

input, Eingabe von Daten.

Zur automatischen Verarbeitung von Daten ist es nötig, die Daten einem Rechner zur Verfügung zu stellen. Die Übertragung von Informationen in einen Rechner nennt man input.

input layer, \nearrow Eingabeschicht.

input neuron, \nearrow Eingabe-Neuron.

Instabilitätszone, nach Arnold diejenige Teilmenge einer \nearrow Energiehyperfläche eines gestörten integrablen Systems, die außerhalb der invarianten Tori (\nearrow invarianter Torus, Satz über) liegt.

Falls der Phasenraum des Systems vierdimensional ist, so verbleibt jede Integralkurve in der Instabilitätszone zwischen zwei invarianten Tori. Für höherdimensionale Phasenräume ist dies jedoch im allgemeinen nicht mehr der Fall.

Institute for Advanced Study, eine private Institution, die die Förderung und Unterstützung der Grundlagenforschung zur Aufgabe hat.

Das Institut ist in Princeton beheimatet und wurde 1930 gegründet. Es hat kein formales Ausbildungsprogramm, keinen vorgeschriebenen Vorlesungszyklus und keine Laboratorien bzw. andere Experimentiereinrichtungen. Es bietet hervorragenden Wissenschaftlern aus aller Welt die Möglichkeit, frei von anderen Verpflichtungen ihre Forschungen durchzuführen. Deshalb gibt es weder vertraglich gebundene Forschungsaufträge noch formale Bindungen an andere Bildungseinrichtungen. Jedoch bestehen sehr gute Beziehungen zur Universität Princeton und einigen nahe gelegenen Instituten. Die Finanzierung erfolgt vor allem aus privaten Stiftungen und Spenden sowie aus staatlichen Zuschüssen. Das Institut besteht zur Zeit aus fünf Abteilungen (Schulen): für historische Studien, für Mathematik, für Naturwissenschaften, für Sozialwissenschaften und für theoretische Biologie. Jede Abteilung verfügt über einen kleinen Stamm von fest angestellten Mitgliedern und über etwa 180 zeitweilige Mitglieder, die meist für ein Jahr an das Institut berufen werden. Unter ihnen befanden sich zahlreiche Nobelpreisträger bzw. Träger der \nearrow Fields-Medaille und anderer hoher wissenschaftlicher Auszeichnungen. Das Institute for Advanced Study ist wegen seiner einzigartigen Forschungsatmosphäre und der Möglichkeit zur Zusammenarbeit mit zahlreichen bedeutenden Gelehrten als eine führende Forschungseinrichtung in aller Welt sehr geschätzt. Gegenwärtig (2000) gehören E. Bombieri, J. Bourgain, P. Deligne, R. P. Langlands, R. D. MacPherson, T. Spencer und A. A. Wigderson sowie A. Selberg und A. Borel als Emeriti der mathematischen Abteilung als ständige Mitglieder an.

Intaktwahrscheinlichkeit, Begriff aus der \nearrow Zuverlässigkeitstheorie.

Die Intaktwahrscheinlichkeit ist ein Synonym

für die Überlebenswahrscheinlichkeit, siehe auch \nearrow Ausfallwahrscheinlichkeit.

Integer-Programmierung, andere Bezeichnung für die \nearrow ganzzahlige Optimierung.

Integrität, Eigenschaft einer Funktion.

Integrität einer in einer offenen Menge $D \subset \mathbb{C}$ stetigen Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ bedeutet beispielsweise, daß f eine Stammfunktion F in D besitzt, d. h. F ist eine in D \nearrow holomorphe Funktion mit $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in D$. In diesem Fall nennt man f integabel in D .

Es gilt das folgende Integritätskriterium.

Es sei $D \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine in D stetige Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) *Es ist f integabel in D .*

(a) *Für jeden in D rektifizierbaren, \nearrow geschlossenen Weg γ gilt $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.*

Ist f integabel in D , so ist f holomorph in D . Jedoch ist nicht jede in D holomorphe Funktion integabel in D . Zum Beispiel ist $f(z) = \frac{1}{z}$ holomorph in $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, aber nicht integabel in D . Ist $D = G$ ein einfach zusammenhängendes \nearrow Gebiet, so ist jede in G holomorphe Funktion integabel in G .

Integritätsbedingung für ein Hyperebenenfeld, die \nearrow Frobeniussche Integritätsbedingung für das Unterbündel der Kodimension 1 des Tangentialbündels einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit, das durch ein \nearrow Hyperebenenfeld definiert wird.

Die Hyperebenenfelder, die einer \nearrow Kontaktmannigfaltigkeit M zugrundeliegen, erfüllen die Integritätsbedingung nicht.

integrabler geodätischer Fluß, ein geodätischer Fluß, der ein \nearrow integrables Hamiltonsches System auf dem \nearrow Kotangentialbündel einer Riemannschen Mannigfaltigkeit bildet.

integrables Hamiltonsches System, zur Verdeutlichung auch vollständig integrables Hamiltonsches System genannt, ein \nearrow Hamiltonsches System auf einer \nearrow symplektischen Mannigfaltigkeit M der Dimension $2n$, für das es n funktional unabhängige \nearrow Integrale der Bewegung F_1, \dots, F_n gibt, die untereinander alle bzgl. der Poisson-Klammer kommutieren.

Für gegebene reelle Zahlen a_1, \dots, a_n ist dann jede Niveaufäche

$$\{m \in M | F_1(m) = a_1, \dots, F_n(m) = a_n\}$$

invariant unter den Flüssen des Systems und der \nearrow Hamilton-Felder der Integrale der Bewegung. In der Nähe jeder regulären Niveaufäche lassen sich die n Integrale lokal zu \nearrow Darboux-Koordinaten $(Q_1, \dots, Q_n, F_1, \dots, F_n)$ ergänzen, in denen die

Dynamik des Hamilton-Feldes die einfache Form

$$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial F_i}(F), \quad \frac{dF_i}{dt} = 0$$

annimmt.

Fast alle Hamiltonschen Systeme sind nicht integrabel. Trotzdem bilden bestimmte integrable Systeme wie das \nearrow Kepler-System in der Himmelsmechanik oder der \nearrow Harmonische Oszillator eine wichtige Grundlage für Näherungen (\nearrow Kolmogorow-Arnold-Moser, Satz von).

integrables Unterbündel, \nearrow Frobeniussche Integrabilitätsbedingung.

Integral, \nearrow Existenz des Integrals, \nearrow Integrabilität, \nearrow Integralrechnung, \nearrow Integration von Funktionen, \nearrow Integrationsregeln, \nearrow Integrationstheorie.

Integral der Bewegung, für ein gegebenes dynamisches System jede reellwertige C^∞ -Funktion, die längs der Integralkurven des dem System zugrundeliegenden Vektorfeldes konstant ist.

Integral von Regelfunktionen, \nearrow Regelfunktionen, Integral von.

Integralabschätzung, Abschätzung des Betrags (bzw. der Norm) eines Integrals nach oben durch eine Funktion des Integrationswegs und des Integranden, etwa beim \nearrow Kurvenintegral durch das Produkt aus der Kurvenlänge und dem Maximum des Integranden auf dem Träger der Kurve.

