

Zusammenfassung

In diesem Kapitel führen wir allgemeine, endliche Finanzmärkte ein. Endlich heißt hier, dass es endlich viele Marktzustände und endlich viele Handelszeitpunkte $t = 0, 1, \dots, T - 1$ gibt. Wir werden Handelsstrategien, Arbitragestrategien und Optionen mathematisch formal beschreiben.

2.1 Finanzmarkt

Den zugrunde liegenden filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum bezeichnen wir mit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$. Dabei ist Ω endlich und besteht nur aus Elementarereignissen, die mit positiver Wahrscheinlichkeit eintreten können, also $\mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$. Weiter nehmen wir stets an, dass $\mathcal{F}$ die Potenzmenge von Ω ist. Die Filtration $(\mathcal{F}_t)$ stellt den Informationsfluss dar. Insbesondere besteht die σ -Algebra $\mathcal{F}_t$ aus Ereignissen, die bis zur Zeit t beobachtet werden können. Wir nehmen an, dass $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ die triviale σ -Algebra ist und $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$. Der Finanzmarkt besteht aus $d + 1$ Anlagemöglichkeiten:

- ein *risikoloses Wertpapier* mit deterministischem Preisprozess $(B_t) = (B_0, \dots, B_T)$, wobei $B_0 = 1$ und $B_{t+1} \geq B_t > 0$ für $t = 1, \dots, T$. Unter dieser Anlage können wir uns ein Sparbuch vorstellen. B_t ist der Wert zur Zeit t einer zur Zeit 0 angelegten Geldeinheit, z. B. $B_t = (1 + r)^t$ mit $r \geq 0$.
- d *risikobehaftete Wertpapiere* mit stochastischen Preisprozessen $(S_t^k) = (S_0^k, \dots, S_T^k)$, $k = 1, \dots, d$ mit $S_t^k(\omega) > 0$ für alle k, t und ω . Wir setzen für $t = 0, 1, \dots, T$

$$S_t := (S_t^1, \dots, S_t^d).$$

Diese Wertpapiere können wir uns als Aktien vorstellen. S_t^k ist der Kurs der Aktie k zur Zeit t . Die Prozesse (S_t^k) seien für alle $k = 1, \dots, d$ adaptiert bezüglich der gegebenen

Filtration $(\mathcal{F}_t)$, d. h. $\mathcal{F}_t^S \subset \mathcal{F}_t$, wobei $\mathcal{F}_t^S = \sigma(S_0, \dots, S_t)$ die von den Preisprozessen (S_t) bis zur Zeit t erzeugte σ -Algebra ist.

Wir können nun in diese Wertpapiere investieren und mit ihnen handeln.

Definition 2.1

Eine *Handelsstrategie* oder ein *Portfolio* ist ein $\mathbb{R}^{d+1}$ -wertiger, $(\mathcal{F}_t)$ -adaptierter stochastischer Prozess $\varphi = (\varphi_0, \dots, \varphi_{T-1})$, d. h., φ_t ist $\mathcal{F}_t$ -messbar und

$$\varphi_t := (\alpha_t, \beta_t), \quad t = 0, \dots, T-1.$$

Dabei ist

- β_t die Stückzahl des risikolosen Wertpapiers, die während des Zeitraums $[t, t+1)$ gehalten wird.
- $\alpha_t := (\alpha_t^1, \dots, \alpha_t^d)$ und α_t^k die Stückzahl des risikobehafteten Wertpapiers k , die während des Zeitraums $[t, t+1)$ gehalten wird.

Wir setzen $\beta := (\beta_0, \dots, \beta_{T-1})$ und $\alpha := (\alpha_0, \dots, \alpha_{T-1})$.

