

**Eigenfunktion**, Lösung eines Eigenwertproblems in einem Funktionenraum.

Ist allgemein  $V$  ein Vektorraum über einem Körper  $K$  und  $T : V \rightarrow V$  eine lineare Abbildung, so besteht das Eigenwertproblem darin, Lösungen  $\lambda \in K$  und  $x \in V$  der Gleichung  $T(x) - \lambda x = 0$  zu finden. Der Vektor  $x$  heißt dann im allgemeinen Eigenvektor und der Skalar  $\lambda$  heißt Eigenwert von  $T$ . Ist nun  $V$  ein Funktionenraum über  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ , so spricht man nicht mehr von Eigenvektoren, sondern von Eigenfunktionen der Abbildung  $T$ . Man vergleiche hierzu auch  $\nearrow$  Eigenwert eines Operators.

Ein wichtiges Gebiet, in dem Eigenfunktionen von Bedeutung sind, sind die Eigenwertprobleme bei Differentialgleichungen. Darunter versteht man Randwertprobleme, bei denen ein Eigenwertparameter  $\lambda$  auftritt. Die Lösungen des Randwertproblems bei gegebenem Parameter  $\lambda$  heißen dann die Eigenfunktionen des Problems. Ist andererseits eine Integralgleichung der Form

$$y(x) = \lambda \cdot \int_a^b K(x, t)y(t)dt$$

gegeben, so heißen die Zahlen  $\lambda$ , für die es von der Nullfunktion verschiedene Lösungen  $y$  der Gleichung gibt, Eigenwerte der Gleichung, während die Lösungen selbst die Eigenfunktionen der Gleichung genannt werden.

**Eigenkreisfrequenz**, Frequenz einer harmonischen Schwingung.

Wird ein Massenpunkt in eine harmonische Schwingung versetzt, so kann man die Auslenkung des Massenpunktes zum Zeitpunkt  $t$  beschreiben durch die Funktion  $y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \phi)$ . Dabei ist  $A$  die  $\nearrow$  Amplitude der Schwingung,  $\omega$  heißt die Kreisfrequenz der Schwingung und  $\phi$  die Phase der Schwingung. Der Wert  $\frac{\omega}{2\pi}$  wird dann als Eigenkreisfrequenz bezeichnet.

**Eigenpaar**, selten gebrauchte Bezeichnung für einen Eigenwert und zugehörigen Eigenvektor einer Matrix.

**Eigenraum**,  $\nearrow$  Eigenwert.

**Eigenraum eines Operators**,  $\nearrow$  Eigenwert eines Operators.

**Eigenschaft einer Menge**, in der  $\nearrow$  axiomatischen Mengenlehre identisch mit einer mengentheoretischen Formel, d. h., jede mengentheoretische Formel stellt eine Eigenschaft einer Menge dar.

**Eigensystem**, Menge aller  $\nearrow$  Eigenwerte zu einem gegebenen Endomorphismus bzw. einer gegebenen Matrix.

**eigentlich diskontinuierliche Gruppe**, Gruppe  $G$  von gebrochen linearen Transformationen

$$f_v = \frac{a_v z + b_v}{c_v z + d_v}$$

$v \in \mathbb{N}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , für die gilt: Es gibt ein  $z_0 \in \mathbb{C}$  und eine Umgebung  $U(z_0)$  von  $z_0$  so, daß jede von der Identität verschiedene Transformation aus  $G$  alle Punkte von  $U(z_0)$  auf Punkte außerhalb von  $U(z_0)$  abbildet.

**eigentlich orthogonal**, Bezeichnung für eine orthogonale Abbildung oder Matrix, deren Determinante den Wert  $+1$  hat.

**eigentliche Ähnlichkeitsabbildung**, eine  $\nearrow$  Ähnlichkeitsabbildung, deren Streckungsfaktor  $\lambda$  ungleich eins ist.

**eigentliche Divergenz**,  $\nearrow$  bestimmte Divergenz einer Folge,  $\nearrow$  bestimmte Divergenz einer Reihe.

**eigentliche Gruppenoperation**, Operation der Gruppe  $G$  auf der Varietät  $X$  so, daß die kanonische Abbildung

$$G \times X \rightarrow X \times X, (g, x) \mapsto (g(x), x)$$

eigentlich ist.

**eigentliche holomorphe Abbildung**, wichtiger Begriff in der Theorie der Überlagerungen.

Ein lokalkompakter Raum ist ein Hausdorffraum, in dem jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt. Eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  zwischen zwei lokalkompakten Räumen heißt eigentlich, wenn das Urbild jeder kompakten Menge kompakt ist. Dies ist z. B. stets erfüllt, wenn  $X$  kompakt ist. Eine eigentliche Abbildung ist abgeschlossen, d. h. das Bild jeder abgeschlossenen Menge ist abgeschlossen. Dies folgt daraus, daß in einem lokalkompakten Raum eine Teilmenge genau dann abgeschlossen ist, wenn ihr Durchschnitt mit jeder kompakten Menge kompakt ist.

Wir nennen im folgenden einige zentrale Sätze über eigentliche holomorphe Abbildungen.

Satz 1:

Es seien  $X$  und  $Y$  lokalkompakte Räume und  $p : Y \rightarrow X$  eine eigentliche Überlagerungsabbildung. Dann gilt:

- Für jeden Punkt  $x \in X$  ist die Menge  $p^{-1}(x)$  endlich.
- Sei  $x \in X$  und  $V$  eine Umgebung von  $p^{-1}(x)$ . Dann existiert eine Umgebung  $U$  von  $x$  mit  $p^{-1}(U) \subset V$ .
- Sei  $X$  zusammenhängend und  $Y$  nicht leer. Dann ist  $p$  surjektiv.

Satz 2:

Es seien  $X$  und  $Y$  lokalkompakte Räume und  $p : Y \rightarrow X$  eine eigentliche, unverzweigte Überlagerungsabbildung.

Dann ist  $p$  eine unbegrenzte Überlagerung.

Seien  $X$  und  $Y$  Riemannsche Flächen und  $f : X \rightarrow Y$  eine eigentliche nicht konstante holomorphe Abbildung. Wegen der lokalen Gestalt holomorpher Abbildungen ist die Menge  $A$  der Verzweigungspunkte von  $f$  abgeschlossen und diskret. Da

$f$  eigentlich ist, ist auch  $B := f(A)$  abgeschlossen und diskret. Man nennt  $B$  die Menge der kritischen Werte von  $f$ .

Sei  $Y' := Y \setminus B$  und

$$X' := X \setminus f^{-1}(B) \subset X \setminus A.$$

Dann ist  $f|X' \rightarrow Y'$  eine eigentliche unverzweigte holomorphe Überlagerung, besitzt also eine wohlbestimmte endliche Blätterzahl  $n$  (die Mächtigkeit von  $f^{-1}(c)$ ,  $c \in Y'$ ). Das bedeutet, daß jeder Wert  $c \in Y'$  genau  $n$ -mal angenommen wird.

Um diese Aussage auch auf die kritischen Werte  $b \in B$  ausdehnen zu können, müssen wir die Vielfachheit mit berücksichtigen. Für  $x \in X$  bezeichnen wir mit  $v(f, x)$  die Vielfachheit, mit der  $f$  im Punkt  $x$  den Wert  $f(x)$  annimmt. Wir sagen, daß  $f$  auf  $X$  den Wert  $c \in Y$  mit Vielfachheit gerechnet  $m$ -mal annimmt, falls

$$m = \sum_{x \in f^{-1}(c)} v(f, x).$$

Man kann nun folgenden Satz 3 formulieren:

*Es seien  $X$  und  $Y$  Riemannsche Flächen und  $f: X \rightarrow Y$  eine eigentliche, nicht-konstante holomorphe Abbildung. Dann gibt es eine natürliche Zahl  $n$  so, daß  $f$  jeden Wert  $c \in Y$  mit Vielfachheit gerechnet  $n$ -mal annimmt.*

Korollare hieraus sind:

*Auf einer kompakten Riemannschen Fläche  $X$  hat jede nicht-konstante meromorphe Funktion  $f: X \rightarrow \mathbb{P}_1$  ebenso viele Nullstellen wie Pole (mit Vielfachheit gerechnet).*

Dies folgt daraus, daß  $f: X \rightarrow \mathbb{P}_1$  eine eigentliche Abbildung ist, sowie:

*Ein Polynom  $n$ -ten Grades  $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n \in \mathbb{C}[z]$  hat mit Vielfachheit gerechnet genau  $n$  Nullstellen.*

Man vergleiche auch das eng verwandte Stichwort  $\mathcal{A}$ eigentliche meromorphe Abbildung.

