

2

Vektoren im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$



> Orientierung

- > Vektoren
- > Koordinatendarstellung
- > Addition und Subtraktion
- > Skalare Multiplikation
- > Skalarprodukt
- > Vektorprodukt
- > Basis, Linearkombination
- > Länge eines Vektors
- > Winkel zwischen Vektoren
- > Orthogonalität, Orthogonalbasen

Inhalt

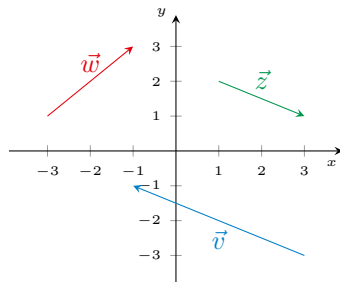
2.1. Fragen und Probleme	28
2.2. Typische Anwendungen	30
2.3. Fakten und Regeln	32
2.3.1. Reelle Vektoren und ihre Darstellung	32
2.3.2. Addition von Vektoren	36
2.3.3. Multiplikation von Skalaren mit Vektoren	39
2.3.4. Linearkombinationen – Zusammensetzen und Zerlegen eines Vektors	42
2.3.5. Multiplikation von Vektoren (Skalarprodukt)	45
2.3.6. Länge und Winkel	46
2.3.7. Orthogonalität und Orthonormalbasen	49
2.3.8. Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$	51
2.4. Trainingsaufgaben	53
2.5. Lösungsskizzen	55

2.1. Fragen und Probleme

> Was sind Vektoren?

Diese Frage ist allgemein nicht einfach zu beantworten, da die Antwort kontextabhängig ist.

Für die Zwecke dieses Kapitels sind Vektoren Paare $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ oder Tripel $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ reeller Zahlen, die man sich als „Pfeile“ in der Ebene bzw. im Raum veranschaulichen kann und die durch ihre Richtung und ihre Länge bestimmt sind.



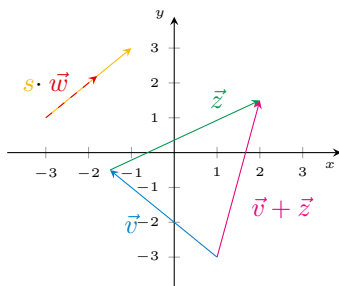
➤ Kapitel 2.3.1

> Wozu sind Vektoren gut?

Einige physikalische Größen (z.B. Kraft, Geschwindigkeit, Feldstärke) sind durch Stärke (Betrag) und Richtung charakterisiert. Vektoren sind das richtige Hilfsmittel zur mathematischen Beschreibung solcher Objekte.

➤ Kapitel 2.3.1

> Wie kann (darf) man mit Vektoren rechnen?



Für Addition und Subtraktion gelten komponentenweise die üblichen Regeln, die man von Zahlen gewohnt ist. Ferner kann man Vektoren mit Zahlen (Skalaren) multiplizieren.

Zudem lässt sich für zwei Vektoren des $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ ihr *Skalarprodukt* bilden, eine Zahl, die zur Winkelbestimmung nützlich ist. Im $\mathbb{R}^3$ gibt es außerdem noch das sogenannte *Vektorprodukt*.

➤ Kapitel 2.3.2, 2.3.3

> In welche Richtung zeigt ein Vektor?

Jedem Paar $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ und damit jedem Vektor $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ist im Koordinatensystem der Ebene der Ortsvektor zugeordnet, der die Punkte $(0, 0)$ und (a_1, a_2) linear verbindet und dessen Spitze bei (a_1, a_2) weg vom Ursprung $(0, 0)$ zeigt. Alle Vektoren der Ebene mit derselben Länge und derselben Richtung werden (unabhängig von ihrem Startpunkt) identifiziert. Sie können graphisch durch eine Parallelverschiebung ineinander überführt werden.

➤ Kapitel 2.3.1

> **Welcher der Vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist länger?**

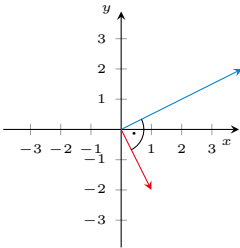
Die Länge (der Betrag) beider Vektoren ist gegeben durch

$$\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{50} > \sqrt{49} = \sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2} = \left| \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right|.$$

Somit ist $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ länger als $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

➤ Kapitel 2.3.6

> **Stehen die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ senkrecht aufeinander?**



Da das Skalarprodukt der beiden Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 2 = 0$$

Null ist, ist dies der Fall. Dies zeigt auch die zugehörige Graphik.

