

A

A, Menge der \mathcal{A} holomorphen Funktionen. Die Bezeichnung „A“ rührt daher, daß holomorphe Funktionen früher häufig auch als „analytische Funktionen“ bezeichnet wurden.

a posteriori-Fehlerabschätzung, Abschätzung des Fehlers eines (numerischen) Verfahrens *nach* Durchführung des Verfahrens, also mit Kenntnis der bereits berechneten Werte. Eine typische Anwendung ergibt sich aus dem \mathcal{A} Banachschen Fixpunktsatz.

a posteriori-Verteilung, statistische Verteilung für eine bedingte Wahrscheinlichkeit, die sich aus der \mathcal{A} Bayesschen Formel ergibt. Diese wird in der Versicherungsmathematik im Rahmen der \mathcal{A} Credibility-Theorie angewendet, um die individuelle Risikoerfahrung zu bewerten. Grundlage ist eine a priori-Verteilung mit Dichte f_{Λ} , mit einem für das einzelne Risiko festen aber unbekannten Parameter Λ . Aus der Verteilung der durchschnittlichen Schadenzahl N aller Risiken und der individuellen Schadenerfahrung ergibt sich die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(N = n | \Lambda = \lambda)$. Damit bestimmt man einen Bayes-Schätzer: Die bedingte Wahrscheinlichkeit für eine Realisierung $\Lambda = \lambda$ ist

$$P(\Lambda = \lambda | N = n) = \frac{P(N = n | \Lambda = \lambda) P(\Lambda = \lambda)}{P(N = n)}.$$

Dies ermöglicht eine genauere Bewertung des individuellen Risikos. Anwendung findet dies z. B. beim Schadenfreirabatt in der Kfz-Versicherung.

a posteriori-Wahrscheinlichkeit, \mathcal{A} Bayessche Formel.

a priori-Fehlerabschätzung, Abschätzung des Fehlers eines (numerischen) Verfahrens *vor* Durchführung des Verfahrens. Eine solche Fehlerabschätzung wird daher i. allg. schlechter sein als eine \mathcal{A} a posteriori-Fehlerabschätzung. Eine typische Anwendung ergibt sich aus dem \mathcal{A} Banachschen Fixpunktsatz.

a priori-Verteilung, geschätzte Wahrscheinlichkeitsverteilung mit einem vorher (a priori) unbekannten Verteilungsparameter. Unter Zusatzannahmen berechnet man daraus mit Hilfe der \mathcal{A} Bayesschen Formel eine \mathcal{A} a posteriori-Verteilung.

a priori-Wahrscheinlichkeit, \mathcal{A} Bayessche Formel.

Abaelardus, Petrus, Abélard, Pierre, französischer Philosoph, Theologe und Logiker, geb. 1079 Palais (bei Nantes, Frankreich), gest. 21.4.1142 St.-Marcel (bei Châlon-sur-Saône, Frankreich).

Abaelardus studierte Philosophie und Theologie und wurde einer der bedeutendsten Logiker des 12. Jahrhunderts. Mit seiner Lehrmethode „dicta pro et contra“ wurde er zum Mitbegründer der scholastischen Methode der logischen Disputierkunst und trug auch wesentlich zur Gründung der Pariser Universität bei. Seine „Dialectica“ enthält bereits wichtige Konzepte der scholastischen Logik wie z. B. eine Bezeichnungstheorie, Analysen logischer Funktoren und Quantoren sowie eine Schlußtheorie. Er entwickelte eine Termlogik. Danach besteht die Bedeutung eines Satzes im „dictum propositionis“, dessen Grundlage die Beziehung zwischen den Dingen ist.

Abaelardus präsentierte eine Inhärenz- und eine Identitätstheorie. In der Wahrheitstheorie unterschied er zwischen „verus“, dem Prädikat von Dingen, und „verum“, dem von Aussagen.

Er definierte den Term „wahr“ als ein Prädikat von Aussagen wie folgt: p ist äquivalent zu „Die Aussage p ist wahr“ genau dann, wenn der Sachverhalt existiert, auf welchen sich p bezieht.

Abakus, Rechengerät, vermutlich babylonischen Ursprungs, das im europäischen Mittelalter weit verbreitet von Kaufleuten verwendet wurde und im ostasiatischen Raum heute weiterhin Anwendung findet. Auch in vielen anderen Kulturkreisen haben sich Handrechengeräte auf der Grundlage des Abakus bis in die Neuzeit erhalten.

Der früheste „Abakus“ war vermutlich eine Rechenoberfläche, auf die die Babylonier Sand streuten, um darauf Ziffern, deren Positionen numerische Werte darstellten, für Rechnungen einzugravieren. Der im deutschen gängige Begriff ist vermutlich von seiner griechischen Form „abakos“ abgeleitet, bzw. von einem semitischen Wort wie dem hebräischen „ibeq“ („Staub wischen“; bzw. als Substantiv „abaq“ „Staub“). In China spricht man von der „Perlen-Rechnung“, die erstmals in einer Kompilation des sechsten Jahrhunderts erwähnt ist. In einem Werk der Yuan-Dynastie von Liu Yin (1248–1293) finden sich Merkreime von Algorithmen für die vier Grundrechenarten.

Die in China gängigste $2 | 5$ Form bestand aus sieben Perlen in einer Reihe, wobei zwei fünfwertige Perlen durch einen horizontalen Querstab von den restlichen fünf Einheits-Perlen einer Reihe abgetrennt sind. Bei Ausgrabungen in der südchinesischen Provinz Fujian fanden Archäologen 1987 einen $1 | 5$ Abakus als Grabbeigabe eines Ministers, der zwischen 1543 und 1610 lebte. In China und Japan erfreuen sich heute Schnelligkeitswettbewerbe zwischen Spezialisten und Benutzern von Taschenrechnern großer Beliebtheit. Eine große Zahl von Vereinen und Privatleuten beschäftigt sich dort auch mit der Konstruktion neuer Formen dieses Rechengerätes und dem Entwurf schnellerer Algorithmen.

Abbildung, Zuordnung f zwischen zwei Mengen A und B , die jedem Element der Menge A genau ein Element der Menge B zuordnet.

Mengentheoretisch ist eine Abbildung eine links-totale rechtseindeutige \mathcal{A} -Relation zwischen zwei Mengen A und B , d.h. ein geordnetes Tripel (A, B, f) . Die Menge f ist eine Teilmenge von $A \times B$ mit der Eigenschaft, daß für jedes Element $x \in A$ genau ein Element $y \in B$ existiert mit $(x, y) \in f$. Oftmals ist es klar, um welche Mengen A und B es sich handelt, und die Menge f wird mit der Abbildung (A, B, f) identifiziert.

Die Menge A heißt Definitions- oder Urbildbereich, bezeichnet mit $D(f)$ oder D_f , und B heißt Werte- oder Bildbereich, bezeichnet mit $R(f)$ oder R_f . Man schreibt auch

$$f : A \rightarrow B, \quad x \mapsto y$$

und nennt $x \mapsto y$ Abbildungsvorschrift von f . Ist $(x, y) \in f$, so wird y auch als $f(x)$ bezeichnet. Ist $T \subseteq A$, so heißt die Menge

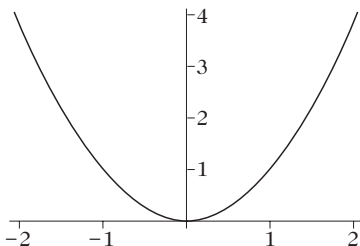
$$f(T) := \{f(x) \in B : x \in T\}$$

das Bild von T unter der Abbildung f , $f(A)$ heißt das Bild von f . Ist hingegen U eine Teilmenge von B , so heißt die Menge

$$f^{-1}(U) := \{x \in A : f(x) \in U\}$$

das Urbild von U unter f . Der Graph der Abbildung f ist die Menge $\{(x, f(x)) \in A \times B : x \in A\}$. Geometrische Veranschaulichungen dieser Menge werden ebenfalls als Graph von f bezeichnet.

