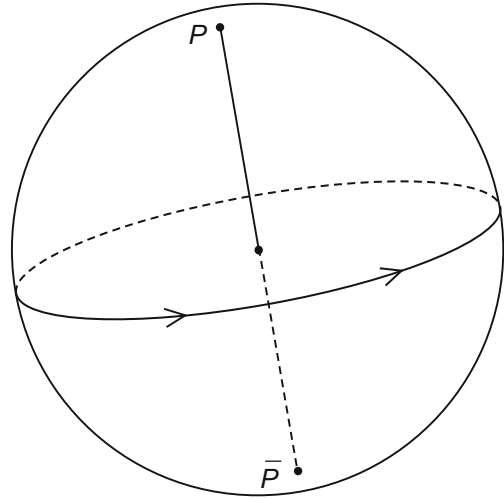
Abb. 2.4 Zwei Großkreise**Abb. 2.5** Winkel zwischen Großkreisen, Draufsicht

sieht die Kugel als Kreis mit Mittelpunkt A (vgl. Abb. 2.5); die beiden Großkreise erscheinen als Durchmesser dieses Kreises und bilden den Winkel α miteinander. Wir werden häufig Gelegenheit haben, diese Darstellung zu verwenden; eine weitere Interpretation folgt am Schluss dieses Abschnitts.

Zuordnung Großkreis \leftrightarrow Pol

Das Ziel ist, jedem Großkreis einen Punkt zuzuordnen, so wie man auf dem Globus in natürlicher Weise dem Äquator den Nordpol zuordnen kann. Diese Zuordnung soll *umkehrbar eindeutig* sein, sodass umgekehrt zu jedem Punkt auch eindeutig ein Großkreis gehört.

Abb. 2.6 Orientierter Großkreis mit Linkspol P



Am obigen Beispiel zeigt sich aber auch ein grundsätzliches Problem: Warum wählt man den Nordpol? Der Südpol ist doch genauso gut! Wie unterscheidet man eigentlich Nord- und Südpol?

Ein beliebiger Großkreis g sei gegeben. Die Gerade durch den Mittelpunkt M senkrecht zur Großkreisebene durchstößt die Kugeloberfläche in zwei Gegenpunkten. Um einen dieser beiden Punkte als *den* Pol zu g auszuwählen, versehen wir den Großkreis mit einer *Orientierung*, d. h. mit einem Pfeil (s. Abb. 2.6), und wir definieren: Der Pol P von g ist derjenige der beiden Punkte, der *links* liegt, wenn man den Kreis in Pfeilrichtung durchläuft, kurz der *Linkspol*.

(Im Prinzip ist es egal, welchen der beiden Punkte man als Pol auswählt, aber Vorsicht: Die Auswahl ist nicht einheitlich; andere Quellen wählen manchmal auch den Rechtspol.)

Wählt man die andere Orientierung (in Gegenrichtung), dann ist der Gegenpunkt \bar{P} der zugehörige Linkspol.

Musterbeispiel Globus: Wenn man den Äquator in *östlicher* Richtung orientiert, dann ist der *Nordpol* der zugehörige Linkspol.

Ist umgekehrt P ein beliebiger Punkt auf der Kugeloberfläche, dann schneidet die Ebene senkrecht zum Radius PM einen Großkreis aus. Wenn man diesen Großkreis so orientiert, dass er von P aus gesehen im *Gegenuhrzeigersinn* durchlaufen wird, dann ist P der Linkspol.

Fazit: Auf diese Art wird jedem *orientierten Großkreis* eindeutig ein Punkt als *Pol* zugeordnet und man kann wie oben jedem Punkt einen orientierten Großkreis zuordnen; diese Zuordnungen sind dann *invers* zueinander.

Wichtige Eigenschaften Es sei g ein orientierter Großkreis und P der zugehörige Pol. (Die Orientierung ist aber im Folgenden nicht sehr wichtig.)

