

5.6 Kreispumpe mit innerer Dämpfung

Durch Reibung in der Fügstelle zweier Bauteile oder andere Dämpfungsmechanismen innerhalb eines Systems können selbsterregte Schwingungen hervorgerufen werden, die bis zur Zerstörung führen können. Dies trifft auch auf Wellensitze von Schaufelrädern, Ventilatoren und ähnlichen Bauelementen zu. Welchen Einfluss besitzt eine viskose innere Dämpfung auf die Stabilität und das Hochlaufverhalten eines Rotors? *

Im Punkt W des Schaufelrads der Kreispumpe aus Aufgabe 5.5 wirkt nun zusätzlich eine geschwindigkeitsproportionale „innere“ Dämpfung b_i , siehe Bild 1 (links). Der Rotor der Kreispumpe wird weiterhin als symmetrischer LAVAL-Rotor mit der Wellensteifigkeit c modelliert. Die mittig sitzende Scheibe besitzt die Masse m , das Massenträgheitsmoment J_p und eine zu Demonstrationszwecken außerordentlich große Schwerpunksexzentrizität ε . Die „äußere“ Dämpfung b_a des umgebenden Fluids greift im Punkt W an. Der Rotor wird durch das Drehmoment M angetrieben.

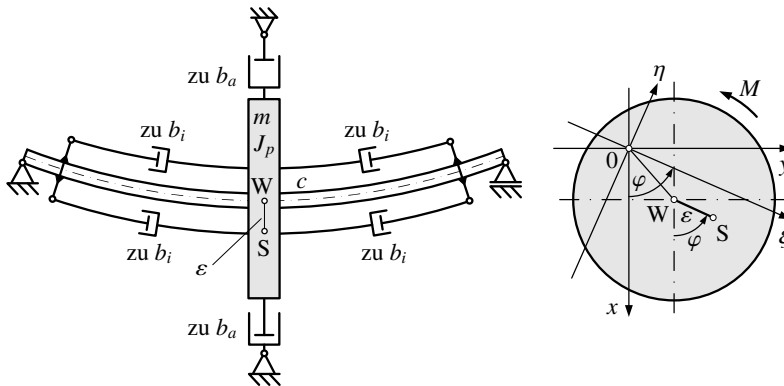


Bild 1: Modell des Rotors (links) und ausgelenkte Scheibe (rechts)

Gegeben:

c	$= 1440 \text{ N/mm}$	Steifigkeit der Welle
m	$= 14,15 \text{ kg}$	Masse der Scheibe
J_p	$= 15\,710 \text{ kg mm}^2$	polares Massenträgheitsmoment der Scheibe
$ \varepsilon $	$= 1 \text{ mm}$	Schwerpunksexzentrizität der Scheibe
b_a	$= 270,8 \text{ N/m/s}$	äußere Dämpfung
b_i	$= (0; 361,1; 812,5) \text{ N/m/s}$	innere Dämpfungen
α/ω_0^2	$= 0,004; 0,01$	relative Drehbeschleunigungen, $\omega_0^2 = c/m$
M	$= 16 \text{ Nm}$	Antriebsmoment
φ_0	$= 0$	Anfangswinkel
$\dot{\varphi}_0$	$= 0$	Anfangsdrehgeschwindigkeit

* Autorin: Katrin Baumann

Gesucht:

- 1) Bewegungsdifferentialgleichungen für $r_W = x_W + jy_W$ und φ
- 2) Kritische Drehzahl n_0 , Stabilitätsgrenzdrehzahl n_{Gr} und Stabilitätskarte
- 3) Numerische Lösung der Bewegungs-DGLn für Hochläufe mit konstanten Drehbeschleunigungen $\ddot{\varphi} = \alpha$ und verschiedenen inneren Dämpfungen.
Gilt die für stationäre Drehzahlen berechnete Stabilitätsgrenzdrehzahl auch für Hochläufe?
- 4) Numerische Lösung der Bewegungs-DGLn für Hochläufe mit einem konstanten Antriebsmoment $M = \text{const.}$ und verschiedenen inneren Dämpfungen.
Welche Phänomene beobachten Sie?

