Moon, Satz von, ↗ Turnier.

Moore, Eliakim Hastings, amerikanischer Mathematiker, geb. 26.1.1862 Marietta (Ohio, USA), gest. 30.12.1932 Chicago.

Moore studierte bis 1883 an der Yale University in New Haven und promovierte dort 1885. Es folgten Studienreisen nach Göttingen und Berlin zu Klein, Weierstraß und Kronecker. Nach seiner Rückkehr arbeitete er an der Northwestern University und in Yale. 1892 wurde er Professor an der neugegründeten Universität in Chicago.

Moore führte den Begriff Moore-Smith-Folgen als verallgemeinerte Folgen ein und entwickelte daraus eine allgemeine Theorie der Konvergenz (Netzkonvergenz). Daneben befaßte er sich mit Algebra und Gruppentheorie. Von 1898 bis 1900 war er Vizepräsident der American Mathematical Society und 1901/02 deren Präsident.

Zu seinen bedeutendsten Schülern gehörten Dickson, Veblen und Birkhoff.

Moore-Automat, ↗endlicher Automat.

Moore-Bellman-Ford, Algorithmus von, liefert in einem zusammenhängenden und bewerteten Graphen G ohne Kreise negativer Länge mit einer Komplexität $O(|E(G)||K(G)|)$ die kürzesten Wege von einer Ecke u aus zu allen übrigen Ecken des Graphen. Diesen Algorithmus gewinnt man durch eine Modifizierung des Algorithmus' von Dijkstra.

Moore-Penrose-Inverse, ein spezieller Typ von Pseudo-Inversen einer Matrix.

Es sei A eine reelle $(m \times n)$-Matrix. Die $(n \times m)$-Matrix B heißt Moore-Penrose-Inverse von A, wenn gilt:
(i) $ABA = A$ und $BAB = B$,
(ii) AB und BA sind symmetrisch.
Jede Moore-Penrose-Inverse ist eine Pseudo-Inverse, jedoch nicht umgekehrt. Es gilt der Satz:

Jede reelle $(m \times n)$-Matrix A besitzt eine eindeutig bestimmte Moore-Penrose-Inverse.

Mora-Algorithmus, Algorithmus zur Berechnung von Standardbasen eines Ideals I in der Lokalisierung eines Polynomenringes nach einem durch die Ordnung definierten multiplikativ abgeschlossenen System.

Es handelt sich um eine Verallgemeinerung des ↗Buchberger-Algorithmus' durch T. Mora für lokale ↗Monomenordnungen (der Buchberger-Algorithmus terminiert nur für Wohlordnungen). Dabei muß die im Buchberger-Algorithmus verwendete Normalform (↗Normalform eines Polynoms) geeignet modifiziert werden.

Mordell, Louis Joel, amerikanisch-englischer Mathematiker, geb. 28.1.1888 Philadelphia, gest. 12.3.1972 Cambridge (England).

Mordell studierte in Philadelphia und Cambridge und wurde danach Dozent am Birkbeck College in London. 1923 bis 1945 war er Professor an der Universität Manchester, danach ab 1945 an der Universität Cambridge.

Mordell war ein bedeutender Zahlentheoretiker. Er studierte ↗diophantische Gleichungen, insbesondere Gleichungen der Form

$$y^2 = x^3 + k .$$

Er zeigte, daß diese Gleichung höchstens endlich viele ganzzahlige Lösungen besitzt. Bekannt wurde seine Name vor allem durch die von ihm geäußerte ↗Mordellsche Vermutung.

Mordellsche Vermutung, die von Louis Joel Mordell aufgestellte Vermutung, daß auf algebraischen Kurven mit einem Geschlecht größer als Eins höchstens endlich viele rationale Punkte liegen.

Sie konnte erst im Jahre 1983 durch Gerd Faltings bewiesen werden und stellt einen wichtigen Schritt zum Beweis der ↗Fermatschen Vermutung dar.

Morera, Satz von, funktionentheoretische Aussage, die wie folgt lautet:

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein ↗Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine in G stetige Funktion. Weiter gelte für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset G$

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0 .$$

Dann ist f eine in G ↗holomorphe Funktion.

Morgan, Augustus, ↗de Morgan, Augustus.

Mori, Shigefumi, japanischer Mathematiker, geb. 23.2.1951 Nagoya.

Mori, dessen Eltern eine Handelsgesellschaft leiteten, studierte bis 1975 an der Universität Kyoto und promovierte dort 1978 bei M. Nagata. 1980 erhielt er eine Dozentenstelle (Lecturer) an der Universität von Nagoya, 1982 eine Assistenz-Professur und 1988 eine Professur. In dieser Zeit weilte er oft als Gastprofessor in des USA, so 1977–80 an der Harvard Universität in Cambridge (Mass.),

G. Walz (Hrsg.), *Lexikon der Mathematik: Band 4*,
DOI 10.1007/978-3-662-53500-4_1

1981/82 am Institute for Advanced Study in Princeton, 1985–87 an der Columbia Universität New York und 1987-89, 1991/92 an der Universität von Utah in Salt Lake City. Seit 1990 hat er eine Professur an der Universität Kyoto inne.

Mori erzielte bahnbrechende Resultate zur Klassifikation algebraischer Mannigfaltigkeiten und stieß in Fortsetzung des Werkes von Castelnouvo, Severi, Zariski, Kodaira u. a. in neue Bereiche vor. Angeregt durch den Erfolg beim Beweis der Hartshorneschen Vermutung (1978), daß gewisse glatte vollständige algebraische Mannigfaltigkeiten als projektive Räume beschrieben werden können, stellte er ein Programm zur vollständigen Klassifikation aller dreidimensionalen algebraischen Mannigfaltigkeiten auf. Die von Mori im Beweis entwickelten neuen Techniken zur Konstruktion rationaler Kurven auf Mannigfaltigkeiten bildeten eine wichtige Basis für die Realisierung des Programms. 1981 gelang ihm die vollständige Klassifikation der Fano-Mannigfaltigkeiten. Mit Hilfe des Begriffs der numerischen Effektivität fand er ein Mittel, um die dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten in zwei Gruppen einzuteilen, die er dann jeweils in kleinere Klassen aufspalten konnte. Für all diese Klassen wies er bis 1988 die Existenz eines minimalen Modells nach und schloß damit nach über zehnjähriger Forschungstätigkeit die Klassifikation der dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten ab. Mit seinen Methoden eröffnete Mori zugleich Wege, um höherdimensionale Probleme in Angriff zu nehmen, die bisher als völlig unzugänglich erschienen.

Mori wurden für seine Leistungen zahlreiche Ehrungen zuteil, 1990 wurde er mit der ↗Fields-Medaille ausgezeichnet.

Morita-Äquivalenz, Äquivalenz von Kategorien von Moduln.

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, seien A und B endlich-dimensionale $\mathbb{K}$–Algebren und mod–A bzw. mod–B die Kategorien der A–Moduln bzw. B–Moduln. Dann sind die Kategorien mod–A und mod–B äquivalent genau dann, wenn ein projektiver A–Modul P existiert mit $B = \mathrm{Hom}_A(P, P)$. Dabei wird die Äquivalenz durch die Funktoren $F = \mathrm{Hom}_A(P, \_\,)$: mod–$A \to$ mod–B und $G = \_ \otimes_B P$: mod–$B \to$ mod–A gegeben, d. h. $\mathrm{GF} \cong \mathrm{Id}_{\text{mod–}A}$ und $\mathrm{FG} \cong \mathrm{Id}_{\text{mod–}B}$.

