

**Sedezimalsystem**, Positionssystem zur Notation von Zahlen auf der Basis von 16 Ziffern, meist als  $\nearrow$ Hexadezimalsystem bezeichnet (s. d.).

**Seekarte**, geographische Karte für die Seefahrt.

Solche Karten erfordern winkeltreue  $\nearrow$ Karten-netzentwürfe, da der Kurs eines Schiffes in der Regel durch Peilung bestimmt wird. Diese Eigenschaft haben z. B. der  $\nearrow$ stereographische Entwurf und der  $\nearrow$ Mercator-Entwurf.

**Segment-Approximation**, Problem der Bestimmung einer besten Approximationen durch Splines mit freien Knoten, die nicht notwendigerweise stetig sind.

Es bezeichne  $C[a, b]$  die Menge der stetigen Funktionen auf einem Intervall  $[a, b]$ ,  $P_m$  den Raum der Polynome vom Grad  $m$ , und  $PP_{m,k}$  die Menge der Splines vom Grad  $m$  mit  $k$  freien Knoten, d. h.

$PP_{m,k} = \{s : [a, b] \mapsto \mathbb{R} : \text{es gibt}$

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} = b$$

so, daß  $s|_{[x_j, x_{j+1}]} \in P_m, j = 0, \dots, k-1,$

und  $s|_{[x_k, x_{k+1}]} \in P_m\}$ .

Das Problem der besten Approximation aus  $PP_{m,k}$  hinsichtlich der  $\nearrow$ Maximumnorm  $\|\cdot\|_\infty$  ist wie folgt definiert: Für vorgegebenes  $f \in C[a, b]$  bestimme man  $s_f \in PP_{m,k}$  so, daß

$$\|f - s_f\|_\infty = \inf\{\|f - s\|_\infty : s \in PP_{m,k}\}$$

gilt. In diesem Fall wird  $s_f$  beste Approximation an  $f$  aus  $PP_{m,k}$  genannt und die zu  $s_f$  gehörigen Knoten  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} = b$  heißen optimale Knotenmenge von  $f$ . Der Ausdruck

$$d(f, PP_{m,k}) = \inf\{\|f - s\|_\infty : s \in PP_{m,k}\}$$

heißt Minimalabweichung von  $f$  zu  $PP_{m,k}$ .

Bei der Segment-Approximation geht es um die Bestimmung von besten Approximationen  $s_f$  aus  $PP_{m,k}$ . Wichtig ist in diesem Zusammenhang der Begriff einer ausgeglichenen Knotenmenge von  $f$ . Dies sind Knoten  $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_k \leq x_{k+1} = b$  mit der Eigenschaft

$$d(f, P_m, [x_{i-1}, x_i]) = d(f, P_m, [x_i, x_{i+1}])$$

für alle  $i \in \{0, \dots, k\}$ , wobei  $d(f, P_m, I)$  die Minimalabweichung von  $f$  zu  $P_m$  auf der Menge  $I$  bezeichnet.

1986 wurde von G. Nürnberger, M. Sommer und H. Strauß der nachfolgend beschriebene Algorithmus zur Bestimmung einer besten Approximation aus  $PP_{m,k}$  entwickelt. Er basiert auf dem folgenden Satz, dessen Inhalt in der Literatur Lawson-Prinzip genannt wird.

Es sei  $f \in C[a, b]$ . Dann gilt:

(i) Für alle Knotenmengen  $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_k \leq x_{k+1} = b$  ist

$$\begin{aligned} \min_i d(f, P_m, [x_i, x_{i+1}]) &\leq d(f, PP_{m,k}) \\ &\leq \max_i d(f, P_m, [x_i, x_{i+1}]) . \end{aligned}$$

(ii) Es existiert eine optimale Knotenmenge  $f$ , welche ausgeglichene Knotenmenge von  $f$  ist.

(iii) Jede ausgeglichene Knotenmenge von  $f$  ist optimale Knotenmenge von  $f$ .

Im ersten Schritt des o. g. Algorithmus zur Segment-Approximation wählt man eine (Start-)Knotenmenge

$$a = x_{0,1} < x_{1,1} < \dots < x_{k,1} < x_{k+1,1} = b ,$$

berechnet mit dem  $\nearrow$ Remez-Algorithmus die Werte

$$d_{i,1} = d(f, P_m, [x_{i,1}, x_{i+1,1}]), i = 0, \dots, k ,$$

und setzt  $10^{\alpha_1} = \min_i d_{i,1}$ , sowie  $10^{\beta_1} = \max_i d_{i,1}$ . Im allgemeinen Schritt bestimmt man zunächst sukzessiv eine Knotenmenge

$$\begin{aligned} a = x_{0,p+1} < x_{1,p+1} < \dots < x_{k,p+1} \\ < x_{j_{p+1}+1,p+1} = \dots = x_{k+1,p+1} = b \end{aligned}$$

so, daß

$$10^{\frac{\alpha_p + \beta_p}{2}} = d(f, P_m, [x_{i,p}, x_{i+1,p}])$$

für alle  $i \in \{0, \dots, j_{p+1} - 1\}$ . Hierzu verwendet man den Remez-Algorithmus in Kombination mit der  $\nearrow$ Regula Falsi. Danach setzt man

$$10^{\alpha_{p+1}} = \max\{10^{\alpha_p}, \min\{10^{\frac{\alpha_p + \beta_p}{2}}, d(f, P_m, I)\}\}$$

$$10^{\beta_{p+1}} = \min\{10^{\beta_p}, \max\{10^{\frac{\alpha_p + \beta_p}{2}}, d(f, P_m, I)\}\} ,$$

wobei  $I = [x_{k,p+1}, x_{k+1,p+1}]$ , und iteriert das Verfahren.

Der Algorithmus erzeugt induktiv für vorgegebenes  $f \in C[a, b]$  eine ausgeglichene Knotenmenge von  $f$ , und die Folge  $10^{\frac{\alpha_p + \beta_p}{2}}$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , konvergiert gegen die Minimalabweichung von  $f$  zu  $PP_{m,k}$ .

In der Literatur wird vorgeschlagen, diesen Algorithmus mit einem für Splines mit festen Knoten entwickelten Remezalgorithmus zu kombinieren, um gut approximierende Splines mit freien Knoten zu bestimmen.

Mitte der 90er Jahre wurden von G. Meinardus, G. Nürnberger und G. Walz ähnliche Verfahren zur bivariate Segment-Approximation entwickelt.

[1] Nürnberger G.: Approximation by Spline Functions. Springer-Verlag Heidelberg/Berlin, 1989.

**Segmentieren einer Fläche**, Begriff aus der  $\mathcal{A}$  geometrischen Datenverarbeitung.

Viele Klassen von  $\mathcal{A}$  Freiformkurven und  $\mathcal{A}$  Freiformflächen, welche durch  $\mathcal{A}$  Kontrollpunkte festgelegt sind, besitzen die Eigenschaft, daß ihre Einschränkungen auf gewisse Teilmengen des Parameterbereichs wieder Kurven bzw. Flächen gleichen Typs sind, und daß sich deren Kontrollpunkte leicht aus den ursprünglichen bestimmen lassen. Dies kann man dazu benützen, um eine Fläche in Teilflächen zu zerlegen (zu 'segmentieren'). Diese Eigenschaft ist für viele Algorithmen nützlich, etwa zum Bestimmen der Schnittpunkte von  $\mathcal{A}$  Bézier-Flächen, wo man die Fläche iterativ zerteilt und mit Hilfe der  $\mathcal{A}$  convex hull property einfach feststellen kann, daß zwei Teile einander nicht schneiden.

Das Segmentieren ist die Basis von diskreten  $\mathcal{A}$  Unterteilungsalgorithmen.