[1] Forster, O.: Riemannsche Flächen. Springer-Verlag Berlin/Heidelberg, 1977.

**eigentliche Lösung einer Differentialgleichung**, nichttriviale Lösung einer Differentialgleichung, also eine solche Lösung  $y$ , die nicht  $y(x) = 0$  für alle  $x$  im Definitionsbereich von  $y$  erfüllt.

**eigentliche meromorphe Abbildung**, eine  $\mathcal{A}$ meromorphe Funktion  $f: G_1 \rightarrow G_2$  (wobei  $G_1, G_2 \subset \mathbb{C}$   $\mathcal{A}$ Gebiete sind) mit folgender Eigenschaft: Es existiert eine Zahl  $k \in \mathbb{N}$  derart, daß jedes  $a \in G_2$  genau  $k$  Urbilder in  $G_1$  hat, wobei die Vielfachheit zu berücksichtigen ist. Genauer bedeutet dies: Zu jedem  $a \in G_2$  gibt es  $\ell \leq k$  verschiedene Punkte  $z_1, \dots, z_\ell \in G_1$  mit  $f(z_j) = a$  für  $j = 1, \dots, \ell$  und

$$v(f, z_1) + \dots + v(f, z_\ell) = k,$$

wobei  $v(f, z_j)$  die Vielfachheit der  $\mathcal{A}$ -Stelle  $z_j$  bezeichnet. Im Fall  $a = \infty$  ist  $v(f, z_j)$  durch die  $\mathcal{A}$ -Polstellenordnung von  $z_j$  zu ersetzen. Die Zahl  $k$  heißt der Abbildungsgrad von  $f$  und wird mit  $k = \deg f$  bezeichnet. Man schreibt auch  $f: G_1 \xrightarrow{k:1} G_2$ . Eine eigentliche meromorphe Abbildung  $f: G_1 \rightarrow G_2$  ist also insbesondere surjektiv.

Einige Beispiele:

Es sei

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + \dots + b_1 z + b_0}$$

eine rationale Funktion mit teilerfremden Polynomen  $P, Q$  und  $a_n \neq 0, b_m \neq 0$ . Dann ist  $R$  eine eigentliche holomorphe Abbildung von  $\widehat{\mathbb{C}}$  auf  $\widehat{\mathbb{C}}$  vom Grad  $k = \deg R = \max\{m, n\}$ . Dabei setzt man  $R(z_0) := \infty$ , falls  $z_0 \in \mathbb{C}$  eine Polstelle von  $R$  ist,  $R(\infty) := \infty$ , falls  $n > m$ ,  $R(\infty) := 0$ , falls  $n < m$  und  $R(\infty) := a_n/b_n$ , falls  $n = m$ .

Eine  $\mathcal{A}$ konforme Abbildung von  $G_1$  auf  $G_2$  ist eine eigentliche Abbildung vom Grad Eins.

Eine eigentliche Abbildung  $f: G_1 \rightarrow G_2$  heißt unverzweigt, falls  $f$  keine  $\mathcal{A}$ kritischen Punkte in  $G_1$  besitzt, andernfalls heißt sie verzweigt.

Zur äquivalenten Umformulierung des Begriffs der eigentlichen Abbildung führt man folgende Redewendung ein. Eine meromorphe Funktion  $f: G_1 \rightarrow G_2$  bildet Randfolgen in Randfolgen ab, falls für jede Folge  $(z_n)$  in  $G_1$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \zeta$  für ein  $\zeta \in \partial G_1$  die Bildfolge  $(f(z_n))$  alle ihre Häufungspunkte auf  $\partial G_2$  hat. Man beachte dabei, daß die Folge  $(f(z_n))$  nicht konvergent sein muß. Dann sind folgende Eigenschaften für eine meromorphe Funktion  $f: G_1 \rightarrow G_2$  äquivalent:

- (a)  $f$  ist eine eigentliche Abbildung.
- (b)  $f$  bildet Randfolgen in Randfolgen ab.
- (c) Das Urbild  $f^{-1}(K)$  jeder kompakten Menge  $K \subset G_2$  ist kompakt in  $G_1$ .

Man vergleiche auch das eng verwandte Stichwort  $\mathcal{A}$ eigentliche holomorphe Abbildung.

**eigentliche Riemannsche Geometrie**, die Theorie der  $\mathcal{A}$ Riemannsche Mannigfaltigkeiten, deren metrischer Fundamentaltensor positiv definit ist.

Der Sprachgebrauch ist nicht einheitlich. Oft setzt man voraus, daß Riemannsche Mannigfaltigkeiten von vornherein einen positiv definiten metrischen Tensor haben und nennt die übrigen pseudoriemannsch.

Aus dem metrischen Fundamentaltensor werden geometrische Grundgrößen abgeleitet, wie die Bogenlänge, der Winkel zwischen zwei Kurven, das Volumen eines Gebietes, die Krümmung, die durch den Riemannschen Krümmungstensor ausgedrückt wird, und schließlich die Parallelübertragung von Vektoren längs Kurven und der Begriff der geodätischen Linie.

Es gibt viele Gemeinsamkeiten zwischen Riemannscher Geometrie und pseudoriemannscher.

Der gravierendste Unterschied besteht darin, daß in pseudoriemannschen Mannigfaltigkeiten geometrische Begriffe, die aus der Bogenlänge und der inneren Metrik abzuleiten sind, nicht mehr in gewohnter Weise definiert werden können. Beispielsweise würde die übliche Definition des Winkels zwischen zwei Kurven verlangen, daß die Längen der Tangentialvektoren der Kurven nicht Null sind.

**eigentlicher Morphismus**, ein Morphismus  $X \xrightarrow{\pi} Y$  von Schemata so, daß  $X$  algebraisches  $Y$ -Schema ist und für jeden Morphismus  $Y' \rightarrow Y$  der induzierte Morphismus

$$X \times_Y Y' = X' \xrightarrow{\pi'} Y'$$

abgeschlossen ist (d. h., daß abgeschlossene Teilmengen  $V' \subset X'$  stets wieder abgeschlossene Bilder haben).

Beispielsweise sind projektive Morphismen über einem Noetherschen Schema eigentlich.

**eigentlicher Reinhardtischer Körper**,  $\nearrow$  Reinhardtisches Gebiet.

**Eigenvektor**,  $\nearrow$  Eigenwert.

**Eigenvektor eines Operators**,  $\nearrow$  Eigenwert eines Operators.

**Eigenvektoren als Basisvektoren**, Eigenschaft eines diagonalisierbaren Endomorphismus. Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler Vektorraum über dem Körper  $\mathbb{K}$  und  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus. Dann ist  $f$  genau dann diagonalisierbar, wenn  $V$  eine Basis aus Eigenvektoren von  $f$  besitzt.

**Eigenwert**, einer der grundlegendsten und zentralen Begriffe innerhalb der Linearen Algebra, wobei man hier in stillschweigender Übereinkunft den Begriff „Eigenwert“ als Synonym für „Eigenwert eines Endomorphismus bzw. einer Matrix“ benutzt.

Als Eigenwert bezeichnet man einen Skalar  $\lambda \in \mathbb{K}$ , für den bezüglich eines Endomorphismus  $f$  auf einem  $\nearrow$ Vektorraum  $V$  über dem Körper  $\mathbb{K}$  gilt: Es existiert ein von Null verschiedener Vektor  $v \in V$ , so daß

$$f(v) = \lambda v.$$

Jeder derartige Vektor heißt Eigenvektor von  $f$  zum Eigenwert  $\lambda$ .

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.

