

2 Kategorien

2.1 Motivation

Die meisten mathematischen Theorien sind nach dem folgenden Schema aufgebaut: Man interessiert sich für eine Klasse von Objekten (typischerweise geometrischer oder algebraischer Natur), die man gerne klassifizieren möchte. Dabei bedeutet *Klassifikation*, dass man eine möglichst überschaubare Menge von unterschiedlichen Objekten findet, sodass jedes Objekt der Theorie im Wesentlichen mit einem Objekt aus dieser Menge übereinstimmt, d.h. also *strukturgleich*, man sagt auch *isomorph* ist. Man muss also zunächst einmal wissen, was ein *Isomorphismus* zwischen zwei Objekten ist. In der Regel ist das ein umkehrbarer *Homomorphismus*, eine *strukturhaltende* Abbildung.

Fangen wir mit einem einfachen Beispiel an, der Theorie der endlichen Mengen. Als Homomorphismen wählen wir sämtliche Mengenabbildungen, sodass also die Isomorphismen die invertierbaren, d.h. bijektiven Mengenabbildungen sind. Zwei endliche Mengen sind demnach genau dann isomorph, wenn sie dieselbe Anzahl von Elementen besitzen (man sagt auch *gleichmächtig*). Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es die Menge $\{1, \dots, n\}$ mit n Elementen, und diese endlichen Mengen decken bis auf Isomorphie alle endlichen Mengen ab. Insofern klassifiziert also $\{\{1, \dots, n\} : n \in \mathbb{N}\}$ die Theorie der endlichen Mengen. An dieser Stelle sei erwähnt, dass 0 eine natürliche Zahl ist, genau wie auch die leere Menge eine endliche Menge ist.

Ein etwas interessanteres Beispiel ist aus der linearen Algebra bekannt, die Theorie der endlich-dimensionalen K -Vektorräume; hierbei ist K ein fixierter Körper. Als Homomorphismen wählen wir die K -linearen Abbildungen. Jeder endlich-dimensionale K -Vektorraum besitzt eine Dimension $n \in \mathbb{N}$ und ist dann zu K^n isomorph. Die Theorie ist also durch $\{K^n : n \in \mathbb{N}\}$ klassifiziert.

Endliche Mengen und endlich-dimensionale Vektorräume sind ziemlich einfach zu überblicken. Interessant und spannend wird es aber erst, wenn man die Homomorphismen in Betracht zieht. Erst damit kommt Dynamik in die Theorie, und wir können die Objekte miteinander in Beziehung setzen. Zum Beispiel lassen sich Drehungen der Ebene als \mathbb{R} -lineare Abbildungen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ darstellen. Es ist also nicht nur interessant, *ob* zwei Objekte isomorph sind, sondern *auf welche Weise*.

Eine weitere Theorie ist die der topologischen Räume. Die Homomorphismen sind dabei die stetigen Abbildungen, und die Isomorphismen sind als *Homöomorphismen* bekannt. Sämtliche topologischen Räume lassen sich nicht klassifizieren. Das funktioniert lediglich für Klassen von besonders gutartigen Räumen, zum Beispiel kompakte zusammenhängende orientierbare topologische Mannig-

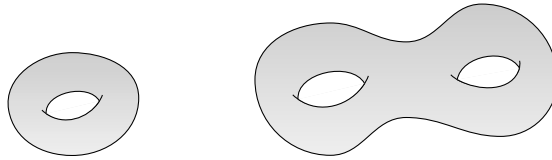


Abb. 2.1: Torus und zusammenhängende Summe von zwei Tori

faltigkeiten in niedriger Dimension: In Dimension 0 sind dies einfach Punkte, in Dimension 1 Kreise und in Dimension 2 zusammenhängende Summen von endlich vielen Tori (s. Abb. 2.1). Bei der Theorie der glatten Mannigfaltigkeiten ist es naheliegend, glatte Abbildungen zu betrachten. Die Isomorphismen heißen hier auch *Diffeomorphismen*.

Auch die Wahrscheinlichkeitstheorie lässt sich als eine solche Theorie auffassen: Die Objekte sind die Messräume, also Paare (Ω, \mathcal{A}) , bestehend aus einer Menge Ω und einer σ -Algebra \mathcal{A} auf Ω , und die Homomorphismen sind die messbaren Abbildungen. Reelle n -dimensionale Zufallsvariablen sind nichts weiter als Homomorphismen nach \mathbb{R}^n , versehen mit der Borel'schen σ -Algebra.

Spätestens hier wird deutlich, dass es gar nicht so sehr um eine Klassifikation aller Objekte geht, welche meistens ohnehin hoffnungslos ist, sondern um das Studium von interessanten Objekten, wobei diese mittels der Homomorphismen miteinander in Beziehung gesetzt werden.

In den genannten Beispielen sind Homomorphismen jeweils spezifisch definiert. Trotzdem können wir drei gemeinsame Merkmale herausarbeiten:

1. Für jedes Objekt X ist die Identitätsabbildung $\text{id}_X : X \rightarrow X$ ein Homomorphismus.
2. Wenn $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ Homomorphismen sind, so können wir diese zu einem Homomorphismus $g \circ f : X \rightarrow Z$ komponieren, d.h. verketteten.
3. Die Komposition von Homomorphismen ist assoziativ und besitzt die Identitäten als beidseitig neutrale Elemente.

Und damit haben wir im Prinzip bereits die Definition einer Kategorie erfasst! Das Besondere am Begriff der *Kategorie* ist, dass er all die genannten Beispiele und noch eine schier unglaubliche Anzahl von weiteren Beispielen einschließt. Zugleich ist dieser Begriff nicht zu allgemein, als dass man damit nichts anfangen könnte. Er ist eine Formalisierung des hier skizzierten Theoriebegriffes.

In der mathematischen Logik gibt es ebenfalls einen präzisen Theoriebegriff; dieser basiert darauf, dass die Objekte Mengen mit Zusatzstrukturen sind. Das ist bei den obigen Beispielen auch immer der Fall gewesen (zum Beispiel ist ein topologischer Raum eine Menge zusammen mit der Struktur einer Topologie), allerdings treten in der Mathematik auf natürliche Weise ebenfalls Objekte

auf, welche sich nicht wirklich als strukturierte Mengen darstellen lassen. Wir werden darauf noch zurückkommen.

2.2 Der Begriff der Kategorie

Bemerkung 2.2.1 (Mengen und Klassen). In der folgenden Definition einer Kategorie kommen Mengen und Klassen vor. Was genau *Mengen* sind bzw. wie man damit umgeht, wird zum Beispiel mithilfe des Axiomensystems ZFC von Zermelo und Fraenkel erklärt ([Kun80]). Aber für das Verständnis dieses Buches reicht ein naiver Mengenbegriff zunächst einmal aus.

