

Vorwort

Die Kategorientheorie ist ein zentraler Bestandteil der modernen Mathematik. Dies gilt zum einen für ihre vereinheitlichende konzeptionelle Begriffssprache und zum anderen für ihre allgemeinen Resultate, die sich in vielen konkreten Situationen gewinnbringend anwenden lassen. Die Kategorientheorie verbindet scheinbar isolierte Themen miteinander und abstrahiert spezifische Methoden, um sie übergreifend anzuwenden. Die Bedeutung der Kategorientheorie nimmt seit ihrer Entdeckung in den 1940er-Jahren immer weiter zu.

Und doch scheint es einen nicht zu unterschätzenden Teil von Mathematikern und damit Studierenden zu geben, die der Kategorientheorie in einem Spektrum von unwissend bis hin zu ablehnend gegenüberstehen. Dies hat Konsequenzen für Forschung und Lehre, wo sich wiederum die Gründe finden. Davon abgesehen, dass es vergleichsweise nur selten Vorlesungen zur Kategorientheorie selbst gibt, machen viele Veranstaltungen bewusst einen Bogen um die Kategorientheorie, selbst wenn sie für das Verständnis des jeweiligen Themas nützlich oder sogar wesentlich ist. Das liegt mitunter daran, dass Kategorientheorie den Ruf hat, furchtbar abstrakt und schwierig zu sein. Nach meiner langen Erfahrung als Übungsleiter und als Ratgeber in Mathematikforen denke ich, dass diese Praxis den Studierenden nicht weiterhilft, sondern sie eher mit unnötigen Rechnungen und Wiederholungen vom Wesentlichen ablenkt. Außerdem kann Kategorientheorie sowohl anschaulich als auch praktisch sein.

Ein typisches Beispiel war die Aufgabe in einer Übungsgruppe, dass eine zweifache Lokalisierung eines Ringes zu einer einfachen Lokalisierung isomorph ist; bei einer Lokalisierung fügt man formal Brüche hinzu. Die Studierenden haben dies mit der expliziten Konstruktion und daher mit Doppelbrüchen aufwendig nachgerechnet. Hätte man die universelle Eigenschaft der Lokalisierung genutzt, wäre man in zwei Zeilen ohne Rechnung fertig gewesen und könnte obendrein den eigentlichen Grund für die Isomorphie in einfache Worte fassen.

Die universelle Eigenschaft eines Objektes sollte wohl nicht nur als eine Eigenschaft unter vielen, sondern als eine definierende Charakterisierung verstanden und entsprechend gelehrt werden und zwar bereits bei Objekten mit einer bekannten Elementstruktur wie etwa der Lokalisierung oder der Quotientengruppe, nicht erst etwa beim Tensorprodukt von Vektorräumen bzw. Moduln. Im Zusammenhang mit Quotientengruppen und ähnlichen Quotientenstrukturen stiften Restklassen offenbar mehr Verwirrung als Klarheit, wohingegen der Homomorphiesatz über Quotientengruppen von großem Nutzen ist. Die Lösung vieler, teils unbewusster Verwirrungen besteht wohl darin, mathematische Objekte nicht mit ihren zugrunde liegenden Mengen und deren Elementen zu verwechseln. Und genau hier kommt kategorielles Denken ins Spiel.

Die Mathematik ist mittlerweile so sehr von kategorientheoretischen Konzepten durchdrungen, dass es meiner Meinung nach sehr wichtig und vor allem auch praktisch ist, diese Konzepte bereits früh zu vermitteln, ohne dabei viele Vorkenntnisse vorauszusetzen. Das vorliegende Buch möchte einen Beitrag dazu leisten. Dazu werden die Grundbegriffe der Kategorientheorie ausführlich und anhand von vielen Beispielen erklärt. Viele dieser Beispiele und Erklärungen haben vor allem deshalb ihren Weg in dieses Buch gefunden, weil sie mir schon einmal bei der Lösung eines mathematischen Problems weitergeholfen oder sie mich von der Kraft und der Schönheit der Kategorientheorie überzeugt haben. Ich hoffe, dass es mir gelungen ist, ein wenig mit dem Vorurteil aufzuräumen, dass die Kategorientheorie „abstrakter Unsinn“ und schwierig zu lernen sei.

Auf drei Merkmale dieses Buches möchte ich kurz eingehen: Erstens ist es im Gegensatz zu den meisten Lehrbüchern zum Thema in deutscher Sprache geschrieben, was womöglich einigen Lesern beim Einstieg helfen kann. (In diesem Buch werden nur die maskulinen Formen „Leser“ und „Lesern“ verwendet, womit selbstverständlich Personen jeglichen Geschlechts gemeint sind.) Zweitens habe ich möglichst jeden Einsatz von Vergissfunktoren, d.h. von Prozessen, die einen Teil einer mathematischen Struktur vergessen, sprachlich deutlich gekennzeichnet. Das ist ungewohnt und mag auf den ersten Blick umständlich wirken, hat aber den sehr angenehmen Effekt, dass jedes mathematische Objekt einer festen Kategorie angehört; dies entspricht dem Grundgedanken der Typentheorie. Außerdem wird damit die Sprache einheitlich und präzise, womit Verwirrungen vermieden werden. Drittens habe ich die übliche Definition eines (Ko-)Limes dahingehend abgeändert, dass die Form eines Diagramms keine Kategorie, sondern ein gerichteter Graph ist. Diese Wahl scheint mir recht natürlich zu sein; zugleich sind die beiden Limesbegriffe äquivalent.