Die Menge aller Eigenvektoren eines Vektorraumes zu einem Eigenwert  $\lambda$  ergänzt um den Nullvektor wird als Eigenraum von  $\lambda$  bezeichnet; die Eigenräume sind stets Untervektorräume von  $V$ . Wird der Endomorphismus  $f$  bezüglich einer Basis von  $V$  durch die Matrix  $A$  repräsentiert, so spricht man

auch von Eigenwert, Eigenvektor und Eigenraum von  $A$ . Es gilt in diesem Fall also die Beziehung

$$Av = \lambda v.$$

Ist  $V$  endlich-dimensional, so sind die Eigenwerte von  $f$  gerade die Nullstellen des charakteristischen Polynoms von  $f$  sowie des Minimalpolynoms von  $f$ , wobei im letzteren Falle die Vielfachheiten nicht übereinstimmen müssen.

Die Eigenräume sind Lösungsräume der homogenen linearen Gleichungssysteme

$$(A - \lambda I)x = 0,$$

wobei  $A$  eine den Endomorphismus  $f$  repräsentierende Matrix darstellt ( $I$  bezeichnet die Einheitsmatrix).

Die Dimension des Eigenraumes zum Eigenwert  $\lambda$  des Endomorphismus  $f$  bzw. der repräsentierenden Matrix  $A$  auf dem  $n$ -dimensionalen Vektorraum  $V$  ist gleich

$$n - \text{Rg}(A - \lambda I).$$

Ein Endomorphismus  $f$  auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum  $V$  kann genau dann durch eine Diagonalmatrix repräsentiert werden, falls  $V$  eine Basis aus Eigenvektoren zu  $f$  besitzt.

Eine  $(n \times n)$ -Matrix  $A$  ist genau dann zu einer Diagonalmatrix ähnlich, wenn  $A$   $n$  linear unabhängige Eigenvektoren besitzt.

Für weitere Information im Zusammenhang mit Eigenwerten vergleiche man auch das Stichwort  $\nearrow$  Eigenwertgleichung.

Die Bezeichnung „Eigen“ ist auch im angloamerikanischen Sprachraum üblich, wo man beispielsweise vom „Eigenvalue“ und „Eigenvector“ spricht.

[1] Fischer, G.: Lineare Algebra. Verlag Vieweg Braunschweig, 1978.

[2] Koecher, M.: Lineare Algebra und Analytische Geometrie. Springer-Verlag Berlin/Heidelberg, 1992.

**Eigenwert einer Integralgleichung**, eine Zahl  $\lambda$ , für die die Integralgleichung

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) \cdot y(t) dt$$

von Null verschiedene Lösungen besitzt. Hierbei ist  $K(x, t)$  eine vorgegebene Kernfunktion, daher bezeichnet man die Lösungen  $\lambda$  der obigen Gleichung manchmal auch als Eigenwerte des Kerns  $K$ .

**Eigenwert eines Graphen**, Bezeichnung für einen Eigenwert der Adjazenzmatrix eines Graphen ( $\nearrow$  Eigenwert).

Es sei  $G$  ein  $\nearrow$ Graph und  $A_G = ((a_{ij}))$  seine Adjazenzmatrix. Ist der Graph  $G$  von der Ordnung  $n$ , so ist  $A_G = ((a_{ij}))$  eine symmetrische

$(n \times n)$ -Matrix, deren Hauptdiagonalelemente  $a_{ii}$  sämtlich Null sind. Das charakteristische Polynom  $P_G(x) = \det(A_G - xI)$  der Matrix  $A_G$ , wobei  $I$  die  $(n \times n)$ -Einheitsmatrix bedeutet, wird auch charakteristisches Polynom von  $G$  genannt, und seine Nullstellen heißen Eigenwerte von  $G$ .

Als reelle symmetrische Matrix besitzt  $A_G$  nur reelle Eigenwerte, die in der Form

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$$

angeordnet seien. Diese Folge der Eigenwerte wird auch das Spektrum von  $G$  genannt.

Natürlich ist das Spektrum eines Graphen unabhängig von der Numerierung seiner Ecken, und isomorphe Graphen haben die gleichen Eigenwerte. Beispielsweise besitzt der vollständige Graph  $K_n$  das Spektrum  $\lambda_1 = n - 1$  und  $\lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_n = -1$ , und der vollständige  $\mathcal{A}$ bipartite Graph  $K_{r,s}$  das Spektrum  $\lambda_1 = \sqrt{rs}$ ,  $\lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_{r+s-1} = 0$  und  $\lambda_{r+s} = -\sqrt{rs}$ .

Wäre die Struktur eines Graphen eindeutig durch sein Spektrum bestimmt, so könnte man das bekannte Graphenisomorphieproblem dadurch lösen, daß man die Eigenwerte der entsprechenden Graphen berechnet. Daß diese Methode im allgemeinen jedoch nicht zum Ziel führt, zeigen schon die nicht isomorphen Graphen  $K_{1,4}$  und  $K_1 \cup C_4$ , die beide das Spektrum  $2, 0, 0, 0, -2$  besitzen, wobei  $C_4$  der Kreis der Länge 4 ist.

Darüberhinaus gibt es auch nicht isomorphe  $\mathcal{A}$ zusammenhängende Graphen mit gleichem Spektrum, und mit Hilfe einer Konstruktion von A.J. Hoffman (1972) erhält man sogar das folgende Ergebnis.

*Zu jeder natürlichen Zahl  $m$  existiert eine Zahl  $N$ , so daß für alle ganzen Zahlen  $n \geq N$  mindestens  $m$  nicht isomorphe reguläre und zusammenhängende Graphen der Ordnung  $n$  mit dem gleichen Spektrum existieren.*

Sind  $G_1, G_2, \dots, G_\eta$  die Zusammenhangskomponenten eines Graphen  $G$ , so liefert der Determinantenmultiplikationsatz die Identität

$$P_G(x) = P_{G_1}(x)P_{G_2}(x) \dots P_{G_\eta}(x).$$

Folglich erhält man das Spektrum eines Graphen aus den Spektren seiner Zusammenhangskomponenten. Aus der Tatsache, daß die Summe der Eigenwerte (mit Vielfachheit) einer  $(n \times n)$ -Matrix  $((a_{ij}))$  mit deren Spur, also mit  $a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ , übereinstimmt, ergibt sich für das Spektrum von  $G$  unmittelbar die Aussage

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 0.$$

Ist  $G$  ein zusammenhängender Graph der Ordnung  $n$  vom Maximalgrad  $\Delta(G)$ , so beweist man die meisten der folgenden Eigenschaften mit Hilfe

von klassischen Resultaten, die O. Perron 1907 und G. Frobenius 1912 zur allgemeinen Matrizen-theorie entwickelt haben.

- (i) Für jeden Eigenwert  $\lambda$  von  $G$  gilt  $|\lambda| \leq \Delta(G)$ .
- (ii) Der Graph  $G$  besitzt genau dann den Eigenwert  $\Delta(G)$ , wenn  $G$  regulär ist.
- (iii) Ist  $-\Delta(G)$  ein Eigenwert von  $G$ , so ist  $G$  ein regulärer und bipartiter Graph.
- (iv) Ist  $G$  bipartit mit dem Eigenwert  $\lambda$ , so ist auch  $-\lambda$  ein Eigenwert von  $G$ .

Im Jahre 1967 hat H.S. Wilf einen interessanten Zusammenhang zwischen den Eigenwerten eines Graphen  $G$  und seiner  $\mathcal{A}$ chromatischen Zahl  $\chi(G)$  herausgefunden.

*Es sei  $G$  ein zusammenhängender Graph und  $\lambda_1$  sein größter Eigenwert. Dann gilt*

$$\chi(G) \leq 1 + \lambda_1,$$

*und die obere Schranke wird in dieser Abschätzung genau dann erreicht, wenn  $G$  der vollständige Graph oder ein Kreis ungerader Länge ist.*

Wegen (i) verallgemeinert dieser Satz von Wilf den bekannten Satz von Brooks  $\chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$ , wobei genau dann die Gleichheit gilt, wenn  $G$  der vollständige Graph oder ein Kreis ungerader Länge ist.