Klassen sind geeignete Verallgemeinerungen von Mengen und werden etwa mithilfe des Axiomensystems NBG von von Neumann, Bernays und Gödel beschrieben ([Men97]). Nach der Cantor’schen Antinomie kann es etwa keine Menge aller Mengen geben, aber wir können die Mengen dennoch zu einer Klasse zusammenfassen. Ebenso kann man sämtliche Vektorräume zu einer Klasse zusammenfassen. Man kann sich Klassen mehr oder weniger als Mengen auf einer „höheren Stufe“ vorstellen und mit ihnen fast genauso arbeiten, wie man es mit Mengen gewohnt ist. Für zwei echte Klassen X, Y (die also keine Mengen sind) kann man allerdings die Funktionen $X \rightarrow Y$ nicht zu einer Klasse zusammenfassen. Für solche und weitere Belange sind *Universen* und das System TG von Tarski und Grothendieck besser geeignet ([Bou72]).

Wir müssen und werden hier nicht weiter auf die mengentheoretischen Details eingehen, die man ohne schlechtes Gewissen bei einem ersten Einstieg in die Kategorientheorie ignorieren darf (vielleicht sogar sollte!). Die interessierten Leser seien auf eine der Quellen [Bén85, FK69, ML98, Shu08] verwiesen.

Definition 2.2.2 (Kategorie). Eine *Kategorie* \mathcal{C} besteht aus den folgenden Daten:

1. einer Klasse $\text{Ob}(\mathcal{C})$, deren Elemente wir *Objekte* nennen,
2. zu je zwei Objekten $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ einer Menge $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, deren Elemente wir mit $f : A \rightarrow B$ notieren und *Morphismen* von A nach B nennen,
3. zu je drei Objekten $A, B, C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ einer Abbildung

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C),$$

die wir mit $(f, g) \mapsto g \circ f$ notieren und die *Komposition von Morphismen* nennen,

4. zu jedem Objekt $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ einen ausgezeichneten Morphismus

$$\text{id}_A \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A),$$

welchen wir die *Identität* von A nennen.

Diese Daten müssen den folgenden Regeln genügen:

1. Die Komposition von Morphismen ist *assoziativ*: Für drei Morphismen der Form $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$, $h : C \rightarrow D$ in \mathcal{C} gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

als Morphismen $A \rightarrow D$.

2. Die Identitäten sind *beidseitig neutral* bezüglich der Komposition: Für jeden Morphismus $f : A \rightarrow B$ in \mathcal{C} gilt

$$f \circ \text{id}_A = f = \text{id}_B \circ f.$$

Morphismen haben grob gesagt den Zweck, Beziehungen zwischen Objekten herzustellen. Wir stellen sie uns gerne als beschriftete Pfeile vor. Die Komposition sieht dann so aus:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \quad \rightsquigarrow \quad A \xrightarrow{g \circ f} C$$

Die historisch bedingte Reihenfolge der Komposition ist hier offenbar etwas unpassend. Die Konvention $f; g = g \circ f$ ist ebenfalls anzutreffen. Die Identität eines Objektes A können wir uns als eine Schleife vorstellen:

$$\begin{array}{c} \text{id}_A \\ \curvearrowright \\ A \end{array}$$

Bemerkung 2.2.3 (Eindeutigkeit der Identität). In einer Kategorie \mathcal{C} ist die Identität eines Objektes A bereits eindeutig durch die Eigenschaft bestimmt, neutral bezüglich der Komposition zu sein: Sind id_A und id'_A zwei Identitäten von A , so folgt $\text{id}_A = \text{id}_A \circ \text{id}'_A = \text{id}'_A$. Daher könnte man theoretisch auch die Identitäten aus den Daten einer Kategorie streichen und lediglich ihre Existenz als Eigenschaft der Komposition postulieren, ähnlich wie es im Falle von Gruppen üblich ist. Das ist allerdings unvorteilhaft, wie wir noch sehen werden.

Bemerkung 2.2.4 (Schreibweisen). Anstelle von $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ schreibt man meistens $A \in \mathcal{C}$. Falls die Kategorie \mathcal{C} aus dem Kontext heraus klar ist, kürzt man außerdem $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ mit $\text{Hom}(A, B)$ ab. Die Notationen $\text{Mor}(A, B)$ sowie $\mathcal{C}(A, B)$ sind in anderen Quellen ebenfalls anzutreffen. Wegen der Assoziativität der Komposition kann man Ausdrücke wie etwa $f \circ (g \circ h)$ problemlos mit $f \circ g \circ h$ abkürzen. Hin und wieder kürzt man id_A mit A ab. Die Elemente von $\text{End}_{\mathcal{C}}(A) := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ nennt man auch *Endomorphismen*.

Bemerkung 2.2.5 (Start und Ziel). Für einen Morphismus $f : A \rightarrow B$ einer Kategorie heißt A das *Startobjekt* (engl. *source*) und B das *Zielobjekt* (engl. *target*) des Morphismus f . Ob die Objekte A und B eindeutig durch f bestimmt

sind, ist für die Kategorientheorie irrelevant, weil sämtliche „sinnvollen“ Aussagen über Morphismen tatsächlich Tripel (A, B, f) betreffen. Es ergibt wenig Sinn, Morphismen $f : A \rightarrow B$ mit Morphismen $f' : A' \rightarrow B'$ zu vergleichen, wenn $A \neq A'$ oder $B \neq B'$ gilt, weil f und f' dann einen unterschiedlichen „Typ“ besitzen. Man sollte nur *parallele* Morphismen miteinander vergleichen, d.h. deren Start- und Zielobjekt übereinstimmen.

Bemerkung 2.2.6 (Lokal kleine Kategorien). Für zwei Objekte A, B einer Kategorie \mathcal{C} muss nach unserer Definition $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ eine *Menge* sein. Diese Bedingung wird in der Literatur nicht immer gefordert. Was wir hier definiert haben, nennt sich dann eine *lokal kleine Kategorie*. Wir beschränken uns in diesem Buch auf lokal kleine Kategorien, weil die meisten für die Praxis relevanten Kategorien lokal klein sind. Lediglich im Zusammenhang mit Funktorkategorien in Abschn. 3.5 werden sich dabei einige technische Einschränkungen ergeben. Der allgemeine Begriff einer Kategorie hat eigentlich nichts mit der Mengenlehre zu tun, vgl. [Bemerkung 3.6.18](#).

Wir füllen nun den verhältnismäßig abstrakten Begriff einer Kategorie durch eine Vielfalt an Beispielen mit Leben.

Beispiel 2.2.7 (Mengen). Die Kategorie der Mengen **Set** (engl. *set* = Menge) ist ein fundamentales Beispiel. Die Objekte sind die Mengen. Für zwei Mengen A, B sei $\text{Hom}_{\text{Set}}(A, B)$ die Menge aller Mengenabbildungen $f : A \rightarrow B$. Die Komposition von Morphismen \circ ist die übliche durch

$$(g \circ f)(a) := g(f(a))$$

definierte Verkettung von Mengenabbildungen. Die Identität $\text{id}_A : A \rightarrow A$ ist die übliche Identitätsabbildung $a \mapsto a$. Für Mengenabbildungen $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$, $h : C \rightarrow D$ besteht die Assoziativität $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, denn für alle $a \in A$ gilt

$$(h \circ (g \circ f))(a) = h((g \circ f)(a)) = h(g(f(a))) = (h \circ g)(f(a)) = ((h \circ g) \circ f)(a).$$

Für Mengenabbildungen $f : A \rightarrow B$ gilt $f \circ \text{id}_A = f = \text{id}_B \circ f$, denn für alle $a \in A$ gilt

$$(f \circ \text{id}_A)(a) = f(\text{id}_A(a)) = f(a) = \text{id}_B(f(a)) = (\text{id}_B \circ f)(a).$$

Daher ist **Set** tatsächlich eine Kategorie. In den nächsten Beispielen werden wir die Axiome einer Kategorie nicht mehr so genau nachprüfen, zumal sie sich zum Teil auf **Set** zurückführen lassen.

