

2.1 Abstände von Mengen

Aufgabe 99

► Hausdorff-Abstand von abgeschlossenen Mengen

Sei M ein metrischer Raum, zum Beispiel der n -dimensionale Zahlenraum \mathbb{R}^n , mit einer Norm $\|\cdot\|$ und der Metrik $|x, y| = \|x - y\|$. Sei \mathcal{G} die Menge aller nichtleeren beschränkten abgeschlossenen Teilmengen von M . Zeigen Sie: Für jedes Paar von Mengen $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$ existiert dann

$$d_0(G_1, G_2) = \sup_{x \in G_1} |x, G_2|, \quad d(G_1, G_2) = \max(d_0(G_1, G_2), d_0(G_2, G_1))$$

mit der Abkürzung¹

$$|x, G| := \inf_{y \in G} |x, y|, \quad x \in M, \quad G \in \mathcal{G}.$$

Die Funktion $d(\cdot, \cdot)$ definiert einen Abstand, den *Hausdorff-Abstand*, für die Mengen in \mathcal{G} , so dass \mathcal{G} ein metrischer Raum wird.

Lösung

Zu einer beschränkten Menge $G_2 \subset M$, G_2 nichtleer, und zu $x \in M$ existiert immer $|x, G_2|$.

Die Menge $D := \{|x, G_2| \mid x \in G_1\}$ ist nichtleer (da G_1 nichtleer ist) und nach oben beschränkt, wie man folgendermaßen sieht: Wähle $y_1 \in G_1, y_2 \in G_2$ beliebig,

¹ Bez. vorher auch: $d(x, G)$

aber fest und setze $\delta_3 := |y_1, y_2|$. Seien nun $x_1 \in G_1, x_2 \in G_2$ beliebig. Da G_1, G_2 beschränkt sind, gilt:

$$\begin{aligned} \exists \delta_1, \delta_2 \quad \forall x_1, y_1 \in G_1, x_2, y_2 \in G_2 : |x_1, y_1| &\leq \delta_1, |x_2, y_2| \leq \delta_2 \\ \Rightarrow |x_1, G_2| &\leq |x_1, x_2| \\ &\leq |x_1, y_1| + |y_1, x_2| \\ &\leq |x_1, y_1| + |y_1, y_2| + |y_2, x_2| \\ &\leq \delta_1 + \delta_3 + \delta_2 =: \delta. \end{aligned}$$

Also ist D beschränkt.

Laut Vollständigkeitsaxiom besitzt D also ein Supremum, was die Existenz von $d_0(G_1, G_2)$ zeigt. $d(G_1, G_2)$ existiert dann trivialerweise.

Es bleibt noch zu zeigen: Eigenschaften (M1) bis (M3) einer Metrik (vgl. z. B. [7], 10., oder Aufg. 2)

(M1) **Definitheit:** Trivialerweise gilt

$$d(G_1, G_2) = \max(d_0(G_1, G_2), d_0(G_2, G_1)) \geq d_0(G_1, G_2) = \underbrace{\sup_{x \in G_1} |x, G_2|}_{\geq 0} \geq 0.$$

Sei $d(G_1, G_2) = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d_0(G_1, G_2) = 0 &\quad \Rightarrow \sup_{x \in G_1} |x, G_2| = 0 \\ \Rightarrow |x, G_2| = 0 \quad \forall x \in G_1 &\quad \Rightarrow G_1 \subset G_2 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \Rightarrow d_0(G_2, G_1) = 0 &\quad \Rightarrow \sup_{x \in G_2} |x, G_1| = 0 \\ \Rightarrow |x, G_1| = 0 \quad \forall x \in G_2 &\quad \Rightarrow G_2 \subset G_1 \end{aligned}$$

Also ist $G_1 = G_2$.