Ist eine Handelsstrategie $(\mathcal{F}_t^S)$ -adaptiert, bedeutet dies nach dem Faktorisierungssatz 12.1, dass $\beta_t = \beta_t(S_0, \dots, S_t)$ und $\alpha_t^k = \alpha_t^k(S_0, \dots, S_t)$ Funktionen der bis dahin bekannten Preise sind. Investoren beobachten also die Preise bis zur Zeit t und wählen dann basierend auf diesen Informationen eine neue Zusammensetzung φ_t zur Zeit t , die bis zur Zeit $t+1$ gehalten wird. Die Information über die Preisprozesse ist also in der Filtration $(\mathcal{F}_t^S)$ enthalten. Im Allgemeinen kann die Filtration $(\mathcal{F}_t)$ noch mehr Informationen enthalten als die Wertpapierpreise, z. B. Informationen über ökonomische Indikatoren.

Definition 2.2

Der Wert der Handelsstrategie φ zum Zeitpunkt $t = 0, \dots, T-1$ ist gegeben durch

$$V_t^\varphi := \beta_t B_t + \sum_{k=1}^d \alpha_t^k S_t^k =: \beta_t B_t + \alpha_t \cdot S_t.$$

Außerdem setzen wir $V_T^\varphi := \beta_{T-1} B_T + \alpha_{T-1} \cdot S_T$.

$\beta_t B_t + \alpha_t \cdot S_t$ ist der Wert der Handelsstrategie direkt nachdem sie zur Zeit t neu zusammengestellt wurde. Die Änderung des Marktwertes nur durch die Änderung der Preise ist daher $\beta_{t-1}(B_t - B_{t-1}) + \alpha_{t-1} \cdot (S_t - S_{t-1})$.

Definition 2.3

Eine Handelsstrategie φ heißt *selbstfinanzierend*, falls

$$\beta_{t-1} B_t + \alpha_{t-1} \cdot S_t = \beta_t B_t + \alpha_t \cdot S_t$$

für $t = 1, 2, \dots, T - 1$ gilt.

Wenn der Investor die neuen Preise B_t, S_t beobachtet, passt er seine selbstfinanzierende Handelsstrategie von φ_{t-1} zu φ_t an, ohne zusätzliches Vermögen hinzuzufügen oder Vermögen zu konsumieren. Wir zeigen im Folgenden, dass bei selbstfinanzierenden Handelsstrategien die Kenntnis von $\varphi = (\alpha, \beta)$ äquivalent zur Kenntnis von (V_0^φ, α) ist. Die Anlage β in das risikolose Wertpapier kann dann aus der Bedingung der Selbstfinanzierung bestimmt werden. Wir bezeichnen deshalb mit

$$\mathcal{A} := \{\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{T-1}) : \alpha_t \text{ ist } \mathcal{F}_t\text{-messbar, } t = 0, \dots, T - 1\}$$

die Menge der Investitionsstrategien in die risikobehafteten Wertpapiere. Bei vorgegebenem Anfangsvermögen kann jedes $\alpha \in \mathcal{A}$ selbstfinanzierend ergänzt werden, wie Lemma 2.1 zeigt.

Im Folgenden verwenden wir für einen reellwertigen stochastischen Prozess (X_t) die Bezeichnung: $\Delta X_t := X_t - X_{t-1}$. Weiter sei: $\Delta \alpha_t := (\Delta \alpha_t^1, \dots, \Delta \alpha_t^d)$.

Lemma 2.1 *Sei φ eine selbstfinanzierende Handelsstrategie. Dann gilt*

$$\beta_t = \beta_0 - \sum_{n=1}^t \Delta \alpha_n \cdot \frac{S_n}{B_n} = V_0^\varphi - \sum_{n=0}^t \Delta \alpha_n \cdot \frac{S_n}{B_n}$$

für $t = 0, 1, \dots, T - 1$, wobei $\Delta \alpha_0^k := \alpha_0^k$ für $k = 1, \dots, d$.

Beweis Sei $t = 0$. Dann ist $V_0^\varphi = \beta_0 B_0 + \alpha_0 \cdot S_0 = \beta_0 + \alpha_0 \cdot \frac{S_0}{B_0}$ und somit $\beta_0 = V_0^\varphi - \alpha_0 \cdot \frac{S_0}{B_0} = V_0^\varphi - \Delta \alpha_0 \cdot \frac{S_0}{B_0}$.