Vertiefte Informationen zur Theorie der Eigenwerte von Graphen findet man beispielsweise in der Monographie [1].

[1] Cvetković, D.M.; Doob, M.; Sachs, H.: Spectra of Graphs. Johann Ambrosius Barth, Heidelberg Leipzig, 3rd edition, 1995.

**Eigenwert eines Operators**, eine Zahl  $\lambda \in \mathbb{C}$ , für die

$$\lambda - T := \lambda \text{Id} - T,$$

$T$  ein gegebener linearer Operator, nicht injektiv ist.

Sei  $X$  ein (unendlichdimensionaler) Banachraum und  $T : X \supset D(T) \rightarrow X$  ein linearer Operator. Ist  $\ker(\lambda - T) \neq \{0\}$ , heißt  $\lambda$  Eigenwert von  $T$  und  $\ker(\lambda - T)$  der zugehörige Eigenraum.

Jedes von Null verschiedene Element des Eigenraums heißt Eigenvektor; wenn  $X$  ein Raum von Funktionen ist, spricht man auch von einer Eigenfunktion. Definitionsgemäß erfüllt ein Eigenvektor  $x$  zum Eigenwert  $\lambda$  also

$$Tx = \lambda x.$$

Gibt es jedoch nur eine Folge  $(x_n)$  mit

$$\|x_n\| = 1, \quad \|Tx_n - \lambda x_n\| \rightarrow 0,$$

heißt  $\lambda$  ein approximativer Eigenwert.

Eigenwerte und approximative Eigenwerte gehören zum Spektrum von  $T$ . Während das Spektrum

$\sigma(T)$  eines beschränkten Operators stets nicht leer ist, braucht es keine Eigenwerte zu geben (z. B.  $(Tf)(s) = sf(s)$  auf  $L^2[0, 1]$ ); jedoch besteht der Rand von  $\sigma(T)$  aus approximativen Eigenwerten.

Ist  $T$  ein  $\mathcal{A}$ -kompakter Operator oder allgemeiner ein Operator, der eine kompakte Potenz besitzt, z. B. ein  $p$ -summierender Operator, so besteht das Spektrum mit der eventuellen Ausnahme der Null nur aus Eigenwerten, und diese bilden eine Nullfolge oder eine endliche Menge. Zur Bestimmung der Vielfachheit eines Eigenwerts  $\lambda$  betrachtet man zuerst den zugehörigen Hauptraum

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \ker(\lambda - T)^n,$$

der für potenzkompakte  $T$  endlichdimensional ist; seine Dimension heißt die Vielfachheit von  $\lambda$ . In der Eigenwertfolge von  $T$  wird nun jeder Eigenwert so häufig aufgeführt, wie seine Vielfachheit angibt. Mit Hilfe der Theorie der  $p$ -summierenden Operatoren kann man Aussagen über die Konvergenzgeschwindigkeit der Eigenwertfolge treffen.

Ist  $T$  ein abgeschlossener dicht definierter Operator mit einer kompakten Resolvente, so besteht das Spektrum ebenfalls nur aus Eigenwerten; für die Eigenwertfolge gilt diesmal  $|\lambda_n| \rightarrow \infty$ .

[1] Pietsch, A.: Eigenvalues and s-Numbers. Cambridge University Press, 1987.

**Eigenwerte in einem unitären Raum**, diejenigen Zahlen  $\lambda \in \mathbb{C}$ , die in einem unitären Raum  $U$  zwei verschiedene Skalarprodukte miteinander in Beziehung setzen.

Genauer gilt: In einem unitären Raum  $U$  seien zwei Skalarprodukte  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$  und  $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$  definiert. Weiterhin existiere ein von Null verschiedenes Element  $\bar{u} \in U$  so, daß die Gleichung

$$\langle \bar{u}, u \rangle_1 = \lambda \langle \bar{u}, u \rangle_2$$

für alle  $u \in U$  eine Lösung  $\lambda$  besitzt. Dann heißt  $\lambda$  Eigenwert der beiden Skalarprodukte  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$  und  $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$  in  $U$ .

**Eigenwertgleichung**, Gleichung, mit deren Hilfe  $\mathcal{A}$ -Eigenwerte bestimmt werden.

Ist  $A$  eine  $(n \times n)$ -Matrix, so werden die Eigenwerte von  $A$  durch die Gleichung  $Ax = \lambda x$  beschrieben. Um die Eigenwerte konkret berechnen zu können, verwendet man die charakteristische Gleichung  $\det(A - \lambda I) = 0$ , wobei  $I$  die Einheitsmatrix bezeichnet. Mit Hilfe des charakteristischen Polynoms  $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$  führt dies zu der algebraischen Gleichung  $p_A(\lambda) = 0$ .

**Eigenwertmethode**, Vorgehensweise zur Bestimmung der Nullstellen eines normierten Polynoms  $p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n$  mit reellen

Koeffizienten  $a_i$  durch Betrachtung des äquivalenten Eigenwertproblems seiner Begleitmatrix ( $\mathcal{A}$ -Begleitmatrix eines Polynoms)  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

Es gilt nämlich

$$p(x) = (-1)^n \det(A - xI)$$

mit der Einheitsmatrix  $I$ .

Da  $A$  eine Hessenberg-Matrix ist, läßt sich unter anderem der QR-Algorithmus zur Lösung dieses Eigenwertproblems zur Anwendung bringen.

**Eigenwertproblem einer gewöhnlichen Differentialgleichung**, gewöhnliche Differentialgleichung, die sich mit einem Differentialoperator  $D$  in der Form

$$D[y](x) = \lambda y(x)$$

schreiben läßt. Dabei sind die Zahlen  $\lambda$ , die sog. Eigenwerte und die nicht-trivialen Funktionen  $y$ , die sog. Eigenfunktionen zu bestimmen, die diese Differentialgleichung erfüllen.

**Eigenzeit**, im Sinne der Relativitätstheorie die Zeit, wie sie im mitbewegten Bezugssystem gemessen wird.

Wegen der relativistischen Zeitdilatation stimmt die Eigenzeit nicht mit der Zeit im bewegten Bezugssystem überein.

**Eikonal**, Bezeichnung für die Größe  $\psi$  im Lösungsansatz  $f = ae^{i\psi}$  für die d'Alembert-Gleichung.

Für große  $\psi$  und kleine Raum-Zeit-Bereiche folgt aus der d'Alembert-Gleichung für  $\psi$  die Eikonalgleichung

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} \frac{\partial \psi}{\partial x^\nu} = 0$$

( $\mathcal{A}$ -Einsteinsche Summenkonvention), wobei  $g^{\mu\nu}$  die kontravarianten Komponenten des metrischen Tensors einer Pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit sind. Die Eikonalgleichung ist die Grundgleichung der geometrischen Optik (großes  $\psi$  bedeutet kleine Wellenlänge).

**Eikonalgleichung**, Näherungsgleichung für eine Wellengleichung, speziell in der geometrischen Optik.

Sie ist dann eine gute Näherung an die exakte Gleichung, wenn die Amplitude der Welle nur eine geringe raumzeitliche Schwankung aufweist.

Ein Beispiel: Die Welle sei durch den Skalar  $\phi$  beschrieben, und die Wellengleichung sei einfach  $\phi_{;i}^i = 0$  in der Minkowski-Raum-Zeit der speziellen Relativitätstheorie. Wir machen den Ansatz

$$\phi = a \cdot \exp(i\psi)$$

und nehmen an, daß der Gradient von  $a$  gegenüber dem Gradienten von  $\psi$  vernachlässigbar ist.

Dann lautet die erste Näherung der Wellengleichung  $\psi^{,i}\psi_{,i} = 0$ , und diese Gleichung wird Eikonalgleichung genannt.

Aus der Eikonalgleichung läßt sich also ablesen, daß der Wellenvektor (hier:  $\psi_{,i}$ ) eines masselosen Teilchens (hier:  $\phi$ ) lichtartig ist, also das Teilchen sich in erster Näherung mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet.