Beispiel 2.2.8 (Punktierte Mengen). Die Kategorie **Set**_{*} besitzt als Objekte die *punktierten Mengen*, d.h. Paare (X, x_0) , bestehend aus einer Menge X und einem ausgezeichneten Element $x_0 \in X$, welches man oft den Basispunkt nennt. Ein Morphismus $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ sei eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ mit $f(x_0) = y_0$. Komposition und Identität werden analog zu **Set** definiert.

Algebraische Strukturen bilden Kategorien:

Beispiel 2.2.9 (Gruppen). Die Kategorie **Grp** besitzt als Objekte die Gruppen und als Morphismen die Homomorphismen von Gruppen. Komposition und Identität werden analog zu **Set** definiert. Dabei geht ein, dass die Identität ein Homomorphismus und die Komposition von zwei Homomorphismen ebenfalls ein Homomorphismus ist. Ganz ähnlich erklärt man die Kategorie **Ab** der abelschen Gruppen mit Homomorphismen von (abelschen) Gruppen.

Beispiel 2.2.10 (Vektorräume und Moduln). Zu einem Körper K können wir die Kategorie der K -Vektorräume \mathbf{Vect}_K betrachten: Die Objekte sind die K -Vektorräume, die Morphismen sind die K -linearen Abbildungen. Die Komposition ist wie üblich definiert. Ersetzt man in der Definition eines Vektorraumes den Grundkörper durch einen Ring R , so erhält man den Begriff eines R -Linksmoduls. Diese bilden zusammen mit den R -linearen Abbildungen eine Kategorie ${}_R\mathbf{Mod}$. Analog erhält man die Kategorie \mathbf{Mod}_R der R -Rechtsmoduln.

Beispiel 2.2.11 (Ringe). Die Kategorie **Ring** besitzt als Objekte die Ringe (welche hier stets eine Eins haben) und als Morphismen die Homomorphismen von Ringen (welche per Definition die Eins erhalten) mit der üblichen Komposition. Ganz ähnlich ist die Kategorie der kommutativen Ringe **CRing** definiert.

Geometrische Objekte bilden Kategorien:

Beispiel 2.2.12 (Metrische Räume). Die Kategorie **Met** besitzt als Objekte die metrischen Räume. Ein Morphismus $f : (X, d) \rightarrow (X', d')$ sei eine *nichtexpansive* Abbildung, d.h. eine Abbildung $f : X \rightarrow X'$ mit $d'(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ für alle $x, y \in X$. Die Komposition ist wie üblich definiert. Siehe Aufgabe 2.26 für weitere Typen von Morphismen zwischen metrischen Räumen.

Beispiel 2.2.13 (Topologische Räume). Wir wiederholen kurz die Definition eines *topologischen Raumes*: Dies ist ein Paar (X, \mathcal{T}) , bestehend aus einer zugrunde liegenden Menge X und einer Menge $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X , *offene Teilmengen* genannt, die unter beliebigen Vereinigungen und endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist. Insbesondere sind \emptyset als leere Vereinigung und X als leerer Durchschnitt in \mathcal{T} enthalten. Eine *stetige Abbildung* $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{S})$ ist eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$, sodass $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$ für alle $U \in \mathcal{S}$. Offenbar ist $\text{id}_{(X, \mathcal{T})} : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{T})$, definiert durch id_X , eine stetige Abbildung, und für zwei stetige Abbildungen $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{S})$, $g : (Y, \mathcal{S}) \rightarrow (Z, \mathcal{R})$ ist auch die Komposition der zugrunde liegenden Mengenabbildungen eine stetige Abbildung $g \circ f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Z, \mathcal{R})$. Wir erhalten damit die Kategorie **Top** der topologischen Räume und stetigen Abbildungen.

Beispiel 2.2.14 (Punktierte Räume). Ganz ähnlich wird die Kategorie **Top_{*}** der punktierten topologischen Räume definiert; die Morphismen sind hierbei die punktierten stetigen Abbildungen.

Auch Ordnungsstrukturen bilden Kategorien:

Beispiel 2.2.15 (Partielle Ordnungen). Die Kategorie **Pos** besitzt als Objekte *partielle Ordnungen* (engl. *partially ordered set*), d.h. Paare (X, \leq) bestehend aus einer Menge X und einer reflexiven, transitiven und antisymmetrischen Relation \leq . Ein Morphismus $f : (X, \leq) \rightarrow (X', \leq')$ ist eine monoton wachsende Abbildung $f : X \rightarrow X'$, d.h., es gilt $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq' f(y)$ für $x, y \in X$. Die Komposition ist wie üblich definiert.

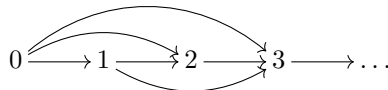
Beispiel 2.2.16 \star (Mannigfaltigkeiten). Die Kategorie **Man** besitzt als Objekte die glatten Mannigfaltigkeiten ([War83]) und als Morphismen die glatten Abbildungen mit der üblichen Komposition.

Beispiel 2.2.17 \star (Messräume). Die Kategorie **Meas** besitzt als Objekte die Messräume (engl. *measurable spaces*) und als Morphismen die messbaren Abbildungen mit der üblichen Komposition.

Beispiel 2.2.18 \star (Banachräume). Die Kategorie **Ban** besitzt als Objekte die Banachräume ([Wer11]) und als Morphismen die stetigen linearen Abbildungen mit der üblichen Komposition. Man könnte als Morphismen auch lediglich die linearen Abbildungen f der Norm ≤ 1 nehmen, die also $\|f(v)\| \leq \|v\|$ für alle Vektoren v erfüllen. Daraus ergibt sich eine kleinere Kategorie **Ban**₁.

In den bisher genannten Beispielen waren die Objekte „strukturierte“ Mengen, und die Morphismen waren spezielle, „strukturerhaltende“ Abbildungen. Die Komposition war außerdem stets die übliche Hintereinanderausführung der zugrunde liegenden Mengenabbildungen. Es geht allerdings auch anders, wie die folgenden Beispiele abstrakter Kategorien zeigen:

Beispiel 2.2.19 (Natürliche Zahlen). Wir können die natürlichen Zahlen wie folgt zu einer Kategorie „machen“: Die Objekte seien die natürlichen Zahlen $0, 1, 2, \dots$. Einen Morphismus $n \rightarrow m$ gebe es nur dann, und dann auch nur einen, wenn $n \leq m$ gilt. Die Identität ergibt sich aus $n \leq n$ und die Komposition aus $n \leq m \leq k \Rightarrow n \leq k$.