Beispiel: Man betrachte die Abbildung $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$. Der Definitionsbereich besteht aus dem abgeschlossenen Intervall $[-2, 2]$, der Bildbereich sind die reellen Zahlen. Das Bild von f ist das abgeschlossene Intervall $[0, 4]$. Für $T := [-1, 0]$ gilt $f(T) = [0, 1]$. Für $U := [-1, 0.25]$ gilt $f^{-1}(U) = [-0.5, 0.5]$. Die Abbildung zeigt den Graph der Abbildung f , wobei, wie üblich, die horizontale Achse den Definitionsbereich und die vertikale Achse den Wertebereich darstellt.



Graph der Abbildung $x \mapsto x^2$.

Zwei Abbildungen f und g heißen gleich genau dann, wenn ihre Definitions- und Wertebereiche identisch sind und sie als Mengen übereinstimmen, das heißt $f, g : A \rightarrow B$, und es gilt $f(x) = g(x)$ für alle $x \in A$. Die Menge der Abbildungen mit Definitionsbereich A und Wertebereich B wird mit B^A oder $\mathcal{F}(A, B)$ bezeichnet. Unter der Komposition oder Hintereinanderausführung zweier Abbildungen f und g mit $f : A \rightarrow B, g : C \rightarrow D$ und $f(A) \subseteq C$ versteht man die Abbildung $g \circ f : A \rightarrow D$ (lies: g nach f oder g komponiert mit f), definiert durch

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)).$$

Beispiel: Man betrachte die Abbildungen $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ und $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{4}x$. Dann gilt

$$f([-1, 1]) = [0, 1] \subseteq D(g)$$

und

$$g([-1, 1]) = [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}] \subseteq D(f).$$

Es ergeben sich die Kompositionen $g \circ f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \frac{1}{4}x^2$ und $f \circ g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\frac{1}{4}x) = \frac{1}{16}x^2$. Das Beispiel zeigt, daß die Komposition von Abbildungen i.allg. selbst dann nicht kommutativ ist, wenn Definitions- und Wertebereich der komponierten Abbildungen übereinstimmen.

Das Komponieren von Abbildungen ist hingegen assoziativ, das heißt, für drei Abbildungen $f : A \rightarrow B, g : C \rightarrow D, h : E \rightarrow F$ mit $f(A) \subseteq C$ und $g(C) \subseteq E$ gilt

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Es seien $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ Abbildungen, I eine Indexmenge, die Mengen $S, T, S_i, i \in I$ seien Teilmengen von A , die Mengen $U, V, U_i, i \in I$ seien Teilmengen von B , und W sei eine Teilmenge von C . Dann gelten die folgenden Gesetze bezüglich Abbildungen und verschiedenen Verknüpfungsoperationen von Mengen:

$$f(S \cap T) \subseteq f(S) \cap f(T),$$

$$f\left(\bigcap_{i \in I} S_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(S_i),$$

$$f(S \cup T) = f(S) \cup f(T),$$

$$f\left(\bigcup_{i \in I} S_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(S_i),$$

$$f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V),$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} U_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(U_i),$$

$$f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V),$$

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i),$$

$$f(f^{-1}(U)) \subseteq U, \quad f^{-1}(f(S)) \supseteq S,$$

$$f^{-1}(U \setminus V) = f^{-1}(U) \setminus f^{-1}(V),$$

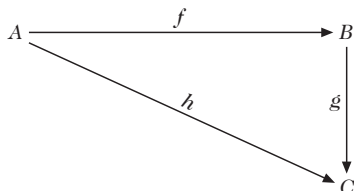
$$(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W)).$$

Das folgende Beispiel zeigt, daß sich i.allg. die Teilmengenbeziehungen nicht durch eine Gleichheit ersetzen lassen. Für die Abbildung $f : \{1, 2\} \rightarrow \{1, 2\}$, $f(1) = f(2) = 1$, ist $f(\{1\} \cap \{2\}) = \emptyset \subsetneq \{1\} = f(\{1\}) \cap f(\{2\})$, $f(f^{-1}(\{1, 2\})) = \{1\} \subsetneq \{1, 2\}$, $f^{-1}(f(\{1\})) = \{1, 2\} \supsetneq \{1\}$.

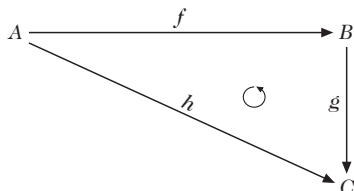
Oft veranschaulicht man sich den Zusammenhang zwischen Abbildungen in einem Abbildungsdiagramm. Im einfachsten Fall wird eine Abbildung $f : A \rightarrow B$ dargestellt:

$$A \xrightarrow{f} B.$$

Sind Abbildungen $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$, $h : A \rightarrow C$, gegeben, so lassen sie sich als folgendes Diagramm darstellen:



Gilt dabei $h = g \circ f$, so nennt man das Diagramm kommutativ und deutet dies manchmal durch das Symbol \circlearrowright im Innern des Diagramms an.



In ähnlicher Weise lassen sich sehr komplizierte Beziehungen zwischen Abbildungen in Diagrammen darstellen. Ein (Teil-)Diagramm wird kommutativ genannt, wenn für je zwei Mengen A und B des (Teil-)Diagramms und je zwei Wege ϕ und ψ in Pfeilrichtung von A nach B gilt, daß die Hin-

tereinanderausführung der Abbildungen entlang ϕ gleich der Hintereinanderausführung der Abbildungen entlang ψ ist.

Abbildungen mit speziellen Eigenschaften (man vergleiche hierzu auch die jeweiligen speziellen Stichwortartikel):

Eine Abbildung $f : A \rightarrow B$ heißt surjektiv genau dann, wenn $f(A) = B$, das heißt, wenn der Wertebereich von f mit dem Bild von f übereinstimmt. Man spricht dann auch von einer Abbildung auf die Menge B und schreibt $f : A \twoheadrightarrow B$. Die surjektiven Abbildungen sind genau die bitotalen rechtseindeutigen \mathcal{A} -Relationen. f heißt injektiv (oder auch eindeutig, Injektion, Einbettungsabbildung, Einbettung, Inklusionsabbildung, Inklusion) genau dann, wenn für alle $y \in B$ gilt, daß $\#f^{-1}(\{y\}) \in \{0, 1\}$, das heißt, jedes Element des Bildbereiches von f ist das Bild höchstens eines Elementes des Urbildbereiches von f . Man schreibt dann auch $f : A \hookrightarrow B$. Die injektiven Abbildungen sind genau die linkstotalen eineindeutigen Relationen.