Sei nun $G_1 = G_2$. Wir zeigen $d(G_1, G_2) = 0$. Es gilt $\forall x \in G_1 \subset G_2$:

$$\begin{aligned} |x, G_2| &= \inf_{y \in G_2} |x, y| = |x, x| = 0 \\ \Rightarrow d_0(G_1, G_2) = 0 = d_0(G_2, G_1) &\quad \Rightarrow d(G_1, G_2) = 0 \end{aligned}$$

(M2) **Symmetrie:** Es gilt

$$\begin{aligned} d(G_1, G_2) &= \max(\sup_{x \in G_1} |x, G_2|, \sup_{x \in G_2} |x, G_1|) \\ &= \max(\sup_{x \in G_2} |x, G_1|, \sup_{x \in G_1} |x, G_2|) = d(G_2, G_1) \end{aligned}$$

(M3) Dreiecksungleichung:

Seien $G_1, G_2, G_3 \in \mathcal{G}$ und $x_i \in G_i$, $i = 1, 2, 3$.

Dann folgt wegen $|x_1, x_2| \leq |x_1, x_3| + |x_3, x_2|$, dass

$$\begin{aligned} \inf_{x_2 \in G_2} |x_1, x_2| &\leq |x_1, x_3| + |x_3, x_2| \\ &\Rightarrow |x_1, G_2| \leq |x_1, x_3| + |x_3, G_2| \\ &\Rightarrow |x_1, G_2| \leq |x_1, G_3| + d_0(G_3, G_2) \\ &\Rightarrow |x_1, G_2| \leq \sup_{x \in G_1} |x, G_3| + d_0(G_3, G_2) \\ &\Rightarrow d_0(G_1, G_2) \leq d_0(G_1, G_3) + d_0(G_3, G_2) \end{aligned}$$

Umnummerierung ergibt:

$$d_0(G_2, G_1) \leq d_0(G_2, G_3) + d_0(G_3, G_1)$$

Insgesamt erhält man:

$$\begin{aligned} d(G_1, G_2) &= \max\{d_0(G_1, G_2), d_0(G_2, G_1)\} \\ &\leq \max\{d_0(G_1, G_3), d_0(G_3, G_1)\} + \max\{d_0(G_3, G_2), d_0(G_2, G_3)\} \\ &= d(G_1, G_3) + d(G_3, G_2) \end{aligned}$$

Aufgabe 100**► Gitterpunktmengen**

Sei $[a, b]$ ein beschränktes abgeschlossenes Intervall der reellen Zahlengeraden \mathbb{R} und für jedes h aus einer Nullfolge Λ sei G_h eine Folge von Gitterpunktmengen der Gestalt

$$G_h = \left\{ x \in [a, b] \mid x = a + jh, j = 0, \dots, N_h \right\}, \quad \frac{b-a}{h} - 1 < N_h \leq \frac{b-a}{h}.$$

Damit beweisen Sie für den Hausdorff-Abstand d (vgl. Aufg. 99) die Beziehung

$$d(G_h, [a, b]) \leq h \longrightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0, h \in \Lambda).$$

Lösung

Wähle $h \in \Lambda$ beliebig aber fest. Die Metrik in \mathbb{R} sei der übliche Abstand, $|x, y| = |x - y|$. Nach Definition gilt:

$$d(G_h, [a, b]) = \max\{d_0(G_h, [a, b]), d_0([a, b], G_h)\}$$

Da $G_h \subset [a, b]$, gilt $\forall x \in G_h$:

$$|x, [a, b]| = \inf_{y \in [a, b]} |x, y| = 0 \Rightarrow d_0(G_h, [a, b]) = 0.$$

Es genügt also, $d_0([a, b], G_h)$ abzuschätzen. Sei nun $x \in [a, b]$ beliebig.

1. Fall: $x \in [a + jh, a + (j + 1)h]$, $j \in \{0, \dots, N_h - 1\}$

$$\Rightarrow |x, G_h| = \inf_{y \in G_h} |x, y| \leq \frac{h}{2}$$

2. Fall: $x \in [a + N_h h, b]$

$$\begin{aligned} a + N_h h &> a + (b - a) - h = b - h \\ \Rightarrow b - (a + N_h h) &< b - (b - h) = h \\ \Rightarrow |x, G_h| &= \inf_{y \in G_h} |x, y| < h \end{aligned}$$

Also ist $d_0([a, b], G_h) = \sup_{x \in [a, b]} |x, G_h| \leq h$ und insgesamt folgt $d(G_h, [a, b]) \leq h$.