Formal definieren wir also etwa $\text{Hom}(n, m) := \{\star_{n,m}\}$, falls $n \leq m$ (für irgendein $\star_{n,m}$), und $\text{Hom}(n, m) := \emptyset$, falls $n > m$. Dann ist $\text{id}_n = \star_{n,n}$, und die Komposition ist durch $\star_{m,k} \circ \star_{n,m} = \star_{n,k}$ gegeben. Siehe [Beispiel 2.2.30](#) für eine Verallgemeinerung.

Beispiel 2.2.20 (Matrizen). Wir können eine Kategorie mit den natürlichen Zahlen $0, 1, 2, \dots$ als Objekte betrachten, in der ein Morphismus $n \rightarrow m$ eine $m \times n$ -Matrix über einem festen Körper K sei. Die Identität $n \rightarrow n$ sei

die $n \times n$ -Einheitsmatrix. Die Komposition von Morphismen ist durch die Matrixmultiplikation definiert. Bekanntlich ist die Matrixmultiplikation assoziativ und besitzt die Einheitsmatrix als neutrales Element. Daher erhalten wir eine Kategorie Mat_K .

Beispiel 2.2.21 (Triviale Beispiele). Die langweiligste Kategorie überhaupt ist die leere Kategorie \emptyset . Sie besitzt keine Objekte und entsprechend keine Morphismen. Ein einfaches Beispiel ist auch die Kategorie $\{\star\}$ mit genau einem Objekt \star und genau einem Morphismus, nämlich der Identität von \star .

Beispiel 2.2.22 (Graphen). Ein *gerichteter Graph* sei ein Paar (V, E) , bestehend aus einer Menge V von *Knoten* (engl. *vertices*) und einer Menge E von *Kanten* (engl. *edges*) sowie implizit einer Abbildung $E \rightarrow V^2$, die jeder Kante e ein Paar (v, w) bestehend aus *Start-* und *Endknoten* zuordnet (welche durchaus identisch sein dürfen). Wir schreiben auch $e : v \rightarrow w$. Streng genommen ist (V, E) ein *gerichteter Multigraph* oder auch *Köcher*, weil wir mehrere Kanten zwischen zwei Knoten zulassen. Wir werden aber zur Vereinfachung in diesem Buch stets nur von gerichteten Graphen sprechen. Ein Morphismus $(V, E) \rightarrow (V', E')$ gerichteter Graphen sei ein Paar (f, g) , bestehend aus einer Abbildung $f : V \rightarrow V'$ von Knoten sowie einer Abbildung $g : E \rightarrow E'$ von Kanten mit der folgenden Eigenschaft: Wenn e eine Kante von v nach w ist, so ist $g(e)$ eine Kante von $f(v)$ nach $f(w)$. Das lässt sich auch so ausdrücken, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g} & E' \\ \downarrow & & \downarrow \\ V^2 & \xrightarrow{f^2} & V'^2 \end{array}$$

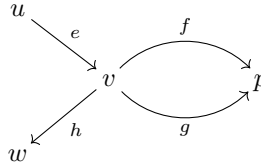
im Sinne von [Definition 2.4.1](#) kommutiert. Die Komposition von Morphismen ist durch $(f', g') \circ (f, g) = (f' \circ f, g' \circ g)$ definiert; dies ist offenbar ebenfalls ein Morphismus. Die Identität von (V, E) sei $(\text{id}_V, \text{id}_E)$. Wir erhalten die Kategorie der gerichteten Graphen Grph .

Beispiel 2.2.23 (Pfadkategorien). Fixieren wir einen gerichteten Graphen $\Gamma = (V, E)$. Dann können wir die Kategorie $\text{Path}(\Gamma)$ der *Pfade durch Γ* betrachten: Die Objektmenge ist V . Ein Morphismus ist eine Folge von Kanten, die aneinander liegen. Formal ist ein Morphismus $v \rightarrow w$ also ein Tupel (e_n, \dots, e_1) mit einer gewissen Länge $n \in \mathbb{N}$, wobei $e_i : v_i \rightarrow v_{i+1}$ in E liegt, mit $v = v_1$ und $v_{n+1} = w$. (Dieses Tupel ist von rechts nach links zu lesen.) Im Falle des leeren Tupels mit $n = 0$ fordern wir $v = w$; dieses Tupel ist dann die Identität von v . Die Komposition ist durch das Anhängen von Pfaden definiert:

$$(f_m, \dots, f_1) \circ (e_n, \dots, e_1) := (f_m, \dots, f_1, e_n, \dots, e_1)$$

Dazu muss e_n dort enden, wo f_1 startet.

Nehmen wir etwa für Γ den folgenden gerichteten Graphen:



Es gibt 4 leere Pfade (die zu den Knoten u, v, w, p gehören), die 4 Pfade (e) , (f) , (g) , (h) sowie die 3 Pfade (f, e) , (g, e) , (h, e) . Die Komposition ist durch $(f) \circ (e) = (f, e)$ etc. gegeben. Beachte, dass zum Beispiel $(e) \circ (f)$ und $(h) \circ (f)$ nicht definiert sind. Die Kategorie $\text{Path}(\Gamma)$ hat demnach 4 Objekte und 11 Morphismen. Die Pfadkategorie des unendlichen gerichteten Graphen

$$\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \dots$$

ist die Kategorie der natürlichen Zahlen aus [Beispiel 2.2.19](#). Übrigens lassen sich Netzwerke mit gerichteten Graphen modellieren und liefern damit Beispiele für Kategorien. Ein Beispiel für ein soziales Netzwerk ist der gerichtete Graph der Studierenden an einer Universität, wobei die Kanten durch Bekanntschaft gegeben sind.

Beispiel 2.2.24 (Dualisierung von Set). Die Kategorie Set^{op} besitzt als Objekte alle Mengen, aber im Gegensatz zu Set ist ein Morphismus $f : A \rightarrow B$ in Set^{op} eine Mengenabbildung $f : B \rightarrow A$. Die Komposition definieren wir durch $(g \circ f)(x) := f(g(x))$. Siehe [Definition 2.6.3](#) für eine Verallgemeinerung.

Beispiel 2.2.25 (Relationen). Die Kategorie der Relationen Rel besitzt als Objekte alle Mengen, aber im Gegensatz zu Set ist ein Morphismus $R : A \rightarrow B$ nun eine Teilmenge $R \subseteq A \times B$, also eine *Relation von A nach B*. Die Identität von A ist die Diagonale

$$\text{id}_A := \{(a, a) : a \in A\} \subseteq A \times A.$$

Die Komposition von zwei Relationen $R : A \rightarrow B$ und $S : B \rightarrow C$ ist durch

$$S \circ R = \{(a, c) : \exists b \in B ((a, b) \in R \wedge (b, c) \in S)\} \subseteq A \times C$$

definiert. Man kann sich als Übung klarmachen, dass es sich hierbei tatsächlich um eine Kategorie handelt.