Lösung:**Zu 1):**

Die innere Dämpfung b_i resultiert aus dem Stauchen und Dehnen des Wellenmaterials in Längsrichtung (*Werkstoffdämpfung*) und aus dem axialen Abgleiten der Scheibe auf der sich durchbiegenden Welle (*Fügestellendämpfung*) während einer Rotorumdrehung, siehe [36, Kapitel 4]. D. h. die innere Dämpfungskraft $F_{\rho i}$ greift an der Scheibe im Wellendurchstoßpunkt W an und läuft mit dem Rotor um.

Deshalb ist es zweckmäßig, nicht nur die komplexen Absolutkoordinaten

$$r = x + jy \quad (1)$$

entsprechend Bild 1 (rechts) einzuführen, sondern auch mit dem Drehwinkel φ mitrotierende komplexe (Relativ-)Koordinaten

$$\rho = \xi + j\eta = (x + jy) e^{-j\varphi} = r e^{-j\varphi} . \quad (2)$$

Für die Kräfte in diesen beiden Koordinatensystemen gilt analog

$$F = F_x + jF_y = (F_\xi + jF_\eta) e^{j\varphi} = F_\rho e^{j\varphi} . \quad (3)$$

Die Biegedifferentialgleichung (Biege-DGL) folgt aus dem Kräftesatz für die freigeschnittene Scheibe. Dabei müssen folgende Kräfte berücksichtigt werden:

- die zur Absolutauslenkung r_W proportionale Rückstellkraft aufgrund der Wellensteifigkeit c ,
- die zur Absolutgeschwindigkeit $\dot{r}_W$ proportionale Kraft der äußeren Dämpfung b_a (vergleiche dazu auch Aufgabe 5.5) sowie
- die zur mitrotierenden Relativgeschwindigkeit $\dot{\rho}_W$ proportionale und mitrotierende Kraft der inneren Dämpfung b_i ,

$$F_{\rho i} = b_i \dot{\rho}_W . \quad (4)$$

Nach Transformation der mitrotierenden inneren Dämpfungskraft (4) auf feststehende Koordinaten lautet der Kräftesatz

$$m\ddot{r}_S + b_a \dot{r}_W + b_i \dot{\rho}_W e^{j\varphi} + c r_W = 0. \quad (5)$$

Mit der kinematischen Beziehung

$$r_S = r_W + \varepsilon e^{j\varphi} \quad (6)$$

zwischen dem Wellendurchstoßpunkt W und dem Schwerpunkt S und ihren Ableitungen

$$\begin{aligned} \dot{r}_S &= \dot{r}_W + j\dot{\varphi} \varepsilon e^{j\varphi}, \\ \ddot{r}_S &= \ddot{r}_W + \varepsilon (j\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2) e^{j\varphi} \end{aligned} \quad (7)$$

sowie mit der Ableitung der mitrotierenden komplexen Koordinate ρ aus Gleichung (2) für den Punkt W,

$$\dot{\rho}_W = \dot{r}_W e^{-j\varphi} - r_W j\dot{\varphi} e^{-j\varphi}, \quad (8)$$

wird die Biege-DGL zu

$$\underline{m\ddot{r}_W + (b_a + b_i) \dot{r}_W + (c - b_i j\dot{\varphi}) r_W = -m\varepsilon (j\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2) e^{j\varphi}.} \quad (9)$$

Die Komponenten der Rotorauslenkungen betragen entsprechend der Definition (1)

$$x_W = \operatorname{Re}\{r_W\} \quad \text{und} \quad y_W = \operatorname{Im}\{r_W\}. \quad (10)$$

Bei der Aufstellung des Momentensatzes um den Schwerpunkt S für die Herleitung der Dreh-DGL werden die angreifenden Kräfte in ihre Komponenten in Richtung der mitrotierenden Koordinaten ξ und η zerlegt und zusätzlich das Antriebsmoment M berücksichtigt:

$$J_p \ddot{\varphi} + (cx_W + b_a \dot{x}_W) \varepsilon \sin \varphi - (cy_W + b_a \dot{y}_W) \varepsilon \cos \varphi - b_i \varepsilon \eta_W = M. \quad (11)$$

