

Gegeben:

$m_s = 1 \text{ kg}$	oszillierende Kolbenmasse inkl. Pleuelanteil
$n = 5000 \text{ min}^{-1}$	Motordrehzahl
$r = 0,05 \text{ m}$	Kurbelzapfenradius
$\lambda_p = 0,3$	Pleuelstangenverhältnis
$D = 0,05 \text{ m}$	Durchmesser der Ausgleichs-Halbzyylinder der Ausgleichswelle
$\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$	Dichte von Stahl

Gesucht:

- 1) Kraftwirkung einer auf einer Kreisbahn (siehe Bild 2) mit konstanter Drehzahl umlaufenden Unwuchtmasse m_u mit dem Abstand $e = |r|$ zwischen Schwerpunkt und Drehachse.

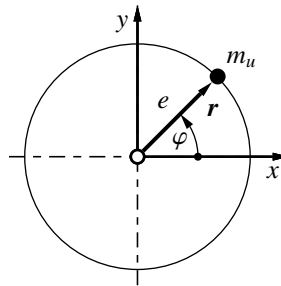


Bild 2: Unwuchtiges Drehteil

- 2) Resultierende Kraft von zwei gegenläufig rotierenden identischen Unwuchtwellen mit parallelen Achsen und beliebiger Drehstellung ψ zueinander.
- 3) Lage der Ausgleichs-Unwuchten im Motor bzgl. des Motorschwerpunktes
- 4) Erforderliche Länge der Halbzyylinder, wenn die Kraftamplitude der zweiten Ordnung der Massenkraft ausgeglichen werden soll. Die Ausgleichs-Unwuchten seien Halbzyylinder aus Stahl, die um deren Zylinderachse rotieren.
- 5) Masse der Ausgleichselemente sowie die Kraftamplitude beider Ausgleichswellen bei einer Motordrehzahl von 5000 min^{-1} .
- 6) Die Ausgleichswellen dienen in erster Linie dem Schwingungs- und Akustik-Komfort des Triebwerks. Nennen Sie Nachteile der Ausgleichswellen, die dafür sorgen, dass dieses Konzept nur bei einer geringen Zahl von Motoren zur Anwendung kommt.

Lösung:**Zu 1):**

In Koordinaten des Inertialsystems gilt der Ortsvektor der auf einer Kreisbahn umlaufenden Masse

$$\mathbf{r} = e \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Die Geschwindigkeit ergibt sich durch Differentiation der Gleichung (2) nach der Zeit:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = e \dot{\varphi} \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Die absolute Beschleunigung wird in gleicher Weise gewonnen:

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} = e \ddot{\varphi} \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{bmatrix} + e \dot{\varphi}^2 \begin{bmatrix} -\cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{bmatrix}, \quad (4)$$

wobei der erste Term bei konstanter Drehzahl ($\dot{\varphi} = \Omega = \text{const.}$) entfällt und schließlich

$$\mathbf{a} = -\Omega^2 \mathbf{r} \quad (5)$$

verbleibt. Der Betrag der Beschleunigung ist

$$|\mathbf{a}| = e \Omega^2. \quad (6)$$

Die Zentripetalbeschleunigung $\mathbf{a}$ wirkt nach innen gerichtet auf den Drehpunkt. Umgekehrt übt die rotierende Masse die Kraft

$$\mathbf{F}_u = -m\mathbf{a} = m\Omega^2 \mathbf{r} \quad (7)$$

auf den Drehpunkt aus.

Der Betrag der Zwangskraft auf die Masse beträgt dann

$$\underline{\underline{|\mathbf{F}_u| = m e \Omega^2 = u \Omega^2.}} \quad (8)$$

Zu 2):

Die beiden identischen Ausgleichs-Körper berühren sich im Punkt O und drehen gegenläufig, vgl. Bild 3. Für $\varphi_1 = 0$ gilt auch $\varphi_2 = 0$. Der Durchmesser der Körper beträgt D . Die Unwucht in Körper 1 liegt so, dass sie bei $\varphi_1 = 0$ auf der x -Achse liegt. In Körper 2 liegt sie für $\varphi_2 = 0$ auf einer Linie, die gegenüber der x -Achse um den Winkel ψ verdreht ist.