➤ Kapitel 2.3.7

> **Ein Schiff fährt auf einem Fluss mit einer Geschwindigkeit von 15 km/h. Ein Passagier bewegt sich auf dem Schiff senkrecht zur Fließrichtung mit 5 km/h. Welche Geschwindigkeit misst ein Beobachter am Ufer für die Bewegung des Passagiers?**

Der Passagier bewegt sich für den Beobachter mit einer Geschwindigkeit vom Betrag 15,8 km/h. Denn mit Vektordarstellung in einem geeignetem Koordinatensystem gilt:

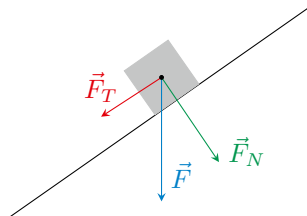
➤ $\begin{pmatrix} 15 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \end{pmatrix},$

➤ $\left| \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{15^2 + 5^2} = \sqrt{250} \approx 15,8 \text{ [km/h]}.$

➤ Kapitel 2.3.2, 2.3.6

> **Wie zerlegt man eine Kraft, und wozu ist das gut?**

Für einen Körper (hier Quadrat) auf einer schiefen Ebene kann man mit der Zerlegung der Gewichtskraft $\vec{F}$ in Tangentialkomponente $\vec{F}_T$ und Normalkomponente $\vec{F}_N$ beispielsweise die Reibungskraft bestimmen (deren Betrag proportional zu $|\vec{F}_N|$ ist).



➤ Kapitel 2.3.4

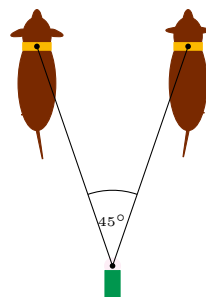
2.2. Typische Anwendungen

> A 2.1 Schlitten

N: Newton

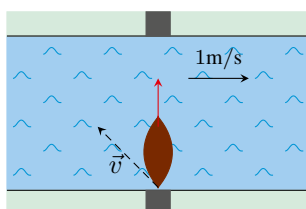
Zwei Hunde ziehen einen Schlitten auf einer ebenen Fläche. Hund 1 zieht mit einer Kraft von 20 N in eine bestimmte Richtung, Hund 2 zieht mit einer Kraft von 30 N in eine Richtung, die von der ersten um 45° abweicht.

Wie schwer darf der Schlitten maximal sein, damit die Hunde die Last bewegen können (es darf Reibungsfreiheit angenommen werden)? Was ändert sich, wenn der Winkel nur 30° beträgt?



➤ Lösungsskizze
(Seite 55)

> A 2.2 Fähre



Ein Fluss von 200 m Breite fließt mit einer Geschwindigkeit von 1 m/s (wobei vereinfachend angenommen wird, dass die Strömungsgeschwindigkeit über die gesamte Breite konstant ist). Eine Fähre mit Fahrgeschwindigkeit 4 m/s soll von einer Anlegestelle zu einer genau gegenüberliegenden übersetzen.

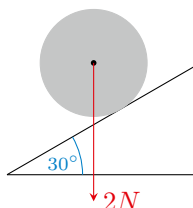
- Die Geschwindigkeit der Fähre setzt sich zusammen aus ihrer Eigengeschwindigkeit $\vec{v}$ und der Fließgeschwindigkeit des Wassers. Bestimmen Sie die Eigengeschwindigkeit $\vec{v}$ so, dass die Fähre sich stets senkrecht zur Flussrichtung bewegt. Welchen Winkel bildet $\vec{v}$ mit der Flussrichtung?
- Wie lange dauert die Überfahrt? Wie lange würde sie bei einem stehenden Gewässer dauern?

➤ Lösungsskizze
(Seite 56)

> A 2.3 Beschleunigung einer Kugel

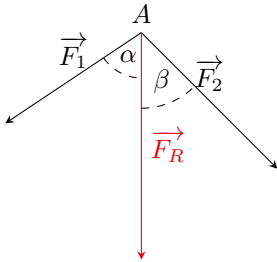
N: Newton

Welche Beschleunigung erfährt die Kugel in der folgenden Skizze?



➤ Lösungsskizze
(Seite 57)

> A 2.4 Kräftezerlegung



An einem gemeinsamen Punkt (A) wirken zwei Kräfte mit $|\vec{F}_1| = 5,3 \text{ N}$ und $|\vec{F}_2| = 6,9 \text{ N}$. Die resultierende Kraftwirkung sei mit $|\vec{F}_R| = 5,9 \text{ N}$ gegeben.