Die Abbildung f heißt bijektiv genau dann, wenn sie sowohl surjektiv als auch injektiv ist. Die bijektiven Abbildungen sind genau die bitotalen eineindeutigen Relationen. Ist A eine Teilmenge von B , so heißt die Abbildung $i : A \rightarrow B$, $x \mapsto x$ Inklusionsabbildung (oder auch Einbettungsabbildung, Inklusion, Einbettung) von A in B . Gilt sogar $A = B$, so schreibt man $I_A := Id_A := i$ und nennt I_A die Identität (auch identische Abbildung, Eins-Abbildung) auf A . Eine Abbildung $f : A \rightarrow B$ ($A \subseteq B$ nicht länger vorausgesetzt) ist genau dann surjektiv, wenn es eine Abbildung $g : B \rightarrow A$ gibt, so daß $f \circ g = I_B$; f ist genau dann injektiv, wenn es eine Abbildung $g : B \rightarrow A$ gibt, so daß $g \circ f = I_A$. Ist f sogar bijektiv, so stimmen die durch Surjektivität und Injektivität gegebenen Abbildungen überein. Die so erhaltene Abbildung wird mit $f^{-1} : B \rightarrow A$ bezeichnet und die Umkehrabbildung (bzw. Umkehrfunktion, inverse Abbildung) von f genannt.

Beispiele:

Die Abbildung $s : \{1, 2\} \rightarrow \{4, 5, 6\}$, $x \mapsto x + 3$ ist injektiv, jedoch nicht surjektiv. Für die Abbildung $s_l : \{4, 5, 6\} \rightarrow \{1, 2\}$, $s_l(4) = 1$, $s_l(5) = s_l(6) = 2$ gilt $s_l \circ s = I_{\{1, 2\}}$. Jedoch gibt es keine Abbildung $s_r : \{4, 5, 6\} \rightarrow \{1, 2\}$ mit $s \circ s_r = I_{\{4, 5, 6\}}$. Umgekehrt ist die Abbildung s_l surjektiv, jedoch nicht injektiv. Es gibt somit keine Abbildung $s_{ll} : \{1, 2\} \rightarrow \{4, 5, 6\}$ mit $s_{ll} \circ s_l = I_{\{4, 5, 6\}}$.

Die Abbildung $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{4, 5, 6\}$, $x \mapsto x + 3$ ist bijektiv und hat die Umkehrabbildung $f^{-1} : \{4, 5, 6\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$, $x \mapsto x - 3$.

Eine Abbildung mit der leeren Menge als Definitionsbereich heißt leere Abbildung. Der Graph einer solchen Abbildung ist ebenfalls die leere Menge. Eine Abbildung $f : A \rightarrow B$ heißt genau dann konstant, wenn das Bild von f aus genau

einem Element des Wertebereichs besteht. Beispiel: $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto -1$.

$f: A \rightarrow B$ heißt multivariate Abbildung, Abbildung von n Variablen, oder n -stellig, $n \in \mathbb{N}$, genau dann, wenn A Teilmenge des kartesischen Produktes $M_1 \times \cdots \times M_n$ der n Mengen M_1, \dots, M_n ist. Man schreibt dann oft $f(x_1, \dots, x_n)$ anstatt $f((x_1, \dots, x_n))$.

Ein Beispiel für eine n -stellige Abbildung ist die euklidische Norm $N: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$,

$$N(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Ist G eine Gruppe, so ist $p: \mathbb{Z} \times G \rightarrow G, (k, g) \mapsto g^k$ ein Beispiel für eine zweistellige Abbildung. Ist F der Graph einer Abbildung $f: A \rightarrow B$, so sind die Projektionen

$$\pi_1: F \rightarrow A, \pi_1(x, f(x)) = x$$

und

$$\pi_2: F \rightarrow B, \pi_2(x, f(x)) = f(x)$$

weitere Beispiele für zweistellige Abbildungen.

Die Abbildung $g: C \rightarrow B$ heißt Einschränkung der Abbildung $f: A \rightarrow B$ genau dann, wenn C eine Teilmenge von A ist und $g(x) = f(x)$ für alle $x \in C$ gilt. Man schreibt $g = f|_C$ (lies: f eingeschränkt auf C). Umgekehrt wird dann f als Fortsetzung der Abbildung g bezeichnet.

Beispiel: Die konstante Funktion $h: \mathbb{R}^+ \rightarrow \{-1, 0, 1\}, x \mapsto 1$ ist eine Einschränkung der Signumfunktion $\text{sign}: \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$.

Eine Abbildung f , deren Definitionsbereich aus den natürlichen Zahlen besteht, heißt Folge. Übliche Bezeichnungen sind $f = (a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$. Auch Abbildungen, deren Definitionsbereich zwar abzählbar und linear geordnet, jedoch von den natürlichen Zahlen verschieden ist, werden gelegentlich als Folge bezeichnet. Ist der Definitionsbereich eine endliche Menge, so wird die Abbildung manchmal als endliche Folge bezeichnet.

Beispiele für Folgen sind

$$\begin{aligned} (3(n+1)+1)_{n \in \mathbb{N}_0} &= (4, 7, 10, \dots), \\ ((\frac{1}{2})^n)_{n \in \mathbb{N}_0} &= (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots), \\ (p^p)_{p \in \{p: p \text{ ist Primzahl}\}} &= (4, 27, 3125, \dots), \\ (2k)_{k \in \mathbb{Z}} &= (\dots, -2, 0, 2, \dots), \\ (-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1). \end{aligned}$$

Soll hervorgehoben werden, daß es sich beim Wertebereich der Abbildung $\mathcal{F}: I \rightarrow \mathcal{M}$ um eine Menge von Mengen handelt, so wird die Menge I häufig Indexmenge genannt und \mathcal{F} als eine Familie von Mengen bezeichnet. Man schreibt \mathcal{F} dann auch in der Form $\mathcal{F} = (M_i)_{i \in I}$, wobei $M_i := \mathcal{F}(i)$ gesetzt wird.

Beispiel einer Familie von Mengen ist $(\{k \in \mathbb{Z} : |k| \leq n\})_{n \in \mathbb{N}}$.

Abbildung auf eine Menge, *surjektive Abbildung*, eine Abbildung $f: A \rightarrow B$ mit $f(A) = B$, das heißt, der Wertebereich von f ist mit dem Bild von f identisch.

Abbildung einer zweidimensionalen Schnittfläche, Poincaré-Abbildung einer zweidimensionalen symplektischen Schnittfläche in der Nähe einer geschlossenen Integralkurve in einer dreidimensionalen Energiehyperfläche eines Hamiltonschen Systems auf einer vierdimensionalen symplektischen Mannigfaltigkeit.

Diese Abbildung operiert auf der zweidimensionalen Schnittfläche symplektisch, also flächentreu, und ihre Fixpunkte entsprechen geschlossenen Integralkurven in der Nähe der vorgegebenen. Für Poincaré war dies der Ausgangspunkt für seinen sog. geometrischen Satz, der später in Arnolds Vermutung stark verallgemeinert wurde.

Abbildung von n Variablen, eine Abbildung $f: A \rightarrow B$ derart, daß A Teilmenge des kartesischen Produktes $M_1 \times \cdots \times M_n$ der n Mengen M_1, \dots, M_n ist. Man schreibt dann oft $f(x_1, \dots, x_n)$ anstelle von $f((x_1, \dots, x_n))$.