Speziell spricht man auch von Integralabschätzung bei einer Abschätzung des Integrals durch eine „Norm“ des Integranden, d. h. (unter geeigneten Voraussetzungen) einer Ungleichung der Gestalt $|\int f(x) dx| \leq \|f\|$ für integrierbare Funktionen f (\nearrow Integralnorm). Eine solche Abschätzung zeigt, daß das Integral als lineare Funktion des Integranden bzgl. $\|\cdot\|$ stetig ist, und ihre Gültigkeit für „einfache Funktionen“ f (z. B. Treppenfunktionen) ist Grundlage der \nearrow Integralfortsetzung. Die Dreiecksungleichung für Integrale liefert z. B. für $-\infty < a < b < \infty$ und den Raum \mathfrak{E} der reellwertigen Treppenfunktionen auf $[a, b]$ mit dem elementaren Integral $i : \mathfrak{E} \rightarrow \mathbb{R}$

$$|i(h)| \leq i(|h|) = \|h\|_L = \|h\|_R \leq \|h\|_S$$

für $h \in \mathfrak{E}$ mit der (skalierten) Supremumsnorm $\|\cdot\|_S$, der Riemann-Norm $\|\cdot\|_R$ und der Lebesgue-Norm $\|\cdot\|_L$. Diese sind für $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ wie folgt definiert:

$$\|f\|_S = (b - a) \sup \{ |f(x)| \mid x \in [a, b] \},$$

$$\|f\|_R = \inf \{ i(h) \mid \mathfrak{E} \ni h \geq |f| \} \quad (\inf \emptyset = \infty),$$

$$\|f\|_L = \inf \left\{ \sup_{n \in \mathbb{N}} i(h_n) \mid \mathfrak{E}^+ \ni h_n \uparrow \geq |f| \right\}$$

$$(\text{d. h. } 0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \dots \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} h_n \geq |f|).$$

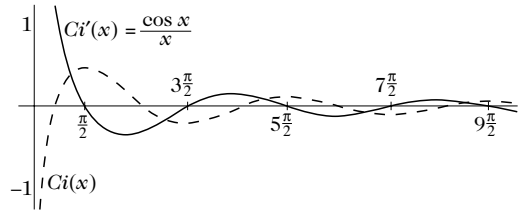
Integralfortsetzung bzgl. $\|\cdot\|_S$ führt zum Integral von Regelfunktionen, bzgl. $\|\cdot\|_R$ zum Riemann-Integral und bzgl. $\|\cdot\|_L$ zum Lebesgue-Integral, die sich auf ähnliche Weise auch in wesentlich allgemeineren Ausgangssituationen einführen lassen.

Integralcosinus, \nearrow Integralcosinusfunktion.

Integralcosinusfunktion, *Integralcosinus*, die für $x > 0$ durch

$$\begin{aligned} \text{Ci}(x) &= - \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \\ &= \gamma + \ln x - \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t} dt \end{aligned}$$

definierte Funktion $\text{Ci} : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, wobei γ die \nearrow Eulersche Konstante ist.



Integralcosinusfunktion

Für $x > 0$ gilt

$$\text{Ci}(x) = \gamma + \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)(2n)!} x^{2n}.$$

Die Funktion Ci ist zu einer in der geschlitzten Ebene $\mathbb{C}^- = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ \nearrow holomorphen Funktion fortsetzbar. Bezeichnet Log den Hauptzweig des Logarithmus, so ist $\text{Ci}z - \text{Log}z$ zu einer \nearrow ganz transzendenten Funktion fortsetzbar. Für $z \in \mathbb{C}^-$ gilt

$$\begin{aligned} \text{Ci}(z) &= \gamma + \text{Log}z - \int_0^z \frac{1 - \cos t}{t} dt \\ &= \gamma + \text{Log}z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n \cdot (2n)!} z^{2n}. \end{aligned}$$

Integraldarstellung der Beta-Funktion, \nearrow Beta-Funktion.

integrale Bezier-Fläche, veraltete Bezeichnung für eine polynomiale (also nicht rationale) \nearrow Bézier-Fläche.

integrale Bezier-Kurve, veraltete Bezeichnung für eine polynomiale (also nicht rationale) \nearrow Bézier-Kurve.

integrale B-Splinefläche, veraltete Bezeichnung für eine polynomiale (also nicht rationale) \mathcal{A} B-Splinefläche.

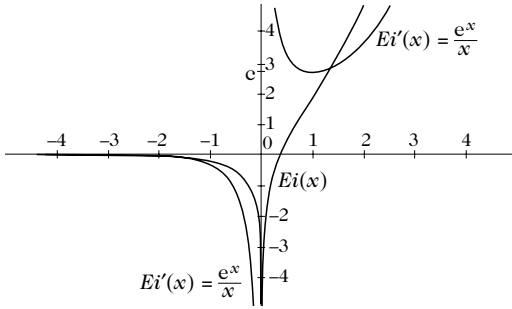
integrale B-Splinekurve, veraltete Bezeichnung für eine polynomiale (also nicht rationale) \mathcal{A} B-Splinekurve.

Integralexponentialfunktion, die für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ durch

$$\text{Ei}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt = - \int_{-\infty}^x \frac{e^{-t}}{t} dt$$

definierte Funktion $\text{Ei} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$. Für $x > 0$ ist $\int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt$ als der Cauchy-Hauptwert des Integrals zu verstehen, also

$$\text{Ei}(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^t}{t} dt + \int_{\varepsilon}^x \frac{e^t}{t} dt \right).$$



Integralexponentialfunktion

Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$\text{Ei}(x) = \gamma + \ln |x| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot n!},$$

wobei γ die \mathcal{A} Eulersche Konstante ist. Für $x \rightarrow \infty$ hat man die asymptotische Darstellung

$$\text{Ei}(-x) \approx \frac{e^{-x}}{x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{x^n}.$$

Die Integralexponentialfunktion ist durch $\text{Ei}(x) = \text{Li}(e^x)$ für $x < 0$ bzw. $\text{Ei}(\ln x) = \text{Li}(x)$ für $0 < x < 1$ mit der \mathcal{A} Integrallogarithmusfunktion Li verbunden.

Die Funktion Ei ist zu einer in der geschlitzten Ebene $\mathbb{C}^- = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ \mathcal{A} holomorphen Funktion fortsetzbar. Bezeichnet Log den Hauptzweig des Logarithmus, so ist $\text{Ei} z = -\text{Log} z$ zu einer \mathcal{A} ganz transzendenten Funktion fortsetzbar. Für $z \in \mathbb{C}^-$ gilt die Reihenentwicklung

$$\text{Ei} z = \gamma + \text{Log} z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n \cdot n!}.$$

Integralfläche, lokale Untermannigfaltigkeit F einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M , deren Tangentialräume mit vorgegebenen Unterräumen des Tangentialbündels von M übereinstimmen.

Jede Integralkurve eines dynamischen Systems ist ein Beispiel einer eindimensionalen Integralfläche. Blätterungen von M in Integralflächen werden oft durch integrable Unterbündel des Tangentialbündels von M erzeugt, vgl. \mathcal{A} Frobeniussche Integrabilitätsbedingung.