Welche Winkel bilden die Kräfte jeweils mit $\vec{F}_R$?

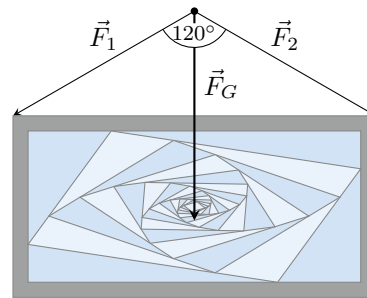
Diese Aufgabe entspricht der Anwendungsaufgabe A 1.1, die mit geometrischen Hilfsmitteln gelöst wird (s. Seite 21). Hier soll mit Hilfe der Vektorrechnung eine Lösung gefunden werden. (Tipp: Nehmen Sie $\vec{F}_R = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$ an).

➤ Lösungsskizze
(Seite 59)

> A 2.5 Bildaufhängung

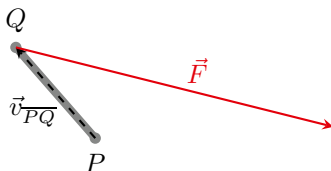
Ein Bild mit Masse 6 kg hängt an einem Haken, wobei die Schnur mit den Aufhängepunkten ein gleichschenkeliges Dreieck bildet (s. Graphik). Der Winkel an der Spitze des Dreiecks beträgt 120° .

Bestimmen Sie den Betrag der Kraft $\vec{F}_1$ (und $\vec{F}_2$) in der Schnur. (Rechnen Sie vereinfachend mit einer Erdbeschleunigung $g = 10 \text{ m/s}^2$.)



➤ Lösungsskizze
(Seite 60)

> A 2.6 Drehmoment



An einem starren Stab, der im Punkt P mit Ortsvektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ fixiert ist, greift am Endpunkt Q (Ortsvektor $\vec{q} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$) die Kraft $\vec{F} = \begin{pmatrix} -20 \\ 40 \\ 5 \end{pmatrix}$ an (Einheiten: m bzw. N).

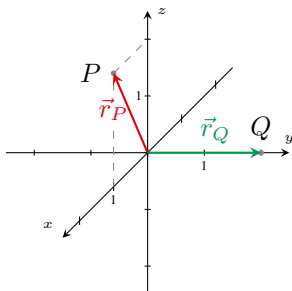
Bestimmen Sie das resultierende Drehmoment $\vec{M}$ bezüglich P.

Drehmoment:
 $\vec{M} = \vec{r}_{PQ} \times \vec{F}$

➤ Lösungsskizze
(Seite 60)

> A 2.7 Elektrische Feldstärke

Eine Punktladung Q_1 befindet sich an einem Quellpunkt Q mit dem Koordinatenvektor $\vec{r}_Q \in \mathbb{R}^3$. Der Aufpunkt P , an dem das Feld berechnet werden soll, liegt, bezogen auf den Ursprung, bei $\vec{r}_P \in \mathbb{R}^3$.



Dann ist die am Aufpunkt P herrschende Feldstärke gegeben durch

$$\vec{E}(\vec{r}_P) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3},$$

wobei ϵ_0 die elektrische Feldkonstante ist und $\vec{r} = \vec{r}_P - \vec{r}_Q$, $r = |\vec{r}|$.

Berechnen Sie die Feldstärke im Aufpunkt P für $Q_1 = 10^{-9} \text{ As}$ und

$$\vec{r}_P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{m}, \quad \vec{r}_Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{m}, \quad \epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}.$$

As: Amperesekunde
Vm: Voltmeter

> Lösungsskizze
(Seite 61)

2.3. Fakten und Regeln

2.3.1. Reelle Vektoren und ihre Darstellung

Wie bereits in den Anwendungsbeispielen in Kapitel 2.2 deutlich wird, ist das Konzept der Vektorrechnung in vielen Bereichen nützlich und vorteilhaft. Zunächst soll geklärt werden, was ein Vektor ist.

> 2.1 Was sind Vektoren?

Eine physikalische Motivation für die Einführung von Vektoren liegt darin, dass relevante Größen wie Kräfte, Geschwindigkeiten, Feldstärken etc. nicht nur durch ihre jeweilige „Stärke“ (Betrag) festgelegt sind, sondern zusätzlich durch eine Richtung gekennzeichnet sind.

Damit liegt es nahe, einen Vektor in der Ebene oder im Raum als „Pfeil“ zu veranschaulichen, wobei die symbolisierte „Stärke“ durch die Länge des „Pfeils“ repräsentiert wird. Nach Festlegung eines Koordinatensystems kann man diese „Pfeile“ auch als Paare bzw. Tripel reeller Zahlen schreiben. Diese Paare oder Tripel reeller Zahlen heißen reelle Vektoren.