**Segre, Corrado**, italienischer Mathematiker, geb. 20.8.1863 Saluzzo (Italien), gest. 18.5.1924 Turin. Nach dem Studium in Turin promovierte Segre 1883 und wurde Dozent für höhere Geometrie in Turin.

Segre leistete grundlegende Beiträge zur algebraischen Geometrie, zur komplexen Geometrie und zur projektiven Geometrie. Dabei wurde er wesentlich beeinflusst von D'Ovidio, der in Turin über abwickelbare Flächen, projektive Geometrie und bilineare und quadratische Formen las.

Segre selbst studierte geometrische Invarianten von linearen Transformationen, algebraische Kurven und Flächen, Quadriken, Kubiken und Flächen, definiert durch Differentialgleichungen. 1864 fand er eine einfache Darstellung der Kummerschen Fläche (K3-Fläche). Bei der Untersuchung der Eigenschaften Riemannscher Flächen führte er bi-komplexe Punkte in die Geometrie ein.

**Segre-Einbettung**, Einbettung von  $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$  in  $\mathbb{P}^{nm+n+m}$ , die sich in homogenen Koordinaten  $(X_i)_{i=0,\dots,n}$  auf  $\mathbb{P}^n$ ,  $(Y_j)_{j=0,\dots,m}$  auf  $\mathbb{P}^m$ , und  $(Z_{ij})_{0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m}$ , auf  $\mathbb{P}^{nm+n+m}$  durch

$$Z_{ij} = X_i Y_j$$

ausdrückt. Das Bild ist durch  $\text{rg}(Z_{ij}) = 1$  (d. h. Verschwinden der  $2 \times 2$ -Minoren) definiert.

Analoges gilt für Vektorbündel  $\mathcal{E}, \mathcal{F}$  auf einem Schema  $X: \mathbb{P}(\mathcal{E}) \times_X \mathbb{P}(\mathcal{F}) \subset \mathbb{P}(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F})$ .

Diese Einbettung ist durch die Surjektion

$$p_1^* \pi_1^* \mathcal{E} \otimes p_2^* \pi_2^* \mathcal{F} \rightarrow p_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \otimes p_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1)$$

induziert, mit den Bezeichnungen

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}) \times_X \mathbb{P}(\mathcal{F}) \xrightarrow{p_1} \mathbb{P}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\pi_1} X,$$

und analog für  $p_2, \pi_2$ .

**Segre-Klassen**, Begriff aus der Algebra.

Für abgeschlossene Einbettungen algebraischer  $k$ -Schemata  $X \subset Y$  sei  $C_{X|Y} \subset \overline{C}_{X|Y} \xrightarrow{q} X$  die projektive Abschließung des Normalenkegels. Die Segre-Klassen dieser Einbettungen sind die Klassen aus den Chow-Gruppen  $A_*(X)$ , die durch

$$q_* \left( c_1(\mathcal{O}_{\overline{C}}(1))^i \cap [\overline{C}] \right)$$

( $\mathcal{A}$  Schnitt-Theorie) definiert sind.

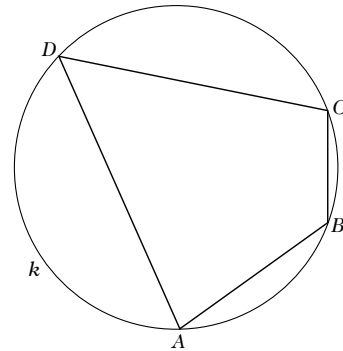
Für reguläre Einbettungen ( $\mathcal{A}$  Schnitt-Theorie) mit dem Normalenbündel  $\mathcal{N}_{X|Y}$  ist

$$s(X, Y) = \sum_{i \geq 0} q_* \left( c_1(\mathcal{O}_{\overline{C}}(1))^i \cap [\overline{C}] \right) = c(\mathcal{N}_{X|Y})^{-1}.$$

**Sehne eines Graphen**,  $\mathcal{A}$  chordaler Graph.

**Sehne eines Kreises**, Strecke, deren Endpunkte auf der Peripherie eines gegebenen Kreises liegen.

**Sehnenviereck**, Viereck, dessen Eckpunkte auf der Peripherie eines Kreises liegen, und dessen vier Seiten somit  $\mathcal{A}$  Sehnen dieses Kreises sind.



Sehnenviereck

In jedem Sehnenviereck beträgt die Summe der Größen zweier gegenüberliegender Winkel  $180^\circ$ ; umgekehrt besitzen alle Vierecke, bei denen die Summe zweier gegenüberliegender Winkel  $180^\circ$  beträgt, einen  $\mathcal{A}$  Umkreis, sind also Sehnenvierecke. Insbesondere ist also jedes  $\mathcal{A}$  Rechteck ein Sehnenviereck.

**sehr amplex Geradenbündel**, Begriff in der Funktionentheorie mehrerer Variabler.

Ein Geradenbündel  $L \rightarrow M$  über einer algebraischen Varietät heißt sehr amplex, wenn  $H^0(M, \mathcal{O}(L))$  eine Einbettung  $M \rightarrow \mathbb{P}^N$  liefert, d. h., wenn eine Einbettung  $f: M \hookrightarrow \mathbb{P}^N$  existiert mit  $L = f^* H$  für das Hyperebenenbündel  $H$ , das duale Bündel zu dem universellen Bündel  $J \rightarrow \mathbb{P}^N$ .

Dies bedeutet, daß  $H$  das Bündel ist, dessen Faser über  $X \in \mathbb{P}^N$  dem Raum der linearen Funktionale auf der Geraden  $\{\lambda X\}_\lambda \subset \mathbb{C}^{N+1}$  entspricht.

**Seidel, Philipp Ludwig von**, deutscher Mathematiker, Physiker und Astronom, geb. 24.10.1821 Zweibrücken, gest. 13.8.1896 München.

Nachdem er in Berlin und Königsberg (Kalinin-grad) Mathematik und Astronomie studiert hatte, ging Seidel nach München, wo er 1846 promovierte und 1855 Professor wurde. Ein Augenleiden zwang ihn jedoch zu einer frühen Beendigung seiner Laufbahn.

Sein ganzes Leben hindurch beschäftigte sich Seidel sowohl mit der Astronomie als auch mit der Mathematik. Er promovierte mit einer Arbeit über die Spiegel eines Teleskops und habilitierte sich ein halbes Jahr später mit einer Arbeit zur Konvergenz und Divergenz von Kettenbrüchen. Er beschäftigte sich mit der Verbesserung von Linsen und fand mathematische Beschreibungen für deren Aberration (Abbildungsfehler). Er führte den Begriff der nicht gleichmäßigen Konvergenz ein und verwendete wahrscheinlichkeitstheoretische Methoden in der Astronomie und in der Medizin.