Morland, Samuel, englischer Mathematiker und Techniker, geb. 1625 Sulhamstead Bannister (England), gest. 30.12.1695 London.

Morland studierte in Cambridge. Er widmete sich zunächst der Politik und war für Cromwell als Diplomat tätig. Später unterstützte er die Restauration der Monarchie.

Morland entwickelte zwei handgetriebene Rechenmaschinen (1662, 1672, 1673) und ein Barometer. Er arbeitete außerdem zur Hydrostatik und unternahm Experimente zur Anwendung der Dampfkraft für einfache technische Zwecke (1685).

Morphismenklasse, Menge von ↗Morphismen, die denselben Voraussetzungen genügen.

Morphismus, Abbildung zwischen Ringen, Moduln oder anderen Objekten, auf denen Operationen definiert sind, die mit den entsprechenden Operationen verträglich sind.

Ein Morphismus zwischen Moduln ist ein ↗Homomorphismus von Moduln. Ein Morphismus $\varphi : R_1 \to R_2$ von Ringen muß $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ und $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$ erfüllen. Morphismen von Vektorräumen sind lineare Abbildungen. Die Abbildung $x \mapsto e^x$ von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ ist kein Morphismus des $\mathbb{C}$–Vektorraumes $\mathbb{C}$, sie definiert jedoch einen Morphismus der additiven Gruppe $\mathbb{C}$ in die multiplikative Gruppe $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Morphismus von geringten Räumen, Verallgemeinerung der Charakterisierung der holomorphen Abbildungen $\varphi : X \to Y$ zwischen Bereichen $X \subset \mathbb{C}^n$ und $Y \subset \mathbb{C}^m$ mit Hilfe der Liftung holomorpher Funktionen $\varphi^0 : {}_X\mathcal{O} \to {}_Y\mathcal{O}$, $f \mapsto f \circ \varphi\,|_{\varphi^{-1}(W)}$, $W \subset Y$ offen, $f \in {}_Y\mathcal{O}\,(W)$.

Ein Morphismus $\varphi : (S, {}_S\mathcal{A}) \to (T, {}_T\mathcal{A})$ von geringten Räumen ist ein Paar $\left(|\varphi|, \varphi^0\right)$, bestehend aus einer stetigen Abbildung $|\varphi| : |S| \to |T|$ und einem $|\varphi|$- Komorphismus $\varphi^0 : {}_T\mathcal{A} \to {}_S\mathcal{A}$ von Algebren, d. h. einer Familie von Algebrahomomorphismen

$$\varphi^0 := \left(\varphi^0\,(V) : {}_T\mathcal{A}\,(V) \to {}_S\mathcal{A}\big(\varphi^{-1}(V)\big)\right)_{V \subset T},$$

die mit den Einschränkungen in ${}_T\mathcal{A}$ und ${}_S\mathcal{A}$ verträglich ist. Dabei bezeichnet man zur Unterscheidung eines geringten Raumes $S = (S, {}_S\mathcal{A})$ von seinem zugrundeliegenden topologischen Raum den letzteren mit $|S|$.

Für zwei Morphismen $\varphi : S \to T$ und $\psi : T \to U$ von geringten Räumen definiert man $\psi \circ \varphi := \left(|\psi| \circ |\varphi|, \varphi^0 \circ \psi^0\right)$. Häufig schreibt man '$\varphi$' anstelle von ‚$|\varphi|$', obwohl der Komorphismus φ^0 i. a. nicht durch $|\varphi|$ bestimmt ist. Es gilt der folgende Satz:

Ist $\left(|\varphi|, \varphi^0\right) : S \to T$ ein Morphismus von geringten Räumen, und ist S reduziert, dann ist φ^0 durch $|\varphi|$ bestimmt: $\varphi^0(f) = (Red f) \circ |\varphi|$ für $f \in {}_T\mathcal{A}$.

Dies führt zu der folgenden Standard-Terminologie für reduzierte geringte Räume S und T: Eine stetige Abbildung $\tau : |S| \to |T|$ heißt Morphismus von geringten Räumen S und T, wenn das ‚Urbild' $f \circ \tau$ für jedes $f \in {}_T\mathcal{A}$ in ${}_S\mathcal{A}$ liegt.

Beispiele. 1. Ist $\varphi : S \to T$ eine stetige Abbildung von topologischen Räumen, und bezeichne φ^0 die Liftung von Funktionen, dann ist (φ, φ^0) : $(S, {}_S\mathcal{C}) \to (T, {}_T\mathcal{C})$ ein Morphismus.

2. Für einen Bereich $X \subset \mathbb{C}^n$, bezeichne $i : {}_X\mathcal{O} \to {}_X\mathcal{C}$ die kanonische Inklusion, dann ist $\left(id_X, i\right)$: $(X, {}_X\mathcal{C}) \to (X, {}_X\mathcal{O})$ ein Morphismus. Dabei sei ${}_X\mathcal{O}$

die Strukturgarbe von X und ${}_X\mathcal{C}$ die Garbe der stetigen Funktionen auf X.

Morphogenese, die Entwicklung eines Organismus', seiner Organe und Funktionen, nach seinem genetischen Programm unter dem Einfluß der Umwelt.

Einzelne Aspekte wie Segmentierung der Arthropoden und Vertebraten, Anlage der Extremitäten, die Bildung von Oberflächenformen (Säugetiere, Reptilien, Fische, Muscheln und Schnecken) sind hier Gegenstand mathematischer Modellbildung.

Morse, Harold Calvin Marston, amerikanischer Mathematiker, geb. 24.3.1892 Waterville (Maine, USA), gest. 22.6.1977 Princeton (New Jersey, USA).

Morse studierte bis 1914 am Colby College. Nach dem Kriegsdienst promovierte er 1917 bei Birkhoff an der Harvard University in Massachusetts. Von 1920 bis 1925 arbeitet er an der Cornell University in Ithaca, von 1925 bis 1926 an der Brown University (Providence, Rhode Island) und von 1926 bis 1935 in Harvard. Ab 1935 war er am Institute for Advanced Study in Princeton tätig.

Morse entwickelte anhand des Dreikörperproblems die Variationsrechnung im Großen mit Anwendungen in der Stabilitätstheorie der mathematischen Physik. Sein Herangehen bestand in der Beschreibung einer Mannigfaltigkeit mittels ihrer kritischen Punkte. Dieses Vorgehen ist Ausgangspunkt und wichtiges Hilfsmittel für viele Untersuchungen in der Topologie.

Seine wichtigsten Arbeiten sind „Functional topology and abstract variational theory" (1938), „Topological methods in the theory of functions of a complex variable" (1947) und „Lectures on analysis in the large" (1947).

Morse-Index, ganze Zahl λ, die nach M. Morse einer Geodätischen $\gamma : [0, 1] \to M$ auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M in folgender Weise zugeordnet wird:

λ ist gegeben durch die gewichtete Anzahl der Punkte $\gamma(t)$ $(0 < t < 1)$, die entlang γ zu $\gamma(0)$ konjugiert sind, wobei jeder dieser Punkte mit der Dimension des Raums derjenigen Jacobi-Felder entlang γ gewichtet wird, die bei 0 und t verschwinden.

Morse-Smale-System, ein C^k-Fluß $(M, \mathbb{R}, \Phi)$ bzw. ein von einem C^k-Diffeomorphismus $f : M \to M$ erzeugtes diskretes dynamisches System $(M, \mathbb{Z}, \Phi)$ mit einer kompakten differenzierbaren n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M, wofür gilt:

1. Es gibt nur endlich viele Fixpunkte und geschlossene Orbits, und sie sind alle hyperbolisch.
2. Stabile und instabile Mannigfaltigkeiten schneiden sich nur transversal.
3. Die Menge der nichtwandernden Punkte von M besteht nur aus periodischen Punkten, also Fixpunkten und periodischen Orbits.