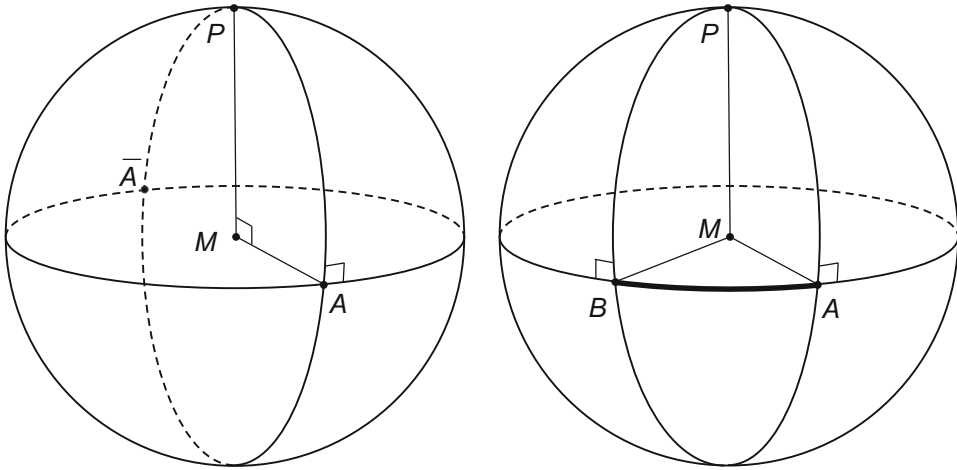


Abb. 2.7 Großkreis und dazu senkrechte Großkreise

- Jeder Großkreis durch P schneidet g senkrecht (Abb. 2.7, linkes Bild).
Denn die Gerade PM steht senkrecht auf der Ebene von g , also ist jede (Großkreis-) Ebene durch P und M senkrecht zur Ebene von g .
- Für alle Punkte A auf g ist $\widehat{PA} = 90^\circ$.
Denn PM steht senkrecht auf jeder Geraden in der Großkreisebene, also gilt immer $\angle PMA = \widehat{PA} = 90^\circ$.
- A, B seien zwei Punkte auf g ; dann gilt $\angle APB = \angle AMB = \widehat{AB}$.
Der Winkel zwischen den Großkreisen PA und PB kann also als Bogen \widehat{AB} auf dem zu P gehörenden Großkreis wiedergefunden werden (Abb. 2.7, rechtes Bild).

2.2 Kugelzweiecke und -dreiecke

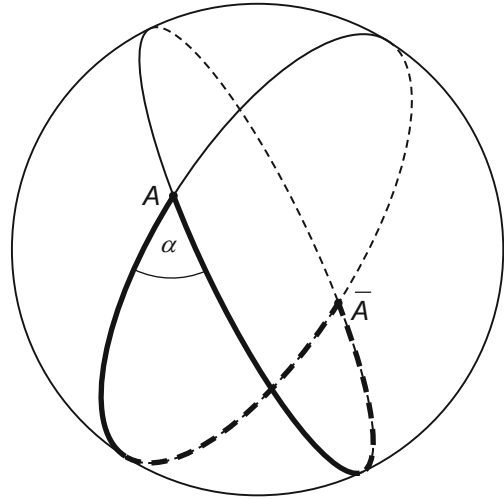
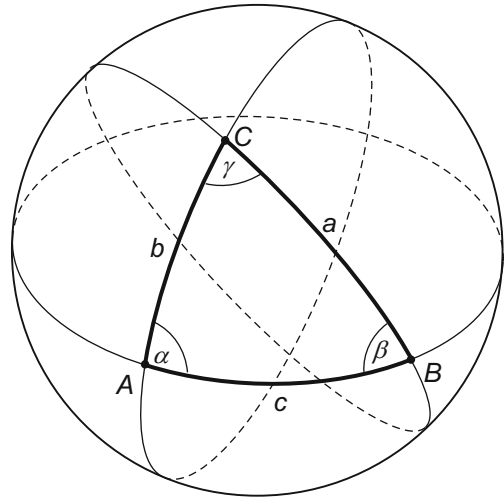
Kugelzweiecke

Ein Flächenstück auf der Kugel, das durch zwei halbe Großkreise begrenzt wird, heißt *Kugelzweieck* (Abb. 2.8).