Die Rückführung der Gleichung (11) auf die absoluten Koordinaten x_W und y_W gelingt mit Hilfe der geometrischen Beziehungen

$$\begin{aligned} \xi_W &= x_W \cos \varphi + y_W \sin \varphi \quad \text{und} \\ \eta_W &= -x_W \sin \varphi + y_W \cos \varphi \end{aligned} \quad (12)$$

sowie deren Ableitungen

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_W &= \dot{x}_W \cos \varphi - x_W \dot{\varphi} \sin \varphi + \dot{y}_W \sin \varphi + y_W \dot{\varphi} \cos \varphi \quad \text{und} \\ \dot{\eta}_W &= -\dot{x}_W \sin \varphi - x_W \dot{\varphi} \cos \varphi + \dot{y}_W \cos \varphi - y_W \dot{\varphi} \sin \varphi. \end{aligned} \quad (13)$$

Die Dreh-Differentialgleichung wird damit zu

$$\underline{J_p \ddot{\varphi} + [cx_W + b_a \dot{x}_W + b_i (\dot{x}_W + y_W \dot{\varphi})] \varepsilon \sin \varphi - [cy_W + b_a \dot{y}_W + b_i (\dot{y}_W - x_W \dot{\varphi})] \varepsilon \cos \varphi = M.} \quad (14)$$

Zu 2):

Die Eigenkreisfrequenz ω_0 und die kritische Drehzahl betragen

$$\omega_0 = \pm \sqrt{\frac{c}{m}} = \pm 319 \text{ s}^{-1} \quad \text{und} \quad n_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = \pm 3046 \text{ min}^{-1}. \quad (15)$$

Die Berechnung der Stabilitätsgrenzdrehzahl n_{Gr} bzw. der Grenzkreisfrequenz Ω_{Gr} gelingt einfach und allgemeingültig durch Betrachtung der Eigenwerte in der Pol-ebene: Die Schwingungen sind stabil für negative Realteile und instabil für positive Realteile. Für den Stabilitätsgrenzfall ist der Realteil eines Eigenwertes gerade Null,

$$\lambda = j\Omega_{Gr}. \quad (16)$$

Damit lauten der Ansatz und seine Ableitungen für die Lösung der homogenen Biege-DGL

$$\begin{aligned} r_W &= \hat{r}_W e^{j\Omega_{Gr}t}, \\ \dot{r}_W &= j\Omega_{Gr} \hat{r}_W e^{j\Omega_{Gr}t} \quad \text{und} \\ \ddot{r}_W &= -\Omega_{Gr}^2 \hat{r}_W e^{j\Omega_{Gr}t}. \end{aligned} \quad (17)$$

Durch Einsetzen dieser Beziehungen in die homogene DGL zu Gleichung (9),

$$m\ddot{r}_W + (b_a + b_i)\dot{r}_W + (c - b_i j\dot{\varphi})r_W = 0, \quad (18)$$

ergibt sich

$$\left[-m\Omega_{Gr}^2 + (b_a + b_i)j\Omega_{Gr} + (c - b_i j\dot{\varphi}) \right] \hat{r}_W e^{j\Omega_{Gr}t} = 0. \quad (19)$$

Nach Ausschluss der trivialen Lösung $\hat{r}_W = 0$ wird durch Aufspalten der Gleichung (19) in Real- und Imaginärteil sowie durch anschließendes Einsetzen der sich aus der Imaginärteilgleichung ergebenden Bedingung für Ω_{Gr} in die Realteilgleichung eine Gleichung für die Stabilitätsgrenze gewonnen. Unter Berücksichtigung der Eigenkreisfrequenz ω_0 beträgt die Grenzkreisfrequenz

$$\dot{\varphi} \stackrel{!}{=} \Omega_{Gr} = \left(1 + \frac{b_a}{b_i} \right) \omega_0. \quad (20)$$

Für die Stabilitätsgrenzdrehzahl n_{Gr} gilt die Gleichung (20) analog und es ergeben sich für die gegebenen inneren Dämpfungen b_i die folgenden Werte:

$$\begin{aligned} n_{Gr} &= \left(1 + \frac{b_a}{b_i} \right) n_0 = \infty, \quad 1,33 n_0 \quad \text{und} \quad 1,75 n_0 \\ &= \infty, \quad \underline{\underline{4052 \text{ min}^{-1}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{5331 \text{ min}^{-1}}}. \end{aligned} \quad (21)$$

Die unendlich große Stabilitätsgrenzdrehzahl für den Rotor ohne innere Dämpfung ($b_i=0$) bedeutet, dass sich das System stets stabil verhält. Bild 2 zeigt die Stabilitätskarte, in der die Stabilitätsgrenzdrehzahlen für die gegebenen Dämpfungsverhältnisse b_a/b_i abgelesen werden können.