Beispiel 2.2.26 \star (Ableitungen). Jeder mathematischen Theorie im Sinne der mathematischen Logik ([EFT78]) können wir eine Kategorie zuordnen: Die Objekte sind die Theoreme der Theorie. Ein Morphismus $A \rightarrow B$ sei eine Ableitung (also ein Beweis) des Theorems B aus dem Theorem A . Die Identität ist die leere Ableitung, die Komposition ist das Verketteten von Ableitungen.

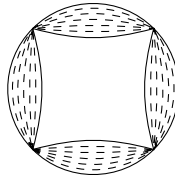


Abb. 2.2: Homotopie von zwei Einbettungen $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$

Beispiel 2.2.27 \star (Homotopiekategorie). In der Homotopietheorie spielt die folgende Kategorie \mathbf{hTop} eine wichtige Rolle: Die Objekte sind topologische Räume (wie bei \mathbf{Top}). Die Menge der Morphismen $\mathrm{Hom}_{\mathbf{hTop}}(X, Y)$ ist definiert als die Menge der Äquivalenzklassen $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)/\sim$, wobei wir für zwei stetige Abbildungen $f, g : X \rightarrow Y$ die Äquivalenzrelation $f \sim g$ dadurch definieren, dass f, g *homotop* seien, d.h. es eine stetige Abbildung

$$H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$$

gibt mit $H(-, 0) = f$ und $H(-, 1) = g$. Man kann sich hier vorstellen, dass f und g vermöge H stetig ineinander verformt werden, wobei $H(-, t)$ die Verformung zum Zeitpunkt $t \in [0, 1]$ angibt (s. Abb. 2.2). Die Äquivalenzklasse $[f]$ einer stetigen Abbildung f wird auch als *Homotopieklasse* bezeichnet. Man kann zeigen, dass \mathbf{hTop} via $\mathrm{id}_X := [\mathrm{id}_X]$ und $[f] \circ [g] := [f \circ g]$ zu einer Kategorie wird; wir werden in [Beispiel 2.6.17](#) darauf zurückkommen.

Bemerkung 2.2.28 \star (Fundierungen). Das klassische Vorgehen zur Beschreibung eines mathematischen Objektes ist die Angabe einer (zugrunde liegenden) Menge, gefolgt von der Angabe einer Zusatzstruktur auf dieser Menge. Dann schaut man sich Abbildungen zwischen diesen Mengen an, welche die Struktur möglichst gut erhalten. Doch die oben genannten Beispiele zeigen bereits, dass dieser Ansatz bei Weitem nicht alles abdeckt: Es gibt viele mathematische Objekte, welche keine ausgezeichnete zugrunde liegende Menge besitzen oder gleich mehrere, und erst recht müssen die Morphismen keine Abbildungen sein. In der Kategorientheorie sind Objekte und Morphismen tatsächlich völlig abstrakte Begriffe. Daran muss man sich erst einmal gewöhnen.

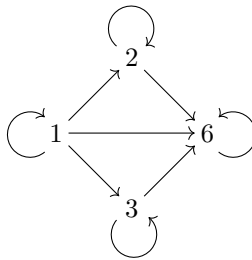
Zwar fundiert das Axiomensystem ZFC die Mathematik gerade so, dass jedes Objekt eine Menge ist, aber das ist lediglich *eine* mögliche Fundierung von vielen und geht am Wesen vieler mathematischer Objekte vorbei, was unsere mathematische Intuition betrifft: Allein aus welchem Grunde sollte etwa die Euler'sche Zahl eine Menge sein? Eine strukturelle sowie kategorientheoretische Fundierung der Mengenlehre ist Lawveres *Elementary Theory of the Category of Sets*, kurz ETCS ([Law05]). Die Arbeiten [Lei14b, LR03] bieten eine elementare Einführung in ETCS. Es gibt sogar Ansätze, die gesamte Mathematik kategoriell zu axiomatisieren ([BD76, BP75, Law66]). Die aktuell in

der Entwicklung befindliche *Homotopie-Typentheorie* ([The13]) bietet indes eine weitere Fundierung der Mathematik.

Definition 2.2.29 (Kleine Kategorien). Eine Kategorie \mathcal{C} heißt *klein*, wenn ihre Klasse der Objekte $\text{Ob}(\mathcal{C})$ eine Menge ist.

Zum Beispiel ist **Set** nicht klein, aber $\text{Path}(\Gamma)$ für einen gerichteten Graphen Γ ist klein. Umgekehrt können wir jeder kleinen Kategorie \mathcal{C} einen gerichteten Graphen $U(\mathcal{C})$ zuordnen: Die Knoten sind die Objekte von \mathcal{C} , und die Kanten sind die Morphismen von \mathcal{C} . Der Unterschied zwischen kleinen Kategorien und gerichteten Graphen ist also im Wesentlichen, dass letztere keine Komposition und keine Identitäten besitzen.

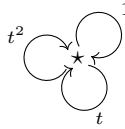
Beispiel 2.2.30 (Präordnungen als Kategorien). Eine *Präordnung* (X, \leq) besteht aus einer Menge X und einer binären Relation \leq auf X , welche *reflexiv* und *transitiv* ist, d.h., für alle $x \in X$ gilt $x \leq x$, und für alle $x, y, z \in X$ mit $x \leq y \leq z$ gilt $x \leq z$. Im Gegensatz zu einer partiellen Ordnung wird also die *Antisymmetrie* $x \leq y \leq x \Rightarrow x = y$ für alle $x, y \in X$ *nicht* gefordert. Wir können dann wie folgt eine Kategorie konstruieren: Die Objekte sind die Elemente von X . Einen Morphismus $x \rightarrow y$ gebe es genau dann, und dann auch nur einen, wenn $x \leq y$. Formal ist also $\text{Hom}(x, y) := \{\star_{x,y}\}$, falls $x \leq y$ (für irgendein $\star_{x,y}$), und ansonsten $\text{Hom}(x, y) := \emptyset$. Die Reflexivität sorgt für die Identitäten, die Transitivität für die Komposition. Eigentlich kann hier sogar X eine beliebige Klasse sein. Wir fassen Präordnungen stets auf diese Weise als Kategorien auf. Es handelt sich dabei genau um jene Kategorien \mathcal{C} , für die $\text{Hom}(A, B)$ für alle $A, B \in \mathcal{C}$ höchstens ein Element besitzt. Das folgende Bild zeigt die partielle Ordnung der positiven Teiler von 6 bezüglich der Teilbarkeitsrelation:



Beispiel 2.2.31 (Diskrete und indiskrete Kategorien). Eine Kategorie \mathcal{C} heißt *diskret*, wenn die Identitäten die einzigen Morphismen in \mathcal{C} sind. Das ist also letztlich nur eine Ansammlung von Objekten. Eine Kategorie \mathcal{C} heißt *indiskret*, wenn es zwischen je zwei Objekten $A, B \in \mathcal{C}$ genau einen Morphismus $A \rightarrow B$ gibt. (Diese Begriffe sind der Topologie nachempfunden.)

Beide Typen kommen von Präordnungen auf einer Klasse X , nämlich im diskreten Fall von der Diagonale $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ und im indiskreten Fall von der Allrelation $X \times X$.