Aufgabe 101

► Abstand zu Teilräumen

Sei X ein normierter Raum, M ein Teilraum von X und der „Abstand“ durch

$$|x, M| = \inf_{y \in M} \|x - y\|, \quad x \in X,$$

erklärt. Beweisen Sie:

- Falls $|x, M| \neq 0$, dann gilt für $z := x/|x, M|$ die Beziehung $|z, M| = 1$.
- Falls $y \in M$, dann gilt für beliebiges $x \in X$ und $s = x - y$, dass

$$|x, M| = |s, M|.$$

Lösung

- Es gilt $\forall y \in M$:

$$\begin{aligned} \|z - y\| &= \left\| \frac{x}{|x, M|} - y \right\| \\ &= \frac{1}{|x, M|} \|x - \underbrace{|x, M| \cdot y}_{\in M}\| \\ &\geq \frac{|x, M|}{|x, M|} = 1 \end{aligned}$$

Übergang zum Infimum auf der linken Seite liefert $|z, M| \geq 1$. Weiter ist für beliebiges $y \in M$

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= |x, M| \cdot \left\| \frac{x}{|x, M|} - \frac{y}{|x, M|} \right\| \\ &= |x, M| \cdot \underbrace{\left\| z - \frac{y}{|x, M|} \right\|}_{\in M} \\ &\geq |x, M| \cdot |z, M| \\ \stackrel{\inf}{\Rightarrow} |x, M| &\geq |x, M| \cdot |z, M| \Rightarrow 1 \geq |z, M| \end{aligned}$$

Also folgt insgesamt $|z, M| = 1$.

b) Es gilt $\forall t \in M, \forall x \in X, \forall y \in M$:

$$\begin{aligned} \|x - t\| &= \|x - y + y - t\| \\ &= \|s - \underbrace{(t - y)}_{\in M}\| \geq |s, M|. \end{aligned}$$

Übergang zum Infimum auf der linken Seite liefert $|x, M| \geq |s, M|$. Weiter gilt:

$$\begin{aligned} \|s - t\| &= \|s + y - (y + t)\| \\ &= \|x - \underbrace{(y + t)}_{\in M}\| \geq |x, M|. \end{aligned}$$

Übergang zum Infimum liefert $|s, M| \geq |x, M|$. Also folgt insgesamt $|x, M| = |s, M|$.

2.2 Banach- und Hilberträume

Aufgabe 102

► Abgeschlossene Teilräume von Banachräumen

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, Z ein linearer Teilraum von X . Zeigen Sie: Z ist Banachraum d. u. n. d. wenn Z abgeschlossen ist.

Lösung

Es reicht offenbar, zu zeigen:

$$Z \text{ vollständig} \iff Z \text{ abgeschlossen}$$

„ \implies “: Sei Z vollständig, d. h. jede Cauchy-Folge in Z konvergiert gegen ein Element aus Z . Um die Abgeschlossenheit von Z zu zeigen, beweisen wir $\overline{Z} \subset Z$. Für beliebiges $\bar{z} \in \overline{Z}$ folgt:

$$\begin{aligned} \inf_{z \in Z} \|\bar{z} - z\| = 0 &\implies \exists z_n \in Z, n \in \mathbb{N} : z_n \rightarrow \bar{z} \quad (n \rightarrow \infty) \\ &\implies z_n \text{ Cauchy-Folge in } Z \\ &\implies \exists z_1 \in Z : z_n \rightarrow z_1 \quad (n \rightarrow \infty) \\ &\implies \bar{z} = z_1 \in Z \text{ (da Limites eindeutig sind)} \end{aligned}$$

„ \impliedby “: Sei jetzt Z abgeschlossen, d. h. $\overline{Z} = Z$. Zu zeigen ist die Vollständigkeit von Z , also die Konvergenz einer beliebigen Cauchy-Folge in Z gegen ein Element aus Z . Sei also $z_n \in Z, n \in \mathbb{N}$ eine solche Cauchy-Folge. Da die Folge der z_n auch in X eine Cauchy-Folge bildet und X ein Banachraum ist, gilt:

$$\begin{aligned} \exists \bar{z} \in X : z_n \rightarrow \bar{z} \quad (n \rightarrow \infty) &\implies \inf_{z \in Z} \|\bar{z} - z\| = 0 \\ &\implies \bar{z} \in \overline{Z} = Z \implies \text{Beh.} \end{aligned}$$

