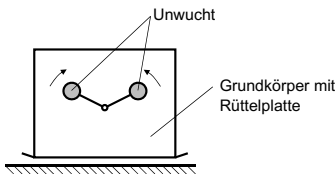


7.7 Periodische Bewegungen eines Bodenverdichters

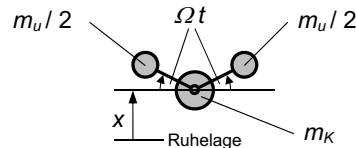
Bodenverdichter werden in unterschiedlichen Ausführungsformen im Tief- und Straßenbau eingesetzt. Durch das Abheben und Wiederaufsetzen des Verdichters auf dem Boden entstehen unstetige Bewegungsabläufe. Im vorliegenden Beispiel wird ein einfaches Berechnungsmodell mit einem Freiheitsgrad verwendet, dessen Bewegungsgleichung abschnittsweise gelöst wird.

*

Die schematische Darstellung im Bild 1a zeigt den Bodenverdichter mit der Gesamtmasse m , der durch zwei mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω gegensinnig umlaufende Unwuchtkörper mit jeweils der Masse $1/2 m_u$ und einem Schwerpunktabstand r_u erregt wird. Für ein einfaches Modell soll der Stoß auf den Boden als vollplastisch angesehen sowie die Bodenverformung und Stoßzeit vernachlässigt werden. Von Interesse sind die Bewegungen des Verdichters, insbesondere mögliche periodische Bewegungen, die in der Frequenz mit der Umlaufbewegung der Unwuchten übereinstimmen.



(a) Schematische Darstellung



(b) Berechnungsmodell

Bild 1: Darstellung des Bodenverdichters

Gegeben:

- m_K Masse des Grundkörpers mit Rüttelplatte
- m_u Gesamte Unwuchtmass (auf zwei gegenläufige Unwuchten verteilt)
- m Gesamtmasse des Verdichters, $m = m_K + m_u$
- r_u Unwuchtradius
- Ω Erregerkreisfrequenz
- g Erdbeschleunigung

Gesucht:

- 1) Bewegungsgleichung
- 2) Zeitpunkt t_0 für das Abheben der Rüttelplatte vom Boden und Bedingung für den Zeitpunkt t_1 des Wiederauftreffens
- 3) Bedingung für die Stabilität der Bewegungsform

* Autor: Jörg-Henry Schwabe, Quelle [43, Aufgabe 30]

Lösung:**Zu 1):**

Das System ist in der Flugphase konservativ. Beim Aufsetzen auf den Boden (plastischer Stoß) wird der gesamte aus der Schwerpunktbewegung des Verdichters stammende Anteil der kinetischen Energie dissipiert. Die Periodizitätsbedingung erfordert, dass in jeder Umlaufperiode der Unwuchtmassen ein Absprung des Verdichters aus der Ruhelage und ein Aufsetzen auf dem Boden erfolgen.

Zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen in der Flugphase werden die LAGRANGESchen Gleichungen 2. Art genutzt:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \quad (1)$$

Dabei ist $q = x$ die generalisierte Koordinate und

$$L = W_{\text{kin}} - W_{\text{pot}} \quad (2)$$

die LAGRANGESche Funktion. Die kinetische Energie ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} W_{\text{kin}} &= \frac{1}{2}(m - m_u)\dot{x}^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{m_u}{2} \left((\dot{x} + r_u \Omega \cos \Omega t)^2 + (r_u \Omega \sin \Omega t)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_u r_u^2 \Omega^2 + m_u r_u \dot{x} \Omega \cos \Omega t. \end{aligned} \quad (3)$$

Mit dem Energieniveau $W_{\text{pot}} = 0$ bei der Ruhelage $x = 0$ beträgt die potentielle Energie:

$$W_{\text{pot}} = mgx + m_u g r_u \sin \Omega t. \quad (4)$$

Mit Anwendung der LAGRANGESchen Gleichungen (1) ergibt sich die Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{x} - m_u r_u \Omega^2 \sin \Omega t + mg = 0 \quad \text{bzw.} \quad \ddot{x} = \frac{m_u r_u \Omega^2}{m} \sin \Omega t - g. \quad (5)$$

Zu 2):

Der Absprung soll zum Zeitpunkt t_0 erfolgen. Zu diesem Zeitpunkt befindet sich der Verdichter noch in Ruhe, aber die Beschleunigung wird positiv und wächst weiter an. Mit der Beschleunigung und dem Ruck zum Zeitpunkt t_0

$$\ddot{x} = 0 \quad \text{und} \quad \ddot{\ddot{x}} > 0 \quad (6)$$

ergibt sich aus (5)

$$\underline{\underline{t_0 = \frac{1}{\Omega} \arcsin \frac{mg}{m_u r_u \Omega^2},}} \quad (7)$$

wobei Ωt_0 zwischen 0 und $\pi/2$ liegt.