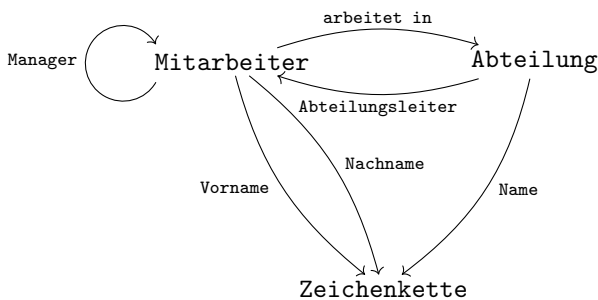
Beispiel 2.2.32 (Monoide als Kategorien). Ein *Monoid* $M = (X, *, 1)$ besteht aus einer Menge X , einer binären Verknüpfung $*$ auf X , welche assoziativ ist, und einem Element $1 \in X$, welches beidseitig neutral bezüglich $*$ ist. Gruppen sind demnach diejenigen Monoide, in denen jedes Element invertierbar ist. Wir können jedes Monoid $(X, *, 1)$ als eine Kategorie mit genau einem Objekt \star auffassen: Die Morphismenmenge sei $\text{Hom}(\star, \star) := X$, die Identität $\text{id}_\star := 1$ und die Komposition von Morphismen sei gerade die Multiplikation $*$: $X \times X \rightarrow X$. Offenbar entsteht jede Kategorie mit genau einem Objekt auf diese Weise. Die zyklische Gruppe $C_3 = (\{1, t, t^2\}, *, 1)$ zum Beispiel sieht wie folgt aus:



Andererseits gibt es auch die Kategorie **Mon** aller Monoide; ein Morphismus von Monoiden sei hierbei eine Abbildung der zugrunde liegenden Mengen, welche mit der Multiplikation und dem neutralen Element verträglich ist.

Monoide und Präordnungen stellen demnach zwei Extremfälle für Kategorien dar: Bei Monoiden gibt es insgesamt nur ein Objekt, und bei Präordnungen gibt es höchstens einen Morphismus zwischen je zwei Objekten. Für das Verständnis der Kategorientheorie kann und wird es sehr hilfreich sein, die Theorie auf Präordnungen und Monoide anzuwenden.

Beispiel 2.2.33 (Datenbanken). In seinem Buch [Spi14] plädiert David Spivak dafür, dass die Kategorientheorie ein universelles Paradigma für die wissenschaftliche Modellierung darstellt. Das folgende Schema etwa zeigt ein Modell für eine Datenbank in Form einer kleinen Kategorie.



Dabei sollen u.a. die folgenden Relationen gelten:

$$\begin{aligned} \text{arbeitet in} \circ \text{Abteilungsleiter} &= \text{id}_{\text{Abteilung}} \\ \text{Abteilungsleiter} \circ \text{arbeitet in} &\neq \text{id}_{\text{Mitarbeiter}} \\ \text{arbeitet in} \circ \text{Manager} &= \text{arbeitet in} \end{aligned}$$

Bemerkung 2.2.34 ☆ (Ausblick auf Zusatzstrukturen). Viele Kategorien aus der Praxis besitzen nützliche Zusatzstrukturen. Zum Beispiel trägt die Menge $\text{Hom}(V, W)$ der linearen Abbildungen $V \rightarrow W$ zwischen zwei Vektorräumen V, W über K ebenfalls die Struktur eines Vektorraumes $\underline{\text{Hom}}_K(V, W)$ über K (welcher übrigens nicht mit seiner zugrunde liegenden Menge $\text{Hom}(V, W)$ verwechselt werden sollte), womit Vect_K eine K -lineare Kategorie wird im Sinne von [Beispiel 8.9.5](#). Dahinter steckt das allgemeinere Konzept einer *angereicherten Kategorie*, welches wir in Abschn. 8.9 behandeln. In Abschn. 5.3 werden wir sehen, dass man je zwei Vektorräume und je zwei lineare Abbildungen miteinander *tensorieren* kann, was Vect_K zu einer K -linearen *symmetrisch monoidalen Kategorie* macht; monoidale Kategorien sind der Gegenstand von Abschn. 8.3. Die Kategorie Hilb der Hilberträume über $K = \mathbb{C}$ zusammen mit stetigen linearen Operatoren besitzt eine entsprechende Struktur, aber sogar noch mehr: Jeder stetige lineare Operator $f : H \rightarrow K$ besitzt einen *adjungierten Operator* $f^\dagger : K \rightarrow H$, womit Hilb im Sinne von Aufgabe 2.4 zu einer \dagger -Kategorie wird.

2.3 Isomorphismen

Wenn eine Isomorphie zwischen zwei Gruppen oder Vektorräumen besteht, sind sie „strukturgleich“. Dieses Konzept können wir in einer beliebigen Kategorie formulieren:

Definition 2.3.1 (Isomorphismen). Es sei \mathcal{C} eine Kategorie. Ein Morphismus $f : A \rightarrow B$ in \mathcal{C} heißt *invertierbar* oder auch *Isomorphismus*, wenn es einen Morphismus $g : B \rightarrow A$ gibt mit $f \circ g = \text{id}_B$ und $g \circ f = \text{id}_A$. Dieser Morphismus $g : B \rightarrow A$ ist eindeutig bestimmt (s.u.) und wird mit $f^{-1} : B \rightarrow A$ bezeichnet. Es heißt f^{-1} der zu f *inverse Morphismus*.

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ A & \xrightarrow{\quad} & B \\ & \xleftarrow{\quad f^{-1}} & \end{array}$$

Falls es einen Isomorphismus $A \rightarrow B$ gibt, so nennen wir A und B *isomorph* und schreiben $A \cong B$.

Dass g tatsächlich eindeutig bestimmt ist, sieht man so: Ist $h : B \rightarrow A$ ein weiterer Morphismus mit $f \circ h = \text{id}_B$ und $h \circ f = \text{id}_A$, so folgt

$$g = \text{id}_A \circ g = (h \circ f) \circ g = h \circ (f \circ g) = h \circ \text{id}_B = h.$$

Wir schauen uns nun den Isomorphiebegriff in einigen Kategorien genauer an. Dabei geben wir auch konkrete Beispiele von Isomorphismen an. (Üblicherweise verzichtet man in der Kategorientheorie auf diese Konkretheit, weil solche Beispiele eher spezifischen Gebieten der Mathematik angehören.)

Beispiel 2.3.2 (Mengen). In Set sind die Isomorphismen genau die invertierbaren Mengenabbildungen, die bekanntlich mit den bijektiven Abbildungen

übereinstimmen. Isomorphie in **Set** ist auch als *Gleichmächtigkeit* bekannt. Ein Beispiel für einen Isomorphismus ist die Cantor'sche Paarungsfunktion

$$C : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, (x, y) \mapsto x + \frac{(x+y)(x+y+1)}{2}.$$

In **Set** ist also $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$.