**Seilkurve**,  $\nearrow$  Kettenlinie.

**Seinszeichen**, ältere Bezeichnung für den  $\nearrow$  Existenzquantor.

**Seitencosinussatz**, Satz der  $\nearrow$  sphärischen Trigonometrie:

In einem beliebigen Eulerschen Dreieck ( $\nearrow$  sphärisches Dreieck) mit den Seiten  $a$ ,  $b$  und  $c$  sowie den jeweils gegenüberliegenden Innenwinkeln  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned}\cos a &= \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha, \\ \cos b &= \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos \beta, \text{ und} \\ \cos c &= \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma.\end{aligned}$$

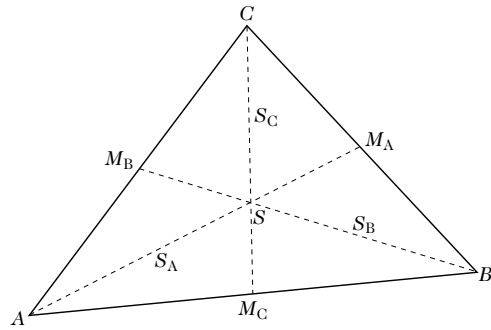
Auch in der  $\nearrow$  hyperbolischen Trigonometrie existiert ein Seitencosinussatz, nach dem in einem (nichteuclidischen) Dreieck mit den o.g. Bezeichnungen der Seiten und Winkel die folgenden Beziehungen gelten:

$$\begin{aligned}\cosh a &= \cosh b \cdot \cosh c - \sinh b \cdot \sinh c \cdot \cos \alpha, \\ \cosh b &= \cosh a \cdot \cosh c - \sinh a \cdot \sinh c \cdot \cos \beta, \\ \text{und} \\ \cosh c &= \cosh a \cdot \cosh b - \sinh a \cdot \sinh b \cdot \cos \gamma.\end{aligned}$$

**Seitenhalbierende**, Strecke, die einen Eckpunkt eines gegebenen Dreiecks mit dem Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite dieses Dreiecks verbindet.

Für jedes Dreieck  $\triangle ABC$  schneiden sich die drei Seitenhalbierenden  $s_A$ ,  $s_B$  und  $s_C$  in einem Punkt  $S$ , der Schwerpunkt des Dreiecks genannt wird. Die Seitenhalbierenden selbst werden manchmal auch als Schwerlinien bezeichnet.

Der Schwerpunkt eines Dreiecks teilt jede der Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1, sodaß der



am Eckpunkt anliegende Abschnitt doppelt so lang ist wie der an der gegenüberliegenden Seite anliegende Abschnitt. Die Längen der Seitenhalbierenden können wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned}s_A &= \frac{1}{2} \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha}, \\ s_B &= \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + c^2 + 2ac \cos \beta}, \\ s_C &= \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \gamma}.\end{aligned}$$

**Seitennormale**,  $\nearrow$  Seitenvektor.

**Seitenvektor**, *Seitennormale*, das Vektorfeld  $\mathfrak{s}(s)$  längs einer auf einer orientierten Fläche  $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$  verlaufenden Kurve  $\alpha(s)$ , das zur Tangentialebene von  $\mathcal{F}$  gehört, zu  $\alpha'(s)$  senkrecht ist, und zusammen mit dem Tangentialvektor der Kurve und dem Normalenvektor  $u$  von  $\mathcal{F}$  ein orientiertes Dreibein bildet.

Ist  $t$  der Einheitstangentenvektor von  $\alpha$ , so gilt  $\mathfrak{s}(s) = u(\alpha(s)) \times t(s)$ .

**Sekans hyperbolicus**,  $\nearrow$  hyperbolische Sekansfunktion.

**Sekansfunktion**, der Kehrwert der  $\nearrow$  Cosinusfunktion, also die Funktion

$$\sec = \frac{1}{\cos} : \mathbb{R} \setminus \{(k + \frac{1}{2})\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus (-1, 1).$$

Aus  $\cos' = -\sin$  folgt

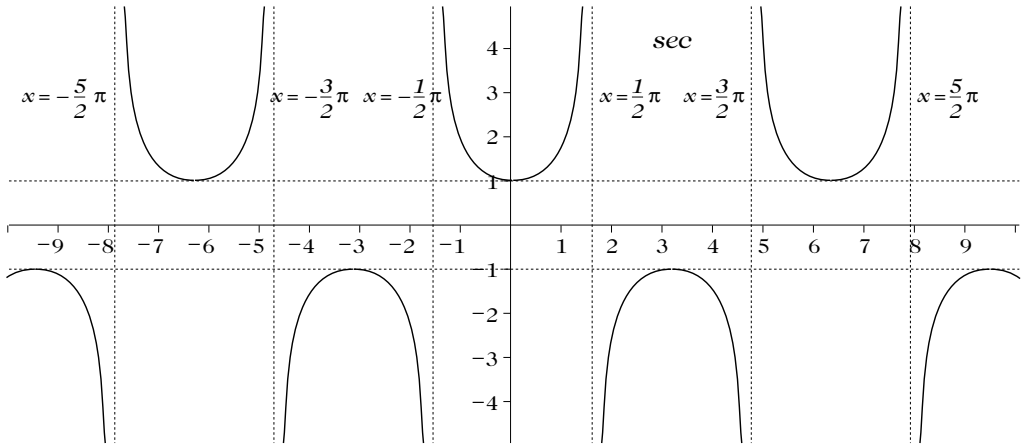
$$\sec' = \frac{\sin}{\cos^2} = \frac{\sin}{1 - \sin^2}.$$

Mit  $\cos$  ist auch  $\sec$  eine gerade  $2\pi$ -periodische Funktion.

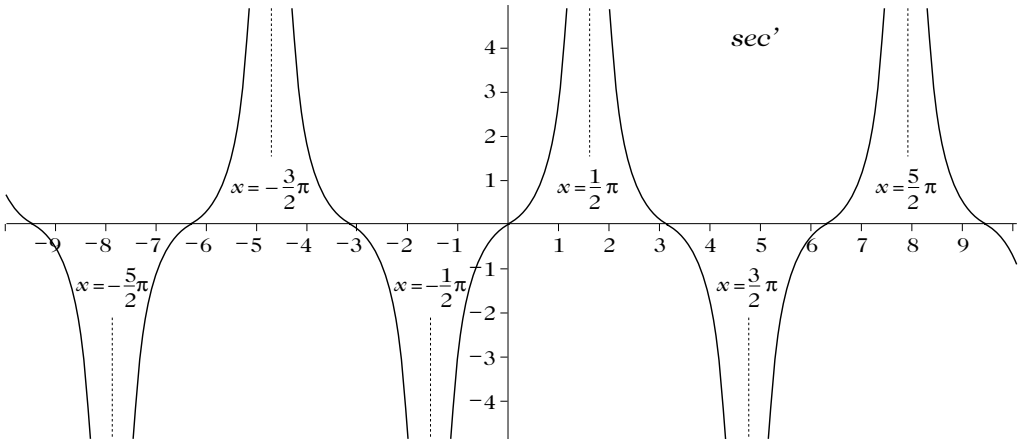
Für  $|x| < \frac{\pi}{2}$  hat man die Reihendarstellung

$$\begin{aligned}\sec x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} |E_{2n}| x^{2n} \\ &= 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{5}{24} x^4 + \frac{61}{720} x^6 + \dots\end{aligned}$$

mit den  $\nearrow$  Eulerschen Zahlen  $E_{2n}$ .



Sekansfunktion



Ableitung der Sekansfunktion

**Sekante**, die durch zwei gegebene, voneinander verschiedene Punkte eines Graphen einer reellwertigen Funktion einer oder mehrerer reeller Variablen verlaufende Gerade, also zu zwei Stellen  $a \neq b$  aus dem Definitionsbereich der Funktion  $f$  die Gerade durch die Punkte  $(a, f(a))$  und  $(b, f(b))$ . Die Sekante ist der Graph der Funktion  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit

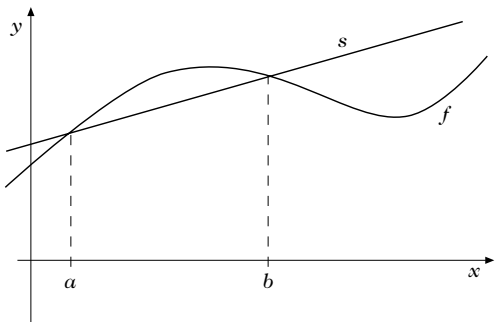
$$s(t) = (1 - t)f(a) + tf(b) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Im Fall einer Funktion einer reellen Variablen lässt sich die Sekante auch angeben als Graph der Sekantenfunktion  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$s(x) = \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) \quad (x \in \mathbb{R})$$

mit der Steigung  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ .

Ist  $a$  innere Stelle des Definitionsbereichs von  $f$  und  $f$  differenzierbar an der Stelle  $a$ , so erhält man



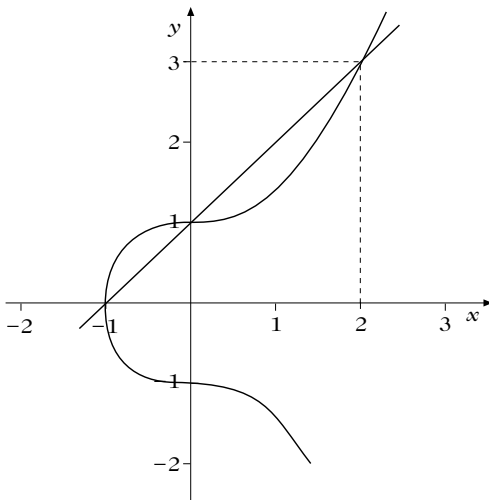
die Ableitung  $f'(a)$ , d. h. die Steigung der Tangente von  $f$  an der Stelle  $a$ , als Grenzwert der Sekantensteigung für  $b \rightarrow a$ .

**Sekantenmethode**, Verfahren zur Konstruktion rationaler Punkte einer algebraischen Menge.

Die Methode läßt sich am besten an einem klassischen Beispiel erläutern: Gegeben seien zwei verschiedene rationale Lösungen  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{Q}^2$  der  $\mathcal{A}$ Bachetschen Gleichung

$$x^3 - y^2 = c.$$

Man stelle sich nun die Menge aller reellen Lösungen dieser Gleichung als Kurve  $C$  in der Ebene vor, und verbinde die beiden gegebenen Lösungen durch eine Gerade  $g$ , die „Sekante“. Falls  $g$  weder in  $(x_1, y_1)$  noch in  $(x_2, y_2)$  die Tangente an  $C$  ist, so kann man zeigen, daß  $g$  die Kurve  $C$  noch in einem dritten Punkt mit rationalen Koordinaten schneidet.



Sekantenmethode: Die „Sekante“ durch  $(-1, 0)$  und  $(0, 1)$  schneidet die Kurve  $x^3 - y^2 = -1$  noch im Punkt  $(2, 3)$ .

Diese Methode, die implizit bereits in der „Arithmetika“ des Diophantos von Alexandria zu finden ist, läßt sich prinzipiell auch auf in manchen komplizierteren und allgemeineren Situationen anwenden. Gelegentlich wird sie Bachet, Euler, oder Cauchy zugeschrieben.

Diese Sekantenmethode ist nicht zu verwechseln mit dem in der  $\mathcal{A}$ Numerischen Mathematik angewandten  $\mathcal{A}$ Sekantenverfahren, wenngleich die beiden Begriffe in der Literatur gelegentlich vertauscht werden.

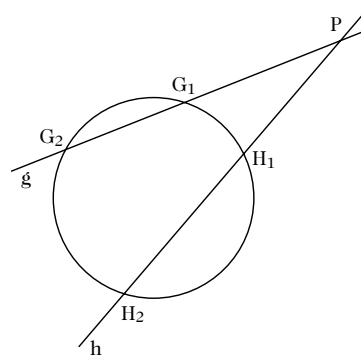
**Sekantensatz**, Aussage der elementaren Geometrie.

Gegeben sei ein Kreis  $K$  und ein außerhalb dieses Kreises liegender Punkt  $P$ . Weiter seien zwei Geraden  $g$  und  $h$  gegeben, die sich in  $P$  schneiden

und mit  $K$  die Schnittpunkte  $G_1$  und  $G_2$  bzw.  $H_1$  und  $H_2$  haben.

Dann gilt die folgende Aussage über die Verhältnisse der Streckenlängen:

$$\overline{PG_1} : \overline{PH_1} = \overline{PH_2} : \overline{PG_2}.$$



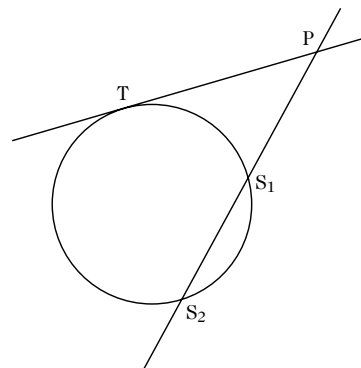
Sekantensatz

**Sekanten-Tangenten-Satz**, Aussage der elementaren Geometrie.

Gegeben sei ein Kreis  $K$ , sowie eine Sekante und eine Tangente von  $K$ , deren Verlängerungen sich in einem Punkt  $P$  schneiden. Die Schnittpunkte der Sekante mit dem Kreis seien mit  $S_1$  und  $S_2$ , der Berührungspunkt der Tangente mit  $T$  bezeichnet.

Dann gilt die folgende Aussage über die Verhältnisse der Streckenlängen:

$$\overline{PS_1} : \overline{PT} = \overline{PT} : \overline{PS_2}.$$



Sekanten-Tangenten-Satz

**Sekantenverfahren**, iteratives numerisches Verfahren zur Lösung einer nichtlinearen Gleichung

$f(x) = 0$  mit stetiger reeller Funktion  $f$  und unbekanntem reellen  $x$ .

Die Iterationsvorschrift lautet explizit

$$x_{k+1} := x_k - f(x_k) \cdot \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \dots$$

mit vorgegebenen Startwerten  $x_0$  und  $x_1$ . Geometrisch betrachtet wird in jedem Schritt die Sekante durch  $x_{k-1}$  und  $x_k$  an  $f$  gelegt und deren Schnittpunkt mit der  $x$ -Achse als neue Näherung genommen. Abgebrochen wird die Iteration üblicherweise, wenn  $|x_{k+1} - x_k|$  hinreichend klein geworden ist.

Das Sekantenverfahren beruht im Prinzip auf der Ersetzung des Differentialquotienten im  $\mathcal{N}$ Newtonverfahren durch den Differenzenquotienten und stellt somit eine Vereinfachung dieses Verfahrens dar.

Dieses Sekantenverfahren ist nicht zu verwechseln mit der in der Zahlentheorie angewandten  $\mathcal{N}$ Sekantenmethode, wenngleich die beiden Begriffe in der Literatur gelegentlich vertauscht werden.

**Seki Kowa, Takakazu**, Mathematiker, geb. 1642 Fujioka (Japan), gest. 24.10.1708 Edo (heute Tokio).

Seki war der Sohn eines Samurai, wurde jedoch schon sehr bald von der adligen Familie Seki Gorozaiemon adoptiert, die ihm auch den Namen gab. Er wurde durch einen Hauslehrer der Familie erzogen, eignete sich aber auch viele mathematische Kenntnisse im Selbststudium an. Er baute in kurzer Zeit eine umfangreiche Bibliothek mathematischer Fachliteratur aus Japan und China auf, wurde selbst zum anerkannten Experten in dieser Disziplin und gewann zahlreiche Schüler.

Seki beschäftigte sich mit Diophantischen Gleichungen, magischen Quadraten, und lange bevor Jacob Bernoulli selbst das tat, mit Bernoullischen Zahlen. Es scheint heute auch unstrittig, daß er bereits 1683, also etwa zehn Jahre vor Leibniz, mit Determinanten gearbeitet hat. Da jedoch wissenschaftlich Resultate zu damaligen Zeit kaum die Grenzen Japans nach außen durchdrangen, blieben Sekis Entdeckungen in Europa lange Zeit unbekannt.

**Selberg, Atle**, norwegischer Mathematiker, geb. 14.6.1917 Langesund (Norwegen). gest. 6.8.2007 Princeton (New Jersey).