Ein C^k-Diffeomorphismus, der ein diskretes Morse-Smale-System induziert, bzw. ein C^k-Vektorfeld, das ein kontinuierliches Morse-Smale-System induziert, heißt Morse-Smale-Diffeomorphismus bzw. Morse-Smale-Vektorfeld.

Morse-Thue-Folge, zweiseitige Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ mit Werten in $\{0, 1\}$.

Für $n \in \mathbb{N}_0$ setzt man a_n gleich der Anzahl der Einsen mod 2 in der binären Entwicklung von n; für $n \in \mathbb{Z}^- := \{\cdots, -2, -1\}$ setzt man $a_n = 0$.

Die Berechnung der Werte der Morse-Thue-Folge für positive Indizes kann auch blockweise erfolgen: Man beginnt mit dem Block $A_0 := 0$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wird die Größe des bisherigen Blocks A_n verdoppelt, indem dem bisherigen A_n der Ziffernblock $\bar{A}_n$ angefügt wird, der aus A_n durch Vertauschen von 0 und 1 entsteht Für $A_2 = (0, 1, 1, 0)$ ist z. B. $\bar{A}_2 = (1, 0, 0, 1)$. Damit beginnt der positive Teil der Morse-Thue-Folge mit $(0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, \ldots)$. Die Morse-Thue-Folge ist nicht periodisch, aber fastperiodisch. Sie wird zur Konstruktion spezieller Beispiele dynamischer Systeme in der symbolischen Dynamik verwendet.

[1] Kitchens, B.P.: Symbolic Dynamics. Springer Berlin, 1997.

Morse-Zerlegung, endliches System $\{\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n\}$ paarweise disjunkter, abgeschlossener, invarianter Teilmengen von G für ein ↗ dynamisches System (M, G, Φ), das folgenden Bedingungen genügt:

(1) Für jedes $x \in G$ gibt es i, j mit $i \le j$ und

$$\alpha(x) \subset \Lambda_j, \quad \omega(x) \subset \Lambda_i\,,$$

wobei $\alpha(x)$ bzw. $\omega(x)$ die α- bzw. ω-Limesmenge von x bezeichnet.

(2) Wenn $\alpha(x) \subset \Lambda_i$ und $\omega(x) \subset \Lambda_i$, dann gilt $x \in \Lambda_i$.

Falls A ein ↗ Attraktor ist, dann ist $A^* := A \setminus W^s(A)$

(mit der stabilen Mannigfaltigkeit $W^s(A)$) ein Repeller, und $\{A, A^*\}$ bilden eine Morse-Zerlegung.

Mortalität, eine der im Rahmen der ↗Demographie zu untersuchenden Größen.

Moser, von Leo Moser mit Hilfe der Zahl ↗Mega in der ↗Polygonschreibweise angegebene, unvorstellbar große natürliche Zahl, nämlich die Zahl 2 in einem Mega-Eck.

Moser, Jürgen Kurt, deutsch-amerikanischer Mathematiker, geb. 4.7.1928 Königsberg (Kaliningrad), gest. 17.12.1999 Schwerzenbach (Schweiz).

Moser studierte ab 1947 in Göttingen. Ein Fulbright-Stipendium ermöglichte ihm einen einjährigen Aufenthalt am Courant-Institut der New Yorker Universität. In dieser Zeit arbeitete er viel mit Courant zusammen. Nach einem kurzen Aufenthalt in Göttingen als Assistent von Siegel kehrte er 1955 an die New Yorker Universität zurück und heiratete Courants älteste Tochter. 1957 begann er, am Massachusetts Institute of Technology zu forschen. 1960 ging er zurück an das Courant-Institut. 1980 schließlich nahm er einen Ruf nach Zürich an.

Mosers Hauptarbeitsgebiet war die mathematische Physik, insbesondere die Untersuchung der Stabilität der Bahnen von Körpern. Dabei entwickelte er 1962 zusammen mit Arnold die von Kolmogorow initiierte Störungstheorie zur Kolmogorow-Arnold-Moser-Theorie (KAM-Theorie) weiter. Diese Theorie, die die Auswirkungen von kleinen Störungen auf die Bewegung von Körpern beschreibt, hat vielfältige Anwendungen in der Dynamik von Flugzeugen und Fahrzeugen und letztendlich in der Beschreibung der Bahnen der Planeten über große Zeiträume hinweg.

Moufang, Ruth, deutsche Mathematikerin, geb. 10.1.1905 Darmstadt, gest. 26.11.1977 Frankfurt/Main.

Ruth Moufang studierte von 1925 bis 1930 an der Universität Frankfurt/Main und promovierte dort bei Max Dehn. Nach kürzeren Aufenthalten in Rom und Königsberg (Kaliningrad) kehrte sie 1934 an die Universität Frankfurt zurück, wo sie sich 1936 habilitierte. Da sie aus politischen Gründen keine feste Position an der Universität erhalten konnte, arbeitete sie danach am Krupp-Forschungsinstitut in Essen, bis sie 1946 als Privatdozentin an die Universität Frankfurt zurückkehrte. 1957 wurde sie schließlich ordentliche Professorin, ebenfalls in Frankfurt.

Moufangs bekannteste Resultate betreffen projektive Ebenen (Moufang-Ebene); diese schrieb sie alle in den Jahren bis 1936. Von 1941 bis 1948 befaßte sie sich mit Fragen der Mechanik und verfaßte dazu auch einige Publikationen, danach schrieb sie nur noch einen Artikel, eine Würdigung Max Dehns.

Moufang-Ebene, eine ↗projektive Ebene, die bzgl. jeder Geraden eine ↗Translationsebene ist.

move-to-front-Strategie, Strategie zur Verarbeitung einer linearen Liste im Hinblick auf Suchverfahren.

Sucht man ein Element in einer linearen Liste, so muß man jedes einzelne Element nacheinander mit dem gesuchten Schlüssel vergleichen. Deshalb hängt die Effizienz dieser Suchstrategie stark davon ab, wie weit vorne das gesuchte Element in der Liste steht. Man versucht daher, Elemente, nach denen häufiger gesucht wird, weiter an den Anfang der Liste zu stellen als jene, die weniger häufig benötigt werden. Solche Listen werden auch als selbstanordnende Listen bezeichnet, und es gibt verschiedene Strategien, nach denen sie gebildet werden.

Die move-to-front-Strategie sieht vor, daß ein Element, auf das durch eine vorherige Suche zugegriffen wurde, an den Anfang der Liste gestellt wird. Dadurch befinden sich die Elemente, die häufig verwendet wurden, nach einer gewissen Zeit eher am Anfang der Liste. Andererseits kann es bei dieser Strategie vorkommen, daß auf ein Element zugegriffen wird, das eigentlich selten benötigt, aber dennoch lange weit am Anfang der Liste stehen wird.

move-to-root-Strategie, andere Bezeichnung für ↗move-to-front-Strategie.

Moving-Average-Prozeß, ↗Prozeß der gleitenden Mittel.

Moving-Lemma, Aussage aus der algebraischen Geometrie.

Ist V eine glatte quasiprojektive ↗algebraische Varietät, und sind α, β algebraische Zyklen auf V, so gibt es einen zu α rational äquivalenten Zyklus α' so, daß sich α' und β eigentlich schneiden, und die rationale Äquivalenzklasse des Produktes $\alpha' \cdot \beta$ hängt nur von α und β ab.