Abbildung zwischen Flächen, gesondert zu betrachtende Art von Abbildungen. Unter den Flächenabbildungen sind von besonderem Interesse

- (a) isometrische Abbildungen oder Abbildungen,
- (b) Ähnlichkeitsabbildungen,
- (c) winkeltreue oder konforme Abbildungen,
- (d) affine Abbildungen,
- (e) flächentreue oder inhaltstreue Abbildungen.

Zur analytischen Beschreibung einer Abbildung $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ dienen Parameterdarstellungen $\bar{\Phi}(u_1, u_2)$ und $\Phi(u_1, u_2)$, die auf dem gleichen Parameterbereich $U \subset \mathbb{R}^2$ definiert sind. In diesen Parametern wird f als differenzierbare Abbildung von U in sich durch ein Paar $\bar{u}_1 = \bar{u}_1(u_1, u_2)$, $\bar{u}_2 = \bar{u}_2(u_1, u_2)$ differenzierbarer Funktionen beschrieben. Wählt man statt der Bezeichnung E, F, G (bzw. $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$) für die Koeffizienten die Indexschreibweise $g_{11} = E, g_{12} = g_{21} = F, g_{22} = G$ (bzw. $\bar{g}_{11} = \bar{E}, \bar{g}_{12} = \bar{g}_{21} = \bar{F}, \bar{g}_{22} = \bar{G}$), so transformiert sich die erste Gaußsche Fundamentalform $\bar{\mathcal{F}}$ nach der Formel

$$\begin{aligned} \bar{g}_{ij}(u_1, u_2) &= \\ &= \sum_{r,s=1}^2 \bar{g}_{\bar{r},\bar{s}}(\bar{u}_1, \bar{u}_2) \frac{\partial \bar{u}_r(u_1, u_2)}{\partial u_i} \frac{\partial \bar{u}_s(u_1, u_2)}{\partial u_j}, \end{aligned}$$

wobei $\bar{g}_{\bar{r},\bar{s}}$ die Koeffizienten der bezüglich der Koordinaten (\bar{u}_1, \bar{u}_2) gebildeten ersten Fundamentalform sind.

Die folgende Tabelle enthält die Charakterisierungen der verschiedenen Abbildungstypen an-

hand der Koeffizienten \bar{g}_{ij} und g_{ij} . Eine Abbildung ist

- isometrisch, wenn $\bar{g}_{ij} = g_{ij}$ gilt,
- eine Ähnlichkeitsabbildung, wenn $\bar{g}_{ij} = c^2 g_{ij}$ gilt mit einer Konstanten c ,
- winkeltreu, wenn $\bar{g}_{ij} = c^2 g_{ij}$ gilt, wobei c jetzt vom Punkt abhängen darf,
- affin, wenn die \nearrow Christoffelsymbole gleich sind: $\bar{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k$,
- geodätisch, wenn geodätische Linien in geodätische Linien überführt werden,
- inhaltstreu, wenn $\det(\bar{g}_{ij}) = \det(g_{ij})$ gilt und
- im wesentlichen inhaltstreu, wenn $\det(\bar{g}_{ij}) = c^2 \det(g_{ij})$ gilt mit einer Konstanten c .

Abbildung zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten, Sammelbegriff, der insbesondere die im folgenden erklärten Isometrien, isometrischen Immersionen und Einbettungen, konformen Abbildungen und konformen Immersionen und Einbettungen beinhaltet.

Es seien (M, g) und (N, h) Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit den metrischen Fundamentalformen g und h . Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ heißt isometrische Immersion, wenn die lineare tangierende Abbildung f_* in den Tangentialräumen als isometrische Einbettung wirkt, d. h., wenn für alle Punkte $x \in M$ und alle Tangentialvektoren $t, s \in T_x(M)$ die Bedingung

$$h(f_*(t), f_*(s)) = g(t, s) \quad (1)$$

erfüllt ist, und eine isometrische Einbettung, wenn sie außerdem eine bijektive Abbildung auf eine Untermannigfaltigkeit $\bar{M} \subset N$ ist. Bildet f zudem M bijektiv auf N ab, und ist f_* eine bijektive Abbildung der Tangentialräume, so nennt man f eine Isometrie von M und N .

Zwei Riemannsche Mannigfaltigkeiten heißen isometrisch, wenn eine isometrische Abbildung der einen auf die andere existiert. Die Verknüpfung $f_1 \circ f_2$ zweier Isometrien $f_1, f_2 : M \rightarrow M$ ist ebenso wie die inverse Abbildung f_1^{-1} wieder eine Isometrie. Daher bildet die Menge aller Isometrien einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M in sich eine Gruppe, die Isometriegruppe $I(M)$.

Gilt anstelle von (1) die allgemeinere Bedingung

$$h(f_*(t), f_*(s)) = \lambda g(t, s)$$

mit einer positiven reellen Funktion $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}_+$, so nennt man f eine konforme oder winkeltreue Abbildung oder auch konforme Immersion. Konforme Diffeomorphismen und die konforme Gruppe einer Riemannschen Mannigfaltigkeit definiert man analog zu den Isometrien und der Isometriegruppe und konforme Einbettungen analog zu den isometrischen Einbettungen. Einfachste Beispiele kon-

former Abbildungen sind \nearrow Ähnlichkeitsabbildungen zwischen Flächen.

Die einfachsten Beispiele nichtlinearer konformer Abbildungen sind die stereographische Projektion und die polare Inversion der Ebene, d. h. die Spiegelung der Ebene am Einheitskreis.

Zu erwähnen sind auch affine und geodätische Abbildungen zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Erstere bilden geodätische Linien unter Erhalt des affinen Parameters in geodätische Linien ab. Man nennt sie auch affine Transformationen. Bei geodätischen Abbildungen bleiben geodätische Linien ebenfalls erhalten. Die Forderung nach Erhalt des affinen Parameters wird jedoch nicht gestellt.

Unter den Abbildungen, die weder injektiv noch konform noch isometrisch sind, sind Riemannsche Submersionen von Interesse. Das sind surjektive Abbildungen $f : M \rightarrow N$, für die auch f_* surjektiv ist und die die Bedingung (1) nur für solche Vektoren $t, s \in T(M)$ erfüllen müssen, die auf den Tangentialräumen der Untermannigfaltigkeiten $f^{-1}(y) \subset M$ (für $y \in N$), die man auch die Fasern von f nennt, senkrecht stehen.

Abbildung zwischen Vektorverbänden, spezielle Abbildungen.

Sind X und Y \nearrow Vektorverbände, so heißt ein linearer Operator $T : X \rightarrow Y$ positiv, wenn

$$x \geq 0 \Rightarrow Tx \geq 0,$$

und T heißt regulär, wenn T Differenz zweier positiver Operatoren ist. Ist Y Dedekind-vollständig, so ist der Vektorraum $L^r(X, Y)$ aller regulären Operatoren seinerseits ein Dedekind-vollständiger Vektorverband. T heißt Verbandshomomorphismus, wenn stets $T(x \vee y) = Tx \vee Ty$ gilt; ein bijektiver Operator ist genau dann ein Verbandshomomorphismus, wenn T und T^{-1} positiv sind.