Der Flächeninhalt eines Kugelzweiecks ist offenbar proportional zum Winkel zwischen den Großkreishälften.

Zur Halbkugel (eigentlich ein ausgeartetes Kugelzweieck) gehört der Winkel 180° , und ihre Fläche beträgt $2\pi r^2$. Das Kugelzweieck mit dem Winkel α hat demnach diesen Flächeninhalt:

$$F_\alpha = 2\pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{180^\circ} \quad (2.1)$$

Abb. 2.8 Kugelzweieck**Abb. 2.9** Kugeldreieck**Kugeldreiecke**

Es seien drei verschiedene Punkte A, B, C auf der Kugel gegeben, und zwar so, dass keine zwei von ihnen Gegenpunkte voneinander sind.

Je zwei von ihnen bestimmen eindeutig einen Großkreisbogen; so entstehen die drei *Seiten* des *Kugeldreiecks* ABC mit der üblichen Standardbezeichnung wie bei ebenen Dreiecken (Abb. 2.9):

$$\widehat{AB} = c, \quad \widehat{BC} = a, \quad \widehat{CA} = b$$

Man beachte: Die Seiten des Kugeldreiecks werden in Grad gemessen! Es gilt:

$$0^\circ < a, b, c < 180^\circ$$

Die Winkel des Kugeldreiecks sind die Winkel zwischen den Großkreisen, die einander jeweils in den Eckpunkten schneiden (eigentlich sind die Großkreis-Hälften gemeint, auf denen die Dreiecksseiten liegen):

$$\alpha = \angle BAC; \quad \beta = \angle ABC; \quad \gamma = \angle BCA$$

In der Regel betrachten wir die Winkel als nicht orientiert. Auch für die Winkel gilt:

$$0^\circ < \alpha, \beta, \gamma < 180^\circ$$

Anmerkungen:

- Ein solches Dreieck auf der Kugel nennt man auch *Euler'sches Dreieck*.
- Die drei Großkreise durch je zwei der Punkte A, B, C teilen die Kugel in acht Euler'sche Dreiecke; man erhält sie, indem man als Eckpunkte entweder A, B, C selbst oder die zugehörigen Gegenpunkte $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ wählt. Die Seiten dieser Dreiecke sind entweder a, b, c oder deren Komplemente zu 180° ; dasselbe gilt für die Winkel. Machen Sie sich dies klar, indem Sie drei Gummis wie Großkreise um eine Styroporkugel spannen!

Flächeninhalt eines Kugeldreiecks

Man betrachte die Kugelzweiecke zu α , zu β und zum Scheitelwinkel von γ , der natürlich gleich groß wie γ ist (Abb. 2.10). Jede Zweieckfläche $F_\alpha, F_\beta, F_\gamma$ kann nach der Gl. 2.1 berechnet werden.

Zusammen bilden die drei Zweiecke die obere Halbkugel, ergänzt durch das Gegendreieck $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, wobei auch noch die Fläche des Dreiecks ABC doppelt gezählt wurde (bitte schieben Sie die drei Figuren von Abb. 2.10 im Kopf übereinander!). Das Dreieck und sein Gegendreieck haben offenbar den gleichen Flächeninhalt. Also gilt:

$$2\pi r^2 + 2 \cdot F(\Delta ABC) = \text{Summe der drei Zweiecksflächen} = \frac{2\pi r^2}{180^\circ} \cdot (\alpha + \beta + \gamma)$$

$$F(\Delta ABC) = \frac{\pi r^2}{180^\circ} \cdot (\alpha + \beta + \gamma) - \pi \cdot r^2$$