Integral-Flow-Theorem, \mathcal{A} Netzwerkfluß.

Integralformel von Gauß-Bonnet, eine Beziehung zwischen der \mathcal{A} Gesamtkrümmung einer Fläche \mathcal{F} , der \mathcal{A} geodätischen Krümmung κ_g ihrer Randkurve \mathcal{C} , und ihrem Geschlecht g .

Das Geschlecht g einer geschlossenen Fläche \mathcal{F} läßt sich anschaulich als Anzahl der ‚Löcher‘ von \mathcal{F} beschreiben. Damit gilt:

Es sei \mathcal{F} eine reguläre Fläche des \mathbb{R}^3 mit einer glatten Randkurve \mathcal{C} , dO ihr Flächenelement (\mathcal{A} Flächeneinhalt) und ds das Bogenelement von \mathcal{C} . Dann gilt

$$\int_{\mathcal{F}} k dO + \oint_{\mathcal{C}} \kappa_g ds = 2\pi.$$

Als Folgerung daraus erhält man für eine geschlossene Fläche von Geschlecht g :

$$\int_{\mathcal{F}} k dO = 2\pi(1 - g).$$

Dabei ist \mathcal{C} beim Berechnen des Kurvenintegrals so zu durchlaufen, daß die Fläche zur Linken liegt.

Dieses Resultat wurde zuerst im Jahre 1848 von O. Bonnet publiziert. Vermutlich kannte es Gauß aber schon vorher.

Integralfortsetzung, Erweiterung eines auf einer Teilmenge \mathfrak{E} eines Funktionenraums \mathfrak{F} gegebenen elementaren Integrals i unter Beibehaltung von Eigenschaften wie Linearität und (in Spezialfällen) Monotonie auf einen größeren Bereich integrierbarer Funktionen $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{F}$, der möglichst \mathfrak{E} als dichte Teilmenge enthalten soll.

Die Menge \mathfrak{E} , auch Menge der einfachen Funktionen genannt, kann beispielsweise ein Raum von Treppenfunktionen oder ein Raum stetiger Funktionen mit kompaktem Träger sein. Eine einheitliche und elegante Behandlung auch sehr allgemeiner Fälle ist möglich, wenn man solch eine Erweiterung als stetige Fortsetzung von i bezüglich einer auf \mathfrak{F} gegebenen (bzw. geeignet definierten) Norm-ähnlichen Abbildung $\|\cdot\| : \mathfrak{F} \rightarrow [0, \infty]$ betrachtet (\mathcal{A} Integralnorm, \mathcal{A} Integrationstheorie), wobei folgender Fortsetzungssatz bzw. einfache Verallgemeinerungen desselben benutzt werden können: Ist \mathfrak{F} ein Vektorraum und $\|\cdot\| : \mathfrak{F} \rightarrow [0, \infty]$ eine Pseudonorm (d.h. $\|\cdot\|$ hat die Eigenschaften einer

Halbnorm mit dem Unterschied, daß auch der Wert ∞ zugelassen ist), \mathfrak{E} ein Unterraum von \mathfrak{F} , \mathfrak{B} ein Banachraum und $i : \mathfrak{E} \rightarrow \mathfrak{B}$ linear und stetig bzgl. $\|\cdot\|$, dann gibt es eine eindeutige stetige Fortsetzung $\bar{i} : \mathfrak{I} \rightarrow \mathfrak{B}$ von i auf den Abschluß \mathfrak{I} von \mathfrak{E} bzgl. $\|\cdot\|$. \mathfrak{I} ist ein Unterraum von \mathfrak{F} , und \bar{i} ist linear. Die Stetigkeit von i bzgl. $\|\cdot\|$ ist insbesondere gegeben, wenn eine \mathcal{I} -Integralabschätzung $|i(f)| \leq \|f\|$ für $f \in \mathfrak{E}$ möglich ist. Dann gilt auch $|\bar{i}(f)| \leq \|f\|$ für $f \in \mathfrak{I}$.

Auf ganz ähnliche Weise ist mit Hilfe eines Fortsetzungssatzes für sesquilineare Abbildungen die Erweiterung elementarer Quadratintegrale, d. h. gewisser sesquilinear Abbildungen auf dem Produkt zweier Räume geeigneter einfacher Funktionen, auf größere Funktionenräume quadratintegrierbarer Funktionen möglich.

Integralfranchise, spezielle Form für den \mathcal{I} -Selbstbehalt in der Rückversicherung.

Integralgeometrie, die Geometrie der Mengen eines Raumes, für die ein gegenüber einer gewissen Transformationsgruppe invariantes Maß gegeben ist.

Beispielsweise kann jeder Menge in der euklidischen Ebene als Maß ihr Flächeninhalt zugeordnet werden, der invariant gegenüber der Gruppe der Bewegungen ist.

Integralgleichung, Gleichung, in der eine zu bestimmende Funktion in einem Integral auftritt. Man unterscheidet lineare Integralgleichungen, bei denen die zu bestimmende Funktion linear auftritt, und nichtlineare.

Integralgleichungen wurden zuerst Beginn des 19. Jahrhunderts (Abel) intensiver untersucht. Entscheidende Fortschritte wurde zum Beginn des 20. Jahrhunderts insbesondere durch Fredholm, Hilbert und E. Schmidt erzielt und führten dabei u. a. zur Entwicklung der \mathcal{I} -Funktionalanalysis.

Am besten untersucht sind lineare Integralgleichungen, die im folgenden betrachtet werden.

Seien $D \subset \mathbb{R}^n$, $k : D \times D \rightarrow \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$, und $A : D \rightarrow \mathbb{R}$. Die Integralgleichung

$$A(x)\varphi(x) - \int_D k(x,y)\varphi(y)dy = f(x) \quad (1)$$

heißt

- Integralgleichung erster Art für $A(x) = 0$ ($x \in D$)
- Integralgleichung zweiter Art für $A(x) = \text{const.}$ ($= 1$) ($x \in D$), bzw.
- Integralgleichung dritter Art, falls keiner der beiden ersten Fälle zutrifft.

Ist die rechte Seite $f(x)$ konstant gleich Null, spricht man von einer homogenen, andernfalls von einer inhomogenen Integralgleichung. Die Funktion k wird dabei als Kern der Integralgleichung (Integral kern) bezeichnet. Man kann (1) auch mit

Hilfe des \mathcal{I} -Integraloperators $K : C^0(D) \rightarrow C^0(D)$,

$$(K\varphi)(x) := \int_D k(x,y)\varphi(y)dy$$

als

$$A(x)\varphi(x) - (K\varphi)(x) = f(x)$$

schreiben. Oftmals wird dabei ein Parameter λ eingeführt, und die Integralgleichung $A(x)\varphi(x) - \lambda(K\varphi)(x) = f(x)$ betrachtet.