Ist T ein positiver Operator zwischen \nearrow Banach-Verbänden, so ist T automatisch stetig; daher ist auch jeder reguläre Operator stetig, aber i. allg. ist nicht jeder stetige Operator regulär. Wenn Y Dedekind-vollständig ist, definiert

$$\|T\|_r := \|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}$$

eine Banach-Verbandsnorm auf $L^r(X, Y)$, die reguläre Norm genannt wird. Für einen Dedekind-vollständigen AM-Raum Y (\nearrow AL- und AM-Räume) ist stets $L^r(X, Y) = L(X, Y)$.

[1] Aliprantis, C. D.; Burkinshaw, O.: Positive Operators. Academic Press New York, 1985.

[2] Schaefer, H. H.: Banach Lattices and Positive Operators. Springer Berlin/Heidelberg, 1974.

Abbildungsdiagramm, \nearrow Abbildung.

Abbildungsgrad, auch Brouwerscher Abbildungsgrad genannt, funktionalanalytisches Hilfsmittel,

um die Existenz von Lösungen x für Probleme der Form $f(x) = y$ nachzuweisen, wobei $f : U \mapsto \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$.

Der Abbildungsgrad ordnet dem Tripel (f, U, y) eine ganze Zahl zu, deren Betrag im wesentlichen gleich der Anzahl der Lösungen obiger Gleichung in U ist. Man vergleiche auch das Stichwort \mathcal{A} Leray-Schauderscher Abbildungsgrad.

Abbildungskeim, Äquivalenzklasse differenzierbarer reeller Funktionen (es können problemabhängig auch andere Forderungen an die Funktionen gestellt werden) auf einer Mannigfaltigkeit M unter folgender Äquivalenzdefinition:

Für einen Punkt $p \in M$ heißen zwei reellwertige differenzierbare Funktionen, die auf Umgebungen um p definiert sind, äquivalent, falls es eine Umgebung von p gibt, auf der die beiden Funktionen übereinstimmen. Eine solche Äquivalenzklasse heißt Keim differenzierbarer Funktionen auf M bei p , die Menge dieser Keime wird bezeichnet mit $\mathcal{E}_p(M)$.

Mit der Addition und Skalarmultiplikation für reellwertige Funktionen bildet $\mathcal{E}_p(M)$ einen (reellen) Vektorraum. Nimmt man zusätzlich die Multiplikation reellwertiger Funktionen hinzu, erhält man eine (reelle) Algebra.

Abbildungsradius, Kennzahl eines einfach zusammenhängenden Gebietes: Der Abbildungsradius des einfach zusammenhängenden \mathcal{A} Gebietes $G \neq \mathbb{C}$ bezüglich eines Punktes $a \in G$ ist definiert durch

$$\varrho(G, a) := 1/h'(a),$$

wobei h die eindeutig bestimmte \mathcal{A} konforme Abbildung von G auf $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ mit $h(a) = 0$ und $h'(a) > 0$ ist. Man setzt noch $\varrho(\mathbb{C}, a) := \infty$ für alle $a \in \mathbb{C}$.

Ist $G \neq \mathbb{C}$ und $a \in G$, so gibt es genau eine konforme Abbildung f von G auf eine Kreisscheibe $B_\varrho(0)$ mit $f(a) = 0$ und $f'(a) = 1$. Es gilt dann $\varrho = \varrho(G, a)$. Weiter gilt der folgende Monotoniesatz:

Sind G und \widehat{G} einfach zusammenhängende Gebiete mit $\widehat{G} \subset G$, so gilt $\varrho(\widehat{G}, a) \leq \varrho(G, a)$ für alle $a \in \widehat{G}$.

Abbruchfehler, der Fehler, der verbleibt, wenn ein numerisches Verfahren nach Erfüllen eines \mathcal{A} Abbruchkriteriums oder nach einer \mathcal{A} Abbruchregel die (näherungsweise) Berechnung eines Wertes beendet.

Meist entsteht diese Situation dann, wenn ein Wert angenähert werden soll, der selbst gar nicht in endlicher Zeit berechnet werden kann, beispielsweise $\mathcal{A}e$ oder $\mathcal{A}\pi$.

Abbruchkriterium, mathematisches Kriterium, das bei Eintreffen (Gültigkeit) zum Abbruch eines sequentiellen bzw. iterativen Verfahrens führt.

Dies kann beispielsweise das Unterschreiten einer gewissen Fehlerschranke oder auch das Über-

schreiten einer vorgegebenen Anzahl von Iterationsschritten sein.

Abbruchregel, Regel für den Abbruch einer Schleife. Enthält ein Programm eine Iteration, das heißt eine Schleife, die gewöhnlich als Zählschleife oder als Bedingungsschleife realisiert ist, oder eine Rekursion, so muß in jedem Fall definiert sein, wann die Iteration oder Rekursion beendet ist, da man ansonsten in eine Endlosschleife eintritt. Die Bedingung, die das Beenden der Iteration oder Rekursion regelt, heißt Abbruchregel.

Bei einer Zählschleife findet der Abbruch nach Erreichen einer bestimmten laufenden Nummer statt, bei einer Bedingungsschleife oder einer Rekursion müssen in der Regel bestimmte Bedingungen erfüllt sein.

abc-Vermutung, auf Oesterlé und Masser (1986) zurückgehende zahlentheoretische Vermutung:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine effektiv berechenbare Konstante $K(\varepsilon)$ derart, daß für beliebige ganze Zahlen a, b, c mit $a + b = c$ und $\text{ggT}(a, b, c) = 1$ die Ungleichung

$$\max\{|a|, |b|, |c|\} \leq K(\varepsilon) \left(\prod_{p|abc} p \right)^{1+\varepsilon} \quad (1)$$

richtig ist.

Das Produkt in (1) ist der sog. quadratfreie Kern von abc ; es erstreckt sich über alle Primfaktoren von abc , wobei jeder nur einmal gezählt wird.

Die abc-Vermutung wurde anlässlich einiger von Szpiro durchgeführter Untersuchungen über elliptische Kurven mit der Gleichung

$$y^2 = x(x - a)(x + b) \quad (2)$$

aufgestellt. Aus der abc-Vermutung lassen sich einige allgemeine Endlichkeitssätze über Diophantische Gleichungen herleiten, z. B.:

1. die Fermat-Catalansche Gleichung besitzt nur endlich viele ganzzahlige Lösungen,
2. die Catalansche Gleichung (\mathcal{A} Catalansche Vermutung) besitzt nur endlich viele ganzzahlige Lösungen,
3. es gilt die Mordellsche Vermutung mit effektiv berechenbaren Konstanten, um nur einige wenige zu nennen.

1. ist noch offen, 2. wurde 1976 von Tijdeman bewiesen, und die Mordellsche Vermutung folgt aus einem 1983 publizierten Satz von Faltings; allerdings liefert Faltings' Resultat keine effektiven oberen Abschätzungen für die Anzahl der Lösungen.

Die Tatsache, daß einige Konsequenzen der abc-Vermutung bereits als schwierig zu beweisende Sätze bekannt sind, erhöht einerseits den Reiz und die Plausibilität der abc-Vermutung, und deutet andererseits darauf hin, daß ein Beweis der abc-Vermutung ziemlich aufwendig sein dürfte.

Da die abc-Vermutung keine Aussage über die Größe der Konstanten $K(\varepsilon)$ (außer der effektiven Berechenbarkeit) enthält, ist es nicht möglich, sie durch computergestützte Rechnungen plausibel zu machen oder zu widerlegen.

Ein Beweis der abc-Vermutung steht zur Zeit (Ende 1999) noch aus.