Steht dagegen auf der rechten Seite der Wellengleichung noch ein Masseterm (mit positiver Masse), wird der Wellenvektor zeitartig, und das Teilchen bewegt sich mit Unterlichtgeschwindigkeit.

Ferner wird hier deutlich, wie negative Masse zu Überlichtgeschwindigkeit führen kann – beides ist allerdings experimentell noch nicht nachgewiesen.

**Einbettung**,  $\nearrow$  Einbettungsabbildung.

**Einbettung eines Graphen**, Zuordnung eines Graphen zu einem topologischen Raum.

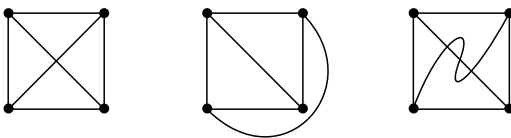
Eine Einbettung des Graphen  $G$  in einen topologischen Raum  $X$  ordnet jeder Ecke  $v$  von  $G$  einen Punkt  $v'$  in  $X$  und jeder Kante  $k$  von  $G$  einen Bogen  $k'$  in  $X$ , d. h. das Bild einer stetigen injektiven Abbildung von  $[0, 1]$  in  $X$ , so zu, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (i) Verschiedene Ecken werden verschiedenen Punkten zugeordnet, und
- (ii) für eine Kante  $k = uv$  von  $G$  verbindet der Bogen  $k'$  die beiden Punkte  $u'$  und  $v'$  in  $X$ .

Die Elemente der Mengen  $E' = \{v' | v \in E(G)\}$  und  $K' = \{k' | k \in K(G)\}$  heißen Ecken und Kanten der Einbettung und definieren in natürlicher Weise einen zu  $G$  isomorphen Graphen  $G'$  in  $X$ , der selbst oft als Einbettung von  $G$  bezeichnet wird.

Ein Schnittpunkt in  $X \setminus E'$  zweier Kanten der Einbettung heißt eine Kreuzung (engl. crossing). Eine Einbettung heißt kreuzungsfrei, falls sie keine Kreuzung besitzt. In einer kreuzungsfreien Einbettung schneiden sich also Kanten höchstens in Ecken.

Eine Einbettung heißt normal, falls je zwei Kanten höchstens einen Schnittpunkt besitzen und keine drei Kanten sich in einer Kreuzung schneiden. In einer normalen Einbettung schneiden sich also zwei Kanten nur entweder in höchstens einer Ecke oder in höchstens einer Kreuzung.



Von den drei dargestellten Einbettungen des Graphen  $K_4$  in die Ebene  $\mathbb{R}^2$  ist die linke normal, die mittlere kreuzungsfrei und die rechte weder normal noch kreuzungsfrei.

Wählt man für  $X$  den  $\mathbb{R}^3$ , für die Ecken Punkte der Form  $(t, t^2, t^3)$  für  $t \in \mathbb{R}$  und für die Kanten die geraden Strecken zwischen den jeweiligen Ecken, so sieht man leicht, daß jeder Graph eine kreuzungsfreie Einbettung in den  $\mathbb{R}^3$  besitzt. Üblicherweise werden daher vornehmlich kreuzungsfreie Einbettungen in zweidimensionale Mannigfaltigkeiten und insbesondere die Ebene  $\mathbb{R}^2$ , oder orientierbare und nicht-orientierbare Flächen beliebigen Geschlechts betrachtet.

Man vergleiche auch das Stichwort  $\nearrow$  Einbettungsalgorithmus.

**Einbettungsabbildung**, *Einbettung*, manchmal auch Inklusionsabbildung oder Inklusion genannt, die  $\nearrow$  Abbildung  $i : A \rightarrow B$ ,  $x \mapsto x$ , wobei  $A$  eine Teilmenge von  $B$  ist.

Manchmal spricht man auch im Fall einer injektiven Abbildung  $i : A \rightarrow B$ , wobei  $A$  keine Teilmenge von  $B$  ist, von einer Einbettungsabbildung.

**Einbettungsalgorithmus**, ein Algorithmus, der für einen gegebenen Graphen  $G$  eine kreuzungsfreie  $\nearrow$  Einbettung dieses Graphen in einen bestimmten topologischen Raum erzeugt, falls eine solche existiert. Manchmal werden auch Algorithmen so genannt, die lediglich testen, ob eine derartige Einbettung existiert, ohne sie anzugeben.

Eine Vielzahl effizienter Einbettungsalgorithmen wurde für spezielle topologische Räume entwickelt.

Hopcroft und Tarjan gaben 1974 den ersten Planaritätstest mit linearer Laufzeit an, d. h. einen Algorithmus, der testet, ob ein gegebener Graph ein  $\nearrow$  planarer Graph ist.

Zwei Jahre später wurde ein Algorithmus entwickelt, der in ebenfalls linearer Laufzeit tatsächlich eine kreuzungsfreie Einbettung eines gegebenen Graphen in die Ebene konstruiert, falls eine solche existiert.

Im Jahre 1999 gab Mohar einen Einbettungsalgorithmus mit linearer Laufzeit für orientierbare oder nicht-orientierbare Fläche beliebigen festen Geschlechts an. Er verwendete hierfür einen Einbettungsalgorithmus mit linearer Laufzeit für die projektive Ebene, d. h. die nicht-orientierbare Fläche  $N_1$  vom Geschlecht Eins, und einen ebensolchen Algorithmus für den Torus, d. h. die orientierbare Fläche  $S_1$  vom Geschlecht Eins, von Juvan, Marinček und Mohar (1995).

Es ist i. allg. ein NP-vollständiges Problem, für einen gegebenen Graphen  $G$  und eine gegebene natürliche Zahl  $k$  zu entscheiden, ob das Geschlecht von  $G$  die Zahl  $k$  nicht überschreitet. Filotti, Miller und Reif gaben 1979 einen Algorithmus an, der das Geschlecht  $h$  eines Graphen mit  $n$  Ecken in einer Laufzeit von  $O(n^{O(h)})$  bestimmt.

**Einbettungsbereich**, Gebiet  $\Omega'$  gewisser regulärer, z. B. quadratischer, Struktur, das ein anderes Gebiet  $\Omega$  allgemeinerer Struktur beinhaltet. Häufig

werden Probleme, die auf  $\Omega$  zu lösen sind, beispielsweise Differentialgleichungen, durch Einbettung in  $\hat{\Omega}$  besser an Lösungsverfahren angepaßt.

**Einbettungssatz**, Satz von Urysohn über normale Räume.

*Jeder normale Raum mit höchstens abzählbarer Basis ist homöomorph zu einer Punktmenge des Fundamentalquaders des Hilbertschen Raumes.*

Dabei heißt ein Hausdorffscher topologischer Raum normal, wenn je zwei disjunkte abgeschlossene Mengen durch zwei offene disjunkte Mengen getrennt werden können.

**Einbettungsverfahren**, zur Lösung von Randwertproblemen verwendete Methode, die auf der Einbettung des zugrundeliegenden Gebiets in einen einfacheren  $\mathcal{A}$ -Einbettungsbereich, wie beispielsweise im zweidimensionalen Fall ein Quadrat, basiert.

**eindeutig einbettbarer Graph**, ein  $\mathcal{A}$ -planarer Graph, dessen kreuzungsfreie Einbettungen in die Ebene  $\mathbb{R}^2$  alle äquivalent zueinander sind.

Zwei kreuzungsfreie Einbettungen  $H_1$  und  $H_2$  eines  $\mathcal{A}$ -planaren Graphen  $G$  in die Ebene heißen dabei äquivalent, falls jeder Teilgraph von  $G$  genau dann dem Rand eines Landes in  $H_1$  entspricht, falls er auch dem Rand eines Landes in  $H_2$  entspricht.

Nach einem Satz von H. Whitney aus dem Jahr 1933 sind alle dreifach-zusammenhängenden planaren Graphen eindeutig einbettbar.

**eindeutig komplementärer Verband**, ein  $\mathcal{A}$ -beschränkter Verband, dessen Elemente alle ein eindeutiges Komplement besitzen.