Aufgrund des begrenzten Umfangs mussten natürlich einige wichtige Themen weggelassen werden. Dies betrifft zum Beispiel Monaden und abelsche Kategorien. Außerdem geht die Theorie nicht besonders tief. Das Buch erhebt keinerlei Anspruch auf die Vollständigkeit der dargestellten Theorie, kann aber einerseits als Einstieg in die weiterführende Literatur dienen und soll andererseits auf den Einsatz von Kategorientheorie in verschiedensten Gebieten der Mathematik vorbereiten.

Dieses Buch ist nicht zuletzt eine Symbiose vorangegangener Projekte. Ich habe in den letzten Jahren auf dem Mathematikportal matheplanet.de einige Artikel zur Kategorientheorie veröffentlicht, um dieses wunderschöne Gebiet vielen Lesern möglichst einfach näherzubringen. Vor einigen Jahren habe ich außerdem eine Arbeit zur kategoriellen Algebra begonnen, welche u.a. die kategorielle Konstruktion von freien algebraischen Strukturen zum Inhalt hatte. An der Universität Münster habe ich zwei Vorlesungen zur Kategorientheorie betreut, in deren Rahmen ich mir konkrete Aufgaben und weitere didaktische Elemente überlegt habe. Und schließlich haben monoidale Kategorien in meiner Dissertation, die ich letztes Jahr unter der Betreuung von Professor Dr. Christopher Deninger abgeschlossen habe, eine zentrale Rolle gespielt. Es ist

mir daher eine Freude gewesen, eine Einführung in die Kategorientheorie zu schreiben.

Dieses Buch wäre ohne den Einsatz von vielen Leuten in der vorliegenden Form nicht möglich gewesen. Zunächst einmal möchte ich meinem Lektor Dr. Andreas Rüdinger vom Springer-Verlag einen großen Dank für das Angebot und die motivierende Betreuung dieses Buchprojektes aussprechen. In langen Telefon- und E-Mail-Korrespondenzen hat er mir bei vielen konzeptionellen Fragestellungen weitergeholfen. Ich möchte mich außerdem bei Sabine Bartels vom Springer-Verlag für ihre kompetente Unterstützung bei der Gestaltung des Buches und bei Tatjana Strasser vom Springer-Verlag für ihre akribische Korrektur von Rechtschreibung, Grammatik und Stil bedanken. Peter Arndt, John Baez, Finn Lawler, Tom Leinster, Zhen Lin Low und Todd Trimble möchte ich stellvertretend für die vielen aufschlussreichen wie inspirierenden Beiträge zur Kategorientheorie auf mathoverflow.com danken. Ingo Blechschmidt hat mich auf die Typentheorie und das Augsburger Pizzaseminar zur Kategorientheorie aufmerksam gemacht hat; beides hat einen Einfluss auf dieses Buch gehabt. Ich bedanke mich herzlich bei meinen Korrekturlesern Oskar Braun, Erik Frieze, Dr. Johannes Hahn, Eva Höning, Jakob Werner und David Zabka, die mit ihren Anmerkungen einen beträchtlichen Teil zur Lesbarkeit, Korrektheit und Qualität des Textes beigetragen haben. Oskar Braun und Eva Höning habe ich außerdem einige hilfreiche Kommentare zur Konzeption dieses Buches zu verdanken. Schließlich möchte ich mich noch ganz herzlich bei Ferit Deniz bedanken, der in mir ursprünglich das Feuer der Kategorientheorie entfacht und mich dazu gebracht hat, den Klassiker der Kategorientheorie zu lesen, das Buch *Categories for the Working Mathematician* von Saunders Mac Lane, welches mich sehr inspiriert hat.

Und nun wünsche ich dem Leser viel Vergnügen mit diesem Buch!

Münster, 1. Mai 2015

Martin Brandenburg

Vorwort zur zweiten Auflage

In der zweiten Auflage wurden ausführliche Lösungen zu ausgewählten Aufgaben mit aufgenommen. Außerdem wurden viele Verbesserungen vorgenommen und einige Fehler korrigiert, die mir aufmerksame Leser zugeschickt haben, denen ich hiermit danken möchte. Fehlerhinweise zum Buch können gerne an [brandenburg\[at\]uni-muenster.de](mailto:brandenburg[at]uni-muenster.de) geschickt werden. Diese werden dann auf der Produktwebsite auf www.springer.com veröffentlicht. Ich möchte mich bei Dr. Andreas Rüdinger und Sabine Bartels vom Springer-Verlag für die Unterstützung und Beratung bei der Umsetzung der zweiten Auflage bedanken.

Münster, 6. September 2016

Martin Brandenburg

Einführung in die Kategorientheorie
Mit ausführlichen Erklärungen und zahlreichen
Beispielen

Brandenburg, M.

2017, X, 345 S. 19 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-662-53520-2