MST-Problem, ↗ spannender Baum.

MST-Relaxation, die Relaxation des Travelling-Salesman-Problems, bei der ein minimaler Spannbaum (minimum spanning tree, MST), d. h. ein Baum, der jeden Ort berührt, berechnet wird.

Ein minimaler Spannbaum läßt sich sehr effizient berechnen. Die Kosten eines minimalen Spannbaums bilden eine untere Schranke für die Kosten einer optimalen Rundreise. Somit kann die MST-Relaxation für das Modul der Berechnung einer unteren Schranke in ↗branch-and-bound Algorithmen für das TSP benutzt werden. Diese untere Schranke kann durch die Betrachtung von 1-Bäumen verbessert werden, dies sind Spannbäume mit einer zusätzlichen den Startort berührenden Kante.

MTBF, ↗ mean time before failure.

Müller, Johannes, ↗Regiomontanus, Johannes.

Multigraph, ↗ Pseudograph.

Multiindex-Schreibweise, Konzept zur kompakten Notation von Objekten mehrerer Variabler.

Ein n-Multiindex $i = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ ist ein Tupel von Indizes $i_1, i_2, \dots, i_n \in \mathbb{N}_0$. Die Länge $|i|$ eines Multiindexes ist definiert als $|i| := \sum_{j=1}^{n} i_j$. Desweiteren setzt man

$$i! \;:=\; \prod_{j=1}^{n} (i_j!)\,.$$

Sind n Variable $X_1, X_2, \dots, X_n$ gegeben, so setzt man

$$X^i \;:=\; X_1^{i_1} X_2^{i_2} \cdots X_n^{i_n}\,.$$

Ein beliebiges Polynom vom Grad k mit Koeffizienten in einem Körper $\mathbb{K}$ kann dann als

$$f(X) \;=\; \sum_{l=0}^{k} \sum_{|i|=l} \alpha_i X^i \;=\; \sum_{|i|=0}^{k} \alpha_i X^i$$

mit $\alpha_i \in \mathbb{K}$ geschrieben werden. Hierbei durchläuft die zweite Summe im ersten Ausdruck alle Multiindizes der Länge l, und die Summe im zweiten Ausdruck alle Multiindizes bis zur Länge k. In analoger Weise können Potenzreihen als $\sum_{|i|=0}^{\infty} \alpha_i X^i$ geschrieben werden.

Diese Schreibweise wird auf Ableitungen ausgedehnt. Ist i ein Multiindex, so bezeichnet D^i den Differentialoperator

$$\frac{\partial^{|i|}}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}}$$

der Ordnung $|i|$, der auf Funktionen in n Variablen $x_1, \dots, x_n$ operiert. Ein allgemeiner linearer Differentialoperator der Ordnung k kann durch

$$\sum_{|i|=0}^{k} \alpha_i(x) D^i$$

mit Funktionen $\alpha_i(x)$ in den Variablen $x = (x_1, \dots, x_n)$ gegeben werden.

Weitere interessante Anwendungen sind die Multinomialformel

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^k \;=\; k! \sum_{|i|=k} \frac{a^i}{i!}$$

und die Taylor-Reihenentwicklung einer Funktion f in n Variablen am Punkt $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x+h) \;=\; \sum_{|i|=0}^{\infty} \frac{h^i}{i!} D^i f(x)$$

(falls diese existiert und die Funktion f darstellt).

Multiindizes können ebenso für unendliche Tupel $i = (i_1, i_2, \dots)$ mit $i_k \in \mathbb{N}$ betrachtet werden, falls für das Tupel i vorausgesetzt wird, daß nur endlich viele $i_k \neq 0$ sind.

Multikette, eine ↗(a, b)-Kette mit Wiederholungen.

Multi-Layer-Network, ↗Mehrschichtennetz.

multilineare Algebra, jenes Teilgebiet der Algebra, das sich mit multilinearen Abbildungen zwischen Moduln (spez. Vektorräumen) beschäftigt.

Am Anfang der Untersuchungen standen bilineare und quadratische Formen, woraus sich die Determinantentheorie entwickelt hat. Zentraler Begriff der multilinearen Algebra ist das Tensorprodukt.

In Geometrie und Analysis findet die multilineare Algebra hauptsächlich in der Tensorrechnung und in der Theorie der Differentialformen Anwendung.

multilineare (Sigma-Pi-Typ-)Aktivierung, bezeichnet im Kontext ↗Neuronale Netze eine spezielle Aktivierungsfunktion $A_{w,\varrho} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eines ↗formalen Neurons, die von einem Gewichtsvektor $w \in \mathbb{R}^{2^n}$ und einem Dilatationsparameter $\varrho \in \mathbb{R}$ abhängt und definiert ist als

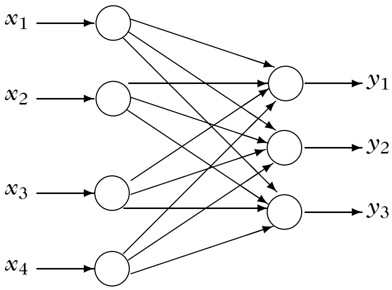
$$A_{w,\varrho} : \quad x \mapsto \varrho \sum_{R \subset \{1,\dots,n\}} w_R \prod_{i \in R} x_i\;.$$

multilinearer (Sigma-Pi-)Assoziierer, Bezeichnung für ein spezielles zweischichtiges ↗Neuronales Netz für bipolare Eingabewerte, das mit der verallgemeinerten ↗Hebb-Lernregel trainiert wird und im Ausführ-Modus auf den Trainingswerten exakt arbeitet.

Im folgenden wird der multilineare Assoziierer kurz skizziert: Es sei ein zweischichtiges neuronales Feed-Forward-Netz mit multilinearer Aktivierung und identischer Transferfunktion in den Ausgabe-Neuronen gegeben (vgl. Abbildung).

Wenn man diesem Netz eine Menge von t Trainingswerten mit bipolaren Eingabewerten $(x^{(s)}, y^{(s)}) \in \{-1,1\}^n \times \mathbb{R}^m$, $1 \le s \le t$, präsentiert, setzt man entsprechend der verallgemeinerten Hebb-Lernregel

$$w_{R,j} := 2^{-n} \sum_{s=1}^{t} y_j^{(s)} \prod_{i \in R} x_i^{(s)}$$



Struktur eines multilinearen Assoziierers

für $R \subset \{1, \dots, n\}$ und $1 \leq j \leq m$. Sind nun die bipolaren Eingabetrainingsvektoren $x^{(s)} \in \{-1, 1\}^n$, $1 \leq s \leq t$, alle verschieden, dann arbeitet das so entstandene neuronale Netz im Ausführ-Modus perfekt auf den Trainingswerten, d. h.

$$\sum_{R \subset \{1,\dots,n\}} w_{R,j} \prod_{i \in R} x_i^{(s)} = y_j^{(s)}$$

für $1 \leq j \leq m$ und $1 \leq s \leq t$, und wird in der Literatur (Hebb-trainierter) multilinearer (Sigma-Pi-)Assoziierer genannt. Im Gegensatz zum gewöhnlichen (Hebb-trainierten) ↗linearen Assoziierer, der orthonormale Eingabetrainingsvektoren zum perfekten Arbeiten benötigt, arbeitet der Sigma-Pi-Assoziierer für beliebige, lediglich als verschieden vorausgesetzte bipolare Eingabetrainingsvektoren perfekt. Dies ist natürlich ein entscheidender Gewinn, der allerdings durch eine wesentlich höhere Komplexität des Netzes erkauft wird.