Sei nun $t \in \{1, 2, \dots, T - 1\}$: Da (α, β) selbstfinanzierend ist, gilt

$$\begin{aligned} \beta_t B_t + \alpha_t \cdot S_t &= \beta_{t-1} B_t + \alpha_{t-1} \cdot S_t \\ \Leftrightarrow (\beta_t - \beta_{t-1}) B_t &= -(\alpha_t - \alpha_{t-1}) \cdot S_t \\ \Leftrightarrow \Delta \beta_t &= -\Delta \alpha_t \cdot \frac{S_t}{B_t}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir nun:

$$\begin{aligned}\beta_t &= \beta_0 + \sum_{n=1}^t \Delta\beta_n = \beta_0 - \sum_{n=1}^t \Delta\alpha_n \cdot \frac{S_n}{B_n} = V_0^\varphi - \Delta\alpha_0 \cdot \frac{S_0}{B_0} - \sum_{n=1}^t \Delta\alpha_n \cdot \frac{S_n}{B_n} \\ &= V_0^\varphi - \sum_{n=0}^t \Delta\alpha_n \cdot \frac{S_n}{B_n},\end{aligned}$$

und wir haben die Behauptung gezeigt. $\square$

Da die diskontierten Wertpapierpreise häufig genannt werden, führen wir folgende Bezeichnung ein:

Definition 2.4

$\tilde{S}_t^k := \frac{S_t^k}{B_t}$ ist der diskontierte Preis des k -ten risikobehafteten Wertpapiers zur Zeit t .

Man kann sich oft auf den Fall $B_t \equiv 1$ beschränken, da der folgende Zusammenhang gilt:

Lemma 2.2 Sei φ eine selbstfinanzierende Handelsstrategie und $t = 1, \dots, T$. Dann gilt

$$\frac{V_t^\varphi}{B_t} = V_0^\varphi + \sum_{n=1}^t \alpha_{n-1} \cdot \Delta\tilde{S}_n.$$

Beweis Für $n = 1, \dots, T$ gilt, da φ selbstfinanzierend ist,

$$\begin{aligned}\frac{V_n^\varphi}{B_n} - \frac{V_{n-1}^\varphi}{B_{n-1}} &= \frac{1}{B_n}(\beta_n B_n + \alpha_n \cdot S_n) - \frac{1}{B_{n-1}}(\beta_{n-1} B_{n-1} + \alpha_{n-1} \cdot S_{n-1}) \\ &= \frac{1}{B_n}(\beta_{n-1} B_n + \alpha_{n-1} \cdot S_n) - \frac{1}{B_{n-1}}(\beta_{n-1} B_{n-1} + \alpha_{n-1} \cdot S_{n-1}) \\ &= (\beta_{n-1} - \beta_{n-1}) + \alpha_{n-1} \cdot \left(\frac{S_n}{B_n} - \frac{S_{n-1}}{B_{n-1}} \right) = \alpha_{n-1} \cdot \Delta\tilde{S}_n.\end{aligned}$$

Daher gilt mit $B_0 = 1$

$$\frac{V_t^\varphi}{B_t} = \frac{V_0^\varphi}{B_0} + \sum_{n=1}^t \left(\frac{V_n^\varphi}{B_n} - \frac{V_{n-1}^\varphi}{B_{n-1}} \right) = V_0^\varphi + \sum_{n=1}^t \alpha_{n-1} \cdot \Delta\tilde{S}_n,$$

womit wir die Behauptung gezeigt haben. $\square$

Definition 2.5

Den Prozess (G_t^α) für $\alpha \in \mathcal{A}$, der durch $G_0^\alpha := 0$ und

$$G_t^\alpha := \sum_{n=1}^t \alpha_{n-1} \cdot \Delta \tilde{S}_n, \quad t = 1, \dots, T$$

definiert ist, bezeichnen wir als *Gewinnprozess* von α . Es gilt dann für eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $\varphi = (\alpha, \beta)$:

$$\frac{V_t^\varphi}{B_t} = V_0^\varphi + G_t^\alpha.$$

Im Folgenden werden wir uns stets auf Finanzmärkte beschränken, in denen keine Arbitrage möglich ist, d. h. kein risikoloser Gewinn erzielbar ist. Die formale Definition lautet wie folgt:

Definition 2.6

Eine selbstfinanzierende Handelsstrategie φ wird als *Arbitragestrategie* bezeichnet, falls

$$V_0^\varphi = 0, \quad \mathbb{P}(V_T^\varphi \geq 0) = 1 \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(V_T^\varphi > 0) > 0.$$

Wir sagen, dass eine *Arbitragemöglichkeit* existiert, falls eine Arbitragestrategie existiert. (NA) bedeutet, dass keine Arbitragemöglichkeit gegeben ist.

