

2 Lösungen zu den Tests zur Arithmetik

Übersicht

2.1	Summenzeichen	11
2.2	Produktzeichen	12
2.3	Vorrangsregeln	12
2.4	Gleiches miteinander multiplizieren	13
2.5	Binomischer Satz	13
2.6	Klammern	15
2.7	Absoluter Betrag	16
2.8	Bruchrechnung	16
2.9	Rechenoperationen der dritten Stufe	16
2.10	Wurzeln	17
2.11	Logarithmen	18
2.12	Logarithmensysteme	18
2.13	Logarithmengesetze	18
2.14	Anwendung der Logarithmenrechnung	18
2.15	Namen für Potenzen von zehn	19

2.1 Summenzeichen

Ergebnisse:

1. $\sum_{i=1}^{51} (2i - 1)$ oder $\sum_{i=0}^{50} (2i + 1)$

Wichtig ist dabei:

- a) der erste Summand
- b) der letzte Summand
- c) die Anzahl der Summanden

2. 375

Haben Sie beide Teilergebnisse richtig bestimmt?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 1.2!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 3.1!

2.2 Produktzeichen

Ergebnisse:

1. $\prod_{i=1}^{21} 2i$

2. 945

Haben Sie beide Ergebnisse bestimmt?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 1.3!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 3.2!

2.3 Vorrangsregeln

1. Zunächst werden alle Rechenoperationen der dritten Stufe ausgeführt (hier ist es die Potenzrechnung).

$$[2 \cdot (-10) : (-5)] + 28 : 4 - 2 \cdot 9$$

2. Dann werden die Rechenoperationen der zweiten Stufe ausgeführt (Punktrechnung geht vor Strichrechnung).

$$[(-20) : (-5)] + 7 - 18 = 4 + 7 - 18$$

3. Abschließend die Strichrechnungen (Addition und Subtraktion).

$$4 + 7 - 18 = -7$$

Haben Sie dieses Ergebnis bestimmt?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 1.4!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 3.3!

2.4 Gleiches miteinander multiplizieren (Potenzen)

1. Am ersten Tag beträgt der Lohn, wie abgesprochen einen Cent. Am zweiten Tag wird verdoppelt, am dritten das Verdoppelte wieder verdoppelt – also vervierfacht. Am zehnten Tag wurde neunmal verdoppelt – also muss der eine Cent des ersten Tages neunmal mit 2 multipliziert werden.

$$0,01 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 0,01 \cdot 2^9 = 0,01 \cdot 512 = 5,12$$

Am zehnten Tag müssten 5,12€ Lohn bezahlt werden, was angesichts der Minitagelöhne der vorangegangenen neun Tage ein rechter Hungerlohn wäre.

2. Würde der Vertrag allerdings unter den Bedingungen für fünf Wochen mit jeweils sechs Tagen also für dreißig Tage abgeschlossen, dann würde der eine Cent neunundzwanzigmal mit zwei multipliziert werden müssen. Das wären allerdings

$$0,01 \cdot 2^{29} = 0,01 \cdot 536\,870\,912 = 5\,368\,709,12,$$

also fünf Millionen dreihundertachtundsechzig Tausend siebenhundertneun Euro und zwölf Cent.

Nicht zu verwechseln ist die Potenzrechnung mit der Multiplikation, denn

$$0,01 \cdot 2 \cdot 29 = 0,01 \cdot 58 = 0,58,$$

also 0,58 Cent wären ja auch ein recht mieser Monatslohn. Vielleicht hat der Chef diesen Fehler gemacht, als er den Vertrag abschloss?

Haben Sie diese Rechnung verstanden – sicher bei der Arbeit mit Potenzen als eine spezielle Multiplikation von gleichen Faktoren?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 1.5!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 3.4!