Abel, Konvergenzkriterium von, Kriterium zur Überprüfung der Konvergenz einer Reihe.

Um die Konvergenz einer Reihe mit beliebigen Gliedern zu erkennen, wird man zunächst überprüfen, ob sie sich mit Hilfe der absoluten Konvergenz (\nearrow absolut konvergente Reihe, \nearrow Konvergenzkriterien für Reihen) erschließen läßt. Ist das nicht möglich, oder ist die Reihe nicht absolut konvergent, so stehen zur Feststellung der etwaigen Konvergenz der Reihe der direkte Konvergenznachweis, das \nearrow Cauchy-Konvergenzkriterium für Reihen und das \nearrow Leibniz-Kriterium zu Verfügung. Ein weiteres – in seinen Grundgedanken auf Niels Henrik Abel zurückgehendes – Kriterium, das bei vielen wichtigen Typen von Reihen herangezogen werden kann, ist:

Ist die Reihe $\sum_{v=0}^{\infty} a_v$ konvergent und die Folge (b_v) monoton und beschränkt, so konvergiert auch die Reihe

$$\sum_{v=0}^{\infty} a_v b_v .$$

Man hat auch eine entsprechende Aussage für \nearrow gleichmäßige Konvergenz. (\nearrow Konvergenzkriterien für Reihen).

- [1] Heuser, H.: Lehrbuch der Analysis, Teil 1. Teubner-Verlag Stuttgart, 1993.
- [2] Kabbalo, W.: Einführung in die Analysis I. Spektrum Akademischer Verlag, 1996.
- [3] Walter, W.: Analysis 1. Springer-Verlag Berlin, 1992.

Abel, Niels Henrik, norwegischer Mathematiker, geb. 5.8.1802 Findø (bei Stavanger), gest. 6.4.1829 Froland (bei Arendal).

Abel wurde als Sohn eines Pfarrers geboren. Zunächst besuchte er die Kathedralschule in Christiania (heute Oslo). Dort erkannte sein Lehrer Bernt Michael Holmboe sein Talent und förderte ihn. So wurde Abel später durch Holboes Empfehlungen 1821 an der Universität Christiania immatrikuliert. 1825 erhielt Abel ein Stipendium für eine zweijährige Reise nach Europa. In Berlin traf er zunächst den Ingenieur und Amateurmathematiker \nearrow Crelle, dem er half, das neu gegründete „Journal für die reine und angewandte Mathematik“ herauszugeben. Ein Jahr später, 1826, reiste Abel dann weiter nach Paris. Hier fand er aber nicht den erhofften Anschluß an das wissenschaftliche Leben der Stadt. Enttäuscht trat er Ende 1826 wieder die Heimreise an. Auch Crelle konnte ihn nicht dazu

bewegen, in Berlin zu bleiben. In Norwegen gelang es ihm nicht, eine gesicherte Stellung zu finden. Abel starb im Alter von nur 26 Jahren an Tuberkulose.

Abels wichtigste Arbeiten befassen sich mit der Auflösung algebraischer Gleichungen, den Eigenschaften elliptischer Funktionen und der Konvergenz unendlicher Reihen. Schon als Schüler beschäftigte ihn die Auflösbarkeit von algebraischen Gleichungen von fünftem und höherem Grad durch Radikale. 1824 bewies er, unter Einfluß der Arbeiten von \nearrow Lagrange und \nearrow Gauß, aber unabhängig von Ruffini, die Unmöglichkeit der Auflösbarkeit.

Durch den Gebrauch gruppentheoretischer Methoden gelangte er auch zu neuen Erkenntnissen über die Natur der \nearrow elliptischen Integrale. Fast gleichzeitig mit Jacobi betrachtete er deren Umkehrfunktionen und erkannte die Doppelperiodizität dieser (elliptischen) Funktionen. In Paris fand er wichtige Verallgemeinerungen des Additionstheorems für elliptische Integrale.

Während seiner Zeit in Berlin beschäftigte er sich mit der Konvergenz unendlicher Reihen und bewies den nach ihm benannten \nearrow Abelschen Grenzwertsatz.

Abel, Satz von, besagt, daß die allgemeine Gleichung vom Grad ≥ 5 nicht durch Radikale lösbar ist. Dies bedeutet, daß es keinen Lösungsalgorithmus gibt, der auf eine beliebige Gleichung vom Grad ≥ 5 angewendet, ihre Nullstellen durch eine Abfolge rationaler Operationen und k -tes Wurzelziehen (auch Bildung von Radikalen genannt) aus den Koeffizienten der Gleichung bestimmt.

Der Beweis benutzt die Galois-Theorie. Die Galoisgruppe der allgemeinen algebraischen Gleichung vom Grad n ist die symmetrische Gruppe S_n von n Elementen. Für $n \geq 5$ ist die S_n eine nicht auflösbare Gruppe. Eine Gleichung ist jedoch genau dann durch Radikale auflösbar, wenn ihre

Galoisgruppe auflösbar ist. Deshalb existiert kein Lösungsalgorithmus. Im Gegensatz hierzu sind die Gruppen S_2 , S_3 und S_4 auflösbar. Dementsprechend gibt es für Gleichungen des Grades zwei, drei und vier Lösungsalgorithmen. Für den Grad zwei sind es die bekannten Lösungsformeln der quadratischen Gleichung, für den Grad drei die \mathcal{A} Cardanischen Lösungsformeln.

Abélard, Pierre, \mathcal{A} Abaelardus, Petrus.

abelsche Differentialgleichung, gewöhnliche Differentialgleichung, benannt nach Niels Henrik Abel. Man unterscheidet folgende Fälle: Für Funktionen f_0, f_1, f_2, f_3 heißt die gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

$$y'(x) = f_0(x) + f_1(x)y(x) + f_2(x)y^2(x) + f_3(x)y^3(x)$$

abelsche Differentialgleichung erster Art. Mit weiteren Funktionen g_0, g_1 heißt die gewöhnliche Differentialgleichung

$$(g_0(x) + g_1(x)y(x))y'(x) = \sum_{k=0}^3 f_k(x)y^k(x)$$

abelsche Differentialgleichung zweiter Art. Zu einzelnen Spezialfällen hat Abel Lösungen gefunden, i. allg. ist die abelsche Differentialgleichung jedoch nicht geschlossen integrierbar.

[1] Kamke, E.: Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen I. B. G. Teubner Stuttgart, 1977.

abelsche Eichgruppe, Eichgruppe, deren Gruppenoperation abelsch, d. h. kommutativ ist (\mathcal{A} abelsche Gruppe).

Eichgruppen, die diese Eigenschaft nicht besitzen, bezeichnet man demgemäß als nichtabelsche Eichgruppen.

Beispiele hierzu: Die wichtigste abelsche Eichgruppe ist die der elektromagnetischen Wechselwirkung, es ist die kompakte eindimensionale abelsche Gruppe $U(1)$. Sie beschreibt die Wechselwirkung von geladenen Teilchen durch den Austausch von Photonen.

Für jede natürliche Zahl $n > 1$ ist die Gruppe $SU(n)$ nichtabelsch und findet ebenfalls als Eichgruppe in der Physik Verwendung; für $n = 3$ führt sie zur Quantenchromodynamik, der Theorie der Quark-Teilchen.

abelsche Erweiterung, eine Galoissche Erweiterung eines Körpers mit abelscher Galois-Gruppe.