**eindeutige Abbildung**, *injektive Abbildung*,  $\mathcal{A}$ -Abbildung  $f : A \rightarrow B$ , so daß für alle  $y \in B$  gilt, daß  $\#f^{-1}(\{y\}) \in \{0, 1\}$ , das heißt, jedes Element des Bildbereiches von  $f$  ist das Bild höchstens eines Elementes des Urbildbereiches von  $f$ . Man schreibt dann auch  $f : A \hookrightarrow B$ .

**eindeutige Primfaktorzerlegung**, die Tatsache, daß man natürlicher Zahlen in eindeutiger Weise als Produkt von Primzahlen darstellen kann. Es gilt folgender Satz:

*Jede natürliche Zahl  $n$  kann in eindeutiger Weise als Produkt*

$$n = p_1^{v_1} \cdots p_r^{v_r} \quad (1)$$

von  $\mathcal{A}$ -Primzahlen

$$p_1 < p_2 < \dots < p_r$$

mit Exponenten  $v_1, \dots, v_r$  aus den natürlichen Zahlen geschrieben werden.

Die Darstellung (1) heißt Primfaktorzerlegung von  $n$ , jede der darin vorkommenden Primzahlen nennt man einen Primfaktor von  $n$ . Zu einer gegebenen Primzahl  $p$  ist der  $p$ -Exponent einer ganzen Zahl  $a \neq 0$  gegeben durch

$$v_p(a) = \begin{cases} v_j & \text{falls } p = p_j \text{ in der} \\ & \text{Primfaktorzerlegung von } |a|, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Zerlegung in Primfaktoren steht zwar nicht in dieser oder ähnlicher Form bei Euklid, wohl aber findet sich in Euklids Buch VII ( $\mathcal{A}$ -„Elemente“ des Euklid) das entscheidende Argument zum Beweis, nämlich der Satz von Euklid über Primteiler.

Man vergleiche auch  $\mathcal{A}$ -Ring mit eindeutiger Primfaktorzerlegung.

**eindeutige Primzerlegung**, eine Verallgemeinerung der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung:

*Seien  $\mathcal{O}$  ein  $\mathcal{A}$ -Dedekindscher Ring und  $a$  ein von Null und  $\mathcal{O}$  verschiedenes Ideal in  $\mathcal{O}$ .*

*Dann besitzt  $a$  eine bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutige Produktdarstellung*

$$a\hat{=} p_1^{v_1} \cdots p_r^{v_r} \quad (1)$$

mit Primidealen  $p_1, \dots, p_r$  in  $\mathcal{O}$  und Exponenten  $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{N}$ .

Zu einem Primideal  $p$  ist der  $p$ -Exponent eines Ideals  $a \neq (0)$  gegeben durch

$$v_p(a) = \begin{cases} v_j & \text{falls } p = p_j \text{ in (1),} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dieser Satz heißt auch Hauptsatz der Dedekindschen Idealtheorie.

Die eindeutige Primzerlegung in Dedekindschen Ringen ist eine Weiterentwicklung der Kummer'schen Idee von den idealen Zahlen, für die, analog zur Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung, eine eindeutige Zerlegung in „ideale Primzahlen“, in heutiger Sprache Primideale, existieren müsse. Die eindeutige Primzerlegung besitzt eine Verallgemeinerung auf gebrochene Ideale.

**eindeutige Sprache**, kontextfreie Sprache, zu der eine eindeutige  $\mathcal{A}$ -Grammatik existiert.

Die meisten modernen Programmiersprachen sind eindeutig. Eine klassische Mehrdeutigkeit tritt im Zusammenhang mit der Syntax bedingter Anweisungen auf:

Das Konstrukt *if* BEDINGUNG *then* *if* BEDINGUNG *then* ANWEISUNG *else* ANWEISUNG läßt sich durch die Grammatikregeln  $r_1 = (\text{ANWEISUNG}, \text{if BEDINGUNG then ANWEISUNG})$ ,  $r_2 = (\text{ANWEISUNG}, \text{if BEDINGUNG then ANWEISUNG else ANWEISUNG})$  einerseits als  $\text{ANWEISUNG} \Rightarrow^{r_1} \text{if BEDINGUNG then ANWEISUNG} \Rightarrow^{r_2} \text{if BEDINGUNG then if BEDINGUNG then ANWEISUNG else ANWEISUNG}$  ableiten (was eine Zugehörigkeit des *else* zum zweiten *if* festlegt), und andererseits als  $\text{ANWEISUNG} \Rightarrow^{r_2} \text{if BEDINGUNG then ANWEISUNG else ANWEISUNG} \Rightarrow^{r_2} \text{if BEDINGUNG then if BEDINGUNG then ANWEISUNG else ANWEISUNG}$  (was eine Zugehörigkeit des *else* zum ersten *if* festlegt).

In Sprachdefinitionen, die unter dieser Mehrdeutigkeit leiden (z. B. PASCAL oder C) wird die Mehrdeutigkeit durch Zusatzfestlegungen aufgelöst, die nicht Bestandteil der Grammatik selbst sind.

**Eindeutigkeit von  $\mathbb{C}$ ,  $\nearrow \mathbb{C}$ .**

**Eindeutigkeit von Fourier-Entwicklungen**, bezieht sich auf die Frage, ob eine Funktion durch ihre Fourier-Reihe eindeutig bestimmt ist: Seien  $f, g$   $2\pi$ -periodisch und auf  $[-\pi, \pi]$  Lebesgue-integrierbar. Stimmen die Fourier-Koeffizienten von  $f$  und  $g$  überein, so gilt  $f = g$  fast überall.

Daraus folgt beispielsweise: Sind  $f$  und  $g$  zusätzlich stetig vorausgesetzt, so gilt  $f(x) = g(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

**Eindeutigkeitsbeweis**, Beweis einer  $\nearrow$ -Aussage, die die Existenz genau eines Elements mit gegebenen Eigenschaften behauptet, wenn die Existenz wenigstens eines solchen Elements schon gesichert ist.

**Eindeutigkeitssatz der Differentialrechnung**, besagt, daß zwei auf einem Intervall definierte differenzierbare Funktionen genau dann die gleiche Ableitung haben, wenn sie sich nur um eine additive Konstante unterscheiden, d. h. wenn ihre Differenz konstant ist.

**Eindeutigkeitssatz für die Eulersche  $\Gamma$ -Funktion**,  $\nearrow$  Eulersche  $\Gamma$ -Funktion.

**Eindeutigkeitsätze**,  $\nearrow$  Existenz- und Eindeutigkeitsätze.

**eindimensionale Diffusion**, Bezeichnung für eine bedeutende Klasse stochastischer Prozesse. Entsprechend verschiedener Definitionsmöglichkeiten ergeben sich auch verschiedene Klassen von Diffusionsprozessen.

Eine eindimensionale Diffusion wird häufig als (starker) Markow-Prozeß  $(X_t)_{t \geq 0}$  mit stetigen Pfaden definiert. Es gilt dann

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} P(|X_{t+h} - x| > \varepsilon | X_t = x) = 0.$$

Weiterhin existieren in der Regel die Grenzwerte

$$\mu(t, x) := \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} E(X_{t+h} - X_t | X_t = x)$$

und

$$\sigma^2(t, x) := \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} E((X_{t+h} - X_t)^2 | X_t = x).$$

Dabei wird  $\mu(t, x)$  als Driftparameter oder Trendkoeffizient und  $\sigma^2(t, x)$  als Diffusionsparameter bezeichnet. Im allgemeinen sind  $\mu(t, x)$  und  $\sigma^2(t, x)$  stetige Funktionen von  $t$  und  $x$ .