Schließlich sei noch erwähnt, daß der Sigma-Pi-Assoziierer insbesondere jede bipolar codierte Boolesche Funktion $f : \{-1, 1\}^n \to \{-1, 1\}^m$ exakt implementieren kann und damit implizit gezeigt ist, daß jede Boolesche Funktion exakt durch ein derartiges neuronales Netz dargestellt werden kann.

Multilinearform, eine Abbildung $f : V_1 \times \cdots \times V_n \to \mathbb{K}$ (hierbei sind $V_1, \dots, V_n$ Vektorräume über $\mathbb{K}$), die linear in jeder Komponente ist, d. h. für die für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ und $v_{i_1}, v_{i_2}, v_i \in V_i$ $(1 \leq i \leq n)$ gilt:

$$f(v_1, \dots, v_{i_1} + v_{i_2}, \dots v_n) = \\ f(v_1, \dots, v_{i_1}, \dots, v_n) + f(v_1, \dots, v_{i_2}, \dots, v_n);$$

$$f(v_1, \dots, \alpha v_i, \dots, v_n) = \alpha f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n).$$

Man spricht dann auch von einer n-fachen Linearform; eine 2-fache Linearform wird meist als Bilinearform bezeichnet. Ist der Bildbereich nicht notwendig der Körper $\mathbb{K}$, sondern ein beliebiger Vektorraum über $\mathbb{K}$, so spricht man allgemeiner von multilinearen Abbildungen oder n-fach linearen Abbildungen. Die Menge $L(V_1, \dots, V_n; W)$ aller n-fach linearen Abbildungen $f : V_1 \times \cdots \times V_n \to W$ (V_i und W $\mathbb{K}$-Vektorräume) wird durch komponentenweise erklärte Vektorraumaddition und komponentenweise erklärte Skalarmultiplikation selbst zu einem Vektorraum über $\mathbb{K}$. Ist $(v_{ij(i)})_{j(i) \in J_i}$ eine Basis von V_i $(1 \leq i \leq n)$, so gibt es genau eine multilineare Abbildung $f : V_1 \times \cdots \times V_n \to W$ mit

$$f(v_{1j(1)}, \dots, v_{nj(n)})$$

beliebig, aber fest vorgegeben in W für alle $(j(1), \dots, j(n)) \in J_1 \times \cdots \times J_n$.

Sind alle V_i und W endlich-dimensional, so bilden die im folgenden definierten Abbildungen eine Basis von $L(V_1, \dots, V_n; W)$ ($(w_j)_{j \in J}$ Basis von W):

$$f_{i(1)\dots i(n)j}(v_{1j(1)}, \dots, v_{nj(n)}) = \\ \begin{cases} w_j & \text{falls } i(1) = j(1), \dots, i(n) = j(n), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(Dabei durchläuft $i(1)$ die Menge $J_1, \dots, i(n)$ die Menge J_n, und j die Menge J.) Der Vektorraum $L(V_1, \dots, V_n; W)$ ist für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ isomorph zum Vektorraum

$$L(V_i; L(V_1, \dots, V_{i-1}, V_{i+1}, \dots, V_n; W))$$

aller linearen Abbildungen von V_i in $L(V_1, \dots, V_{i-1}, V_{i+1}, \dots, V_n; W)$. Speziell ist der Vektorraum aller Bilinearformen auf (V_1, V_2) isomorph zu den Vektorräumen $L(V_1, V_2^*)$ und $L(V_2, V_1^*)$ (↗Dualraum). Sind W und alle V_i endlich-dimensional, so gilt

$$\dim L(V_1, \dots, V_n; W) = \\ \dim V_1 \cdot \ldots \cdot \dim V_n \cdot \dim W.$$

Ist $(b_1, \dots, b_m)$ eine Basis von V, so ist eine multilineare Abbildung $f : V^n \to W$ durch die m^n Bildvektoren $f(b_{i_1}, \dots, b_{i_n}) \in W$, wobei $(i_1, \dots, i_n)$ die Menge $\{1, \dots, m\}^n$ durchläuft, eindeutig festgelegt. Ist f alternierend und $m \geq n$, so genügen die $\binom{m}{n}$ Bildvektoren $f(b_{i_1}, \dots, b_{i_n})$ mit $1 \leq i_1 < \cdots < i_n \leq m$ zur Festlegung von f. Insbesondere sind für $m = n$ alle alternierenden multilinearen Abbildungen skalare Vielfache einer einzelnen (von Null verschiedenen) unter ihnen.

Beispiel: $v_1, \dots v_n$ bezeichnen Spaltenvektoren aus $\mathbb{K}^n$. Durch die Abbildung $\det : (\mathbb{K}^n)^n \to \mathbb{K}$; $(v_1, \dots, v_n) \mapsto \det\big(v_1, \dots, v_n)\big)$ (↗Determinante einer Matrix) ist eine n-fache alternierende Multilinearform auf dem Vektorraum $\mathbb{K}^n$ gegeben.

Multimenge, Menge, in der eine Wiederholung von Elementen möglich ist.

Am einfachsten erklärt man eine Multimenge $\hat{M}$ als Paar (S, r_M) mit S als Grundmenge und $r_M : S \to \mathbb{N}_0$, wobei $(r_M(a))$ angibt, wie oft das Element $a \in S$ in $\hat{M}$ auftritt. Ist $r_m(a) = 0$, so heißt das, daß a nicht in $\hat{M}$ erscheint.

Um Verwechslungen mit gewönlichen Mengen auszuschließen, fügt man meist das Symbol ^ hinzu und nennt $\hat{M} = (S, r_M)$ eine Multimenge aus S.

Multinomialkoeffizient, eine natürliche Verallgemeinerung der ↗Binomialkoeffizienten.

Es bezeichne $\binom{n}{k_1 k_2 \cdots k_r}$ die Anzahl der Abbildungen $f : N = \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow R = \{b_1, b_2, \ldots b_r\}$ mit $f^{-1}(b_i) = k_i$ für $1 \leq i \leq n$.

Dann heißen die Zahlen

$$\binom{n}{k_1 k_2 \cdots k_r}$$

Multinomialkoeffizienten.

Es gilt ebenfalls die folgende explizite Darstellung:

$$\binom{n}{k_1 k_2 \cdots k_r} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_r!} & \text{falls } n = \sum_{i=1}^r k_i \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Multinomialkoeffizienten treten im folgenden Multinomialsatz auf, woher auch ihr Name stammt.

Sei R ein kommutativer Ring. Dann gilt für $a_1, a_2, \ldots, a_r$ *aus R:*

$$\begin{aligned}&(a_1 + a_2 + \cdots + a_r)^n \\ &\quad = \sum_{\substack{k_1, k_2, \ldots, k_r \geq 0 \\ \sum k_i = n}} \binom{n}{k_1 k_2 \cdots k_r} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_r^{k_r}.\end{aligned}$$

Multinomialverteilung, *Polynomialverteilung*, mehrdimensionale diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Ist n eine natürliche Zahl und sind $p_1, \ldots, p_k$, $k \geq 2$, positive reelle Zahlen mit $\sum_{i=1}^k p_i = 1$, so heißt das durch

$$P(\{(n_1, \ldots, n_k)\}) = \binom{n}{n_1, \ldots, n_k} p_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$$

für alle $(n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}_0^k$ mit $\sum_{i=1}^k n_i = n$ eindeutig festgelegte und oft mit $\mathcal{M}(n, p_1, \ldots, p_k)$ bezeichnete Wahrscheinlichkeitsmaß P die Multinomialverteilung mit den Parametern n und $p_1, \ldots, p_k$. Hier bezeichnet der Ausdruck

$$\binom{n}{n_1, \ldots, n_k}$$

den ↗Multinomialkoeffizienten.