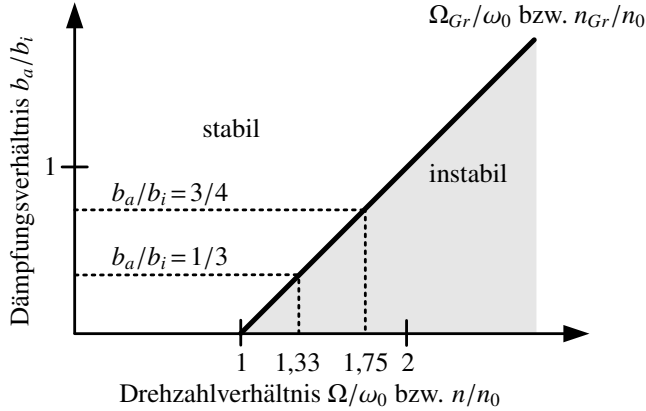


Bild 2: Stabilitätskarte

Die Abhängigkeit der Grenzdrehzahl Ω_{Gr} vom Verhältnis der äußeren zur inneren Dämpfung zeigt die Wirkung der beiden unterschiedlichen Dämpfungen: Für einen Rotor ohne äußere, aber mit innerer Dämpfung ($b_a = 0$, $b_i > 0$) beträgt die Grenzdrehzahl $\Omega_{Gr} = \omega_0$. D. h. die innere Dämpfung wirkt oberhalb der biegekritischen Drehzahl ω_0 anfachend. Ist der Rotor zusätzlich von außen gedämpft ($b_a > 0$), so kompensiert die äußere Dämpfungskraft die mit steigender Drehzahl zunehmend stärker anfachende Wirkung der inneren Dämpfung im Drehzahlbereich $\omega_0 < \Omega < \Omega_{Gr}$. Oberhalb der Grenzdrehzahl, d. h. rechts der Geraden $b_a/b_i = \eta - 1$ im Bild 2, überwiegt die destabilisierende Wirkung der inneren Dämpfung und die Rotorschwingungen klingen auf. Detailliertere Erläuterungen dazu finden sich in [36, Kapitel 4].

Zu 3):

Bei einem Rotorhochlauf mit konstanter Drehbeschleunigung wird vorausgesetzt, dass der Motor stark genug ist, um die benötigte Leistung aufzubringen. Dadurch wird die Dreh-DGL (14) erfüllt und es verbleibt nur die Biege-DGL (9), in die die konstante Drehbeschleunigung von

$$\ddot{\varphi} = \alpha \quad (22)$$

und die damit für den Hochlauf aus dem Stillstand $\dot{\varphi}_0 = 0$ bei $\varphi_0 = 0$ geltende Drehgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ und der Drehwinkel φ

$$\dot{\varphi} = \alpha t \quad \text{und} \quad \varphi = \frac{\alpha}{2} t^2 \quad (23)$$

eingesetzt werden:

$$m\ddot{r}_W + (b_a + b_i)\dot{r}_W + (c - b_i j \alpha t) r_W = -m\varepsilon \left(j\alpha - \alpha^2 t^2 \right) e^{j\frac{\alpha}{2} t^2}. \quad (24)$$

Die Gleichung (24) kann numerisch, beispielsweise mit Scilab oder Matlab (mit der Funktion ode45), gelöst werden.

Bild 3 zeigt die erzwungenen Schwingungen bei Unwuchterregung der Rotorhochläufe bei Variation der inneren Dämpfung (links) sowie bei Variation der Drehbeschleunigung (rechts). Für die gegebenen Dämpfungen betragen die Dämpfungsgrade

$$D_a = \frac{b_a}{2m\omega_0} = 0,03 \quad \text{sowie} \quad D_i = \frac{b_i}{2m\omega_0} = 0, 0,04 \text{ und } 0,09. \quad (25)$$

Erwartungsgemäß sinkt die Stabilitätsgrenze mit zunehmender innerer Dämpfung (Bild 3 links). Im Bild 3 rechts wird deutlich, dass die für stationäre Drehzahlen berechnete Stabilitätsgrenzdrehzahl auch für Hochläufe gilt, vergleiche [10].