Bemerkung 2.1

- a) Da $\mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$, ist $\mathbb{P}(V_T^\varphi \geq 0) = 1$ äquivalent zu $V_T^\varphi(\omega) \geq 0$ für alle ω und $\mathbb{P}(V_T^\varphi > 0) > 0$ ist äquivalent zur Existenz mindestens eines ω mit $V_T^\varphi(\omega) > 0$.
- b) Aus Lemma 2.2 folgt für eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $\varphi = (\alpha, \beta)$:

$$\frac{V_T^\varphi}{B_T} = V_0^\varphi + G_T^\alpha.$$

Daher liegt eine Arbitragemöglichkeit genau dann vor, wenn eine selbstfinanzierende Handelsstrategie φ existiert mit

$$V_0^\varphi = 0, \quad \mathbb{P}(G_T^\alpha \geq 0) = 1 \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(G_T^\alpha > 0) > 0.$$

Das folgende Theorem zeigt, dass ein Finanzmarkt (global) arbitragefrei ist, genau dann, wenn er lokal arbitragefrei ist.

Theorem 2.1

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- a) *Es gibt eine Arbitragestrategie.*
- b) *Es gibt ein $t \in \{1, \dots, T\}$ und einen $\mathcal{F}_{t-1}$ -messbaren Zufallsvektor $\eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, sodass*

$$\mathbb{P}(\eta \cdot (\tilde{S}_t - \tilde{S}_{t-1}) \geq 0) = 1 \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(\eta \cdot (\tilde{S}_t - \tilde{S}_{t-1}) > 0) > 0.$$

Beachte: η hängt von t ab.

Beweis a) $\Rightarrow$ b):

Sei $\varphi = (\alpha, \beta)$ eine Arbitragestrategie mit Vermögensprozess (V_t^φ) , und sei

$$t := \min \{m \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(V_m^\varphi \geq 0) = 1 \text{ und } \mathbb{P}(V_m^\varphi > 0) > 0\}.$$

Dann ist $t \leq T$ und entweder $\mathbb{P}(V_{t-1}^\varphi = 0) = 1$ oder $\mathbb{P}(V_{t-1}^\varphi < 0) > 0$. Im ersten Fall folgt (vgl. Beweis von Lemma 2.2)

$$\alpha_{t-1} \cdot (\tilde{S}_t - \tilde{S}_{t-1}) = \frac{V_t^\varphi}{B_t} - \frac{V_{t-1}^\varphi}{B_{t-1}} = \frac{V_t^\varphi}{B_t}.$$

Setze jetzt $\eta := \alpha_{t-1}$, und die Behauptung folgt. Im zweiten Fall setze $\eta := \alpha_{t-1} 1_{\{V_{t-1}^\varphi < 0\}}$. Dann ist η $\mathcal{F}_{t-1}$ -messbar und

$$\eta \cdot (\tilde{S}_t - \tilde{S}_{t-1}) = \left(\frac{V_t^\varphi}{B_t} - \frac{V_{t-1}^\varphi}{B_{t-1}} \right) 1_{\{V_{t-1}^\varphi < 0\}} \geq \frac{V_t^\varphi}{B_t} 1_{\{V_{t-1}^\varphi < 0\}} \geq 0.$$

Die linke Seite ist außerdem mit positiver Wahrscheinlichkeit strikt positiv.

b) $\Rightarrow$ a):