Ist $X = (X_1, \ldots, X_k)$ ein mit den Parametern n und $p_1, \ldots, p_k$ multinomialverteilter zufälliger Vektor, so sind die Erwartungswerte seiner Komponenten für $i = 1, \ldots, k$ durch $E(X_i) = np_i$ gegeben. Für die Elemente der Kovarianzmatrix $Cov(X) = (Cov(X_i, X_j))_{i,j=1,\ldots,k}$ gilt

$$Cov(X_i, X_j) = \begin{cases} np_i(1 - p_i), & i = j, \\ -np_i p_j, & i \neq j. \end{cases}$$

Der Wert $P(\{n_1, \ldots, n_k\})$ der Multinomialverteilung gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß bei n unabhängigen Wiederholungen eines Experimentes mit k möglichen Ausgängen genau n_1-mal der erste, n_2-mal der zweite Ausgang, usw. realisiert wird.

Multiplexer, ↗logischer Schaltkreis mit drei primären Eingängen s, d_0, d_1 und einem primären Ausgang. Der Eingang s, der als Steuereingang bezeichnet wird, steuert, welcher der beiden Dateneingängen d_0, d_1 auf den Ausgang geschaltet wird. Der logische Schaltkreis berechnet demnach die Boolesche Funktion $(d_0 \wedge \overline{s}) \vee (d_1 \wedge s)$.

multiplicative binary moment diagram, ↗binary moment diagram.

Multiplikand, die Größe, die bei einer ↗Multiplikation mit dem Multiplikator multipliziert wird, also die Größe y im Ausdruck $x \cdot y$.

Multiplikation, meist mit dem Malzeichen · geschriebene assoziative Abbildung $\cdot : M \times M \to M$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$ auf einer Menge M, wie die Multiplikation von Zahlen oder Matrizen, die punktweise erklärte Multiplikation geeigneter Folgen oder Funktionen oder allgemein die Verknüpfung auf einer Halbgruppe. Man läßt das Multplikationszeichen · meist weg, schreibt also xy statt $x \cdot y$ („x mal y“). Der Ausdruck xy heißt Produkt der Faktoren x und y. x und y werden *multipliziert* oder *malgenommen*. x nennt man auch Multiplikator und y Multiplikand und sagt, y werde mit x multipliziert. Für die Multiplikation mehrerer Faktoren und für Grenzwerte von Multiplikationen wird das Produktsymbol $\prod$ benutzt. Falls es ein bzgl. der Multiplikation neutrales Element gibt, wird dieses meist als Eins 1 notiert, und ist $(M, \cdot, 1)$ sogar eine Gruppe, so schreibt man das Inverse zu x als x^{-1} und nennt es das Reziproke von x, definiert damit die Abbildung $^{-1} : M \to M$, $x \mapsto x^{-1}$ und mit $x/y := xy^{-1}$ für $x, y \in M$, auch geschrieben als $x : y$, die zur Multiplikation · gehörende Division $/ : M \times M \to M$, $(x, y) \mapsto x/y$.

Multiplikation von Folgen, die auf dem Raum ℓ der reellen oder komplexen Zahlenfolgen durch

$$(a_n) \cdot (b_n) = (a_n \cdot b_n) \qquad ((a_n), (b_n) \in \ell)$$

erklärte Abbildung $\cdot : \ell \times \ell \to \ell$. Die *Produktfolge* $(a_n)(b_n)$ ist also die Folge der Produkte $a_n b_n$. Da Zahlenfolgen auf $\mathbb{N}$ definierte $\mathbb{R}$- oder $\mathbb{C}$-wertige Funktionen sind, ist die Multiplikation von Folgen ein Spezialfall der Multiplikation von $\mathbb{R}$- bzw. $\mathbb{C}$-wertigen Funktionen. Das Produkt aus einer Nullfolge und einer beschränkten Zahlenfolge ist eine Nullfolge. Das Produkt zweier beschränkter Zahlenfolgen ist eine beschränkte Zahlenfolge. Das Produkt zweier konvergenter Zahlenfolgen (a_n), (b_n) ist konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n .$$

Eine Multiplikation läßt sich ebenso allgemeiner erklären für beliebige Folgen, in deren gemeinsamem Zielbereich eine Multiplikation gegeben ist, wie z. B. in einer Halbgruppe $(H, \cdot)$. Hat man im Zielbereich noch eine Division $/$, wie z. B. in einer Gruppe, so kann man durch

$$(a_n)/(b_n) \ = \ (a_n/b_n)$$

auch die *Division von Folgen* (a_n), (b_n) zur *Quotientenfolge* $(a_n)/(b_n)$ erklären. Der Quotient zweier konvergenter Zahlenfolgen (a_n), (b_n) mit $b_n \neq 0$ für $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$ ist konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \ = \ \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}\,.$$

Multiplikation von Funktionen, die für eine nichtleere Menge $\mathfrak{R}$ auf dem Raum $\mathfrak{F} := \mathfrak{F}(\mathfrak{R})$ der reell- oder komplexwertigen Funktionen durch

$$(f \cdot g)(x) \ := \ f(x)g(x) \quad (x \in \mathfrak{R}) \qquad (f, g \in \mathfrak{F})$$

erklärte Abbildung $\cdot : \mathfrak{F} \times \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$. Die Produktfunktion $f \cdot g$ ist also die Funktion, die an jeder Stelle $x \in \mathfrak{R}$ das Produkt der Werte $f(x)$ und $g(x)$ annimmt. Da Zahlenfolgen auf $\mathbb{N}$ definierte $\mathbb{R}$- oder $\mathbb{C}$-wertige Funktionen sind, ist die Multiplikation solcher Folgen Spezialfall der Multiplikation von Funktionen. Natürlich stellt sich oft die Frage, welche Eigenschaften sich von den Faktoren f und g auf die Produktfunktion übertragen. Dazu seien beispielhaft genannt: Das Produkt zweier beschränkter Funktionen ist beschränkt. Ist $\mathfrak{R}$ ein topologischer Raum, so ist das Produkt zweier stetiger Funktionen stetig. Ist $\mathfrak{R}$ ein normierter Vektorraum, so ist das Produkt zweier differenzierbarer Funktionen differenzierbar. Das Produkt zweier integrierbarer Funktionen ist integrierbar, wenn man sich auf das eigentliche Riemann-Integral bezieht. Hingegen gilt dies nicht für das uneigentliche Riemann-Integral und nicht für das Lebesgue-Integral.

Eine Multiplikation läßt sich ebenso allgemeiner erklären für beliebige Funktionen, in deren gemeinsamen Zielbereich eine Multiplikation gegeben ist, wie z. B. in einer Halbgruppe $(H, \cdot)$. Natürlich können noch allgemeinere Situationen betrachtet werden, so etwa mit drei Mengen $\mathfrak{B}_\nu$ und einer verbindenden Abbildung

$$\omega : \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 \ \to \ \mathfrak{B}_3$$

für Funktionen $f : \mathfrak{R} \to \mathfrak{B}_1$ und $g : \mathfrak{R} \to \mathfrak{B}_2$ durch

$$(f \cdot g)(x) \ := \ \omega(f(x), g(x)) \quad (x \in \mathfrak{R})\,.$$

Speziell findet man das oft für Vektorräume $\mathfrak{B}_\nu$ und bilineares ω.