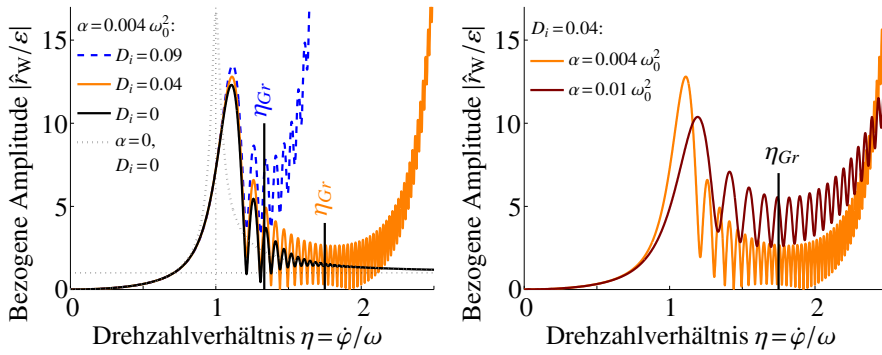


Bild 3: Erzwungene Schwingungen in Hochläufen mit verschiedenen inneren Dämpfungen D_i (links) und verschiedenen konstanten Drehbeschleunigungen α (rechts)

Zu 4):

Bei einem Rotorhochlauf mit konstantem Antriebsmoment müssen die gekoppelten DGLn (9) und (14) numerisch gelöst werden. Bild 4 zeigt den Drehzahlverlauf (links) sowie die Amplituden (rechts) der erzwungenen Schwingungen bei Unwuchterregung für verschieden große innere Dämpfungen. Dabei können folgende Phänomene beobachtet werden:

- Der Hochlauf wird an der Resonanzdrehzahl $\dot{\varphi} = \omega_0$ verzögert (für alle dargestellten Kurven), weil durch die im Resonanzbereich immer größer werdenden Biegeschwingungen des Rotors Energie aus der Drehbewegung abgezogen und der translatorischen Bewegung zugeführt wird (mathematisch beschrieben durch die Koppelterme in den Biege- und Dreh-DGLn). Dadurch steht dem Rotor nicht mehr die volle Antriebsleistung zur Verfügung und die Drehbeschleunigung nimmt ab (vergleiche dazu auch die Aufgabe 7.4).

Da die innere Dämpfung unterhalb der kritischen Drehzahl auch dämpfend wirkt, kann es bei einem im Verhältnis zur Gesamtdämpfung sehr kleinen Antriebsmoment passieren (Kurve mit $D_i = 0,09$), dass die gesamte Antriebsenergie in die Biegung des Rotors transferiert und in den Dämpfern dissipiert

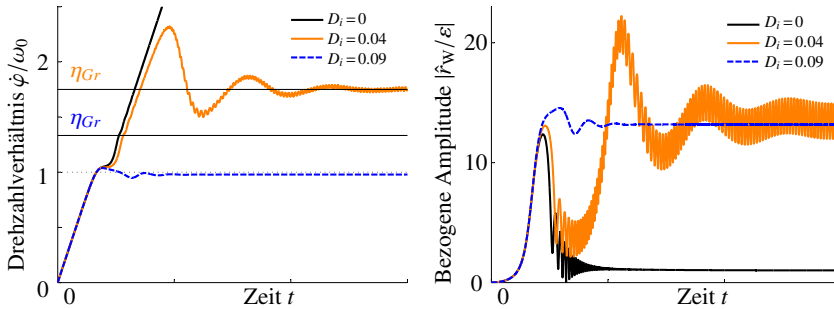


Bild 4: Erzwungene Schwingungen in Hochläufen mit konstantem Antriebsmoment bei Variation der inneren Dämpfung D_i

wird, so dass der Rotor nicht weiter beschleunigt, sondern an der Resonanzdrehzahl hängen bleibt. Die dazugehörige Stabilitätsgrenzdrehzahl wird gar nicht erreicht. Angaben zum Mindestantriebsmoment für die Resonanzdurchfahrt äußerlich gedämpfter Rotoren finden sich in [63] bzw. [64].

Je größer dagegen das Antriebsmoment bzw. je kleiner im Verhältnis dazu die innere Dämpfung ist, desto schneller wird der Resonanzbereich durchfahren und desto geringer fällt die Verzögerung aus.