Man unterscheidet weiter je nach der Form des Integralkerns verschiedene Typen: Ist der Integralkern reell und symmetrisch, d. h., gilt $k(x,y) = k(y,x)$, so spricht man von einer Integralgleichung mit symmetrischem Kern. Sie wurden zuerst von Hilbert und anschließend von E. Schmidt untersucht, nach denen ihre Theorie Hilbert-Schmidt-Theorie heißt. Wird durch den Integralkern eine Faltung (Konvolution) definiert, d. h. gilt $k(x,y) = g(x-y)$ mit einer Funktion g , so spricht man von einer Integralgleichung vom Konvolutionstyp. Ein Spezialfall hiervon sind Integralgleichungen vom Wiener-Hopf-Typ, bei denen der Integrationsbereich die positive Halbachse ist. Weitere wichtige Typen sind die \mathcal{I} -Fredholmsche Integralgleichung und die \mathcal{I} -Volterra-Integralgleichung.

Integralgleichungsmethode, Überführung einer Differentialgleichung in eine äquivalente Integralgleichung und Anwendung eines geeigneten Lösungsverfahrens auf diese Integralgleichung.

Beispielsweise kann man das Anfangswertproblem $y'(x) = f(x,y)$, $y(0) = \eta$, in die äquivalente Gestalt

$$y(x) = \eta + \int_0^x f(t,y(t))dt$$

bringen und diese (unter entsprechenden Voraussetzungen an f) durch die Iteration

$$y_0(x) := \eta,$$

$$y_{n+1}(x) := \int_0^x f(t,y_n(t))dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

lösen. Ebenso kann man für Randwertprobleme (gewöhnlicher oder partieller Differentialgleichungen) mit Hilfe der \mathcal{I} -Greenschen Funktion eine äquivalente Integralgleichung herleiten.

Die Integralgleichungsmethode hat in der Theorie der Randelementmethoden neue Bedeutung erlangt. Dort wird ein Ansatz über ein Rand- oder Oberflächenintegral gewählt, was zu einer Reduktion der Dimension des Definitionsbereichs um eine Einheit führt. Die Integralgleichung selbst wird dann durch Diskretisierung des Integrationsbereichs näherungsweise gelöst.

Integralkern, \nearrow Integralgleichung.

Integralkriterium, genauer Reihen-Integral-Vergleichskriterium, die Aussage

$$\int_K^\infty f(x) dx \text{ konvergent} \iff \sum_{n=K}^\infty f(n) \text{ konvergent}$$

unter der Voraussetzung, daß $f: [K, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ antiton ist (für ein $K \in \mathbb{N}$).

Sie ergibt sich unmittelbar aus der Abschätzung

$$f(n) \geq \int_n^{n+1} f(x) dx \geq f(n+1) \quad (\mathbb{N} \ni n \geq K)$$

durch (endliche) Summation und Grenzwertbildung.

Hieraus liest man beispielsweise ganz einfach ab: Die Reihe

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$$

ist konvergent für $\alpha > 1$ und divergent für $\alpha \leq 1$.

Integralcurve, Lösungskurve einer gewöhnlichen Differentialgleichung.

Es sei

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

eine gewöhnliche Differentialgleichung mit der unbekannten Funktion y . Ist dann y eine n -fach differenzierbare Funktion auf einem Intervall I , die die Gleichung

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

erfüllt, so heißt y eine Lösung oder auch ein Integral der Differentialgleichung. Der Funktionsgraph der Funktion y heißt eine Integralkurve der Gleichung.

Integrallogarithmus, \nearrow Integrallogarithmusfunktion.

Integrallogarithmusfunktion, *Integrallogarithmus*, ist für $x > 1$ definiert durch

$$\operatorname{Li} x := \int_0^x \frac{dt}{\log t}.$$

Dabei ist das Integral im Sinne des Cauchyschen Hauptwertes zu verstehen, d. h.

$$\int_0^x \frac{dt}{\log t} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dt}{\log t} + \int_{1+\varepsilon}^x \frac{dt}{\log t} \right).$$

Die Funktion Li ist zu einer in der geschlitzten Ebene $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 1]$ \nearrow holomorphen Funktion fortsetzbar. Es besteht ein Zusammenhang zur \nearrow Integral-exponentialfunktion, und zwar $\operatorname{Li} z = \operatorname{Ei} \operatorname{Log} z$,

wobei Log den Hauptzweig des Logarithmus bezeichnet. Manche Autoren schreiben statt $\operatorname{Li} z$ auch $\operatorname{li} z$.

Integralmannigfaltigkeit, Untermannigfaltigkeit M eines Systems von Differentialformen p -ter Ordnung ω_i^p ($0 \leq p \leq \dim M$, $1 \leq i \leq \mu_p$), wenn für alle p jeder p -dimensionale Unterraum E_p des \nearrow Tangentialraumes $T_x M$ die Gleichung

$$\omega_i^p(E_p) = 0 \quad \text{für alle } x \in M$$

erfüllt.

Integral-Mittel, Maßzahlen holomorpher Funktionen.

Die Integral-Mittel einer in der offenen Einheitskreisscheibe \mathbb{E} \nearrow holomorphen Funktion f sind definiert durch

$$I_p(r, f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p dt.$$

Dabei ist $p \in \mathbb{R}$ und $0 < r < 1$. Im Fall $p < 0$ kann es vorkommen, daß das Integral ein uneigentliches ist und nicht existiert.

Integral-Mittel spielen eine wichtige Rolle bei der Definition des \nearrow Hardy-Raums H^p für $p > 0$ und in der Theorie der in \mathbb{E} \nearrow schlichten Funktionen.

Für solche Funktionen wird das Wachstum von f oder f' für $|z| \rightarrow 1$ häufig mit Hilfe der Integral-Mittel gemessen. Es gilt z. B. folgender Satz.

Es sei f eine schlichte Funktion in \mathbb{E} , $0 \leq \alpha \leq 2$, und mit einer Konstanten $C > 0$ gelte

$$|f(z)| \leq \frac{C}{(1 - |z|)^\alpha}, \quad z \in \mathbb{E}. \quad (1)$$

Dann existiert für $p > \frac{1}{\alpha}$ eine Konstante $M = M_p > 0$ derart, daß

$$I_p(r, f) \leq \frac{M}{(1 - r)^{\alpha p - 1}}, \quad 0 < r < 1.$$

Weiter gilt $f \in H^p$ für $0 < p < \frac{1}{\alpha}$.

Da (1) mit $\alpha = 2$ für jede schlichte Funktion in \mathbb{E} gilt, erhält man

$$I_p(r, f) \leq \frac{M}{(1 - r)^{2p - 1}}, \quad 0 < r < 1$$

für $p > \frac{1}{2}$ und $f \in H^p$ für $0 < p < \frac{1}{2}$.