Einige Autoren nehmen die Existenz von Drift- und Diffusionsparameter explizit mit in die Definition auf: Ist  $(X_t)_{t \geq 0}$  ein Markow-Prozeß mit Übergangsfunktion  $P(s, x; t, B)$ ,  $s, t \in \mathbb{R}_0^+$ ,  $s \leq t$ ,  $x \in \mathbb{R}$  und  $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ , so wird  $(X_t)_{t \geq 0}$  als Diffusion be-

zeichnet, wenn die Übergangsfunktion für beliebige  $s \geq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$  und  $\varepsilon > 0$  die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|y-x| > \varepsilon} P(s, x; s+h, dy) = 0,$$

und es existieren die Grenzwerte

$$\mu(t, x) := \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq \varepsilon} (y-x) P(s, x; s+h, dy)$$

sowie

$$\sigma^2(t, x) := \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq \varepsilon} (y-x)^2 P(s, x; s+h, dy),$$

die wieder als Drift- bzw. Diffusionsparameter bezeichnet werden. Die erste dieser Bedingungen garantiert dabei die Stetigkeit der Pfade. Unter gewissen Zusatzvoraussetzungen besitzt die Übergangsfunktion eine Dichte  $p(s, x; t, y)$  bezüglich des Lebesgue-Maßes. Diese Dichte stellt eine starke Lösung zweier Differentialgleichungen dar: Der Rückwärtsgleichung von Kolmogorow sowie der Fokker-Planck-Gleichung.

Desweiteren finden sich Definitionen, bei denen unter einer Diffusion eine Lösung einer stochastischen Differentialgleichung verstanden wird.

Ein wichtiges Beispiel für eine eindimensionale Diffusion ist eine normale eindimensionale Brownsche Bewegung, für die gilt  $\mu(t, x) = 0$  und  $\sigma^2(t, x) = 1$  für alle  $t \geq 0$  und  $x \in \mathbb{R}$ .

**eindeutige Abbildung**, sprachlich nicht sehr geglückte, aber in der Mathematik übliche Bezeichnung für eine Abbildung, die sowohl injektiv als auch surjektiv ist ( $\nearrow$  bijektive Abbildung).

**eindeutige Relation**,  $\nearrow$  Relation, die sowohl linkseindeutig als auch rechtseindeutig ist.

**Einerkomplement**, Ersetzung aller Ziffern einer Binärzahl durch die jeweils andere Ziffer.

Das Einerkomplement dient der Komplementdarstellung vorzeichenbehafteter Binärzahlen sowie der Vereinheitlichung der Prozeduren zur Addition und Subtraktion ( $\nearrow (b-1)$ -Komplement).

**Einerkomplement-Darstellung**,  $\nearrow$  binäre Zahlendarstellung, bei der der Folge

$$(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_{-k}) \in \{0, 1\}^{1+n+k}$$

die Zahl

$$\left( \sum_{i=-k}^{n-1} \alpha_i \cdot 2^i \right) - \alpha_n \cdot (2^n - 2^{-k})$$

zugeordnet wird.

**Eihermenge**, Menge mit genau einem Element.

**Eihermengemaxiom**, Axiom der  $\nearrow$  axiomatischen Mengenlehre, das verlangt, daß es zu jeder Menge  $x$  eine Menge  $X$  gibt, die  $x$  als Element enthält.



**einfach zusammenhängender Raum**, ein wegzusammenhängender (topologischer) Raum, dessen  $\nearrow$ Fundamentalgruppe trivial ist, also nur aus dem neutralen Element besteht.

**einfach zusammenhängendes Gebiet**, ein (ebenes) Gebiet, das keine „Löcher“ hat.

Es existieren mehrere äquivalente Präzisierungen dieser Aussage; die der Anschauung am besten entsprechende ist die folgende: Ein Gebiet  $G$  ist einfach zusammenhängend, wenn jeder in  $G$  verlaufende einfach geschlossene Polygonzug nur Punkte von  $G$  umschließt.

**einfache Algebra**, eine Algebra  $A$ , die keine zweiseitigen Ideale außer  $\{0\}$  und  $A$  selbst besitzt.

Ist  $\phi : A \rightarrow B$  ein  $\nearrow$ Algebrenhomomorphismus mit einer einfachen Algebra  $A$  und einer beliebigen Algebra  $B$ , dann ist  $\phi$  entweder die Nullabbildung oder injektiv.

**einfache algebraische Körpererweiterung**,  $\nearrow$ einfache Körpererweiterung.

**einfache Gruppe**, Gruppe mit minimaler Anzahl von Normalteilern.

Eine Gruppe  $G$  mit Einselement  $e$  heißt einfach, wenn  $G$  und  $\{e\}$  die einzigen  $\nearrow$ Normalteiler von  $G$  sind.

Die einfachen Gruppen spielen in der Gruppentheorie eine Rolle, die analog der der Primzahlen in der Zahlentheorie ist. Die endlichen einfachen Gruppen sind inzwischen klassifiziert, sie sind allerdings keinesfalls „einfach“ im anschaulichen Sinn: Eine von ihnen, teilweise „Monstergruppe“ genannt, hat etwa  $10^{54}$  Elemente.

**einfache Körpererweiterung**, eine  $\nearrow$ Körpererweiterung, die durch ein einzelnes Element „erzeugt“ werden kann.

Die Körpererweiterung  $\mathbb{L}$  über  $\mathbb{K}$  heißt einfach, falls  $\mathbb{L}$  durch Körperadjunktion eines einzelnen Elementes  $\alpha \notin \mathbb{K}$  erhalten wird,  $\mathbb{L} = \mathbb{K}(\alpha)$ . Der Körper  $\mathbb{L}$  heißt einfacher Erweiterungskörper und  $\alpha$  primitives Element der Körpererweiterung.

Ist  $\alpha$  algebraisches Element über  $\mathbb{K}$  ( $\nearrow$ algebraisches Element über einem Körper), so heißt  $\mathbb{L}$  einfache algebraische Körpererweiterung, ansonsten einfache transzendente Körpererweiterung.

Nach dem Satz vom primitiven Element ist jede endliche und separable Körpererweiterung eine einfache algebraische Körpererweiterung und kann somit durch ein algebraisches primitives Element erzeugt werden.

**einfache Lie-Algebra**, Lie-Algebra, die weder abelsch ( $\nearrow$ abelsche Lie-Algebra) ist noch ein echtes Ideal enthält.

Eine Teilalgebra  $h$  der Lie-Algebra  $g$  heißt Ideal in  $g$ , falls für alle  $x \in h$  und alle  $y \in g$  das Lie-Produkt  $[x, y]$  stets ein Element von  $h$  ist.

Ein Ideal mit mindestens zwei Elementen, das von  $g$  verschieden ist, heißt echtes Ideal.

**einfache Markow-Eigenschaft**,  $\nearrow$ elementare Markow-Eigenschaft.

**einfache Menge**, *simple Menge*, eine  $\nearrow$ rekursiv aufzählbare Menge  $A \subseteq \mathbb{N}_0$ , deren Komplementmenge immun ( $\nearrow$ immune Menge) ist.

**einfache Nullstelle**, eine Nullstelle einer Funktion mit  $\nearrow$ Nullstellenordnung Eins; man vergleiche auch  $\nearrow\alpha$ -Stelle.

**einfache Polstelle**, eine Polstelle einer Funktion mit  $\nearrow$ Polstellenordnung Eins.

**einfache transzendente Körpererweiterung**,  $\nearrow$ einfache Körpererweiterung.

**einfache Zufallsvariable**, reelle Zufallsvariable, die nur endlich viele Werte annehmen kann. Eine einfache Zufallsvariable ist also eine spezielle  $\nearrow$ diskrete Zufallsvariable mit Werten in  $\mathbb{R}$ .

**einfacher Modul**, Modul, der keine vom Nullmodul verschiedenen Untermoduln hat.

**einfacher Pol**,  $\nearrow$ einfache Polstelle.

**einfacher Ring**, Ring, der keine vom Nullideal verschiedenen zweiseitigen Ideale hat.

**Einfügen in eine Datenbank**, Vorgang des Hinzufügens eines Satzes in eine Datenbank.

Hierfür muß zunächst festgestellt werden, in welchen Teilbereich der Datenbank der neue Satz gehört. Verwendet man beispielsweise ein relationales Datenbanksystem, so ist zu klären, in welche Tabelle der neue Satz eingefügt werden soll. Sobald diese Tabelle feststeht, muß auf die Probleme der referentiellen Integrität beim Einfügen von Datensätzen geachtet werden. Wird nämlich ein Satz einer Tabelle hinzugefügt, die einen Fremdschlüssel besitzt, der auf einen Primärschlüssel einer anderen Tabelle verweist, so ist es möglich, daß zu dem Fremdschlüsselwert des neuen Satzes kein Primärschlüsselwert in der referenzierten Tabelle existiert. In diesem Fall wird der Datenbestand in der Datenbank inkonsistent.