Aufgabe 103

► Normen in ℓ^p

Sei

$$\ell^p := \left\{ \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p < \infty \right\}, \quad 1 \leq p < \infty \quad (\text{vgl. Aufg. 36})$$

und

$$c_0 := \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, a_n \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)\} \quad (\text{vgl. Aufg. 35}).$$

Zeigen Sie:

a) Für $1 \leq p \leq q < \infty$ gilt die Inklusion $\ell^p \subset \ell^q$, genauer gilt

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p \quad \forall x \in \ell^p.$$

(Hinweis: Behandeln Sie zunächst den Fall $\|x\|_p = 1$!)

b) $\bigcup_{p < \infty} \ell^p \subset c_0$, und diese Inklusion ist echt.

Bemerkung: Für $p = 2$ ist ℓ^p ein Hilbertraum (vgl. Aufg. 36 zur Vollständigkeit) mit Skalarprodukt $(x, y)_2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \overline{y_n}$.

Lösung

Zu a): Wir zeigen zunächst die Gültigkeit der Inklusion für den Fall $\|x\|_p = 1$.

$$\begin{aligned}
 \text{Sei } \|x\|_p &= 1, \quad \text{d. h.} \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p = 1 \\
 &\Rightarrow |x_n| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow |x_n|^q \leq |x_n|^p \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad 1 < p < q < \infty \\
 &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^q \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p = 1 \\
 &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^q \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq 1 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}
 \end{aligned}$$

Ingesamt erhält man hieraus:

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p \quad \text{im Fall} \quad \|x\|_p = 1. \quad (2.1)$$

Wir setzen nun $A := \|x\|_p$, $x^* := \frac{x}{A}$. Offensichtlich ist dann

$$\|x^*\|_p = \left\| \frac{x}{A} \right\|_p = 1.$$

Die Ungleichung lässt sich verallgemeinern, indem man in (2.1) die Folge x^* einsetzt:

$$\|x^*\|_q \leq \|x^*\|_p \quad \Rightarrow \quad \left\| \frac{x}{A} \right\|_q \leq \left\| \frac{x}{A} \right\|_p \quad \Rightarrow \quad \|x\|_q \leq \|x\|_p, \quad \forall 1 < p < q < \infty.$$

Zu b): Trivialerweise gilt $\ell^p \subset c_0 \forall p$, denn:

$$\begin{aligned}
 (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^p &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \text{ konvergiert} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|^p = 0 \\
 &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0 \Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in c_0.
 \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass die Inklusion echt ist. Mit anderen Worten: Es existiert eine Nullfolge $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so dass für kein $p \in \mathbb{N}$ gilt, dass $x \in \ell^p$ ist.

Definiere $x_n := \frac{1}{\ln(n+1)}, n \in \mathbb{N}$. Dann ist x offenbar eine Nullfolge, da $\ln(n+1) \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$). Weiter folgt aus der Regel von de l'Hospital (der Grenzübergang gegen ∞ ist hierbei ausdrücklich gestattet; vgl. z. B. [17], 10.11)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{p}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{p} x^{\frac{1}{p}-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p}{x^{\frac{1}{p}}} = 0,$$

und somit

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : \quad \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^{\frac{1}{p}}} \leq 1.$$

Daraus folgt

$$\forall n \geq N : |x_n|^p = \frac{1}{(\ln(n+1))^p} \geq \frac{1}{\left((n+1)^{\frac{1}{p}}\right)^p} = \frac{1}{n+1},$$

und daher (harmonische Reihe!) die Divergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ für beliebiges $p \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 104

► Norm $\|\cdot\|_{\infty}$ als Limes von ℓ^p -Normen

Zeigen Sie mit den Bezeichnungen aus Aufg. 36 und Aufg. 103, dass für alle $x \in \ell^1$ gilt:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_{\infty}.$$

Hinweise: Es wird vorgeschlagen, zunächst die folgenden Zwischenbehauptungen zu zeigen:

1. Die Funktionen $g_p : [y_0, \infty) \ni y \mapsto g_p(y) := y^{\frac{1}{p}}$, $p \in [1, \infty)$, sind gleichmäßig Lipschitz-stetig, für $y_0 > 0$ beliebig; die Lipschitzkonstante L ist unabhängig von p .
2. Für beliebiges $x \in \ell^1$ gilt:
 - (a) $x \in \ell^p \quad \forall p \in \mathbb{N}$;
 - (b) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ist (absolut) konvergent;
 - (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$;
 - (d) $x \in \ell^{\infty}$ und $\exists m \in \mathbb{N} : \|x\|_{\infty} = \max_{n \in \mathbb{N}} |x_n| = |x_m|$;
 - (e) $\forall \varepsilon > 0 \exists k_1 = k_1(\varepsilon) \forall k \geq k_1 : \sum_{n=k+1}^{\infty} |x_n| < \frac{\varepsilon |x_m|}{2L}$.
3. Sei m aus (d) und (e) der 2. Behauptung. Sei $k \in \mathbb{N}, k \geq m$ beliebig, aber fest und $\tilde{x}_n := \frac{x_n}{|x_m|}$. Dann gilt für alle $p \in \mathbb{N}$, dass

$$\left(\sum_{n=1}^k |\tilde{x}_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq 1 \quad \text{und}$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^k |\tilde{x}_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 1.$$

Lösung

Wir beginnen mit einigen Vorüberlegungen (s. Hinweise):

1. Beh.: Sei $y_0 > 0$ beliebig, aber fest. Definiert man

$$g_p : [y_0, \infty) \ni y \mapsto g_p(y) := y^{\frac{1}{p}},$$

so gilt:

$$\exists L > 0 \forall p \in \mathbb{N} \forall y_1, y_2 \in [y_0, \infty) : |g_p(y_1) - g_p(y_2)| \leq L|y_1 - y_2|. \quad (2.2)$$

Mit anderen Worten sind die Funktionen g_p also gleichmäßig Lipschitz-stetig auf $[y_0, \infty)$.

Bew.: Wegen

$$\begin{aligned} |g'_p(y)| &= \left| \left(y^{\frac{1}{p}} \right)' \right| = \left| \frac{1}{p} y^{\frac{1}{p}-1} \right| \\ &= \frac{1}{p} \exp \left(\ln(y) \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{p} - 1 \right)}_{\leq 0} \right) \leq \frac{1}{p} \exp \left(\ln(y_0) \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{p} - 1 \right)}_{-1 \leq \leq 0} \right) \\ &\leq \begin{cases} \exp(\ln(y_0) \cdot 0), & y_0 \geq 1 \\ \exp(\ln(y_0) \cdot (-1)), & y_0 < 1 \end{cases} = \begin{cases} 1, & y_0 \geq 1 \\ y_0^{-1}, & y_0 < 1 \end{cases} \\ &\leq \max(1, y_0^{-1}) =: L \end{aligned}$$

ist die Ableitung von g_p gleichmäßig durch L beschränkt. Daraus folgt sofort für beliebige $y_1, y_2 \in [y_0, \infty), p \in [1, \infty)$

$$\begin{aligned} |g_p(y_1) - g_p(y_2)| &\stackrel{\text{MWS}}{=} |g'_p(\xi)| \cdot |y_1 - y_2|, \quad \text{mit } \xi \text{ zwischen } y_1 \text{ und } y_2, \\ &\leq L|y_1 - y_2|. \end{aligned}$$

2. Beh.: Ist $x \in \ell^1$ beliebig, so gilt

- (a) $x \in \ell^p \quad \forall p \in \mathbb{N}$;
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ist (absolut) konvergent;
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$;
- (d) $x \in \ell^{\infty}$ und $\exists m \in \mathbb{N} : \|x\|_{\infty} = \max_{n \in \mathbb{N}} |x_n| = |x_m|$;
- (e)

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_1 = k_1(\varepsilon) \forall k \geq k_1 : \sum_{n=k+1}^{\infty} |x_n| < \frac{\varepsilon |x_m|}{2L}. \quad (2.3)$$

Bew.: Zu (a): Wir zeigen $\|x\|_p \leq \|x\|_1$: Offenbar gilt für beliebiges $k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^k |x_n|^p \leq \left(\sum_{n=1}^k |x_n| \right)^p,$$

denn auf der rechten Seite taucht nach Ausmultiplizieren jeder Summand der linken Seite auf, und alle Summanden sind nichtnegativ. Man geht auf beiden Seiten zum Grenzwert für $k \rightarrow \infty$ über und erhält

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \right)^p.$$

Es folgt durch Ziehen der p -ten Wurzel:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \|x\|_1.$$

Zu (b): Es ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \|x\|_1 < \infty,$$

so dass (b) unmittelbar klar ist.