- Wird die Resonanzdrehzahl überwunden (Kurven mit $D_i=0$ und $0,04$), $\dot{\varphi}/\omega_0 > 1$, so nehmen die Biegeamplituden wieder ab und die überschüssige Energie wird wieder zurück in die Rotation überführt. Dadurch fährt der Rotor kurzzeitig sogar mit einer höheren Beschleunigung als zuvor hoch.
- Bei fehlender innerer Dämpfung ($D_i=0$) verläuft der weitere Hochlauf ereignislos mit sehr kleinen Amplituden (*Selbstzentrierung*, siehe Aufgabe 5.5) bei nahezu konstanter Drehbeschleunigung.
- Mit innerer Dämpfung (Kurve mit $D_i=0,04$) fährt der Rotor kurzzeitig über die Stabilitätsgrenzdrehzahl Ω_{Gr} hinaus, fällt aber wieder zurück und schwingt sich schließlich an der Stabilitätsgrenzdrehzahl ein. Auch hier findet wie an der Resonanzdrehzahl ein Energietransfer von der Rotations- in die Biegebewegung statt. Weil aber die instabilen Schwingungen nicht wieder abklingen, wird immer mehr Energie aus der Rotation abgezogen, so dass die Drehzahl sinkt. Unterhalb der Stabilitätsgrenze klingen die Biegeschwingungen dann wieder ab und die Energie wird zurück in die Drehbewegung überführt. Dann beschleunigt der Rotor erneut.

Diskussion

Die Amplitude des Rotors beim Hängenbleiben an der Stabilitätsgrenze kann aus der Bilanz zwischen der Antriebsleistung und der Leistung der inneren Dämpfung berechnet werden, siehe [10]. Interessanterweise hängt sie nicht von der Größe der

inneren Dämpfung, sondern nur vom Antriebsmoment, der Eigenkreisfrequenz und der äußeren Dämpfung ab.

In dieser Aufgabe wurde ausschließlich eine viskose innere Dämpfung untersucht, die die Werkstoffdämpfung von Metallen recht gut abbildet, [36, Kapitel 4]. Für die in der Praxis viel bedeutsamere, da deutlich größere Fügestellendämpfung ist diese Modellierung jedoch unzureichend. Besser geeignet sind in diesem Fall Modelle mit COULOMBSchen Reibelementen, für die in [36, Kapitel 4] auch die Stabilitätsgrenze hergeleitet wird. Der Artikel [8] vergleicht die An- und Auslaufvorgänge hinsichtlich des Stabilitätsverhaltens für drei verschiedene Modellierungen der inneren Dämpfung.

Innere Dämpfung in Rotoren führt zu selbsterregten, instabilen Schwingungen, die zur Zerstörung des Rotors führen können. Daher ist bei der Konstruktion auf eine möglichst geringe Werkstoffdämpfung sowie auf eine ausreichend feste Ausführung der Scheibensitze zu achten.

Weiterführende Literatur

- [8] Baumann, K., E. Böpple, R. Markert und W. Schwarz: „Einfluss der inneren Dämpfung auf das dynamische Verhalten von elastischen Rotoren“. In: *VDI-Berichte Nr. 2003. Schwingungsdämpfung*. Wiesloch, Jan. 2007, S. 55–69.
- [10] Bernert, K., R. Markert und H. I. Weber: „Influence of Internal Damping on Run-up and Run-down Processes of Rotors“. In: *Proceedings of the 7th IFToMM International Conference on Rotor Dynamics: September 25 - 28, 2006, Vienna, Austria; TU Vienna*. Paper-ID 115. 2006, S. 1–10.
- [36] Gasch, R., R. Nordmann und H. Pfützner: *Rotordynamik*. 2. Auflage. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 2006.
- [63] Markert, R.: *Resonanzdurchfahrt unwuchtiger biegeelastischer Rotoren*. Fortschrittberichte der VDI-Zeitschriften. Reihe 11, Nr. 11. Düsseldorf VDI-Verlag, 1980. Diss., TU Berlin.
- [64] Markert, R., H. Pfützner und R. Gasch: „Mindestantriebsmoment zur Resonanzdurchfahrt von unwichtigen elastischen Rotoren“. In: *Forschung im Ingenieurwesen*. Bd. 46 (1980) Nr. 2. 1980, S. 33–68.

Maschinendynamik – Aufgaben und Beispiele

Beitelschmidt, M.; Dresig, H. (Hrsg.)

2017, IX, 447 S. 224 Abb., 29 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-662-53434-2