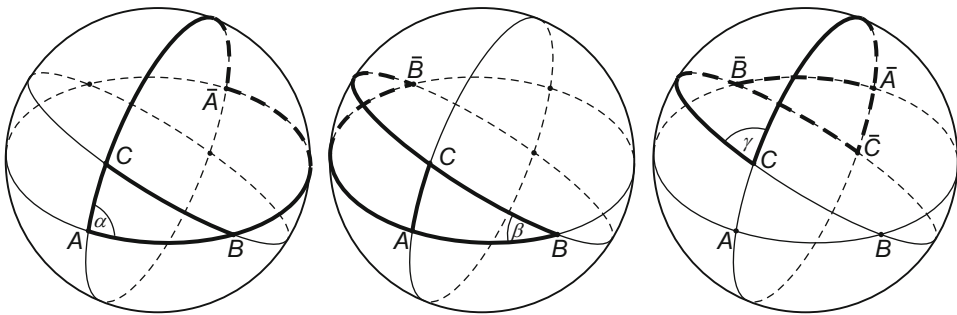
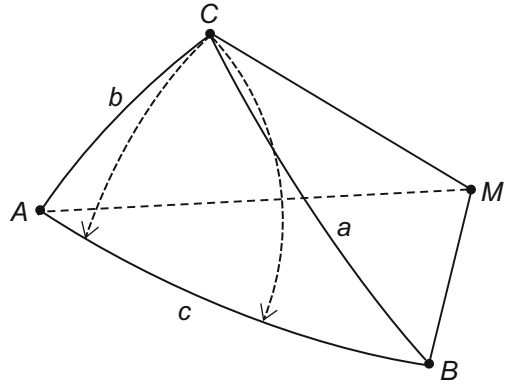


Abb. 2.10 Flächeninhalt eines Kugeldreiecks

Abb. 2.11 Dreiecksungleichung



Daraus folgt sofort die *Flächenformel für Kugeldreiecke*:

$$F(\triangle ABC) = \frac{\pi r^2}{180^\circ} \cdot (\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ) \quad (2.2)$$

Eine wichtige Folgerung ist der *Satz über die Winkelsumme*:

- Die Winkelsumme im Kugeldreieck ist größer als 180° .

Der „Überschuss“ $\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180^\circ$ heißt auch *sphärischer Exzess* des Kugeldreiecks; nach der obigen Formel ist er ein Maß für dessen Flächeninhalt. Setzt man $r = 1$ und misst die Winkel im Bogenmaß (man beachte: $\frac{\pi}{180^\circ}$ ist der Umrechnungsfaktor vom Grad- ins Bogenmaß!), dann kann man sagen: Der sphärische Exzess ist *gleich* der Fläche des Kugeldreiecks.

Dreiecksungleichung

Analog zur ebenen Geometrie gilt für jedes Kugeldreieck:

- Die Summe zweier Seiten ist größer als die dritte Seite.

Zur Begründung begnügen wir uns mit einem mehr oder weniger anschaulichen Argument.

Es genügt zu zeigen: Ist c die größte Seite des Dreiecks, dann gilt $a + b > c$ (die beiden anderen Ungleichungen $c + b > a$ und $a + c > b$ sind dann sowieso erfüllt). Man verbinde A, B, C mit dem Kugelmittelpunkt M und klappe die Kreisausschnitte AMC (= Seite b) und BMC (= Seite a) in die Ebene der Seite c . Wegen $a, b < c$ fällt der Punkt C jeweils auf \widehat{AB} und die beiden geklappten Sektoren überlappen sich. Daher muss $a + b > c$ sein.

Geometrie auf der Kugel

Alltägliche Phänomene rund um Erde und Himmel

Schuppar, B.

2017, XI, 242 S. 152 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-662-52941-6