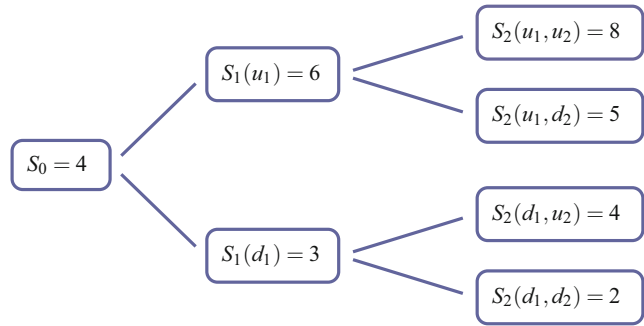
Sei η wie in b) und definiere eine Handelsstrategie $\varphi = (\alpha, \beta)$ durch

$$\alpha_m := \begin{cases} \eta, & \text{falls } m = t - 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach Lemma 2.1 kann α selbstfinanzierend ergänzt werden mit $V_0^\varphi = 0$.

Da $\frac{V_T^\varphi}{B_T} = \eta \cdot (\tilde{S}_t - \tilde{S}_{t-1})$ gilt, ist φ eine Arbitragestrategie. □

Abb. 2.1 Aktienkursverlauf
für Beispiel 2.1



Beispiel 2.1

Gegeben sei ein Finanzmarkt mit $T = 2$ Perioden, einem risikolosen Wertpapier mit $B_0 = B_1 = B_2 = 1$ und einer Aktie, die sich wie in Abb. 2.1 entwickelt (vgl. dazu auch später Beispiel 5.1).

Hier kann man $\Omega = \{u_1, d_1\} \times \{u_2, d_2\}$ wählen. Wir prüfen mit Theorem 2.1 nach, ob der Finanzmarkt arbitragefrei ist. Dazu betrachten wir erst $t = 1$. Hier ergibt sich

$$\eta(\tilde{S}_1(y_1) - S_0) = \begin{cases} \eta(6 - 4) = 2\eta, & \text{falls } y_1 = u_1 \\ \eta(3 - 4) = -\eta, & \text{falls } y_1 = d_1. \end{cases}$$

Da die Differenz der diskontierten Aktienkurse verschiedene Vorzeichen hat, kann kein $\eta \neq 0$ gewählt werden mit $\eta(\tilde{S}_1(y_1) - S_0) \geq 0$ für alle y_1 . Sei nun $t = 2$. Wir betrachten den oberen Knoten

$$\eta(u_1)(\tilde{S}_2(u_1, y_2) - \tilde{S}_1(u_1)) = \begin{cases} \eta(u_1)(8 - 6) = 2\eta(u_1), & \text{falls } y_2 = u_2 \\ \eta(u_1)(5 - 6) = -\eta(u_1), & \text{falls } y_2 = d_2. \end{cases}$$

Hier gibt es ebenfalls verschiedene Vorzeichen. Wir betrachten den unteren Knoten

$$\eta(d_1)(\tilde{S}_2(d_1, y_2) - \tilde{S}_1(d_1)) = \begin{cases} \eta(d_1)(4 - 3) = \eta(d_1), & \text{falls } y_2 = u_2 \\ \eta(d_1)(2 - 3) = -\eta(d_1), & \text{falls } y_2 = d_2. \end{cases}$$

Hier gibt es wieder verschiedene Vorzeichen. Also ist nach Theorem 2.1 der Finanzmarkt arbitragefrei.

2.2 Optionen

Nun wenden wir uns Optionen zu. Mathematisch ist eine Option durch ihre Auszahlung charakterisiert. Im Falle einer europäischen Option findet diese Auszahlung immer zum Ausübungszeitpunkt T statt.

Definition 2.7

Ein *Zahlungsanspruch* ist eine $\mathcal{F}_T$ -messbare Zufallsvariable H mit Werten in $\mathbb{R}$.

Bemerkung 2.2 Ist H sogar $\mathcal{F}_T^S$ -messbar, so ist nach dem Faktorisierungssatz $H = h(S_0, S_1, \dots, S_T)$ für eine Funktion h . Die Auszahlung hängt also nur von den risikobehafteten Wertpapieren ab.