In relationalen Datenbanksystemen kann man dieses Problem auf zwei verschiedene Arten lösen. Entweder man sichert die Integrität des Datenbestandes bereits bei der Definition der in der Datenbank auftretenden Tabellen, indem man festlegt, welche Attribute als Fremdschlüssel dienen sollen, und welche Tabellen durch sie referenziert werden. In diesem Fall führt der Versuch des Einfügens eines Satzes mit unpassendem Fremdschlüsselwert automatisch zu einer Fehlermeldung.

Man kann aber auch das Datenbanksystem flexibler lassen und im Rahmen der Einfügekommandos abfragen, ob passende Primärschlüsselwerte existieren, sodaß die Sicherung der Integrität nicht schon bei der Datenbankdefinition, sondern erst bei der Datenmanipulation erfolgt.

**Eingabeband**,  $\nearrow$ Turing-Maschine.

**Eingabefunktion**,  $\nearrow$ formales Neuron.

**Eingabe-Neuron**, (engl. *input neuron*), *Eingangsneuron*, im Kontext  $\mathcal{N}$  Neuronale Netze ein  $\mathcal{N}$  formales Neuron, das  $\mathcal{N}$  Eingabewerte des Netzes übernimmt.

**Eingabeschicht**, (engl. *input layer*), im Kontext  $\mathcal{N}$  Neuronale Netze die Menge der  $\mathcal{N}$  Eingabe-Neuronen des Netzes.

Implizit bringt dieser Begriff zum Ausdruck, daß die Topologie des Netzes schichtweise organisiert ist.

**Eingabewerte**, im Kontext  $\mathcal{N}$  Neuronale Netze diejenigen Werte, die dem Netz zur weiteren Verarbeitung im  $\mathcal{N}$  Ausführ-Modus übergeben werden und die  $\mathcal{N}$  Ausgabewerte determinieren.

Eingabewerte können je nach Netz diskret oder kontinuierlich sein und werden von den sogenannten  $\mathcal{N}$  Eingabe-Neuronen übernommen.

**Eingangsfunktion**,  $\mathcal{N}$  formales Neuron.

**Eingangsneuron**,  $\mathcal{N}$  Eingabe-Neuron.

**eingebetteter stochastischer Prozeß**, Teil eines stochastischen Prozesses, bei dem nur eine Teilmenge von Zeitpunkten, die sogenannten eingebetteten Zeitpunkte, betrachtet werden.

Eingebettete Prozesse spielen in der  $\mathcal{N}$  Warteschlangentheorie (Bedienungstheorie) und der  $\mathcal{N}$  Erneuerungstheorie eine Rolle.

Oft ist es interessant, Charakteristiken in Bedienungssystemen nicht in beliebigen Zeitpunkten, sondern nur in besonders interessierenden, den sogenannten eingebetteten Zeitpunkten zu bestimmen. Solche eingebetteten Zeitpunkte sind z. B. die Zeitpunkte des Eintreffens von Forderungen oder der Beendigung von Bedienungen. Untersucht man den Systemzustand in solchen eingebetteten Zeitpunkten, so ergibt sich häufig ein anderer Typ eines zufälligen Prozesses, der leichter mathematisch zu behandeln ist, als wenn man die gesamte Zeitachse betrachtet. Wir haben es dann mit eingebetteten zufälligen Prozessen zu tun.

Zum Beispiel bildet für ein Bedienungssystem mit unabhängigen, identisch, aber nicht notwendigerweise exponentialverteilten Zwischenankunftszeiten und exponentialverteilten Bedienungszeiten die Folge

$$(N(T_n - 0))_{n \geq 1}$$

der Anzahl der Forderungen im System unmittelbar vor dem Zeitpunkt  $T_n$  des Eintreffens von Forderungen eine Markowsche Kette. Dagegen ist der Prozeß  $(N(t))_{t \geq 0}$  der Anzahl der Forderungen im System zu beliebigen Zeitpunkten kein Markowscher Prozeß mehr.

In der Theorie stochastischer Prozesse geht es dann um die Entwicklung von Methoden zur Herleitung von Beziehungen zwischen den Charakteristiken eingebetteter Prozesse und den Charakteristiken von Prozessen mit beliebigen Zeitpunkten.

**Einheit**, spezielles Element eines Ringes.

Es sei  $R$  ein Ring mit der Verknüpfung  $\cdot$  und mit einem von 0 verschiedenen Einselement 1. Dann heißt ein Element  $a \in R$  eine Einheit von  $R$ , falls es ein Element  $b \in R$  gibt mit der Eigenschaft

$$a \cdot b = b \cdot a = 1.$$

Bezeichnet man die Menge aller Einheiten von  $R$  mit  $R^\times$ , so ist mit  $a \in R^\times$  und  $b \in R^\times$  auch  $a \cdot b \in R^\times$ . Zusammen mit der Verknüpfung  $\cdot$  bildet  $R^\times$  dann eine Gruppe, die  $\mathcal{N}$  Einheitengruppe, deren Einselement das Einselement des Ringes  $R$  ist. Der Ring  $R$  ist genau dann ein Schiefkörper, wenn  $R^\times = R \setminus \{0\}$  gilt.

Im Ring  $\mathbb{Z}$  der ganzen Zahlen gibt es genau die beiden Einheiten 1 und  $-1$ . Dagegen gibt es im Ring der ganzen Gaußschen Zahlen die vier Einheiten 1,  $-1$ ,  $i$  und  $-i$ .

**Einheit von  $C(G)$** , nullstellenfreie Funktion aus  $C(G)$ .

Ist beispielsweise  $G$  ein  $\mathcal{N}$  metrischer Raum, so bezeichnet  $C(G)$  die Menge der auf  $G$  stetigen komplexwertigen Funktionen. Mit punktweise definierten Verknüpfungen wird  $C(G)$  kommutative  $\mathbb{C}$ -Algebra mit Einselement

$$\mathbf{1} : G \ni x \longrightarrow 1 \in \mathbb{C}.$$

Die nullstellenfreien Funktionen aus  $C(G)$  sind gerade die Einheiten, d. h. diejenigen Elemente  $f \in C(G)$ , zu denen ein  $g \in C(G)$  mit  $fg = \mathbf{1}$ , d. h.

$$f(x)g(x) = 1$$

für alle  $x \in G$ , existiert.

**Einheit von  $O(D)$** ,  $\mathcal{N}$  Algebra der holomorphen Funktionen.

**Einheiten imaginär-quadratischer Zahlkörper**, aufgrund der vorausgesetzten speziellen Körperstruktur genauer beschreibbare  $\mathcal{N}$  Einheiten.

Ist  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$  mit einer quadratfreien ganzen Zahl  $d < 0$  ein imaginär-quadratischer Zahlkörper, so besitzt  $K$  keine reelle Einbettung  $K \rightarrow \mathbb{R}$  und genau ein Paar konjugiert komplexer Einbettungen  $K \rightarrow \mathbb{C}$ , also ist jede Einheit in seinem Ganzheitsring  $\mathcal{O}_K$  eine Einheitswurzel.

Im Fall  $d = -1$  ist die  $\mathcal{N}$  Einheitengruppe

$$(O_K)^\times = \{1, i, -1, -i\},$$

die Gruppe der vierten Einheitswurzeln, für  $d = -3$  ist

$$(O_K)^\times = \left\{1, e^{\pi i/3}, e^{2\pi i/3}, -1, e^{4\pi i/3}, e^{5\pi i/3}\right\}$$

die Gruppe der sechsten Einheitswurzeln, und für alle anderen imaginär-quadratischen Zahlkörper  $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$  ist

$$(O_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})})^\times = \{1, -1\}.$$

Lexikon der Mathematik: Band 2

Eig bis Inn

Walz, G. (Hrsg.)

2017, VII, 495 S. 14 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-662-53503-5