Mit den Anfangsbedingungen

$$x(t_0) = 0, \quad \dot{x}(t_0) = 0 \quad (8)$$

kann die Differentialgleichung (5) integriert werden:

$$\dot{x}(t) = \frac{m_u r_u \Omega}{m} (\cos \Omega t - \cos \Omega t_0) - g(t - t_0), \quad (9)$$

$$x(t) = \frac{m_u r_u}{m} (\sin \Omega t_0 - \sin \Omega t + \Omega(t - t_0) \cos \Omega t_0) - \frac{1}{2} g(t - t_0)^2. \quad (10)$$

Der Zeitpunkt t_1 des Wiederauftreffens des Verdichters nach der Flugphase ergibt sich aus Gleichung (10) durch die Bedingung $x(t_1) = 0$. Mit Gleichung (7) ist zudem eine Eliminierung von g möglich, womit folgende Bedingung zur Bestimmung von t_1 bevorzugt numerisch auszuwerten ist:

$$\sin \Omega t_0 - \sin \Omega t_1 + \Omega(t_1 - t_0) \cos \Omega t_0 - \frac{1}{2} \Omega^2 (t_1 - t_0)^2 \sin \Omega t_0 = 0. \quad (11)$$

Zu 3):

Als eine erste Bewegungsform des Verdichters soll ein Bewegungsablauf verstanden werden, bei dem sich der Verdichter vor dem erneuten Absprung mindestens einen Augenblick in Ruhe befindet (siehe Bild 2).

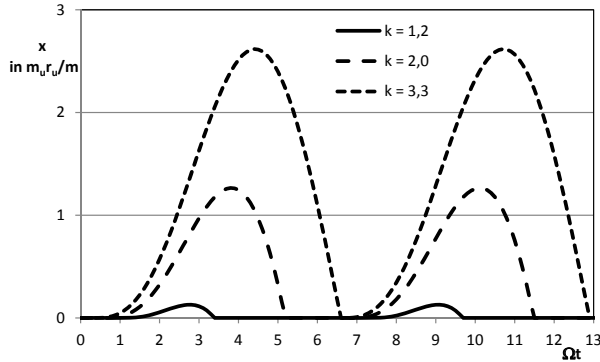


Bild 2: Beispiele für die Bewegungsverläufe im Zeitbereich

Die Periodizitätsbedingung lautet dafür:

$$\Omega t_1 - \Omega t_0 < 2\pi. \quad (12)$$

Vorteilhaft kann eine Kenngröße k eingeführt werden, die das Verhältnis der Amplitude der Unwuchtkraft zur Gewichtskraft des Verdichters angibt:

$$k = \frac{m_u r_u \Omega^2}{mg}. \quad (13)$$

Mit einer Vorgabe von k wird der Teil des Bildes 3 für die erste Bewegungsform erhalten, indem aus Gleichung (7) t_0 und aus Gleichung (11) t_1 ermittelt wird. Die erste Bewegungsform ist für ein Verhältnis k zwischen 1 und 3,297 möglich.

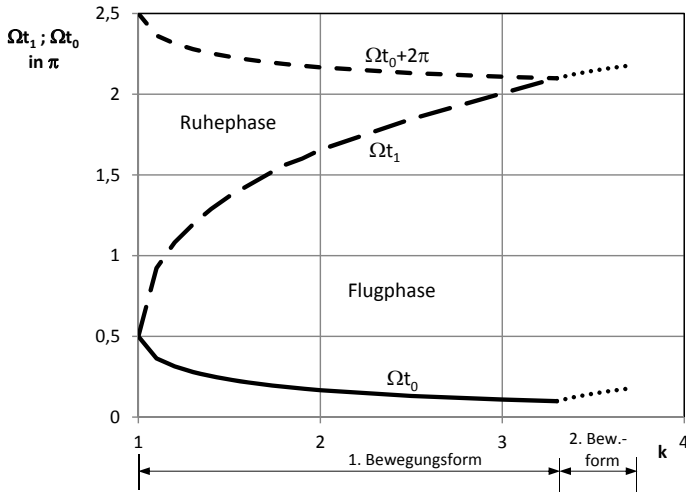


Bild 3: Parameter der Bewegungsformen des Verdichters

Als eine zweite Bewegungsform des Verdichters ist denkbar, dass der Verdichter nach jedem Aufsetzen sofort wieder abspringt. In diesem Fall gilt:

$$\Omega t_1 - \Omega t_0 = 2\pi. \quad (14)$$

Die Beschleunigung $\ddot{x}$ nach Gleichung (5) ist dann zum Absprunzeitpunkt t_0 im Allgemeinen nicht Null, sondern positiv. Gleichung (14) in die weiterhin gültige Gleichung (10) eingesetzt und mit der Bedingung $x(t_1) = 0$ aufgelöst ergibt für die zweite Bewegungsform:

$$\cos \Omega t_0 = \frac{\pi}{k}. \quad (15)$$

Eine wichtige Frage ist, ob die ermittelten Bewegungsformen auch stabil sind. An dieser Stelle soll nur die Stabilität der Bewegung gegen eine Störung der Anfangsparameter, ausgedrückt durch eine infinitesimale Änderung der Absprunzeit t_0 , untersucht werden.

Für die erste Bewegungsform ist die Stabilität gegeben, da bei einer Änderung von t_0 sich die Auftreffzeit t_1 zwar ändert, es jedoch durch die Ruhephase keine Auswirkungen auf den nächsten Zyklus gibt.

Bei der zweiten Bewegungsform soll die Auswirkung der Änderung von t_0 um dt_0 auf die Auftreffzeit t_1 und damit gleichzeitig neue Absprunzeit für den nächsten

Zyklus betrachtet werden. Die Koordinate $x(t_0 + 2\pi/\Omega)$ nach Gleichung (10) ändert sich um:

$$dx \Big|_{t_0+2\pi/\Omega} = \frac{\partial x}{\partial t_0} \Big|_{t_0+2\pi/\Omega} dt_0 = -\frac{2\pi}{\Omega} \left(\frac{m_u r_u \Omega^2}{m} \sin \Omega t_0 - g \right) dt_0. \quad (16)$$

Die Änderung von t_1 wird aus dx und der Geschwindigkeit nach Gleichung (9) zu dem Zeitpunkt berechnet:

$$\dot{x}(t_0 + 2\pi/\Omega) = -2\pi g/\Omega, \quad (17)$$

$$dt_1 = -\frac{dx}{\dot{x}} \Big|_{t_0+2\pi/\Omega} = -\left(\frac{m_u r_u \Omega^2}{mg} \sin \Omega t_0 - 1 \right) dt_0 = -(k \sin \Omega t_0 - 1) dt_0. \quad (18)$$

Stabil ist die zweite Bewegungsform dann, wenn dt_1 als Zeitverschiebung für den nächsten Zyklus gegenüber dt_0 nicht weiter anwächst. Dazu muss der Quotient

$$\left| \frac{dt_1}{dt_0} \right| = |k \sin \Omega t_0 - 1| \leq 1 \quad (19)$$

sein, was mit $k \leq 3,724$ erfüllt wird.

Die Stabilitätsbetrachtungen ergeben, dass die zweite Bewegungsform nur für ein k zwischen 3,297 und 3,724 auftritt, wie im Bild 3 dargestellt.

Das einfache Modell des Bodenverdichters zeigt, dass zwei Bewegungsformen mit und ohne Ruhephase möglich sind. Komplexere Modelle des Bodenverdichters sollten insbesondere auch die Bodeneigenschaften enthalten und können gegebenenfalls den Verdichter als Mehrmassensystem aus Rüttelplatte, Federn und Maschinenrahmen wiedergeben.

Weiterführende Literatur

- [56] Lohr, W.: *Untersuchungen zum Schwingungsverhalten von Vibrationsplatten mit Hilfe der Mehrkörperdynamik*. Shaker Verlag, 2005.
- [67] Mohsin, S. H.: *Beitrag zur theoretischen Erfassung von Stampfsystemen*. Diss. TU Dresden, 1965.

Maschinendynamik – Aufgaben und Beispiele

Beitelschmidt, M.; Dresig, H. (Hrsg.)

2017, IX, 447 S. 224 Abb., 29 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-662-53434-2