Beispiel 2.2

Ein Zahlungsanspruch ist die Auszahlung, die eine europäische Option zur Zeit T liefert. Hier einige Beispiele:

- *Europäische Call-Option mit Basispreis K* : Die Option wird nur ausgeübt, wenn der Aktienpreis S_T zum Ausübungszeitpunkt T über dem Basispreis K liegt. Die Auszahlung kann also geschrieben werden als $H = (S_T - K)^+$.
- *Europäische Put-Option mit Basispreis K* : Hier wird die Option nur ausgeübt, wenn der Aktienpreis S_T zum Ausübungszeitpunkt T unter dem Basispreis K liegt. Die Auszahlung kann also geschrieben werden als $H = (K - S_T)^+$.
- Auch ein *Future* kann durch einen Zahlungsanspruch beschrieben werden: Nehmen wir an, der heute festgelegte Referenzpreis eines Wertpapiers ist K und der Liefertermin T . Dann findet aus Sicht des Käufers zur Zeit T die Zahlung $H = S_T - K$ statt.
- *Digital-Call-Option mit Basispreis K* : Diese Option liefert nur eine Auszahlung in Höhe einer Geldeinheit, wenn der Aktienpreis S_T zum Ausübungszeitpunkt T über dem Basispreis K liegt, d. h., es ist $H = 1_{\{S_T > K\}}$.
- *Down-and-Out-Call mit Basispreis K und Barriere B* : Hier hängt die Auszahlung nicht nur vom Endkurs S_T zum Ausübungszeitpunkt ab, sondern vom ganzen Kursverlauf. Die Call-Auszahlung gibt es nämlich nur, wenn der Aktienkurs während des ganzen Zeitraumes über der Barriere B liegt, d. h. $H = (S_T - K)^+ 1_{\{\min_{t \in \{0, \dots, T\}} S_t > B\}}$. Durch diese Einschränkung wird die Option gegenüber einer Call-Option ohne Barriere billiger.
- *Asiatische Call-Option*: Auch hier hängt die Auszahlung vom ganzen Kursverlauf, genauer vom arithmetischen Durchschnitt der Aktienkurse ab, der hier den Basispreis ersetzt $H = (S_T - \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T S_t)^+$.

Definition 2.8

- a) Ein Zahlungsanspruch H heißt *erreichbar*, wenn es eine selbstfinanzierende Handelsstrategie φ gibt mit $V_T^\varphi = H$. Dann heißt $\pi(H) := V_0^\varphi$ ein *Preis* von H und φ eine *Hedging-Strategie* von H .

b) Ein Markt wird als *vollständig* bezeichnet, wenn jeder Zahlungsanspruch erreichbar ist.

Lemma 2.3 *Es gelte (NA). Dann ist der Preis $\pi(H)$ für erreichbare Zahlungsansprüche eindeutig bestimmt und damit unabhängig von der Wahl einer Hedging-Strategie.*

Beweis Sei H ein erreichbarer Zahlungsanspruch und $\varphi = (\alpha, \beta)$ bzw. $\tilde{\varphi} = (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ seien zwei Hedging-Strategien für H . Von Lemma 2.1 wissen wir, dass $\varphi, \tilde{\varphi}$ durch (V_0^φ, α) und $(V_0^{\tilde{\varphi}}, \tilde{\alpha})$ ausgedrückt werden können. Aus Lemma 2.2 folgt dann

$$V_0^\varphi + G_T^\alpha = \frac{H}{B_T} = V_0^{\tilde{\varphi}} + G_T^{\tilde{\alpha}}.$$

Wir nehmen an, dass $d := V_0^{\tilde{\varphi}} - V_0^\varphi > 0$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &= V_0^\varphi - V_0^{\tilde{\varphi}} - G_T^{\tilde{\alpha}} + G_T^\alpha \\ &= -d - G_T^{\tilde{\alpha}} + G_T^\alpha = -d - \sum_{n=1}^T \tilde{\alpha}_{n-1} \cdot \Delta \tilde{S}_n + \sum_{n=1}^T \alpha_{n-1} \cdot \Delta \tilde{S}_n \\ &= -d + \sum_{n=1}^T (\alpha_{n-1} - \tilde{\alpha}_{n-1}) \cdot \Delta \tilde{S}_n = -d + G_T^{\alpha - \tilde{\alpha}}. \end{aligned}$$