Selberg, Sohn eines Mathematik-Professors, interessierte sich schon als Schüler für Mathematik, und wurde durch das Studium der Gesammelten Werke Ramanujans zu eigenen Forschungen angeregt. Weitere wichtige Impulse erhielt er zu Beginn seiner Universitätsausbildung in Oslo durch den Vortrag von Hecke auf dem dort 1936 statt-

findenden Internationalen Mathematiker-Kongreß. 1942 schloß er sein Studium mit der Promotion ab und wirkte an der Universität Oslo als wissenschaftlicher Mitarbeiter. 1947 ging er zu einem Studienaufenthalt an des Institute for Advanced Study in Princeton, an dem er nach einjähriger Tätigkeit (1948/49) als Professor an der Universität in Syracuse (NY) ab 1949 als Mitarbeiter und ab 1952 als Professor wirkte. Seit 1987 ist er dort Professor Emeritus. Mehrfach weilte er zu Gastprofessuren an anderen Universitäten in aller Welt.

Inspiziert durch Ramanujans Arbeiten galt Selbergs Hauptinteresse der Zahlentheorie. Er begann seine Forschungen mit tieflegenden Untersuchungen zur analytischen Zahlentheorie, insbesondere zur Verteilung von Primzahlen und zur Riemannschen  $\zeta$ -Funktion. Dabei gelang ihm 1946 die Entdeckung einer neuen Siebmethode, die die Brunschen Siebmethoden verallgemeinerte. 1949 publizierte er einen elementaren Beweis des Primzahlsatzes und des Dirichletschen Primzahlsatzes über die unendliche Anzahl von Primzahlen in arithmetischen Progressionen. Ein weiteres zentrales Resultat war sein Nachweis, daß die Menge der Nullstellen der Riemannschen  $\zeta$ -Funktion, die der Riemannschen Vermutung genügen, eine positive Dichte hat. In Fortsetzung seiner analytischen Studien zur Riemannschen  $\zeta$ -Funktion führte er die sog. Mollifier ein, beschäftigte sich mit automorphen Formen und widmete sich intensiv den Beziehungen zwischen Gruppendarstellungen, sowie zahlentheoretischen Fragen.

Für fast ein halbes Jahrhundert hat Selberg die Entwicklung der Zahlentheorie maßgeblich beeinflußt und mit seinen Resultaten bereichert. Dieses Wirken wurde mit zahlreichen Auszeichnungen gewürdigt, u. a. 1950 mit der  $\mathcal{N}$ Fields-Medaille.

**Selbergsche Siebmethode**, die im folgenden beschriebene, 1947 von Selberg publizierte „elementare Methode in der Theorie der Primzahlen“.

Seien eine Menge  $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{Z}$ , eine Menge  $\mathcal{P}$  von Primzahlen, und eine natürliche Zahl  $x$  gegeben, und bezeichne  $S(\mathcal{A}; \mathcal{P}, x)$  die Anzahl derjenigen Elemente von  $\mathcal{A}$ , die durch keine der Primzahlen aus  $\{p \in \mathcal{P} : p < x\}$  teilbar sind. Bezeichne weiter

$$P(x) = \prod_{p \in \mathcal{P}, p < x} p$$

und  $\lambda_1 = 1$ , und seien  $\lambda_d$  für  $d \geq 2$  beliebige reelle Zahlen. Dann gilt die Ungleichung

$$S(\mathcal{A}; \mathcal{P}, x) \leq \sum_{j=1}^n \left( \sum_{d | \gcd(a_j, P(x))} \lambda_d \right)^2.$$

Selbergs Idee besteht nun darin,  $\lambda_d = 0$  für  $d \geq x$  zu setzen, und die rechte Seite der Ungleichung

durch eine geeignete Wahl von  $\lambda_2, \dots, \lambda_{g-1}$  möglichst klein zu machen.

Die Selbergsche Siebmethode ist, zusammen mit ihren Weiterentwicklungen, ein wichtiger Bestandteil der Methoden zur Untersuchung von Fragen zur  $\mathcal{A}$ Primzahlverteilung.

**selbst validierendes Verfahren**,  $\mathcal{A}$ E-Methode.

**selbstadjungierte Differentialgleichung**, Differentialgleichung mit selbstadjungiertem Differentialausdruck.

Ein Differentialausdruck  $L(y)$  heißt selbstadjungiert, wenn  $L^*(y) = L(y)$  ist, anti-selbstadjungiert, wenn  $L^*(y) = -L(y)$  ist, mit dem adjungierten Differentialausdruck  $L^*$  ( $\mathcal{A}$ adjungierte Differentialgleichung)

Ein  $\mathcal{A}$ Randwertproblem mit dem Differentialausdruck  $L$  heißt selbstadjungiert, wenn es mit seinem adjungierten Problem im folgenden Sinne übereinstimmt:

1.  $L$  ist selbstadjungiert.
2. Die Randbedingungen sind selbstadjungiert, d. h., für je zwei beliebige Vergleichsfunktionen  $u$  und  $v$  gilt  $\int_a^b (vL(u) - uL(v)) dx = 0$ .

Ein Beispiel hierfür ist das  $\mathcal{A}$ Sturm-Liouvillesche Randwertproblem.  $\mathcal{A}$ Eigenwertprobleme sind selbstadjungiert, wenn sie, aufgefaßt als Randwertprobleme, selbstadjungiert sind. Das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen  $y' = P(x)y$  heißt selbstadjungiert, falls  $P$  eine  $\mathcal{A}$ schiefsymmetrische Matrix ist.

[1] Kamke, E.: Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen I. B. G. Teubner Stuttgart, 1977.

**selbstadjungierte Matrix**, eine  $\mathcal{A}$ quadratische Matrix  $A$  über  $\mathbb{K}$ , die mit ihrer  $\mathcal{A}$ adjungierten Matrix  $A^*$  übereinstimmt:  $A^* = A$ .

Eine selbstadjungierte Matrix dient zur Darstellung eines  $\mathcal{A}$ selbstadjungierten Endomorphismus'.

**selbstadjungierter Endomorphismus**, ein  $\mathcal{A}$ Endomorphismus  $f : V \rightarrow V$  auf einem euklidischen oder unitären Vektorraum, zu dem der adjungierte Endomorphismus ( $\mathcal{A}$ adjungierte Matrix)  $f^*$  existiert und gleich  $f$  ist:  $f = f^*$ .

Ein Endomorphismus auf einem endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraum  $V$  ist genau dann selbstadjungiert, wenn er bzgl. einer Orthonormalbasis von  $V$  durch eine symmetrische Matrix repräsentiert wird.

Zu jedem selbstadjungierten Endomorphismus  $f$  auf einem endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraum  $V$  gibt es eine  $\mathcal{A}$ Orthonormalbasis von  $V$  aus Eigenvektoren von  $f$ , insbesondere ist  $f$  diagonalisierbar. Umgekehrt ist ein Endomorphismus  $f$  auf einem endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraum  $V$ , zu dem eine Orthonormalbasis von  $V$  aus Eigenvektoren von  $f$  existiert, stets selbstadjungiert.

**Selbstaffinität**, eine der häufigsten Eigenschaften von  $\mathcal{A}$ Fraktalen.

Es seien  $X$  ein  $\mathcal{A}$ Banachraum und  $S_1, \dots, S_k : X \rightarrow X$  eine Auswahl affiner Kontraktionen so, daß

$$\|S_i(x) - S_i(y)\| \leq c_i \|x - y\|$$

mit  $0 < c_i < 1$  für alle  $i \in \{1, \dots, k\}$  und  $x, y \in X$  gilt.