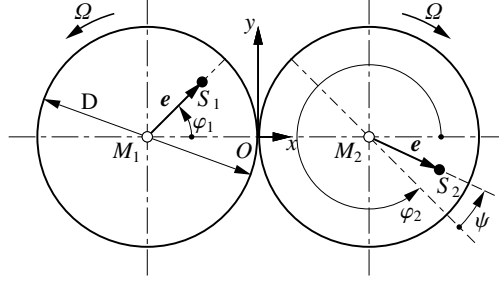


Bild 3: Körper 1 und Körper 2 drehen gegenläufig

Die Unwuchtkräfte sind gemäß (7) und (2)

$$\mathbf{F}_1 = m e \Omega^2 \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_2 = m e \Omega^2 \begin{bmatrix} \cos(\varphi_2 + \psi) \\ \sin(\varphi_2 + \psi) \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Aus der Beziehung $\varphi_1 = 2\pi - \varphi_2$ für gegenläufige Wellen ergibt sich

$$\mathbf{F}_2 = m e \Omega^2 \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 \cos \psi + \sin \varphi_1 \sin \psi \\ -\sin \varphi_1 \cos \psi + \cos \varphi_1 \sin \psi \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Die daraus resultierende Gesamtkraft folgt zu

$$\mathbf{F}_{\text{ges}} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = u \Omega^2 \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 (1 + \cos \psi) + \sin \varphi_1 \sin \psi \\ \sin \varphi_1 (1 - \cos \psi) + \cos \varphi_1 \sin \psi \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Unter Ausnutzung der trigonometrischen Doppelwinkelfunktionen

$$1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha, \quad 1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha, \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

lässt sich die Gleichung (11) umformulieren als

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{ges}} &= u \Omega^2 \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 \cdot 2 \cos^2(\psi/2) + \sin \varphi_1 \cdot 2 \cos(\psi/2) \sin(\psi/2) \\ \sin \varphi_1 \cdot 2 \sin^2(\psi/2) + \cos \varphi_1 \cdot 2 \cos(\psi/2) \sin(\psi/2) \end{bmatrix} \\ &= u \Omega^2 \begin{bmatrix} 2 \cos(\psi/2) (\cos \varphi_1 \cdot \cos(\psi/2) + \sin \varphi_1 \cdot \sin(\psi/2)) \\ 2 \sin(\psi/2) (\sin \varphi_1 \cdot \sin(\psi/2) + \cos \varphi_1 \cdot \cos(\psi/2)) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

was schließlich zum Endergebnis

$$\mathbf{F}_{\text{ges}} = 2u \Omega^2 \cos(\varphi_1 - \psi/2) \begin{bmatrix} \cos(\psi/2) \\ \sin(\psi/2) \end{bmatrix} \quad (12)$$

führt. Für einen allgemeinen Differenzwinkel ψ entsteht eine resultierende, harmonische Unwuchtkraft, die in einer Richtung mit dem Winkel $\psi/2$ gegenüber der x-Achse wirkt. Es werden zwei Fälle betrachtet.

Fall 1: $\psi = 0$

$$\mathbf{F}_{\text{ges}} = 2u\Omega^2 \cos \varphi_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Es entsteht eine Unwuchtkraft, die ausschließlich in Richtung der x -Achse wirkt.

Fall 2: $\psi = \pi$

$$\mathbf{F}_{\text{ges}} = 2u\Omega^2 \sin \varphi_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Es entsteht eine Unwuchtkraft, die ausschließlich in Richtung der y -Achse wirkt.

Zu 3):

Für die Positionierung der Ausgleichswellen muss zunächst das entstehende Moment der beiden Unwuchtkräfte (9) bezüglich der z -Achse betrachtet werden. Dieses ergibt sich zu

$$\begin{aligned} M_z &= -\frac{D}{2}F_{1y} + \frac{D}{2}F_{2y} = -\frac{Du\Omega^2}{2} (\sin \varphi_1 - \sin(\varphi_2 + \psi)) \\ &= -\frac{Du\Omega^2}{2} (\sin \varphi_1 + \sin(\varphi_1 - \psi)). \end{aligned} \quad (15)$$

Die beiden Fälle aus Teilaufgabe 2) führen zu:

$$M_z = -\frac{Du\Omega^2}{2} 2 \sin \varphi_1 \quad \text{für } \psi = 0, \quad (16)$$

$$M_z = 0 \quad \text{für } \psi = \pi. \quad (17)$$

Bei der Anordnung mit $\psi = \pi$, bei der sich die Schwerpunkte der Unwuchtmassen bei $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ genau gegenüberstehen, entsteht eine momentenfreie, harmonische Unwuchtkraft in y -Richtung. Dieser Fall kann für den gewünschten Massenausgleich in y -Richtung genutzt werden. Der andere Fall $\psi = 0$ scheidet aus.

Der Viertakt-Vierzylinder-Reihenmotor ist bezüglich seiner Massenmomente ausgeglichen. Die Unwuchtwellen müssen so platziert werden, dass der Punkt O genau in der Zylindermittenebene liegt. Üblicherweise werden die Ausgleichswellen im Motorblock unterhalb der Kurbelwelle positioniert, siehe Bild 4. Dabei liegt die Annahme zugrunde, dass der Motorschwerpunkt in der y - z -Ebene liegt.