Daher ist $G_T^{\alpha - \tilde{\alpha}} > 0$. Also ist ψ eine Arbitragemöglichkeit, wobei $\psi = (\hat{\alpha}, \hat{\beta})$, $\hat{\alpha} = \alpha - \tilde{\alpha}$, und $\hat{\beta}$ ist definiert über Lemma 2.1 mit $V_0^\psi = 0$. Dies ist ein Widerspruch zu (NA). $\square$

Beispiel 2.3

Gegeben sei der Finanzmarkt aus Beispiel 2.1. Wir betrachten die Digital-Option $H = 1_{\{S_2 \geq 5\}}$ und berechnen eine Hedging-Strategie und den Preis. Die Auszahlung der Option ist gegeben durch

$$H(u_1, u_2) = H(u_1, d_2) = 1, \quad H(d_1, u_2) = H(d_1, d_2) = 0.$$

Für eine Hedging-Strategie $\varphi = (\alpha, \beta)$ muss $V_T^\varphi = H$ gelten. Dies führt auf folgende Gleichungssysteme. Wir betrachten $t = 2$, den oberen Knoten:

$$\begin{aligned} 8 \alpha_1(u_1) + \beta_1(u_1) &= 1 = H(u_1, u_2) \\ 5 \alpha_1(u_1) + \beta_1(u_1) &= 1 = H(u_1, d_2). \end{aligned}$$

Die Lösung ist $\alpha_1(u_1) = 0, \beta_1(u_1) = 1$ und $V_1^\varphi(u_1) = 6 \alpha_1(u_1) + \beta_1(u_1) = 1$. Wir betrachten $t = 2$, den unteren Knoten:

$$\begin{aligned} 4 \alpha_1(d_1) + \beta_1(d_1) &= 0 = H(d_1, u_1) \\ 2 \alpha_1(d_1) + \beta_1(d_1) &= 0 = H(d_1, d_2). \end{aligned}$$

Die Lösung ist $\alpha_1(d_1) = 0, \beta_1(d_1) = 0$ und $V_1^\varphi(d_1) = 0$. Wir betrachten noch $t = 1$:

$$\begin{aligned} 6 \alpha_0 + \beta_0 &= 1 = V_1^\varphi(u_1) \\ 3 \alpha_0 + \beta_0 &= 0 = V_1^\varphi(d_1). \end{aligned}$$

Die Lösung ist $\alpha_0 = \frac{1}{3}, \beta_0 = -1$ und $V_0^\varphi = 4 \alpha_0 + \beta_0 = \frac{1}{3}$. Somit haben wir eine Hedging-Strategie $\varphi = (\alpha, \beta)$ bestimmt, und für den Preis der Option ergibt sich $\pi(H) = \frac{1}{3}$.

Hintergrundinformation

Wir betrachten hier nur friktionslose Finanzmärkte, also gibt es insbesondere keine Transaktionskosten. In der Realität können unterschiedliche Transaktionskosten vorkommen. Die einfachsten sind fixe und proportionale Transaktionskosten. Bei Berücksichtigung dieser Kosten müssen alle hier eingeführten Begriffe, angefangen bei den Handelsstrategien bis hin zum No-Arbitrage-Begriff, modifiziert werden. In der Regel steht dann für den Preis einer Option ein ganzes Intervall zur Verfügung. Die Theorie für proportionale Transaktionskosten findet man z. B. in [7] Kapitel 8.3 oder [6, 19].

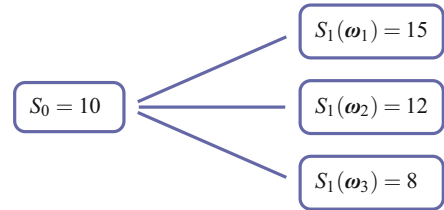
Aufgaben

2.1 Was kostet der Call? Betrachten Sie einen einperiodigen Finanzmarkt, bestehend aus einem risikolosen Wertpapier mit $B_0 = B_1 = 1$ und einer Aktie mit Preisprozess (S_t) . Zur Zeit $t = 0$ kostet die Aktie $S_0 = 80$ und für S_1 sind zwei Kursentwicklungen $S_1 = 120$ oder $S_1 = 60$ möglich, deren Eintrittswahrscheinlichkeiten unbekannt sind. Was ist der Preis für einen europäischen Call auf die Aktie mit vereinbartem Basispreis $K = 90$?