Für eine schlichte Funktion f in \mathbb{E} und $p \in \mathbb{R}$ sei

$$\beta_f(p) = \limsup_{r \rightarrow 1} \frac{\log I_p(r, f')}{\log \frac{1}{1-r}}.$$

Es ist also $\beta_f(p)$ die kleinste Zahl derart, daß zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Konstante $M > 0$ existiert mit

$$I_p(r, f') \leq \frac{M}{(1 - r)^{\beta_f(p) + \varepsilon}}.$$

Es ist β_f eine stetige und konvexe Funktion von p ,

und es gilt

$$\beta_f(p+q) \leq \begin{cases} \beta_f(p) + 3q, & \text{falls } q > 0, \\ \beta_f(p) + |q|, & \text{falls } q < 0. \end{cases}$$

Für die Funktion

$$f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^\alpha$$

mit $1 < \alpha \leq 2$ gilt

$$\beta_f(p) = \begin{cases} (\alpha+1)p - 1 & \text{für } p > \frac{1}{\alpha+1}, \\ (\alpha-1)|p| - 1 & \text{für } p < -\frac{1}{\alpha-1}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dieses Beispiel zeigt, daß die Abschätzungen im folgenden Satz bestmöglich sind.

Es sei f eine schlichte Funktion in \mathbb{E} und $p \geq \frac{2}{5}$. Dann ist $\beta_f(p) \leq 3p - 1$.

Ist zusätzlich f sternförmig, ist also $f(\mathbb{E})$ ein \nearrow -Sterngebiet bezüglich $f(0)$, so gilt

$$\beta_f(p) \leq \begin{cases} 3p - 1 & \text{für } p > \frac{1}{3}, \\ |p| - 1 & \text{für } p < -1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für beliebige Werte von p gilt folgendes Ergebnis.

Es sei f eine schlichte Funktion in \mathbb{E} und $p \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \beta_f(p) &\leq p - \frac{1}{2} + \sqrt{4p^2 - p + \frac{1}{4}} \\ &< \begin{cases} 3p^2 + 7p^3 & \text{für } p > 0, \\ 3p^2 & \text{für } p < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Weiter gilt $\beta_f(-1) < 0,601$.

Umgekehrt existiert eine schlichte Funktion f in \mathbb{E} mit $\beta_f(-1) > 0,109$ und $\beta_f(p) \geq 0,117p^2$ für hinreichend kleine Werte von $|p|$.

Die sog. Brennan-Vermutung besagt, daß

$$\beta_f(p) \leq |p| - 1, \quad p \leq -2.$$

Sie ist äquivalent zu $\beta_f(-2) \leq 1$. Bekannt ist bisher nur

$$\beta_f(p) < |p| - 0,399, \quad p \leq -1.$$

Integralnorm, eine Abbildung

$$\|\cdot\| : \mathfrak{P}(\mathfrak{X}) \longrightarrow [0, \infty] \quad \text{mit}$$

$\|0\| = 0$ und der ‚endlichen Subadditivität‘

$$\psi \leq \sum_{v=1}^n \psi_v \implies \|\psi\| \leq \sum_{v=1}^n \|\psi_v\|$$

(für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $\psi, \psi_v \in \mathfrak{P}$) für eine nicht-leere Menge \mathfrak{X} und

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}(\mathfrak{X}) := \{\psi \mid \psi : \mathfrak{X} \longrightarrow [0, \infty]\}.$$

Die endliche Subadditivität ist äquivalent zu Isotonie und Dreiecksungleichung (zusammen).

Eine solche Abbildung heißt *starke Integralnorm*, wenn statt der endlichen Subadditivität die ‚abzählbare Subadditivität‘ (σ -Subadditivität)

$$\psi \leq \sum_{v=1}^{\infty} \psi_v \implies \|\psi\| \leq \sum_{v=1}^{\infty} \|\psi_v\|$$

gilt, aus der natürlich die endliche Subadditivität folgt.

Integralnormen ermöglichen – über stetige Fortsetzung (\nearrow Integralfortsetzung, \nearrow Integralabschätzung) – einen eleganten, durchsichtigen und leistungsfähigen Zugang zu sehr allgemeinen Integralbegriffen.

Zu einer Integralnorm $\|\cdot\|$ auf \mathfrak{P} betrachtet man – meist wieder mit dem gleichen Symbol bezeichnet – für auf \mathfrak{X} definierte reellwertige (oder allgemeinere) Funktionen f stets die durch

$$\|f\| := \|\lfloor f \rfloor\|$$

definierte normähnliche Abbildung $\|\cdot\|$ auf dem entsprechenden Funktionenraum.

Für $-\infty < a < b < \infty$ und den Raum \mathfrak{E} der reellwertigen Treppenfunktionen auf $[a, b]$ mit dem elementaren Integral $i : \mathfrak{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ zum Beispiel hat man

$$|i(h)| \leq i(|h|) = \|h\|_L = \|h\|_R \leq \|h\|_S$$

für $h \in \mathfrak{E}$ mit den Integralnormen $\|\cdot\|_S$ (Supremumsnorm), $\|\cdot\|_R$ (Riemann-Norm) und $\|\cdot\|_L$ (Lebesgue-Norm). Diese sind für $\psi \in \mathfrak{P}([a, b])$ wie folgt definiert:

$$\|\psi\|_S := (b-a) \sup \{ \psi(x) \mid x \in [a, b] \},$$

$$\|\psi\|_R := \inf \{ i(h) \mid \mathfrak{E} \ni h \geq \psi \} \quad (\text{mit } \inf \emptyset := \infty),$$

$$\|\psi\|_L := \inf \left\{ \sup_{n \in \mathbb{N}} i(h_n) \mid \mathfrak{E}^+ \ni h_n \uparrow \geq \psi \right\}$$

($\mathfrak{E}^+ \ni h_n \uparrow \geq \psi$ bedeutet dabei

$$h_n \in \mathfrak{E} \wedge 0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \dots \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} h_n \geq \psi).$$

Integralfortsetzung bzgl. $\|\cdot\|_S$ führt zum Integral von Regelfunktionen, bzgl. $\|\cdot\|_R$ zum Riemann-Integral und bzgl. $\|\cdot\|_L$ zum Lebesgue-Integral, die sich alle auf ähnliche Weise auch in wesentlich allgemeineren Ausgangssituationen einführen lassen.

$\|\cdot\|_S$ und $\|\cdot\|_L$ sind starke Integralnormen. Für solche hat man ganz allgemein u. a. die Vollständigkeit von $(\mathfrak{P}, \|\cdot\|)$ und die Charakterisierung von $\|\cdot\|$ -Konvergenz durch Cauchy-Konvergenz und f. ü.-Konvergenz einer geeigneten Teilfolge.

Der – zunächst wohl ungewohnt erscheinende – Verzicht auf die Forderung der Homogenität in der

Definition von Integralnormen hat zwei Gründe: Einmal tritt eine derartige Integralnorm auf, wenn man im Rahmen der Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie die ‚Konvergenz dem Maße nach‘ (stochastische Konvergenz) mit Hilfe einer Maßnorm untersucht. Zum anderen ist natürlich die Einsicht wichtig, daß fast alle Überlegungen der Integrationstheorie die Forderung der Homogenität gar nicht benötigen. Man erkennt, daß man alles anstatt mit linearen Räumen sogar für geeignete Gruppen durchführen kann.