2.5 Binomischer Satz

Ergebnis:

$$\begin{aligned} \binom{7}{0} a^7 b^0 - \binom{7}{1} a^6 b^1 + \binom{7}{2} a^5 b^2 - \binom{7}{3} a^4 b^3 \\ + \binom{7}{4} a^3 b^4 - \binom{7}{5} a^2 b^5 + \binom{7}{6} a^1 b^6 - \binom{7}{7} a^0 b^7 \end{aligned}$$

reicht aus oder die Rechnung ausgeführt:

$$a^7 - 7a^6b + 21a^5b^2 - 35a^4b^3 + 35a^3b^4 - 21a^2b^5 + 7ab^6 - b^7$$

Haben Sie eine der Summendarstellungen angegeben?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 1.6!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 3.5!

Hinweis: Binomialkoeffizienten
Bei der Darstellung eines Binoms

$$(a + b)^n \qquad (n \text{ ist eine natürliche Zahl: } n \in \mathbb{N})$$

können die Koeffizienten aus dem Pascal'sche Dreieck (Blaise Pascal, franz. Mathematiker, 1623–1662) abgelesen oder nach der Formel von Leonard Euler (schw. Mathematiker, 1707–1783) berechnet werden. Zur Definition ist der Begriff der Fakultät festzulegen.

Definition 2.1

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n, \qquad n \in \mathbb{N}, \qquad \text{gelesen: „n Fakultät“}$$

Ergänzung: $0! = 1$

$$1! = 1$$



Eine Auswahl von Fakultätswerten ist in Tabelle 2.1 dargestellt.

Tab. 2.1 Auflistungen der expliziten Fakultätswerte von 0 bis 11

n	n!
0	1
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5 040
8	40 320
9	362 880
10	3 628 800
11	39 916 800
⋮	⋮

Definition 2.2

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad n, k \in \mathbb{N}, \quad \text{mit } n \geq k, \quad \text{gelesen: „}n \text{ über } k\text{“}$$



Somit lässt sich das Pascal'sche Dreieck in folgender Darstellung angeben:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\
 \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
 \end{array}$$

Die Werte der Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ oder Eulerschen Symbole können in Tabellenzusammenstellungen nachgeschlagen, mit dem Taschenrechner nach der hier angegebenen Definition berechnet oder direkt mit einem Tastendruck bestimmt werden. Die Symmetrie des Pascal'schen Dreiecks in einer Formel ausgedrückt:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Das Bildungsgesetz des Pascal'schen Dreiecks in einer Formel ausgedrückt:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

2.6 Klammern

Ergebnis:

$$\begin{aligned}
 T(x) &= 27x + 12 \\
 T(-2) &= -42
 \end{aligned}$$

Haben Sie diese Ergebnisse bestimmt?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 1.7!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 3.6!

2.7 Absoluter Betrag

Ergebnisse:

$$x_1 = 5, \text{ denn } |5 - 2| = |3| = |-3| \\ 3 = 3$$

und

$$x_2 = -1, \text{ denn } |-1 - 2| = |-3| = |-3| \\ 3 = 3$$

Haben Sie diese Ergebnisse bestimmt?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 1.8!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 3.7!

2.8 Bruchrechnung

Ergebnis:

$$\frac{1-x}{1+x}$$

Haben Sie dieses Ergebnis bestimmt?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 1.9!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 3.8!

2.9 Rechenoperationen der dritten Stufe

Ergebnisse:

$$1. \quad n^{-12} = \frac{1}{n^{12}}$$

$$2. \quad 1 - \frac{\frac{1}{9}}{-\frac{1}{2^3}\sqrt[2]{9^3}} = 1 + \frac{8}{9 \cdot \sqrt[2]{3^6}} = 1 + \frac{8}{243} = \frac{251}{243}$$

$$3. \quad a) \quad \frac{9}{20}a^2b^2 + \frac{17}{24}ab$$

$$b) \quad (x + y)^5 z^3$$

$$c) \quad \left(\frac{1}{ab}\right)^n$$

Haben Sie alle Ergebnisse richtig bestimmt?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 1.10!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 3.9!