Vereinzelt spricht man auch bei anderen Verbindungen zweier Funktionen von Multiplikation, so etwa bei der Hintereinanderausführung und der Faltung.

Multiplikation von ganzen Zahlen, die durch

$$\langle k, \ell\rangle \cdot \langle m, n\rangle \ := \ \langle km + \ell n, kn + \ell m\rangle$$

für $k, \ell, m, n \in \mathbb{N}$ erklärte Abbildung $\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, wenn die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ als Äquivalenzklassen $\langle k, \ell\rangle$ von Paaren (k, ℓ) natürlicher Zahlen bzgl. der durch

$$(k, \ell) \sim (m, n) \ :\Longleftrightarrow \ k + n = m + \ell$$

erklärten Äquivalenzrelation eingeführt werden. Definiert man $\mathbb{N}$ als die kleinste induktive Teilmenge des axiomatisch eingeführten Körpers $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen und $\mathbb{Z}$ als $-\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$, so ist $\mathbb{Z}$ gegenüber der von $\mathbb{R}$ geerbten Multiplikation abgeschlossen, man erhält also die Multiplikation auf $\mathbb{Z}$ als Einschränkung der Multiplikation auf $\mathbb{R}$.

Multiplikation von Kardinalzahlen, für Kardinalzahlen κ und λ definiert als $\kappa \otimes \lambda := \#(\kappa \times \lambda)$, siehe auch ↗Kardinalzahlen und Ordinalzahlen.

Multiplikation von Matrizen, die durch (1) definierte Verknüpfung einer $(m \times n)$-Matrix $A = (a_{ij})$ über $\mathbb{K}$ mit einer $(n \times p)$-Matrix $B = (b_{ij})$ über $\mathbb{K}$:

$$C = (c_{ij}) := AB := \left(\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right)\right) \tag{1}$$

$(1 \le i \le m; 1 \le j \le p)$. Das Element c_{ij} der Ergebnismatrix C ist also das „Produkt der i-ten Zeile von A mit der j-ten Spalte von B“. Das Multiplikationsergebnis C ist eine $(m \times p)$-Matrix über $\mathbb{K}$ und wird als das Produkt von A und B bezeichnet. Stimmen Zeilenzahl von A und Spaltenzahl von B nicht überein, so ist ein Produkt AB nicht definiert; im anderen Fall werden die Matrizen A und B auch als verkettet bezeichnet.

Mit der elementweise definierten Addition und der durch (1) definierten Multiplikation wird die Menge aller $(n \times n)$-Matrizen über $\mathbb{K}$ zu einem Ring, dessen Einselement die ↗Einheitsmatrix ist.

Einige Rechenregeln: Die Multiplikation von Matrizen ist assoziativ ($(AB)C = A(BC)$) und distributiv ($A(B+C) = AB+AC$; $(A+B)C = AC+BC$), und es gilt für die transponierte Matrix

$$(AB)^t \ = \ B^t A^t\,.$$

Im allgemeinen ist die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ; gilt aber $AB = BA$, so heißen A und B (miteinander) vertauschbar. Miteinander vertauschbare Matrizen sind notwendigerweise quadratisch von gleicher Größe. Die Matrizenmultiplikation ist nicht nullteilerfrei (d. h., es gibt Matrizen

A und B, beide verschieden von der Nullmatrix 0, jedoch $AB = 0$).

Beschreiben die Matrizen A und B bezüglich fest gewählter Basen B_1, B_2 und B_3 in den Vektorräumen V_1, V_2 und V_3 die linearen Abbildungen $g : V_1 \to V_2$ und $f : V_2 \to V_3$, so beschreibt das Produkt AB die Kompositionsabbildung $f \circ g : V_1 \to V_3$ bzgl. B_1 und B_3.

Multiplikation von natürlichen Zahlen, die für jedes $m \in \mathbb{N}$ durch die rekursive Definition

$$\begin{aligned} m \cdot 1 &:= m \\ m \cdot N(n) &:= (m \cdot n) + m \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

erklärte Abbildung $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, wenn die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ axiomatisch als Menge mit einem ausgezeichneten Element $1 \in \mathbb{N}$ und ↗Nachfolgerfunktion $N : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eingeführt werden. Definiert man $\mathbb{N}$ als die Menge der Kardinalzahlen nichtleerer endlicher Mengen, so wird die Multiplikation von den Kardinalzahlen geerbt, und erklärt man $\mathbb{N}$ als die kleinste induktive Teilmenge des axiomatisch eingeführten Körpers $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, so ist $\mathbb{N}$ gegenüber der von $\mathbb{R}$ geerbten Multiplikation abgeschlossen, man erhält also die Multiplikation auf $\mathbb{N}$ als Einschränkung der Multiplikation auf $\mathbb{R}$.

Multiplikation von Ordinalzahlen, definiert durch transfinite Rekursion über die Ordinalzahl β.

Man fixiert die Ordinalzahl α und definiert $\alpha \cdot 0 := 0$, $\alpha \cdot (\beta + 1) := \alpha \cdot \beta + \alpha$ für Nachfolgeordinalzahlen $\beta + 1$ sowie $\alpha \cdot \beta := \sup\{\alpha \cdot \gamma : \gamma < \beta\}$ für Limesordinalzahlen β (↗Kardinalzahlen und Ordinalzahlen).

Multiplikation von rationalen Zahlen, die durch

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{ac}{bd} \quad \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}\right)$$

erklärte Abbildung $\cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, wenn die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ als Brüche $\frac{a}{b}$ ganzer Zahlen a, b mit $b \neq 0$ eingeführt werden. Definiert man $\mathbb{N}$ als die kleinste induktive Teilmenge des axiomatisch eingeführten Körpers $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ als $-\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ als die Menge derjenigen reellen Zahlen, die sich als Quotient ganzer Zahlen schreiben lassen, so ist $\mathbb{Q}$ gegenüber der von $\mathbb{R}$ geerbten Multiplikation abgeschlossen, man erhält also die Multiplikation auf $\mathbb{Q}$ als Einschränkung der Multiplikation auf $\mathbb{R}$.

Multiplikation von reellen Zahlen, die durch

$$\langle p_n \rangle \cdot \langle q_n \rangle := \langle p_n \cdot q_n \rangle \quad (\langle p_n \rangle, \langle q_n \rangle \in \mathbb{R})$$

erklärte Abbildung $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wenn die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ als Äquivalenzklassen $\langle p_n \rangle$ von Cauchy-Folgen (p_n) rationaler Zahlen bzgl. der durch

$$(p_n) \sim (q_n) :\Longleftrightarrow q_n - p_n \to 0 \quad (n \to \infty)$$

gegebenen Äquivalenzrelation eingeführt werden. Definiert man $\mathbb{R}$ über Dedekind-Schnitte, Dezimalbruchentwicklungen, Äquivalenzklassen von Intervallschachtelungen oder Punkte der Zahlengeraden, so muß man für diese eine Multiplikation erklären. Wird $\mathbb{R}$ axiomatisch als vollständiger archimedischer Körper eingeführt, so ist die Multiplikation schon als Teil der Definition gegeben.