Schon beim Vorliegen einer schwächeren Eigenschaft für eine starke Integralnorm als der Additivität (auf geeigneten Teilmengen \mathcal{E}' von \mathfrak{P}), der *Halbadditivität*, ist die Gewinnung *aller* starken Konvergenzsätze (Levi, Fatou und Lebesgue) möglich. Dies tritt schon bei den p -Normen $\|\cdot\|_p$ auf, die (für $1 < p < \infty$) halbadditiv, jedoch nicht additiv sind. Auch innerhalb der Funktionalanalysis führen die ‚orthogonalen Maße‘ der Spektraltheorie auf derartige Integralnormen. Eine Integralnorm $\|\cdot\|$ heißt dabei auf \mathcal{E}' *halbadditiv*, wenn für eine Folge von Funktionen (φ_n) in \mathcal{E}' aus

$$\sup_k \left\| \sum_{n=1}^k \varphi_n \right\| < \infty$$

stets folgt

$$\|\varphi_n\| \longrightarrow 0.$$

Etwa die Supremumsnorm ist zwar stark, aber offenbar nicht halbadditiv.

- [1] Bichteler, K.: Integration theory (with special attention to vector measures). Springer-Verlag Berlin, 1973.
- [2] Hoffmann, D.; Schäfer, F.-W.: Integrale. B.I.-Wissenschaftsverlag Mannheim, 1992.
- [3] Kabbalo, W.: Einführung in die Analysis III. Spektrum Akademischer Verlag, 1999.

Integraloperator, ein Operator der Form

$$f \mapsto \int_a^b K(x, t) f(t) dt,$$

wobei K ein fest gegebener Kern ist.

Integralrechnung, Teilgebiet der \mathcal{A} Analysis, das sich mit der \mathcal{A} Integration von Funktionen beschäftigt.

Grundproblem der Integralrechnung ist die Inhaltsbestimmung nicht notwendig geradlinig begrenzter Figuren, worunter sowohl die Bestimmung des Flächeninhalts ebener Figuren als auch des Volumens von Körpern fällt. Schon die alten Griechen berechneten viele solcher Flächen und Volumina mit der \mathcal{A} Exhaustionsmethode durch „Ausschöpfen“, doch entscheidend vorangebracht wurde die Integralrechnung – wie die Analysis überhaupt –

erst durch Isaac Newton sowie Gottfried Wilhelm Leibniz, auf den das Zeichen \int für das Integral, angelehnt an „S“ wie in „Summe“, zurückgeht.

Ob eine gegebene Funktion integrierbar ist, hängt vom zugrundegelegten Integralbegriff ab. Für einen Einstieg in die Analysis wird meist das leicht verständliche Riemann-Integral benutzt, doch für viele Anwendungen benötigt man das umfassendere Lebesgue-Integral, für das leistungsfähige Konvergenzsätze über die Vertauschbarkeit der Integration mit anderen Grenzprozessen gelten, wie etwa der Satz von Lebesgue. Gemäß dem schon von Leibniz gefundenen \mathcal{A} Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung entspricht die Integration stetiger Funktionen dem Aufsuchen von \mathcal{A} Stammfunktionen. Die Integration ist für diese Funktionenklasse also gewissermaßen die Umkehrung der Differentiation und die Integralrechnung das Gegenstück zur \mathcal{A} Differentialrechnung. Kurvenintegrale bzw. Wegintegrale werden letztlich meist durch Zurückführung auf gewöhnliche Integrale über reelle Intervalle ausgerechnet, also ebenfalls über Stammfunktionen ausgewertet. Auch Integrale über mehrdimensionale Integrationsbereiche, wie sie bei Oberflächenintegralen und Volumenintegralen anfallen, berechnet man in der Regel durch Zurückführung auf Integrale über eindimensionale Integrationsbereiche mittels \mathcal{A} iterierter Integration. Für mehrdimensionale Integrale hat man ferner den Integralsatz von Gauß und den Integralsatz von Stokes.

Die \mathcal{A} Integrationstheorie befaßt sich mit Verallgemeinerungen der Integralbegriffe der reellen Analysis.

Integralsinus, \mathcal{A} Integralsinusfunktion.

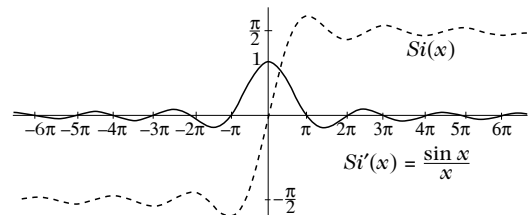
Integralsinusfunktion, *Integralsinus*, die für $x \in \mathbb{R}$ durch

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2} - \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt$$

definierte ungerade Funktion $\text{Si} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Für $z \in \mathbb{C}$ ist durch

$$\text{Si}(z) := \int_0^z \frac{\sin t}{t} dt,$$



Integralsinusfunktion

wobei über die Verbindungsstrecke von 0 nach z integriert wird, eine Fortsetzung der Integralsinusfunktion definiert, die mit dem gleichen Namen bezeichnet wird. Dabei ist zu beachten, daß der Integrant an 0 eine \mathcal{A} hebbare Singularität besitzt.

Die (fortgesetzte) Funktion Si ist eine \mathcal{A} ganztranszendente Funktion, und die Taylor-Reihe mit Entwicklungspunkt 0 lautet

$$\text{Si}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) \cdot (2n+1)!} z^{2n+1}.$$

Integral-Transformation, Abbildungsvorschrift, die einer (reell- oder komplexwertigen) Funktion f eine neue Funktion F zuordnet durch ein Integral der Form

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y) f(y) dy$$

mit einer Funktion K , dem sog. Kern der Integral-Transformation, falls das Integral existiert. Für die wichtigsten Integral-Transformationen vergleiche: \mathcal{A} Fourier-Transformation, \mathcal{A} Gauß-Transformation, \mathcal{A} Hankel-Transformation, \mathcal{A} Hilbert-Transformation, \mathcal{A} Laplace-Transformation.

Für die Anwendung ist es wichtig, daß diese Abbildungsvorschrift zwischen geeigneten \mathcal{A} Funktionenräumen bijektiv ist, sodaß eine Umkehrformel existiert. Damit können Probleme nach einer Integral-Transformation leichter gelöst werden, und die Lösung des ursprünglichen Problems ergibt sich durch Anwendung der Umkehrformel. Beispielsweise kann die Laplace-Transformation verwendet werden, um lineare Differentialgleichungen in algebraische Gleichungen umzuwandeln, wobei einige Rechenregeln (\mathcal{A} Laplace-Transformation) helfen (siehe auch \mathcal{A} Integralgleichungsmethode).

Integralungleichung, eine \mathcal{A} Ungleichung, die ein Integral enthält.

Integrand, eine zu integrierende Funktion, also die Funktion f in Integralen etwa der Art

$$\int_a^x f(t) dt, \quad \int_a^b f(x) dx \quad \text{und} \quad \int_M f(x) dx.$$

Integraph, \mathcal{A} Integriergerät.

Integration durch Differentiation, Verfahren zur Lösung der \mathcal{A} impliziten Differentialgleichung $F(x, y, y') = 0$.