Eine nichtleere kompakte Teilmenge  $F \subset X$ , für die

$$F = \bigcup_{i=1}^k S_i(F)$$

gilt, heißt selbstaffine Menge.

**Selbstähnlichkeit**, grundlegende Eigenschaft von  $\mathcal{A}$ Fraktalen.

Es seien  $X$  ein  $\mathcal{A}$ Banachraum und  $S_1, \dots, S_k : X \rightarrow X$  eine Auswahl kontrahierender  $\mathcal{A}$ Ähnlichkeitsabbildungen mit  $0 < c_i < 1$ , also

$$\|S_i(x) - S_i(y)\| = c_i \|x - y\|$$

für  $x, y \in X$ ,  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Eine nichtleere kompakte Teilmenge  $F \subset X$ , für die  $F = \bigcup_{i=1}^k S_i(F)$  gilt, heißt (streng) selbstähnliche Menge.

**Selbstähnlichkeitsdimension**, Beispiel einer  $\mathcal{A}$ fraktalen Dimension selbstähnlicher Mengen ( $\mathcal{A}$ Selbstähnlichkeit).

Es sei  $X$  ein  $\mathcal{A}$ Banachraum und  $F \subset X$  eine nichtleere kompakte (streng) selbstähnliche Menge bzgl. einer geeigneten Auswahl kontrahierender Ähnlichkeitsabbildungen  $S_1, \dots, S_k$ . Wenn eine nichtleere beschränkte offene Menge  $V$  existiert mit

$$V \supset \bigcup_{i=1}^k S_i(V),$$

wobei die  $S_i(V)$  paarweise disjunkt sind, dann heißt  $s \in \mathbb{R}$  mit  $\sum_{i=1}^k c_i^s = 1$  Ähnlichkeitsdimension von  $F$ . Es gilt:

*Mit den Voraussetzungen von oben und der Ähnlichkeitsdimension  $s$  von  $F$  gilt*

$$\dim_H F = \dim_{\text{Kap}} F = s$$

( $\mathcal{A}$ Hausdorff-Dimension,  $\mathcal{A}$ Kapazitätsdimension). Außerdem gilt für diesen Wert von  $s$  und das  $\mathcal{A}$ Hausdorff-Maß  $\mu_s^H$ :

$$0 < \mu_s^H(F) < \infty.$$

[1] Falconer, K.J.: Fraktale Geometrie: Mathematische Grundlagen und Anwendungen. Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg, 1993.

**selbstanordnende Liste**, verkettete Liste, die sich nach jedem Zugriff selbst neu organisiert.

Beim Zugriff auf verkettete Listen kann es je nach Anwendung vorkommen, daß ein einmal gefundener Schlüssel im Lauf der nächsten Zeit noch mehrfach benötigt wird, und man deshalb die Liste noch häufiger nach ihm durchsuchen wird. Es ist daher sinnvoll, das im letzten Zugriff gefundene Element an den Kopf der Liste zu stellen und somit die Liste bei jedem Zugriff umzustellen, um beim nächsten Zugriff auf diesen Schlüssel die Zugriffszeiten zu reduzieren. Das Durchsuchen einer Liste nach diesem Verfahren heißt Durchsuchen einer selbstorganisierenden Liste oder auch Durchsuchen einer selbstanordnenden Liste.

Ein typisches Beispiel für eine selbstanordnende Liste ist die Tabelle der Symbole in Compilern für Programmiersprachen.

**Selbstanwendbarkeitsproblem**,  $\nearrow$  Halteproblem.

**Selbstbehalt**, *Franchise*, Größe aus der Versicherungsmathematik, über die der Grad einer  $\nearrow$  Risikoteilung parametrisiert wird.

Der Selbstbehalt spielt sowohl im Verhältnis zwischen Versicherungsnehmer und Versicherer als auch in der  $\nearrow$  Rückversicherung eine Rolle. Durch einen Selbstbehalt lassen sich die Versicherungsprämien respektive das versicherungstechnische Risiko beim Erstversicherer reduzieren.

Grundidee der nichtproportionalen Risikoteilung ist es, den Schadenprozeß, charakterisiert durch eine Zufallsgröße  $S$ , in zwei Risikoprozesse  $S_E$  und  $S_R$  aufzuteilen. Dabei trägt der eine Vertragspartner (der Versicherungsnehmer bzw. der Erstversicherer) das Risiko unterhalb des Selbstbetrags  $\alpha$ , d.h.  $S_E = \min(S, \alpha)$ . Das verbleibende Risiko  $S_R = S - S_E$  liegt beim Versicherungsunternehmen respektive dem Rückversicherer. Eine Berechnung des Erwartungswerts  $E(S_E)$  sowie der höheren Momente der Verteilung des Risikos  $S_E$  unter Berücksichtigung des Selbstbetrags ist auf der Grundlage der Verteilung des ungeteilten Risikos  $S$  möglich. Daraus läßt sich die Prämie für einen Tarif mit Selbstbehalt respektive die Rückversicherungsprämie ableiten.

**Selbstbeschränkung**,  $\nearrow$  Selbstkonkordanz.

**Selbstenergie**, aus der Selbstwechselwirkung eines Teilchens stammende Energie  $E_0$ .

Beispiel: Wenn das Elektron als homogene kugelförmige elektrische Ladungsverteilung mit Radius  $r_0$  angesehen wird, dann ist die durch die Wechselwirkung der Ladung mit dem von dieser Ladung erzeugten elektrischen Feld bestimmte Energie  $E_0$  gegeben durch

$$E_0 = 3e^2/20\pi\epsilon_0 r_0.$$

Dabei ist  $e$  die elektrische Elementarladung und  $\epsilon_0$  die Dielektrizitätskonstante. Im Grenzwert  $r_0 \rightarrow 0$  gilt  $E_0 \rightarrow \infty$ ; diese unendlich große Selbstener-

gie eines Punktteilchens kann durch Renormierung beseitigt werden.

**selbstkomplementärer Graph**, *selbstkomplementierter Graph*, ein endlicher einfacher Graph  $G$ , falls  $G \cong G^c$ , wobei  $G^c$  der komplementäre Graph von  $G$  ist.

Siehe hierzu auch  $\nearrow$  Graphenhomomorphismus.

**selbstkomplementierter Graph**,  $\nearrow$  selbstkomplementärer Graph.

**selbstkonjugierte Partition**, eine Partition  $\alpha$ , die gleich ihrer konjugierten Partition  $\alpha^+$  ist.

**Selbstkonkordanz**, zusammen mit der Selbstbeschränkung eine zentrale Eigenschaft von  $\nearrow$  Barrierefunktionen, die ihre Verwendbarkeit bei  $\nearrow$  Innere-Punkte Methoden sicherstellt.

Im wesentlichen geht es dabei um die Frage, inwieweit sich diese Verfahren auf allgemeinere konvexe Optimierungsprobleme als die lineare Programmierung ausdehnen lassen.

Wir betrachten das Minimierungsproblem

$$c^T \cdot x \rightarrow \min$$

auf einer Menge  $x \in S \subset \mathbb{R}^n$ , die kompakt und konvex sei. Zudem nehmen wir an, daß das Innere  $S^0$  von  $S$  nicht leer sei. Man beachte, daß sich auf diese Art auch nichtlineare konvexe Zielfunktionen  $f(x) \rightarrow \min$  behandeln lassen: Zunächst führe man eine zusätzliche Variable  $x_{n+1}$  ein; fügt man jetzt die Nebenbedingung  $f(x) \leq x_{n+1}$  hinzu, und tauscht die Zielfunktion  $f$  gegen die neue lineare Zielfunktion  $x_{n+1}$  aus, so hat das Problem  $x_{n+1} \rightarrow \min$  unter  $x \in S$ ,  $f(x) \leq x_{n+1}$  die gewünschte Form, und seine Lösungen sind genau diejenigen des Ausgangsproblems.