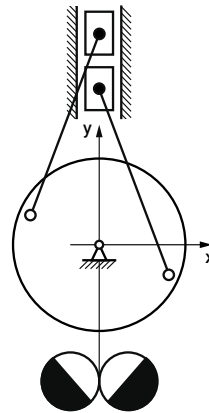


Bild 4: Positionierung der Ausgleichswellen

Zu 4):

Die Unwucht u eines Halbzylinders ergibt sich aus Masse und Schwerpunktlage eines Halbzylinders bezüglich des Halbkreis-Mittelpunktes:

$$e = \frac{4}{3\pi} \frac{D}{2} = \frac{2}{3\pi} D, \quad (18)$$

$$u = m \cdot e = \rho \frac{1}{2} \pi \frac{D^2}{4} l \frac{2}{3\pi} D = \frac{2}{3} \rho l \frac{D^3}{8} = \frac{1}{12} \rho l D^3, \quad (19)$$

wobei l die Länge, ρ die Dichte und D der Durchmesser des Halbzylinders sind.

Um Massenkräfte der zweiten Motorordnung auszugleichen, müssen die Ausgleichswellen mit der doppelten Winkelgeschwindigkeit der Kurbelwelle rotieren. Aus der Summe beider Wellen für den Fall $\psi = \pi$, siehe (14), ergibt sich somit für die Kraftamplitude beider Ausgleichswellen

$$\hat{F}_{aw} = 2u(2\Omega)^2 = 8u\Omega^2. \quad (20)$$

Diese muss gleich der Kraftamplitude der Massenkräfte der Kolben sein:

$$\hat{F} = (4\lambda_p + \lambda_p^3)m_s r \Omega^2. \quad (21)$$

Mit $\hat{F} = \hat{F}_{aw}$ ergibt sich

$$8u\Omega^2 = (4\lambda_p + \lambda_p^3)m_s r \Omega^2. \quad (22)$$

Durch Kürzung von Ω^2 aus der obigen Gleichung ergibt sich

$$u = \frac{(4\lambda_p + \lambda_p^3)m_s r}{8} \quad (23)$$

und schließlich unter Berücksichtigung von (19)

$$l = \frac{3(4\lambda_p + \lambda_p^3)m_s r}{2\rho D^3}. \quad (24)$$

Einsetzen der Zahlenwerte ergibt die Länge der Halbzylinder $l = 9,4 \text{ cm}$.

Zu 5):

Die Motordrehzahl $n = 5000 \text{ min}^{-1}$ entspricht einer Drehwinkelgeschwindigkeit von

$$\Omega = \frac{n}{60} 2\pi = 532,6 \text{ rad/s}. \quad (25)$$

Werden die Zahlenwerte in die Gleichungen (19) und (20) eingesetzt, ergibt sich

$$u = \frac{1}{12} \rho D^3 l = 7,66 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}, \quad (26)$$

$$\underline{\underline{\hat{F}_{aw} = 8u\Omega^2 = 16,8 \text{ kN}}}. \quad (27)$$

Dies zeigt, dass bereits sehr kleine Unwuchtmassen zu sehr großen Kraftamplituden führen, um die unausgeglichene zweite Ordnung aufzuheben.

Zu 6):

Nachteile des Massenausgleiches mit Ausgleichswellen sind z. B.:

- zusätzliche Masse im Motor,
- zusätzliches Trägheitsmoment, das mit Faktor 4(!) zu multiplizieren ist,
- zusätzliche Lager im Motor, die zudem sehr hohen Drehzahlen standhalten müssen (mehrfache Motordrehzahl),
- zusätzlicher Bauraumbedarf und weitere Bauteile,
- problematischer Antrieb durch Ketten oder Verzahnungen, die aufgrund der geringen Grundlast in Verbindung mit hochdynamischen Anregungen rasselfähig sind,
- mehr Reibung im Motor durch weitere Lager, und
- Ausgleich ist nur für eine Drehzahlordnung möglich.

Ausgleichswellen sind Bauelemente, mit denen Massenkräfte einer Anregungsordnung in einer Maschine, z.B. einem Verbrennungsmotor ausgeglichen werden können. Besonders geeignet ist dabei eine symmetrische Anordnung von zwei gegenläufigen, identischen Wellen. Diese erzeugt eine resultierende harmonische Massenkraft in der Symmetrieebene, die zudem momentenfrei ist.

Maschinendynamik – Aufgaben und Beispiele

Beitelschmidt, M.; Dresig, H. (Hrsg.)

2017, IX, 447 S. 224 Abb., 29 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-662-53434-2