Zu (c):

Die in einer konvergenten Reihe aufsummierten Folgenglieder müssen notwendigerweise eine Nullfolge bilden.

Zu (d):

Da $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge bildet, muss ein betragsgrößtes Folgeelement existieren. Denn wählt man $\varepsilon = \frac{|x_1|}{2}$, dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ die Ungleichung $|x_n| \leq \varepsilon = \frac{|x_1|}{2}$ gilt. Also folgt

$$\sup_{n \geq N} |x_n| \leq \frac{|x_1|}{2} < |x_1| \leq \max_{n=1, \dots, N-1} |x_n|,$$

und daraus

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| = \max_{n=1, \dots, N-1} |x_n| = \max_{n \in \mathbb{N}} |x_n| =: |x_m| \quad \text{mit } m \text{ in } 1 \leq m \leq N-1.$$

Zu (e): Dies folgt direkt aus der absoluten Konvergenz der Reihe, die in (b) gezeigt wurde.

3. Beh.: Sei m aus (d) und (e) der 2. Behauptung. Sei $k \in \mathbb{N}, k \geq m$ beliebig, aber fest und $\tilde{x}_n := \frac{x_n}{|x_m|}$. Dann gilt für alle $p \in \mathbb{N}$, dass

$$\left(\sum_{n=1}^k |\tilde{x}_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq 1 \quad \text{und}$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^k |\tilde{x}_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 1,$$

das heißt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists p_0 \in \mathbb{N} \forall p \geq p_0 : \left(\sum_{n=1}^k |\tilde{x}_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} - 1 < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.4)$$

Bew.: Man hat für $k \geq m$ die Ungleichungskette

$$|x_m| = (|x_m|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^k |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq (k |x_m|^p)^{\frac{1}{p}} = k^{\frac{1}{p}} |x_m|;$$

also folgt nach Division durch $|x_m|$

$$1 \leq \left(\sum_{n=1}^k |\tilde{x}_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \underbrace{k^{\frac{1}{p}}}_{\rightarrow 1 (p \rightarrow \infty)},$$

woraus die beiden Teile der dritten Behauptung sofort abgelesen werden können.

Wir kommen nun zum Beweis der **Behauptung** der Aufgabe:

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $k := \max(k_1(\varepsilon), m)$, $y_0 := 1$ (mit m bzw. k_1 aus (d) bzw. (e) der 2. Beh.). Dann gilt für alle $p \geq p_0$ (mit \tilde{x}_n , p_0 aus der 3. Beh. bzw. (2.4))

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\tilde{x}_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} - 1 &= \left(\sum_{n=1}^k |\tilde{x}_n|^p + \sum_{n=k+1}^{\infty} |\tilde{x}_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} - 1 \\ &\stackrel{\tilde{x}_n \leq 1}{\leq} \left(\sum_{n=1}^k |\tilde{x}_n|^p + \sum_{n=k+1}^{\infty} |\tilde{x}_n| \right)^{\frac{1}{p}} - 1 \\ &\stackrel{(2.3)}{\leq} \underbrace{\left(\sum_{n=1}^k |\tilde{x}_n|^p + \frac{\varepsilon}{2L} \right)}_{\geq y_0}^{\frac{1}{p}} - 1 \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \underbrace{\left(\sum_{n=1}^k |\tilde{x}_n|^p \right)}_{\geq y_0}^{\frac{1}{p}} + \frac{\varepsilon}{2} - 1 \\ &\stackrel{(2.4)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Aufgabensammlung Analysis 2, Funktionalanalysis und
Differentialgleichungen

mit mehr als 300 gelösten Übungsaufgaben

Reinhardt, H.-J.

2017, VIII, 317 S. 17 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-662-52953-9