Der Spezialfall

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n | a_i^T \cdot x - b_i \leq 0, 1 \leq i \leq m\}$$

liefert die lineare Programmierung. Hier spielt die logarithmische Barrierefunktion

$$\Phi(x) := - \sum_{i=1}^m \ln(b_i - a_i^T \cdot x)$$

eine fundamentale Rolle bei der Anwendung Innerer-Punkte Methoden. Es stellt sich dabei heraus, daß lediglich drei Eigenschaften von  $\Phi$  für das Gelingen eines derartigen Verfahrens notwendig sind:

- i) die Eigenschaft, eine Barrierefunktion zu sein;
- ii) die sogenannte Selbstkonkordanz:  $\Phi$  ist eine konvexe  $C^3$ -Funktion auf  $S^0$  und erfüllt dort die Differentialgleichung

$$|D^3 \Phi(x)(h, h, h)| \leq 2 \cdot \left( D^2 \Phi(x)(h, h) \right)^{\frac{3}{2}}$$

für alle  $h \in \mathbb{R}^n$ ;



iii) die sogenannte Selbstbeschränkung:  $\Phi$  ist Lipschitz-stetig bezüglich der lokalen Metrik, die von seiner zweiten Ableitung erzeugt wird, d. h.,  $\forall x \in S^0, h \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$|D\Phi(x)h| \leq \sqrt{\vartheta} \cdot \left( D^2\Phi(x)(h, h) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Hierbei ist  $\vartheta \geq 1$  eine von  $\Phi$  abhängige Konstante (der Parameter der Barrierefunktion).

Selbstkonkordanz garantiert im wesentlichen schnelle lokale Konvergenz des  $\nearrow$ Newtonverfahrens für die Nullstellensuche von  $D\Phi$ : Das geforderte Verhältnis von  $D^3\Phi$  zu  $D^2\Phi$  drückt aus, daß die bei einer Linearisierung durchgeführte Approximation von  $D^2\Phi(x)$  durch  $D^2\Phi(x^k)$  ( $x^k$  ein Iterationspunkt) relativ gut ist. Man beachte, daß der geforderte Faktor 2 beliebig ist und durch jedes  $\alpha > 0$  ersetzt werden kann. Man betrachtet häufig  $\alpha = 2$ , da sich diese Wahl für die Barrierefunktion  $-\ln(t)$  ergibt.

Die Selbstbeschränkung bewirkt, daß die obige lokale Konvergenz in einem genügend großen Einzugsbereich vorliegt. Zusammenfassend gilt dann:

*Sei  $\Phi$  eine selbstkonkordante und selbstbeschränkte Barrierefunktion auf  $S$ , und sei  $x_0 \in S^0$  ein Startpunkt.*

*Dann läßt sich ausgehend von  $x_0$  eine Innere-Punkte Methode ausführen, die zu vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  in Polynomzeit (Turingmodell) einen Punkt  $x_\varepsilon$  erzeugt, der*

$$c^T \cdot x_\varepsilon - \min_{x \in S} c^T \cdot x \leq \varepsilon$$

erfüllt.

[1] Nemirovskii, A.S.; Nesterov, Y.: Interior-point polynomial algorithms in convex programming. SIAM Publications, Philadelphia, 1994.

**selbstorganisierende Karte, SOM**, (engl. self-organizing map), **Kohonen-Abbildung**, bezeichnet eine spezielle Abbildung, die in Zusammenhang mit der  $\nearrow$ Kohonen-Lernregel auftritt, bzw. im engeren Sinne die topologische Visualisierung dieser Abbildung.

Im folgenden wird das Prinzip einer selbstorganisierenden Karte an einem einfachen Beispiel (discrete Variante) erläutert: Aus einer abgeschlossenen konvexen nichtleeren Teilmenge  $A \subset \mathbb{R}^n$  werden gemäß einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeitsverteilung zufällig Vektoren  $x \in A$  ausgewählt, die in insgesamt  $j$  Cluster eingeordnet werden sollen. Dazu werden zunächst ebenfalls zufällig sogenannte Klassifikationsvektoren  $w^{(i)} \in A$ ,  $1 \leq i \leq j$ , generiert, die die einzelnen Cluster repräsentieren sollen und aus diesem Grunde auch kurz als Cluster-Vektoren bezeichnet werden. Die Justierung der Cluster-Vektoren in Abhängigkeit von den zu klassifizierenden Vektoren geschieht nun im einfachsten Fall wie folgt, wobei  $\lambda \in (0, 1)$  ein

noch frei zu wählender Lernparameter ist: Im  $s$ -ten Schritt zur Klassifikation des  $s$ -ten zufällig gewählten Vektors  $x \in A$  berechne jeweils ein Maß für die Entfernung von  $x$  zu allen Cluster-Vektoren  $w^{(i)}$ ,  $1 \leq i \leq j$  (z. B. über den Winkel, den euklidischen Abstand, o.ä.). Schlage  $x$  demjenigen Cluster zu, dessen Cluster-Vektor die geringste Entfernung von  $x$  hat. Falls mehrere Cluster-Vektoren diese Eigenschaft besitzen, nehme das Cluster mit dem kleinsten Index. Falls der so fixierte Cluster-Vektor den Index  $i$  hat, ersetze ihn durch  $w^{(i)} + \lambda(x - w^{(i)})$ , d. h. durch eine Konvexkombination des alten Cluster-Vektors mit dem neu klassifizierten Vektor; alle übrigen Cluster-Vektoren bleiben unverändert.

Iteriere dieses Vorgehen mehrmals, erniedrige  $\lambda$  Schritt für Schritt und breche den Algorithmus ab, wenn z. B. eine gewisse Anzahl von Iterationsschritten durchlaufen worden sind. Die Abbildung  $K : A \rightarrow A$ , die nun nach Beendigung des Klassifizierungsprozesses jedem Vektor  $x \in A$  seinen im obigen Sinne eindeutig bestimmten Cluster-Vektor  $w^{(i)}$ ,  $i \in \{1, \dots, j\}$ , zuordnet (gemäß kleinste Entfernung und ggfs. zusätzlich kleinster Index), wird Kohonen-Abbildung (oder auch (Kohonen-)Karte) genannt. Ferner wird der Prozeß ihrer Entstehung im Sinne des oben beschriebenen algorithmischen Vorgehens häufig als selbstorganisierende Karte bezeichnet, wobei allerdings in der einschlägigen Literatur die Übergänge zwischen den Begriffen Kohonen-Lernregel, (selbstorganisierende) (Kohonen-)Karte und Kohonen-Abbildung vielfach fließend sind.

Siehe auch  $\nearrow$ Clusteranalyse und  $\nearrow$ Kohonen-Lernregel.

**Selektion**, nach Darwin einer der Mechanismen der Evolution (s.a.  $\nearrow$ Drift).

Entsprechend wichtig sind Selektionsmodelle in der Populationsgenetik. Schon die einfachsten Fälle zeigen, daß nicht Typen optimal sind, sondern Verteilungen von Typen. In der Ökologie unterscheidet man r-Selektion (hohe Nachkommenzahlen) von K-Selektion (geringe Mortalität).

**Selektion der Variablen**,  $\nearrow$ Wahl wesentlicher Einflußgrößen.

**Selmanow, Efim**,  $\nearrow$ Zelmanow, Efim.

**seltsamer Attraktor** (engl. strange attractor), ein  $\nearrow$ Attraktor eines  $\nearrow$ dynamischen Systems, der eine „seltsame“, komplizierte Struktur zeigt.