Beispiel 2.3.3 (Gruppen). In **Grp** ist ein Isomorphismus ein invertierbarer Homomorphismus von Gruppen. Zum Beispiel ist

$$(\mathbb{R}, +)/(\mathbb{Z}, +) \rightarrow (S^1, \cdot), [\varphi] \mapsto e^{2\pi i \varphi}$$

ein Isomorphismus in **Grp**, wobei der Einheitskreis $S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ bezüglich der Multiplikation eine Gruppe wird. Wenn $f : G \rightarrow H$ ein Homomorphismus von Gruppen ist, dessen zugrunde liegende Mengenabbildung ein Isomorphismus ist, so ist die inverse Mengenabbildung f^{-1} bereits ein Homomorphismus, denn für $h, h' \in H$ gilt

$$\begin{aligned} f^{-1}(h \cdot h') &= f^{-1}(f(f^{-1}(h)) \cdot f(f^{-1}(h')))) \\ &= f^{-1}(f(f^{-1}(h) \cdot f^{-1}(h'))) \\ &= f^{-1}(h) \cdot f^{-1}(h'). \end{aligned}$$

Ein Isomorphismus von Gruppen ist also dasselbe wie ein Homomorphismus von Gruppen, dessen zugrunde liegende Mengenabbildung bijektiv ist, oder salopp gesagt ein „bijektiver Homomorphismus“. In den meisten Büchern findet man dies als Definition eines Isomorphismus von Gruppen (und es wird nicht zwischen einem Homomorphismus und seiner zugrunde liegenden Mengenabbildung unterschieden). Entsprechendes gilt für andere algebraische Strukturen wie etwa Vektorräume oder Ringe. Das ist aber etwas irreführend, weil sich der Begriff eines Isomorphismus in Wahrheit auf die Kategorie selbst bezieht und nichts mit Mengen zu tun hat. Zudem muss in anderen Kategorien ein Isomorphismus mehr als nur bijektiv sein:

Beispiel 2.3.4 (Topologische Räume). In der Kategorie der topologischen Räume **Top** ist ein Isomorphismus gemäß allgemeiner Definition eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$, für die es eine stetige Abbildung $g : Y \rightarrow X$ gibt mit $f \circ g = \text{id}_Y$ und $g \circ f = \text{id}_X$. Man nennt dann f auch einen *Homöomorphismus*. Äquivalent dazu ist offenbar, dass $f : X \rightarrow Y$ eine bijektive stetige Abbildung ist, deren inverse Mengenabbildung $f^{-1} : Y \rightarrow X$ ebenfalls stetig ist.

Letzteres gilt *nicht automatisch*: Versehen wir eine Menge X mit der diskreten Topologie (jede Teilmenge ist offen) bzw. mit der indiskreten Topologie (nur \emptyset und X seien offen), so erhalten wir zwei topologische Räume X_d und X_i mit einer bijektiven, stetigen Abbildung $f : X_d \rightarrow X_i$, $x \mapsto x$ (deren zugrunde liegende Mengenabbildung die Identität von X ist), welche aber nur dann ein Isomorphismus ist, wenn X höchstens ein Element besitzt. Ein weiteres Beispiel

ist die bijektive stetige Abbildung $[0, 1[\rightarrow S^1$, $\varphi \mapsto e^{2\pi i \varphi}$, welche das halboffene Einheitsintervall auf den Einheitskreis „abrollt“. Die Umkehrabbildung ist nicht stetig. Und tatsächlich, weil S^1 im Gegensatz zu $[0, 1[$ kompakt ist, sind diese Räume nicht isomorph.

Schließlich noch ein positives Beispiel für eine Isomorphie topologischer Räume: Die Kreislinie $L = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = r\}$ mit Mittelpunkt $a \in \mathbb{C}$ und Radius $r \in \mathbb{R}^+$ ist in **Top** zum Einheitskreis S^1 isomorph; ein Isomorphismus ist durch $S^1 \rightarrow L$, $z \mapsto a + rz$ gegeben.

Beispiel 2.3.5 (Partielle Ordnungen). In der Kategorie der partiellen Ordnungen **Pos** ist eine monoton wachsende Abbildung $f : P \rightarrow Q$ genau dann ein Isomorphismus, wenn sie bzw. die zugrunde liegende Mengenabbildung f bijektiv ist und zudem die Monotonie $p \leq p' \Rightarrow f(p) \leq f(p')$ zu $p \leq p' \Leftrightarrow f(p) \leq f(p')$ verschärft werden kann. Ähnlich wie bei **Top** gibt es eine Reihe bijektiver monoton wachsender Abbildungen, welche keine Isomorphismen sind.

Beispiel 2.3.6 ☆ (Mannigfaltigkeiten). In der Kategorie der glatten Mannigfaltigkeiten **Man** sind die Isomorphismen auch als *Diffeomorphismen* bekannt. Auch hier ergibt sich die Glattheit der inversen Abbildung nicht automatisch, wie das Beispiel $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ zeigt: Es handelt sich hierbei um einen glatten Homöomorphismus; die inverse Abbildung ist aber nicht glatt. Es ist daher kein Isomorphismus in **Man**. Hingegen ist $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3 + x$ ein Isomorphismus.

Beispiel 2.3.7 ☆ (Kompakte Hausdorffräume). In der Kategorie der kompakten Hausdorffräume **CompHaus** (nach wie vor mit stetigen Abbildungen als Morphismen) treten diese Probleme übrigens nicht auf. Ist $f : X \rightarrow Y$ eine bijektive stetige Abbildung, X kompakt und Y hausdorffsch, so ist f bereits ein Homöomorphismus. Ist nämlich $A \subseteq X$ abgeschlossen, so ist A kompakt, also auch $f(A) \subseteq Y$ kompakt, und damit abgeschlossen.

Beispiel 2.3.8 ☆ (Homotopiekategorie). In der Homotopiekategorie **hTop** ist ein Morphismus $[f] : X \rightarrow Y$, etwa repräsentiert von einer stetigen Abbildung $f : X \rightarrow Y$, genau dann ein Isomorphismus, wenn es eine stetige Abbildung $g : Y \rightarrow X$ gibt, sodass $f \circ g$ homotop zu id_Y und $g \circ f$ homotop zu id_X ist. Man nennt f auch eine *Homotopieäquivalenz*. Es gibt viele topologische Räume, die homotopieäquivalent, aber nicht homöomorph sind: Zum Beispiel sind alle \mathbb{R}^n mit $n \in \mathbb{N}$ zu einem Punkt homotopieäquivalent, aber \mathbb{R}^n und \mathbb{R}^m sind nur dann homöomorph, wenn $n = m$ (vgl. Abschn. 3.1).

In den bekannten Beispielen von Kategorien fängt der Isomorphiebegriff genau das ein, was wir unter Strukturgleichheit verstehen wollen. Bijektive Homomorphismen sind dagegen zu schwach bzw. dies ist im Allgemeinen überhaupt gar kein wohldefinierter Begriff (etwa bei **hTop**).

Wir können nun einige einfache Sachverhalte über Isomorphismen festhalten, die sich insbesondere auf alle genannten Beispiele gleichzeitig anwenden lassen.