2.10 Wurzeln

Ergebnisse:

1. a) Der Wert von x darf nicht größer als 4 sein, da sonst ein negativer Radikant entsteht.

$$b) \quad \sqrt[4]{4 - (-12)} = \sqrt[4]{4 + 12} = \sqrt[4]{16} = 2$$

$$2. \quad \frac{a(a + \sqrt{b})}{(a - \sqrt{b})(a + \sqrt{b})} = \frac{a(a + \sqrt{b})}{a^2 - b}$$

$$3. \quad a) \quad \sqrt[3]{x}$$

$$b) \quad \sqrt[3]{a^3b^3c^4} = abc\sqrt[3]{c}$$

$$c) \quad \sqrt{x}$$

Haben Sie alle Ergebnisse richtig bestimmt?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 1.11!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 3.10!

2.11 Logarithmen

Ergebnis:

$$-\frac{1}{2}, \text{ denn } e^{-0,5} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Haben Sie dieses Ergebnis bestimmt?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 1.12!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 3.11!

2.12 Logarithmensysteme

Ergebnis:

$$\begin{aligned} 2^3 &= 8 < 10 < 16 = 2^4 \\ 3 &< \text{ld} < 4 \\ \text{ld} &\approx 3,321928095 \dots \end{aligned}$$

Haben Sie dieses Ergebnis bestimmt?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 1.13!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 3.12!

2.13 Logarithmengesetze

Ergebnis:

$$\frac{1}{n} [2 \cdot \log_a(b) + \log_a(c + d) - 4 \cdot \log_a(e)]$$

Haben Sie dieses Ergebnis bestimmt?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 1.14!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 3.13!

2.14 Anwendung der Logarithmenrechnung

1.

$$2^n = \frac{F_2}{\eta F_1} = \frac{40\,000}{600 \cdot 0,64} \approx 104,167$$

Abschätzung:

$$64 = 2^6 < 104,167 < 2^7 = 128$$

6 Rollen reichen nicht aus, aber 7 Rollen genügen, um die Last zu heben.

Berechnung:

$$n = \frac{\ln(40\,000) - \ln(600) - \ln(0,64)}{\ln(2)} \approx 6,71$$

Hubkraft:

$$F_1 = \frac{40\,000}{128 \cdot 0,64} \approx 489 \text{ N (Newton)}$$

2.

$$2 = 1,045^n$$

$$n = \frac{\lg(2)}{\lg(1,045)} \approx 15,7473 \dots$$

Es dauert 15 Jahre und knapp 9 Monate.

Haben Sie diese Ergebnisse bestimmt?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 1.15!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 3.14!

2.15 Namen für Potenzen von zehn

- 1 000 = $10 \cdot 10 \cdot 10$ – also muss die Zehn zweimal verzehnfacht werden, um Tausend zu erhalten.
- Mega ist der Vorsatz für Million, die man erhält, wenn man zehn sechsmal mit sich selbst multipliziert (10^6). Einer der über Megaeuro verfügt, hat eine Million Euro (10^6 €) – ist also ein Millionär.
- Milli ist der Vorsatz für Tausendstel ($\frac{1}{1\,000} = \frac{1}{10^3}$). Für $\frac{1}{10^3}$ kann auch 10^{-3} geschrieben werden. Somit sind 3,2 Millimeter auch 3,2 Tausendstel Meter oder

$$3,2 \text{ mm} = \frac{3,2}{1\,000} \text{ m} = 0,0032 \text{ m}.$$

Haben Sie das verstanden und sind Ihnen auch die anderen Vorsilben für Zehnerpotenzen bekannt?

Ja – Ende des 1. Tages – Arithmetik.

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 3.15!

Mit Selbsttests gezielt Mathematik lernen
Für Studienanfänger aller Fachrichtungen zur
Vorbereitung und studienbegleitend

Höfner, G.

2017, XVI, 371 S. 103 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-662-52962-1