Die glatte Kurve im \mathbb{R}^2 mit der Parameterdarstellung $(x(p), y(p))$ besitzt im Punkt $(x(p), y(p))$, $\dot{x}(p) \neq 0$ die Steigung p , wenn

$$\frac{\dot{y}(p)}{\dot{x}(p)} = \frac{dy/dp}{dx/dp}(p) = p. \quad (1)$$

Dann ist die Kurve genau dann Lösungskurve der Differentialgleichung $F(x, y, y') = 0$, wenn

$$F(x, y, \dot{y}/\dot{x}) = F(x(p), y(p), p) \equiv 0. \quad (2)$$

Durch Differenzieren der Gleichung $F(x, y, p) = 0$ nach p erhält man

$$F_x(x, y, p)\dot{x}(p) + F_y(x, y, p)\dot{y}(p) + F_p(x, y, p) = 0.$$

Diese Gleichung ergibt zusammen mit Gleichung (1) die folgenden Differentialgleichungen für $x(\cdot)$ und $y(\cdot)$:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dp} = -\frac{F_p}{F_x + pF_y}; \quad \dot{y} = \frac{dy}{dp} = \frac{pF_p}{F_x + pF_y}.$$

Löst man dieses System, so erhält man Lösungen von (2) mit $p = y'$ als Parameter.

Integration elementarer Funktionen, bezieht sich auf Klassen von Funktionen, für die Stammfunktionen explizit angebar sind, wie etwa bei der \mathcal{A} Integration rationaler Funktionen, gewisser algebraischer und gewisser transzendenter Funktionen.

Nach dem \mathcal{A} Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung ist die Integration weitgehend zurückgeführt auf die Bestimmung von \mathcal{A} Stammfunktionen. Oft gelingt dabei eine Zurückführung auf die Integration rationaler Funktionen; dies wiederum kann – prinzipiell – systematisch, also ohne besondere Kunstgriffe, durchgeführt werden (\mathcal{A} Integration rationaler Funktionen).

Welche Funktionen man als elementar bezeichnet, ist gewiß Konvention. Man vergleiche hierzu \mathcal{A} elementare Funktion.

Nach den Ausführungen zur \mathcal{A} Integration rationaler Funktionen haben zumindest alle rationale Funktionen elementare Funktionen als Stammfunktionen. Andererseits besitzen viele elementare Funktionen – etwa die durch $\exp(-x^2)$ und $\frac{\sin x}{x}$ gegebenen Funktionen – keine elementaren Stammfunktionen. Dies ist kein rein „akademisches“ Problem, sondern es tritt beispielsweise schon bei der Berechnung von Ellipsenbögen auf.

Integration rationaler Funktionen, Verfahren, welches es prinzipiell gestattet, zu jeder rationalen Funktion systematisch – also ohne besondere Kunstgriffe – eine Stammfunktion zu finden.

Es seien P und Q Polynome (Q nicht konstant 0) und

$$R(x) := \frac{P(x)}{Q(x)} \quad (x \in D_R := \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}).$$

Bekannt ist: Es existieren Polynome P_0, P_1, Q_1 mit $\text{ord } P_1 < \text{ord } Q_1$ derart, daß

$$R(x) = P_0(x) + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}.$$

Da für jedes Polynom P_0 sofort eine Stammfunktion angegeben werden kann, kann ohne Einschränkung angenommen werden, daß schon $\text{ord} P < \text{ord} Q$ gilt („echter (Polynom-)Bruch“). Nach dem \mathcal{A} Fundamentalsatz der Algebra weiß man für den Nenner Q :

Es sei Q (reelles) Polynom mit $\text{grad} Q =: n \geq 1$ und Leitkoeffizient 1.

Dann läßt sich $Q(x)$ darstellen als Produkt

$$(x - \alpha_1)^{k_1} \cdots (x - \alpha_r)^{k_r} \times \left[(x - \beta_1)^2 + \gamma_1^2 \right]^{m_1} \cdots \left[(x - \beta_s)^2 + \gamma_s^2 \right]^{m_s}$$

mit

$r, s \in \mathbb{N}_0$, $k_\rho, m_\sigma \in \mathbb{N}$, $\alpha_\rho, \beta_\sigma, \gamma_\sigma \in \mathbb{R}$, $\gamma_\sigma > 0$, α_ρ und $(\beta_\sigma, \gamma_\sigma)$ jeweils paarweise verschieden und

$$k_1 + \cdots + k_r + 2(m_1 + \cdots + m_s) = n.$$

Damit gewinnt man die folgende Darstellung für $R(x)$:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{a_{1,1}}{x - \alpha_1} + \cdots + \frac{a_{1,k_1}}{(x - \alpha_1)^{k_1}} \right] + \cdots + \left[\frac{a_{r,1}}{x - \alpha_r} + \cdots + \frac{a_{r,k_r}}{(x - \alpha_r)^{k_r}} \right] \\ & + \left[\frac{2b_{1,1}(x - \beta_1) + c_{1,1}}{(x - \beta_1)^2 + \gamma_1^2} + \cdots + \frac{2b_{1,m_1}(x - \beta_1) + c_{1,m_1}}{((x - \beta_1)^2 + \gamma_1^2)^{m_1}} \right] \\ & + \cdots + \\ & + \left[\frac{2b_{s,1}(x - \beta_s) + c_{s,1}}{(x - \beta_s)^2 + \gamma_s^2} + \cdots + \frac{2b_{s,m_s}(x - \beta_s) + c_{s,m_s}}{((x - \beta_s)^2 + \gamma_s^2)^{m_s}} \right] \end{aligned}$$

mit geeigneten reellen Zahlen $a_{\rho,k}$, $b_{\sigma,\mu}$ und $c_{\sigma,\mu}$.

Diese Darstellung heißt Partialbruchzerlegung (von R). Die Berechnung einer Stammfunktion von R ist damit reduziert auf die Berechnung von Stammfunktionen zu Funktionen des Typs

$$\frac{1}{(x - \alpha)^k} \quad (\alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}), \quad \text{und}$$

$$\frac{2b(x - \beta) + c}{((x - \beta)^2 + \gamma^2)^m} \quad (m \in \mathbb{N}; b, c, \beta \in \mathbb{R}, \gamma > 0)$$

(\mathcal{A} Integration von Partialbrüchen).

Den eleganteren „komplexen Weg“ findet man beispielsweise ausgeführt in [1].

[1] Kabbalo, W.: Einführung in die Analysis I. Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg, 1996.

Integration stochastischer Prozesse, \mathcal{A} stochastische Integration.

Integration über unbeschränkte Gebiete, wird in Verallgemeinerung der \mathcal{A} Integration über unbeschränkte Intervalle durchgeführt, indem man das Integrationsgebiet $M \subset \mathbb{R}^n$ mit einer Folge beschränkter aufsteigender Mengen $M_k \subset M$ annähert und gemäß \mathcal{A} Gebietskonvergenz das Integral $\int_M f(x) dx$ als Grenzwert der Integrale $\int_{M_k} f(x) dx$ erhält.

Integration über unbeschränkte Intervalle, naheliegende Erweiterung der Integration nach Riemann für gewisse Funktionen, bei denen das Integrationsintervall nicht beschränkt ist.