Eine abelsche Erweiterung des Körpers \mathbb{Q} der rationalen Zahlen heißt abelscher Körper.

Jeder quadratische Zahlkörper und jeder Kreisteilungskörper ist ein abelscher Körper. Nach dem Satz von Kronecker-Weber ist auch umgekehrt jede abelsche Erweiterung von \mathbb{Q} ein Unterkörper eines Kreisteilungskörpers bzw. isomorph zu einem solchen.

abelsche Folge, dem \mathcal{A} abelschen Operator zugehörige \mathcal{A} Basisfolge $\{x(x - an)^{n-1}, n \in \mathbb{N}_0\}$. Die abelsche Folge erfüllt folgende Binomialidentität:

$$\begin{aligned} (x+y)(x+y-an)^{n-1} \\ = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x(x-ai)^{i-1} y(y-a(n-i))^{n-i-1}, \end{aligned}$$

wobei $\binom{n}{i}$ die \mathcal{A} Binomialkoeffizienten sind.

abelsche Gruppe, Gruppe G , bei der die Gruppenoperation kommutativ ist.

Meist wird dann die Gruppenoperation mit dem Pluszeichen $+$ geschrieben. Die Gruppe ist also abelsch genau dann, wenn für alle $a, b \in G$ gilt:

$$a + b = b + a.$$

abelsche Integralgleichung, spezielle Volterra-Integralgleichung erster Art der Form

$$f(x) = \int_a^x \frac{G(x,y)}{(x-y)^\beta} \varphi(y) dy$$

mit $\beta \in (0, 1)$. Dabei sind G und f gegeben, und φ ist zu bestimmen.

abelsche Kategorie, eine additive Kategorie, in der

- (1) jeder Morphismus einen Kern und einen Kokern besitzt und
- (2) jeder Monomorphismus ein Kern und jeder Epimorphismus ein Kokern ist.

In einer abelschen Kategorie kann jeder Morphismus $\varphi : A \rightarrow B$ aus einem Epimorphismus, gefolgt von einem Monomorphismus zusammengesetzt werden.

Genauer gilt: Es existiert eine Sequenz

$$K \xrightarrow{\mu} A \xrightarrow{\eta} I \xrightarrow{\nu} B \xrightarrow{\varepsilon} C,$$

wobei μ der Kern von φ , η der Kokern von μ , ν der Kern von ε und $\varphi = \nu \circ \eta$. Das Objekt I wird auch als das Bild von φ bezeichnet.

Das Standardbeispiel einer abelschen Kategorie ist die Kategorie der abelschen Gruppen. Die Morphismen sind die Gruppenhomomorphismen. Sie bilden selbst eine abelsche Gruppe unter der punktweisen Addition. Das Nullobjekt ist die Gruppe, die nur aus dem neutralen Element besteht. Der Kern eines Morphismus $f : A \rightarrow B$ ist die Einbettung des gruppentheoretischen Kerns

$$\{x \in A \mid f(x) = 0\}.$$

Der Kokern ist die natürliche Faktorabbildung $B \rightarrow B/\text{Im} f$.

Weitere Beispiele sind die Kategorie der Module über einem kommutativen Ring und die Kategorie

der Garben abelscher Gruppen über einem topologischen Raum.

abelsche Lie-Algebra, Lie-Algebra, bei der das Lie-Produkt kommutativ ist.

Beispiel: Die Algebra, die sich aus der Translationsgruppe des Euklidischen Raums ergibt, ist eine abelsche Lie-Algebra, da sich auch bei Vertauschung der Reihenfolge mehrerer Translationen dieselbe Gesamtabbildung ergibt.

Das Lie-Produkt zweier Elemente a, b der Lie-Algebra wird meist mit $[a, b]$ bezeichnet.

Jede Lie-Algebra ist definitionsgemäß antikommutativ, d. h.

$$[a, b] = -[b, a].$$

Die Kommutativität für die abelschen Lie-Algebren bedeutet jedoch $[a, b] = [b, a]$. Beides gemeinsam ergibt, daß das Lie-Produkt einer abelschen Lie-Algebra stets identisch verschwindet. Folglich spielt dieser Begriff nur im Wechselspiel mit nicht-abelschen Lie-Algebren (z. B. der Algebra der räumlichen Drehungen) eine echte Rolle.

abelsche Matrix, eine unendliche Matrix $((\alpha_{ij}))$ mit

$$\alpha_{ij} = \frac{i^j}{(i+1)^{j+1}}$$

für alle i und j . Sie besitzt unendlich viele voneinander linear unabhängige Inverse.

abelsche Varietät, eine zusammenhängende komplette \mathcal{A} algebraische Varietät A mit einer Gruppenoperation $A \times A \rightarrow A$, die durch einen Morphismus von algebraischen Varietäten $m : A \times A \rightarrow A$ (Multiplikation) und $i : A \rightarrow A$ (Inverse) gegeben wird. Das einfachste Beispiel sind \mathcal{A} elliptische Kurven.

Aus der Komplettheit folgt bereits, daß die Gruppenoperation kommutativ ist. Jede abelsche Varietät besitzt eine projektive Einbettung.

Jeder Morphismus $\varphi : A \rightarrow B$ der den abelschen Varietäten zugrundeliegenden Varietäten hat die Form $\varphi(x) = \varphi_0(x) + b$, wobei φ_0 ein Morphismus ist, der die Gruppengesetze respektiert. Insbesondere ist also durch den Nullpunkt das Gruppengesetz auf A schon eindeutig bestimmt.

Nimmt man als Grundkörper den der komplexen Zahlen, so kann man eine analytische Theorie entwickeln, die historisch tatsächlich zuerst entstanden ist. Die zugrundeliegende komplexe Mannigfaltigkeit von A ist eine kompakte kommutative Lie-Gruppe, also liefert die Exponentialfunktion aus der Theorie der Lie-Gruppen einen Isomorphismus $V/\Gamma \xrightarrow{\sim} A$, wobei V ein komplexer Vektorraum ist, $g = \dim V = \dim(A)$, und Γ ein Gitter in V (d. h. eine endlich erzeugte Untergruppe so, daß $\Gamma \otimes \mathbb{R} \rightarrow V$ bijektiv ist), also ein komplexer Torus.

Eine projektive Einbettung von A induziert eine Kählermetrik auf A (und auf V), deren Imaginärteil

eine ganzzahlige Kohomologieklassse repräsentiert. Durch "Mittelwertbildung" kann man annehmen, daß die auf V induzierte Metrik konstant ist. Daher besitzt V eine positiv definite Hermitesche Form H , deren Imaginärteil ganzzahlig auf dem Gitter ist. Ein solche Hermitesche Form heißt Riemannsche Form. Wenn umgekehrt für ein Gitter $\Gamma \subset V$ eine Riemannsche Form existiert, so besitzt der komplexe Torus V/Γ eine analytische Einbettung in einen projektiven Raum, ist also eine abelsche Varietät.

Abelscher Grenzwertsatz, macht eine Aussage über die Stetigkeit einer durch eine Potenzreihe dargestellten Funktion für Randstellen.