Es gibt keine scharf umrissene eigentliche Definition eines seltsamen Attraktors. Die Bezeichnung geht auf den  $\nearrow$ Lorentz-Attraktor zurück, bei dem erstmal ein derartiger Effekt untersucht wurde.

Siehe auch  $\nearrow$ Hénon-Abbildung und  $\nearrow$ Rössler-Attraktor.

**semantisch widerspruchsfreies logisches System**, System  $\Sigma$  von  $\nearrow$ logischen Axiomen, aus dem sich mit Hilfe der Folgerungsrelation  $\models$  ( $\nearrow$ semantische

Folgerung) kein Widerspruch erzeugen läßt, d. h., es gibt keinen Ausdruck  $\varphi$  so, daß  $\varphi \wedge \neg\varphi$  aus  $\Sigma$  folgt.

**semantische Folgerung**, eine  $\mathcal{A}$ -Aussage, die aus einer Menge von gegebenen Aussagen (Voraussetzungen) inhaltlich folgt.

Ist z. B.  $L$  eine elementare Sprache,  $T$  eine Menge von Aussagen aus  $L$  ( $T$  wird auch elementare Theorie genannt und dient als Menge von Voraussetzungen), und ist  $\varphi$  eine in  $L$  formulierte Aussage, dann *folgt*  $\varphi$  aus der Theorie  $T$  (symbolisch:  $T \models \varphi$ ), wenn jedes  $\mathcal{A}$ -Modell von  $T$  auch ein Modell von  $\varphi$  ist.

**semialgebraische Menge**, endliche Vereinigung von Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  von der Form

$$\begin{aligned} S(f_1, \dots, f_p; g_1, \dots, g_q) \\ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_1(x) = \dots = f_p(x) = 0, \\ g_1(x) < 0, \dots, g_q(x) < 0\} \end{aligned}$$

mit Polynomen  $f_1, \dots, f_p$  und  $g_1, \dots, g_q$  aus  $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ .

**Semibilinearform**,  $\mathcal{A}$ -Sesquilinearform.

**semidefinit**,  $\mathcal{A}$ -positiv definite Matrix.

**semidefinite Optimierung**, spezielle Klasse von Optimierungsproblemen.

Für  $m, n \in \mathbb{N}$  seien  $B, A_1, \dots, A_n$  symmetrische  $(m, m)$ -Matrizen. Die Menge

$$S := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i \cdot A_i - B \text{ ist negativ semidefinit} \right\}$$

wird ein Spektahedron genannt. Das Problem der semidefiniten Optimierung (*SDP*) besteht in der Minimierung eines linearen Funktionals über  $S$ , also, mit  $c \in \mathbb{R}^n$ :

$$(SDP) : \text{minimiere } c^T \cdot x, \quad x \in S.$$

Viele interessante Optimierungsprobleme, z. B. multi-quadratische Optimierungsprobleme und Eigenwertaufgaben, können in ein (*SDP*) umformuliert werden.

[1] Boyd, S.; Vandenberghe, L.: Semidefinite programming. SIAM Review 38, 1996.

**semi-entscheidbar**, Eigenschaft von Mengen.

Eine Menge  $A$  ist semi-entscheidbar, wenn sie Definitionsbereich einer berechenbaren Funktion ist. Das bedeutet, daß es einen Algorithmus gibt, der genau auf den Eingaben aus  $A$  stoppt. Es gilt der folgende Satz:

*Eine Menge ist genau dann semi-entscheidbar, wenn sie  $\mathcal{A}$ -rekursiv aufzählbar ist.*

**semi-infinite Optimierung**, beschäftigt sich mit Optimierungsproblemen, in denen unendlich viele Ungleichungsrestriktionen auftreten.

Ein typisches Beispiel ist das folgende Problem (*SIP*), definiert durch stetige Funktionen:

(*SIP*) minimiere  $f(x)$ ,  $x \in M$ , wobei  $M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid G(x, y) \geq 0, y \in Y\}$ . Die Menge  $Y$  ist dabei eine nicht-leere kompakte Teilmenge des  $\mathbb{R}^m$  und wird folgendermaßen definiert:

$$Y := \{y \in \mathbb{R}^m \mid g_j(y) \geq 0, j \in J\}, \quad |J| < \infty.$$

Aufgaben beispielsweise vom Typ einer Tschebyschew-Approximation lassen sich in ein semi-infinity Optimierungsproblem umformulieren und gehören somit zu den Standardbeispielen dieser Klasse von Optimierungsproblemen.

Grundlegend ist der sogenannte Reduktionsansatz, mit dem man (*SIP*) lokal in ein Optimierungsproblem mit nur endlich vielen Ungleichungsrestriktionen überführen kann. Der Reduktionsansatz kann bei numerischen Verfahren (vom Newton-Typ) erfolgreich eingesetzt werden und beruht auf der folgenden einfachen Beobachtung:

Für  $\bar{x} \in M$  ist jedes  $\bar{y} \in Y_0(\bar{x})$  eine globale Minimalstelle für die Funktion  $G(\bar{x}, \bullet)|_Y$ , wobei

$$Y_0(\bar{x}) = \{y \in Y \mid G(\bar{x}, y) = 0\}$$

die aktive Indexmenge bezeichnet. Die definierenden Funktionen seien aus der Klasse  $C^2$ . Falls alle Punkte aus  $Y_0(\bar{x})$  nicht-entartete Minimalstellen von  $G(\bar{x}, \bullet)|_Y$  sind, so ist  $Y_0(\bar{x})$  eine endliche Menge, etwa  $Y_0(\bar{x}) = \{\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_r\}$ .

Vermöge des Satzes über impliziten Funktionen gibt es dann lokal (implizite)  $C^1$ -Funktionen  $y_1(x), \dots, y_r(x)$ , wobei jedes  $y_i(x)$  eine lokale Minimalstelle von  $G(x, \bullet)|_Y$  ist. Somit wird die zulässige Menge  $M$  in einer Umgebung von  $\bar{x}$  durch die endlich vielen  $C^2$ -Ungleichungsrestriktionen  $G(x, y_i(x)) \geq 0, i = 1, 2, \dots, r$  beschrieben (lokale Reduktion).

**Semiinvariante**,  $\mathcal{A}$ -Kumulante.

**semiklassischer Limes**, Näherungsverfahren für die Lösung insbesondere von Gleichungen der Quantenmechanik in Form von Potenzreihen im  $\mathcal{A}$ -Planckschen Wirkungsquantum  $\hbar$  oder einer asymptotischen Lösung für  $\hbar \rightarrow 0$  derart, daß der führende Term durch die klassische Mechanik bestimmt wird ( $\mathcal{A}$ -Wentzel-Kramers-Brillouin-Jeffreys-Methode).

**semikubische Parabel**,  $\mathcal{A}$ -Neilsche Parabel.

**semilineare Abbildung**, Abbildung  $\varphi : V \rightarrow W$  zwischen zwei  $\mathcal{A}$ -Vektorräumen  $V$  und  $W$  über  $\mathbb{C}$  für die für alle  $v_1, v_2, v \in V$  und alle  $\alpha \in \mathbb{C}$  gilt:

$$\begin{aligned} \varphi(v_1 + v_2) &= \varphi(v_1) + \varphi(v_2); \\ \varphi(\alpha v) &= \bar{\alpha} \varphi(v). \end{aligned}$$

( $\bar{\alpha}$  bezeichnet die konjugiert komplexe Zahl zu  $\alpha$ .) Statt semilinear sagt man auch antilinear.

Allgemeiner spricht man von einer  $(\lambda)$ -semilinearen Abbildung  $\varphi : V \rightarrow W$  zwischen zwei Vek-

Lexikon der Mathematik: Band 5

Sed bis Zyl

Walz, G. (Hrsg.)

2017, VII, 483 S. 29 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-662-53505-9