Das „eigentliche“ Riemann-Integral $\int_a^b f(x) dx$ ist nur für den Fall definiert, daß das Integrationsintervall $[a, b]$ und der Integrand f auf $[a, b]$ beschränkt sind. Der Wunsch, dem Symbol $\int_a^b f(x) dx$ auch für unbeschränkte Integrationsintervalle oder unbeschränkte Integranden in gewissen Fällen eine Bedeutung zukommen zu lassen, führt ganz allgemein zu \mathcal{A} uneigentlichen Integralen.

Ein Beispiel: Das „Integral“ $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$ existiert – als eigentliches Riemann-Integral – nicht, da das Integrationsintervall unbeschränkt ist. Für $0 < T < \infty$ existiert aber

$$\int_0^T \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan T - \arctan 0 = \arctan T.$$

Die rechte Seite strebt gegen $\frac{\pi}{2}$ für $T \rightarrow \infty$. Es liegt dann nahe, den Integralbegriff so zu erweitern, daß

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

gilt.

Geometrisch bedeutet dies, daß auch speziellen unbeschränkten Flächen ein Flächeninhalt zugeordnet werden kann.

Integration unbeschränkter Funktionen, naheliegende Erweiterung der Integration nach Riemann für gewisse unbeschränkte Funktionen.

Das „eigentliche“ Riemann-Integral $\int_a^b f(x) dx$ ist nur für den Fall definiert, daß das Integrationsintervall $[a, b]$ und der Integrand f auf $[a, b]$ beschränkt sind. Der Wunsch, dem Symbol $\int_a^b f(x) dx$ auch für unbeschränkte Integrationsintervalle oder unbeschränkte Integranden in gewissen Fällen eine Bedeutung zukommen zu lassen, führt ganz allgemein zu \mathcal{A} uneigentlichen Integralen. Ein Beispiel: Das „Integral“ $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ existiert – als eigentliches Riemann-Integral – nicht, da der Integrand (bei 1) unbeschränkt ist. Für $0 < a < 1$ existiert aber

$$\int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin a - \arcsin 0 = \arcsin a.$$

Die rechte Seite strebt gegen $\frac{\pi}{2}$ für $a \rightarrow 1$. Es liegt dann nahe, den Integralbegriff so zu erweitern, daß

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2}$$

gilt. Geometrisch bedeutet dies, daß auch speziellen unbeschränkten Flächen ein Flächeninhalt zugeordnet werden kann. Auch bei Integration über einen Bereich $M \subset \mathbb{R}^n$ nähert man im Fall einer unbeschränkten Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ den Integrationsbereich M durch aufsteigende Mengen $M_k \subset M$ an, auf denen f beschränkt ist, und erhält gemäß \mathcal{A} Gebietskonvergenz das Integral $\int_M f(x) dx$ als Grenzwert der Integrale $\int_{M_k} f(x) dx$.

Integration von Funktionen, wesentlicher Gegenstand der \mathcal{A} Integralrechnung, nämlich das Bestimmen etwa des Riemann-Integrals oder des Lebesgue-Integrals einer integrierbaren Funktion. Gemäß dem \mathcal{A} Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung entspricht die Integration stetiger Funktionen dem Aufsuchen von \mathcal{A} Stammfunktionen. Die \mathcal{A} Grundintegrale, also Stammfunktionen der grundlegenden Funktionen der Analysis, lassen sich unmittelbar angeben und sind in der Tabelle von Stammfunktionen zusammengefaßt. Die Integration vieler komplizierterer Funktionen, etwa auch die \mathcal{A} Integration rationaler Funktionen, ist mit Hilfe der \mathcal{A} Integrationsregeln möglich. Integrale über mehrdimensionale Integrationsbereiche berechnet man meist durch Zurückführung auf Integrale über eindimensionale Integrationsbereiche mittels \mathcal{A} iterierter Integration.

Integration von Partialbrüchen, Gewinnung von Stammfunktionen zu Funktionen, die bei der Reduktion rationaler Funktionen auftreten (\mathcal{A} Integration rationaler Funktionen), d. h. Funktionen folgenden Typs:

$$\frac{1}{(x - \alpha)^k} \quad (\alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}),$$

$$\frac{2b(x - \beta) + c}{((x - \beta)^2 + \gamma^2)^m} \quad (m \in \mathbb{N}; b, c, \beta \in \mathbb{R}, \gamma > 0).$$

Für die erste Funktion hat man eine Stammfunktion durch $\ln |x - \alpha|$, falls $k = 1$, und

$$\frac{1}{1 - k} \frac{1}{(x - \alpha)^{k-1}}$$

sonst.

Der zweite Typ wird umgeformt zu

$$b \underbrace{\int \frac{2(t - \beta)}{((t - \beta)^2 + \gamma^2)^m} dt}_{=: A}$$

$$+ c \underbrace{\int ((t - \beta)^2 + \gamma^2)^{-m} dt}_{=: B}.$$

Mit

$$\varphi(t) := (t - \beta)^2 + \gamma^2,$$

also $\varphi'(t) = 2(t - \beta)$, erhält man

$$A = \int_{\varphi(x)}^{\varphi(x)} \frac{1}{s^m} ds,$$

wozu man eine Stammfunktion sofort angeben kann.

Mit $\varphi(t) := (t - \beta)/\gamma$, also $\varphi'(t) = 1/\gamma$, ergibt sich für den zweiten Anteil:

$$B = \frac{1}{\gamma^{2m}} \int_{\left(\frac{t-\beta}{\gamma}\right)^2 + 1}^{\frac{1}{(s^2 + 1)^m}} dt$$

$$= \frac{1}{\gamma^{2m-1}} \int_{\varphi(x)}^{\varphi(x)} \frac{1}{(s^2 + 1)^m} ds,$$

dieser ist also zurückgeführt auf die Form

$$\int (1 + t^2)^{-m} dt.$$

Hier kennt man für $m = 1$ (mit arctan) eine Stammfunktion. Für den allgemeinen Fall gewinnt man über \mathcal{A} partielle Integration die Rekursionsformel

$$\int (1 + t^2)^{-(m+1)} dt$$

$$= \frac{1}{2m} x(1 + x^2)^{-m} + \frac{2m - 1}{2m} \int (1 + t^2)^{-m} dt.$$

Integrationsregeln, Vorschriften für das Arbeiten mit Integralen.

Dazu zählen – für bestimmtes und unbestimmtes Integral (Stammfunktionen) – zunächst die trivialen Regeln der *Linearität* und die *Additivität bezüglich der Intervallgrenzen*:

Für ein Intervall J in \mathbb{R} , $f, g: J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int (\alpha f + g)(t) dt = \alpha \int f(t) dt + \int g(t) dt.$$

In Worten: Man erhält eine Stammfunktion zu $\alpha f + g$, indem man eine Stammfunktion F zu f und eine Stammfunktion G zu g sucht und dann $\alpha F + G$ bildet. (Der Beweis ist unmittelbar durch die Linearität der Differentiation gegeben.) Entsprechend für das bestimmte Integral:

Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, über $[a, b]$ integrierbaren reellwertigen Funktionen f und g und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b (\alpha f + g)(t) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt.$$

Weiterhin gilt:

Lexikon der Mathematik: Band 3

Inp bis Mon

Walz, G. (Hrsg.)

2017, VII, 470 S. 15 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-662-53501-1