2.2 Gegeben ist ein einperiodiger Finanzmarkt, bestehend aus einem risikolosen Wertpapier und einer Aktie mit Preis $S_0 = 180$ zur Zeit $t = 0$ und $S_1(\omega_1) = 210, S_1(\omega_2) = 160$ zur Zeit $t = 1$. Weiter gibt es eine Option mit Auszahlung $H(\omega_1) = 105$ und $H(\omega_2) = 55$ zur Zeit $t = 1$, die zur Zeit $t = 0$ den Preis $\pi(H) = 80$ besitzt. Wie hoch ist der Zinssatz für das risikolose Wertpapier?

2.3 Ist der Finanzmarkt arbitragefrei? Betrachten Sie folgenden einperiodigen Finanzmarkt: Es gebe ein risikoloses Wertpapier mit $B_0 = B_1 = 1$ sowie eine Aktie mit Startpreis $S_0 = 1$. Der Endkurs $S_1 \sim \text{Bin}(n, p)$ sei binomialverteilt mit $n \in \mathbb{N}$ und $p \in (0, 1)$. Untersuchen Sie den Markt auf Arbitragefreiheit!

Abb. 2.2 Aktienkursverlauf
für Aufgabe 2.6



2.4 Preisvergleiche Gegeben sei ein arbitragefreier Finanzmarkt mit Zeithorizont $T > 0$. Zeigen Sie durch Arbitrageüberlegungen, dass für die Preise zweier europäischer Calls, die sich lediglich in den Basispreisen K_1 und K_2 unterscheiden, gilt:

$$K_1 \leq K_2 \quad \Rightarrow \quad \pi((S_T - K_2)^+) \leq \pi((S_T - K_1)^+),$$

d. h., der Call-Preis ist fallend im Basispreis.

2.5 Free Lunch Von einem *Free Lunch* spricht man, wenn für eine selbstfinanzierende Handelsstrategie φ gilt:

$$V_0^\varphi < 0 \text{ und } \mathbb{P}(V_T^\varphi \geq 0) = 1.$$

a) Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

- i) Es gibt eine Arbitragemöglichkeit.
- ii) Es existiert eine selbstfinanzierende Strategie φ mit

$$V_0^\varphi = 0, \mathbb{P}(V_t^\varphi \geq 0) = 1, \text{ für } t = 1, \dots, T \text{ und } \mathbb{P}(V_T^\varphi > 0) > 0.$$

- b) Sie haben einen Free Lunch. Konstruieren Sie daraus eine Arbitragemöglichkeit.
- c) Zeigen Sie, dass sich aus einer Arbitragemöglichkeit im Allgemeinen kein Free Lunch ergibt.

2.6 Betrachten Sie einen beliebigen Zahlungsanspruch $H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ im einstufigen Trinomialbaum, d. h. mit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ und $T = 1$. Für das risikolose Wertpapier gelte $B_0 = B_1 = 1$ und die Aktie entwickle sich gemäß Abb. 2.2

- a) Welche Zahlungsansprüche $H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sind erreichbar?
- b) Geben Sie einen nicht-erreichbaren Zahlungsanspruch an.

2.7 Es sei $(\Omega, \mathcal{G})$ ein endlicher, messbarer Raum mit σ -Algebra $\mathcal{G}$. Zeigen Sie, dass es eine Zerlegung $\{A_1, \dots, A_n\}$ von Ω gibt, sodass $\mathcal{G} = \sigma(\{A_1, \dots, A_n\})$ gilt. Geben Sie einen Algorithmus an, wie man diese Zerlegung bestimmen kann!



<http://www.springer.com/978-3-662-53530-1>

Finanzmathematik in diskreter Zeit

Bäuerle, N.; Rieder, U.

2017, XIV, 238 S. 28 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-662-53530-1