Lemma 2.3.9 (Eigenschaften von Isomorphismen). *Es sei \mathcal{C} eine Kategorie. Dann gilt:*

1. Für alle $A \in \mathcal{C}$ ist $\text{id}_A : A \rightarrow A$ ein Isomorphismus mit $\text{id}_A^{-1} = \text{id}_A$.
2. Für jeden Isomorphismus $f : A \rightarrow B$ in \mathcal{C} gilt: Der inverse Morphismus $f^{-1} : B \rightarrow A$ ist ebenfalls ein Isomorphismus mit $(f^{-1})^{-1} = f$.
3. Ist $g : B \rightarrow C$ ein weiterer Isomorphismus, so ist $g \circ f : A \rightarrow C$ ebenfalls ein Isomorphismus mit $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Insbesondere ist die Isomorphierelation \cong eine Äquivalenzrelation auf $\text{Ob}(\mathcal{C})$.

Beweis. 1. und 2. folgen leicht aus den Definitionen. Für 3. rechnet man nach, dass $f^{-1} \circ g^{-1}$ zu $g \circ f$ invers ist:

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ ((f \circ f^{-1}) \circ g^{-1}) = g \circ g^{-1} = \text{id}_C.$$

Ganz ähnlich zeigt man $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = \text{id}_A$. □

Definition 2.3.10 (Isomorphieklassen). Die Äquivalenzklassen der Isomorphierelation auf $\text{Ob}(\mathcal{C})$ werden auch als *Isomorphieklassen* bezeichnet. Wie bereits in Abschn. 2.1 dargelegt, ist man bei einer Kategorie oftmals an der Bestimmung der Isomorphieklassen interessiert.

Beispiel 2.3.11 (Lineare Algebra). Die Isomorphieklassen für die Kategorie der endlich-dimensionalen K -Vektorräume FinVect_K lauten $[K^n]$, wobei n die natürlichen Zahlen durchläuft. (Für Vect_K nimmt man $[K^{\oplus \kappa}]$, wobei κ alle Kardinalzahlen durchläuft.)

Beispiel 2.3.12 ☆ (Struktursatz). Die Isomorphieklassen für die Kategorie der endlichen abelschen Gruppen FinAb sind nach dem *Struktursatz* ([Bos09]) die $[\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z}]$ mit $n_1, \dots, n_k > 0$.

Bloß eine Kategorie ist mehr als nur die Gesamtheit ihrer Isomorphieklassen:

Definition 2.3.13 (Automorphismengruppe). Es sei \mathcal{C} eine Kategorie. Ein Isomorphismus $f : A \rightarrow A$ in \mathcal{C} heißt auch *Automorphismus* von A . Gemäß Lemma 2.3.9 bilden die Automorphismen von A bezüglich der Komposition eine Gruppe, die *Automorphismengruppe* $\text{Aut}_{\mathcal{C}}(A)$ oder kurz $\text{Aut}(A)$.

Beispiel 2.3.14 (Beispiele für Automorphismengruppen).

1. Die Automorphismengruppe $\text{Aut}(X)$ einer Menge $X \in \text{Set}$ ist die Gruppe der bijektiven Abbildungen oder *Permutationen* $X \rightarrow X$. Sie ist auch als die *symmetrische Gruppe* bekannt und wird mit $\text{Sym}(X)$ bezeichnet.
2. Die Automorphismengruppe $\text{Aut}(G)$ einer Gruppe $G \in \text{Grp}$ ist die Gruppe der Automorphismen $G \rightarrow G$.

3. Die Automorphismengruppe $\text{Aut}(V)$ eines K -Vektorraumes $V \in \mathbf{Vect}_K$ ist die Gruppe der linearen Isomorphismen $V \rightarrow V$. Sie ist auch als die *allgemeine lineare Gruppe* bekannt und wird mit $\text{GL}(V)$ bezeichnet.
4. Für die Kategorie \mathbf{Mat}_K der Matrizen über K aus [Beispiel 2.2.20](#) ist $\text{Aut}(n)$ die Gruppe der invertierbaren $n \times n$ -Matrizen über K . Das ist die allgemeine lineare Gruppe $\text{GL}(n, K) \cong \text{GL}(K^n)$.
5. Die Automorphismengruppe eines metrischen Raumes $X \in \mathbf{Met}$ ist als die *Isometriegruppe* von X bekannt.
6. Für einen topologischen Raum $X \in \mathbf{Top}$ ist $\text{Aut}(X)$ die Gruppe der Homöomorphismen $X \rightarrow X$. Sie ist daher auch als *Homöomorphismusgruppe* bekannt und wird mit $\text{Homeo}(X)$ bezeichnet (engl. *homeomorphism* = Homöomorphismus).
7. Ist $M = (X, \cdot, 1)$ ein Monoid, aufgefasst als Kategorie mit genau einem Objekt \star , so ist $\text{Aut}(\star) = \{a \in X : \exists b \in X (a \cdot b = 1 = b \cdot a)\}$. Dies ist die *Einheitengruppe* von M , üblicherweise mit M^\times bezeichnet.
8. ☆ Die Automorphismengruppe $\text{Aut}_{\Pi(X)}(x)$ eines Punktes $x \in X$ im Fundamentalgruppoid eines topologischen Raumes X (vgl. [Bemerkung 2.3.16](#) und Aufgabe [2.24](#)) ist per Definition die *Fundamentalgruppe* $\pi_1(X, x)$.

Diese speziellen Begriffe und Notationen in den Beispielen sollten uns nicht vergessen lassen, dass es sich jeweils trotzdem um ein und dasselbe kategorielle Konzept handelt. Im Allgemeinen kann man sich vorstellen, dass die Automorphismengruppe eines Objekts A die inneren „Symmetrien“ von A einfängt.

Die beiden folgenden Bemerkungen sollen noch einmal illustrieren, dass es nicht nur darauf ankommt, ob zwei Objekte isomorph sind, sondern dass Isomorphismen für sich genommen interessant sind.

Bemerkung 2.3.15 (Optimierungsprobleme). Ein n -dimensionales *Optimierungsproblem* ist ein Paar (M, f) , bestehend aus einer Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ von zulässigen Punkten und einer Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, deren Minimalstellen gesucht sind. Erklären wir einen Morphismus $(M, f) \rightarrow (M', f')$ als eine Abbildung $\alpha : M \rightarrow M'$ mit der Eigenschaft: Ist $m \in M$ eine Minimalstelle für f , so ist $\alpha(m) \in M'$ eine für f' . So erhalten wir eine Kategorie von Optimierungsproblemen, in der die Isomorphismen $\alpha : (M, f) \rightarrow (M', f')$ dadurch charakterisiert sind, dass α bijektiv ist und $m \in M$ genau dann eine Minimalstelle für f ist, wenn $\alpha(m)$ eine für f' ist. Zwei Optimierungsprobleme sind bereits dann isomorph, wenn ihre Minimalstellen sowie ihre zulässigen Nicht-Minimalstellen jeweils dieselbe Anzahl besitzen. Doch wie rechnet man in der Praxis die Minimalstellen von zwei isomorphen Optimierungsproblemen ineinander um? Dazu muss man sich den Isomorphismus gemerkt haben.

Einführung in die Kategorientheorie
Mit ausführlichen Erklärungen und zahlreichen
Beispielen

Brandenburg, M.

2017, X, 345 S. 19 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-662-53520-2