Multiplikation von Reihen, ist zunächst – über die Partialsummen – ein Spezialfall der Multiplikation von (konvergenten) Folgen:

Sind $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$ konvergente Reihen reeller oder komplexer Zahlen mit Reihenwerten A bzw. B, so gilt mit den Partialsummen

$$A_n := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu, \quad B_n := \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

$$A_n B_n \to AB .$$

Dabei ist $A_n B_n = \left(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\right)\left(\sum_{\nu=0}^{n} b_\nu\right) = \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu$ mit

$$p_\nu := \sum_{\substack{\lambda,\kappa \in \mathbb{N}_0 \\ \max(\lambda,\kappa)=\nu}} a_\lambda b_\kappa ,$$

also

$$AB = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu .$$

Für viele Zwecke, insbesondere bei Potenzreihen, ist die Anordnung nach „Schrägzeilen“ (↗Cauchy-Produkt) besser geeignet:

$$\begin{aligned} I_n &:= \{(\lambda, \kappa) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 : \lambda + \kappa = n\} \\ &= \{(\nu, n - \nu) : \mathbb{N}_0 \ni \nu \leq n\} \quad (n \in \mathbb{N}_0). \end{aligned}$$

Mit $\displaystyle c_n := \sum_{(\lambda,\kappa) \in I_n} a_\lambda b_\kappa = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \, b_{n-\nu}$

besagt der Reihenproduktsatz von Cauchy (↗Cauchy, Reihenproduktsatz von):

Sind $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$ absolut konvergent, dann ist die Cauchy-Produktreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergent, und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = AB = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\right)\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu\right) .$$

Allgemeiner gilt: Sind die beiden Reihen $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$ absolut konvergent, so konvergiert jede ihrer Produktreihen gegen $\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\right)\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu\right)$.

Der Satz gilt *nicht,* wenn die beiden Reihen $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$ nur (bedingt) konvergieren. Ein Standard-Beispiel dazu ist gegeben durch:

$$a_\nu := b_\nu := \frac{(-1)^\nu}{\sqrt{\nu + 1}} .$$

Die Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = AB$$

ist schon gesichert, falls nur eine der Reihen absolut konvergent und die andere (nur) konvergent ist. Dies beinhaltet der Satz von Mertens (↗Mertens, Satz von, über das Cauchy-Produkt).

Als Anwendung des ↗Abelschen Grenzwertsatzes erhält man: Ist neben $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$ auch $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergent, so gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = AB = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\right)\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu\right).$$

Multiplikation von surrealen Zahlen, die durch

$$x \cdot y := \left\{ \begin{matrix} x^L y + x y^L - x^L y^L \\ x^R y + x y^R - x^R y^R \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x^L y + x y^R - x^L y^R \\ x^R y + x y^L - x^R y^L \end{matrix} \right\}$$

für $x, y \in \mathrm{No}$ erklärte Abbildung $\cdot : \mathrm{No} \times \mathrm{No} \to \mathrm{No}$, wenn die surrealen Zahlen No axiomatisch rekursiv als Conway-Schnitte $x = \{x^L \mid x^R\}$ eingeführt werden. Wegen der besseren Darstellbarkeit ist hier $\{\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \mid \begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix}\} = \{a, b \mid c, d\}$ gesetzt. Definiert man die surrealen Zahlen als spezielle Spiele, so erhält man die Multiplikation der surrealen Zahlen aus der Multiplikation von Spielen. Definiert man sie als Vorzeichenfolgen, so muß man für diese eine Multiplikation erklären.

Multiplikation von Zahlen, als ↗Multiplikation von natürlichen Zahlen rekursiv definierte Abbildung $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die bei der Erweiterung der Zahlenbereiche von $\mathbb{N}$ auf die ganzen, rationalen, reellen und komplexen Zahlen ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$) fortgesetzt wird. Bei einer axiomatischen Einführung von $\mathbb{R}$ als vollständiger archimedischer Körper ist die Multiplikation auf $\mathbb{R}$ und auf den diesbezüglich abgeschlossenen Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ von vornherein gegeben. Die Multiplikation von Zahlen ist assoziativ, kommutativ und bzgl. der Addition distributiv und hat die Eins $1 \in \mathbb{N}$ als neutrales Element. $(\mathbb{N}, \cdot, 1)$ und $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ sind kommutative Monoide mit Kürzungsregel, und $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ und $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ sind kommutative Gruppen.

Multiplikationsformel für Wahrscheinlichkeiten, gelegentlich anzutreffende Bezeichnung für die Formel

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A),$$

welche sich durch Umschreiben aus der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit $P(B|A)$ des Ereignisses B, gegeben das Ereignis A mit $P(A) > 0$, ergibt. Die Verallgemeinerung

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

dieser Formel für Ereignisse $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}$ mit $P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$ eines Wahrscheinlichkeitsraumes $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ wird zuweilen als Kettenregel oder Multiplikationssatz für elementare bedingte Wahrscheinlichkeiten bezeichnet.

Multiplikationsmatrix, ↗Baummultiplizierer.

Multiplikationsoperator, ein Operator der Form $f \mapsto h \cdot f$ auf einem Funktionenraum.

Jeder selbstadjungierte Operator in einem Hilbertraum ist zu einem Multiplikationsoperator unitär äquivalent (↗Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren).

multiplikativ abgeschlossen, Eigenschaft einer Teilmenge S eines Rings R: $1 \in S$ und $s, s' \in S$ impliziert $ss' \in S$. Wenn $P \subset R$ ein Primideal ist, dann ist $S = R \setminus P$ multiplikativ abgeschlossen. Für ein Element $f \in R$ ist die Menge $\{1, f, f^2, f^3, \ldots\}$ multiplikativ abgeschlossen. Zur ↗Lokalisierung eines Rings benutzt man multiplikativ abgeschlossene Mengen.

multiplikative Funktion, eine zahlentheoretische Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, die nicht identisch 0 ist, mit der Eigenschaft

$$f(mn) = f(m) \cdot f(n) \qquad \text{falls } m, n \text{ teilerfremd.}$$

Gilt $f(mn) = f(m)f(n)$ für beliebige $m, n \in \mathbb{N}$, so heißt f vollständig multiplikativ.

Beispiele:

1. Für festes $r \in \mathbb{R}$ ist die durch $n \mapsto n^r$ gegebene Funktion vollständig multiplikativ.
2. Ein Dirichlet-Charakter (↗Charakter modulo m) ist eine multplikative Funktion.
3. Die ↗Möbius-Funktion μ ist multiplikativ, aber nicht vollständig multiplikativ.
4. Für ein Polynom $f(x)$ mit ganzzahligen Koeffizienten und $m \in \mathbb{N}$ bezeichne $\varrho_f(m)$ die Anzahl der (ganzzahligen) Lösungen der Kongruenz $f(x) \equiv 0 \mod m$. Dann ist ϱ_f eine multiplikative Funktion.

Die multiplikativen Funktionen besitzen eine algebraische Struktur:

Sind $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ multiplikative Funktionen, so ist auch ihr Dirichlet-Produkt

$$f \star g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}, \quad (f \star g)(n) = \sum_{rs=n} f(r)g(s),$$

wobei die Summe über alle $r, s \in \mathbb{N}$ mit $rs = n$ zu erstrecken ist, eine multiplikative Funktion. Mit dieser Multiplikation bildet die Menge der multiplikativen Funktionen eine ↗abelsche Gruppe.

Beim Beweis dieses Satzes macht man wesentlich Gebrauch von der Bedingung „falls m, n teilerfremd“. Die vollständig multiplikativen Funktionen besitzen keine solche Struktur; das Dirichlet-Produkt zweier vollständig multiplikativer Funktionen ist zwar eine multiplikative Funktion, aber nicht notwendigerweise vollständig multiplikativ.

http://www.springer.com/978-3-662-53499-1

Lexikon der Mathematik: Band 4
Moo bis Sch
Walz, G. (Hrsg.)
2017, VII, 488 S. 21 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-662-53499-1