Allgemeine Sätze über Stetigkeit und Differenzierbarkeit einer solchen Funktion beziehen sich zunächst nur auf innere Punkte des Konvergenzbereiches der Potenzreihe. Der Abelsche Grenzwertsatz (hier in spezieller Form) ergänzt diese Überlegungen:

Hat die reelle Potenzreihe

$$\sum_{v=0}^{\infty} \alpha_v x^v$$

den endlichen positiven Konvergenzradius R , und ist sie zudem für $x = R$ konvergent, so ist die durch die Potenzreihe im Intervall $(-R, R]$ definierte Funktion in R linksseitig stetig. Es gilt also

$$\lim_{x \rightarrow R-} \left(\sum_{v=0}^{\infty} \alpha_v x^v \right) = \sum_{v=0}^{\infty} \alpha_v R^v.$$

Eine Anwendung ist beispielsweise – in Verbindung mit dem \mathcal{A} Leibniz-Kriterium und der Taylor-Entwicklung für Arcustangens um 0 – die berühmte \mathcal{A} Leibniz-Reihe:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{2v+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \dots$$

(\mathcal{A} Konvergenzkriterien für Reihen).

- [1] Heuser, H.: Lehrbuch der Analysis, Teil 1. Teubner-Verlag Stuttgart, 1993.
- [2] Kabbalo, W.: Einführung in die Analysis I. Spektrum Akademischer Verlag, 1996.
- [3] Walter, W.: Analysis 1. Springer-Verlag Berlin, 1992.

abelscher Körper, \mathcal{A} abelsche Erweiterung.

abelscher Operator, der Operator $E^a D = D E^a$ auf dem Raum der Polynome, wobei D der zu der Standardbasis oder auch Monombasis $\{x^n, n \in \mathbb{N}_0\}$ gehörige \mathcal{A} Basisoperator (d. h. der Standardoperator) ist und E^a die Translation um a bezeichnet.

Der abelsche Operator ist der Basisoperator der \mathcal{A} abelschen Folge.

Abelscher Reihenproduktsatz, Satz über die Berechnung des Produkts zweier Reihen. Der Satz lautet:

Sind die Reihen $\sum_{m=0}^{\infty} a_m$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ und $\sum_{k=0}^{\infty} p_k$ mit

$$p_k := a_0 b_k + \dots + a_k b_0$$

konvergent, und sind a , b , p ihre Summen, so gilt $ab = p$.

Abelscher Stetigkeitssatz, \mathcal{A} Abelscher Grenzwertsatz.

Abelsches Differential, \mathcal{A} Abelsches Integral.

Abelsches Integral, spezielle Form eines Integrals auf Riemannschen Flächen.

Es sei R eine abgeschlossene Riemannsche Fläche und a eine auf R meromorphe Funktion des lokalen Parameters z . Dann nennt man die komplexe Differentialform $\omega = a(z)dz$ ein Abelsches Differential. Das Differential ist von erster Art, falls a holomorph ist, von zweiter Art, falls das Residuum überall verschwindet, und ansonsten von dritter Art. Ist nun ω ein Abelsches Differential und p_0 kein Pol von ω , so nennt man das Integral

$$W(p) = \int_{p_0}^p \omega$$

ein Abelsches Integral. Es ist genau dann von erster, zweiter oder dritter Art, wenn das zugehörige Differential von dieser Art ist.

Abelsches Summationsverfahren, Möglichkeit, gewissen divergenten Reihen sinnvoll noch einen Wert zuzuordnen.

Eine Reihe $\sum_{v=0}^{\infty} a_v$ heißt genau dann Abelkonvergent oder Abel-summierbar, wenn ihre Abel-Summe

$$A\sum_{v=0}^{\infty} a_v := \lim_{x \rightarrow 1-} \left(\sum_{v=0}^{\infty} a_v x^v \right)$$

existiert. Ist eine Reihe $\sum_{v=0}^{\infty} a_v$ konvergent, so stimmt die Abel-Summe – nach dem \mathcal{A} Abelschen Grenzwertsatz – mit $\sum_{v=0}^{\infty} a_v$ überein.

Die Abel-Summe kann aber auch noch für gewisse divergente Reihen existieren: Für die divergente Reihe $\sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v$ hat man zum Beispiel

$$\sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v x^v = \frac{1}{1+x} \quad \text{für } |x| < 1,$$

folglich

$$A\sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v = \lim_{x \rightarrow 1-} \left(\sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v x^v \right) = \frac{1}{2}.$$

Eine andere Möglichkeit, gewissen divergenten Reihen sinnvoll noch eine Summe zuzuordnen, sie zu limitieren oder zu summieren, liefert das \mathcal{A} Cesàro-Summationsverfahren. Beide Summationsverfahren haben große Bedeutung in der Theorie der Fourier-Reihen.

Abelsches Theorem, ein hinreichendes und notwendiges Kriterium für die Existenz einer \mathcal{A} elliptischen Funktion mit vorgegebenen Null- und Polstellen:

Zu vorgegebenen Nullstellen a_1, \dots, a_n und Polstellen b_1, \dots, b_n existiert genau dann eine elliptische Funktion zum Periodengitter L , wenn

$$a_1 + \dots + a_n \equiv b_1 + \dots + b_n \pmod{L}.$$

Dabei ist vorausgesetzt, daß $a_j \not\equiv b_k \pmod{L}$ für $j, k = 1, \dots, n$. Hingegen ist zugelassen, daß Punkte a_j bzw. b_j mehrfach auftreten. In diesem Fall soll f eine entsprechende mehrfache Nullstelle bzw. Polstelle besitzen.

abgeleitete Kategorie, \mathcal{A} derivierte Kategorie.

abgeleiteter Funktor, *derivierter Funktor*, aus einem \mathcal{A} additiven Funktor hergeleiteter Funktor, dessen exakte Definition wie folgt gegeben ist.

Seien \mathcal{A} und \mathcal{B} abelsche Kategorien und sei $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein additiver kovarianter Funktor. Besitzt die Kategorie \mathcal{A} genug projektive Objekte, d. h. jedes Objekt A aus \mathcal{A} besitzt eine projektive Auflösung, dann besitzt F linksabgeleitete Funktoren

$$L_n F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots$$

Die abgeleiteten Funktoren $L_n F$ sind additiv.

Die Linksableitungen werden wie folgt konstruiert. Sei

$$P^A : \rightarrow P_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow P_0 \rightarrow 0$$

eine projektive Auflösung eines Objektes A aus \mathcal{A} . Wendet man den Funktor F auf diese Sequenz an, so erhält man einen Komplex

$$F(P^A) : \rightarrow FP_n \rightarrow FP_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow FP_0 \rightarrow 0$$

in \mathcal{B} .

Die Funktorabbildung des n -ten linksabgeleiteten Funktors $L_n F$ für die Objekte ist gegeben durch die n -te Homologiegruppe dieses Komplexes:

$$L_n F(A) := H_n(F(P^A)).$$

Die Definition ist bis auf kanonische Isomorphie unabhängig von der Auflösung P^A .

Die Funktorabbildung für die Morphismen ist wie folgt definiert. Ist $\alpha : A \rightarrow A'$ ein Morphismus in \mathcal{A} , so definiert dieser zuerst Morphismen $P^A \rightarrow P^{A'}$ und weiter kanonische Abbildungen auf den Homologiegruppen

$$L_n F(A) \rightarrow L_n F(A').$$

Diese Abbildungen sind $L_n F(\alpha)$.

Lexikon der Mathematik: Band 1

A bis Eif

Walz, G. (Hrsg.)

2017, IX, 475 S., Softcover

ISBN: 978-3-662-53497-7