(*Reelle*) *Vektoren in der Ebene* ($\mathbb{R}^2$) sind Paare reeller Zahlen, die als Spalten geschrieben werden, zum Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix},$$

und (*reelle*) *Vektoren im Raum* ($\mathbb{R}^3$) sind Tripel reeller Zahlen, die als Spalten geschrieben werden. Zum Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ 0,5 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Diese Darstellung wird als *Koordinatendarstellung* bezeichnet.

Allgemein ist die Koordinatendarstellung reeller Vektoren wie folgt definiert.

2.2 Koordinatendarstellung reeller Vektoren

In der Ebene wird ein Vektor $\vec{v}$ mit Komponenten $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$ geschrieben als

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Ein Vektor im Raum mit Komponenten $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}$ hat die Darstellung

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

2.3 Bemerkung

Auch wenn in höheren Dimensionen $n \in \mathbb{N}$ keine direkte geometrische Vorstellung mehr möglich ist, können (*reelle*) *Vektoren mit n Komponenten* $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}$ definiert werden. Sie sind in vielen Anwendungen relevant und werden dargestellt als Spalten

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Mit ihnen kann wie mit den Spaltenvektoren im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ gerechnet werden. Im Folgenden wird daher (z.B. bei Rechenoperationen) stets der allgemeine Fall von Vektoren im $\mathbb{R}^n$ ebenfalls erwähnt. Alle konkreten Rechnungen und Anwendungsaufgaben beziehen sich aber auf $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$.

Zwei Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ stimmen überein, falls sie komponentenweise übereinstimmen:

$$\vec{v} = \vec{w} \iff v_i = w_i \text{ für alle } i \in \{1, \dots, n\}.$$

> 2.4 Graphische Darstellung reeller Vektoren

Zur graphischen Darstellung eines Vektors als „Pfeil“ in der Ebene oder im Raum wird basierend auf der Koordinatendarstellung ein *kartesisches Koordinatensystem* zugrunde gelegt (s. Abbildung 2.1).

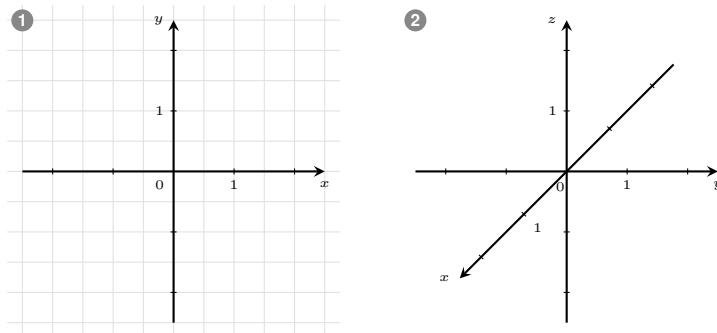


Abbildung 2.1.: Kartesisches Koordinatensystem in der Ebene ① und im Raum ②.

Um einen zugehörigen Pfeil zu einem reellen Vektor in der Ebene mit Koordinatendarstellung $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ zu zeichnen, wählt man einen beliebigen Anfangspunkt im Koordinatensystem und geht um v_1 Längeneinheiten in x -Richtung (bei positivem Vorzeichen nach rechts, bei negativem Vorzeichen nach links) und von da aus um v_2 Längeneinheiten in y -Richtung (bei positivem Vorzeichen nach oben, bei negativem Vorzeichen nach unten) weiter. Der so erreichte Punkt bildet den Endpunkt des Vektors und wird durch die „Pfeilspitze“ markiert.

Um im Weiteren zwischen Punkten und Vektoren in der Koordinatendarstellung zu unterscheiden, wird im Buch die folgende Bezeichnungsweise vereinbart.

> 2.5 Bezeichnungsweise für Punkte und Vektoren

In der Koordinatenebene werden Punkte $P = (p_1, p_2)$ als „Zeilen“ dargestellt, Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ als „Spalten“. Analoges gilt im $\mathbb{R}^3$.

> 2.6 Beispiel

Betrachtet man den reellen Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und wählt als Anfangspunkt $A = (2, 4)$, so erhält man die Darstellung des Vektors in Abbildung 2.2 mit Endpunkt $E = (5, 2)$.

Für den Vektor $\vec{v}$ wird in einer solchen Situation auch die Notation $\overrightarrow{AE}$ verwendet, die andeutet, dass der Vektor über Anfangs- und Endpunkt definiert wird.

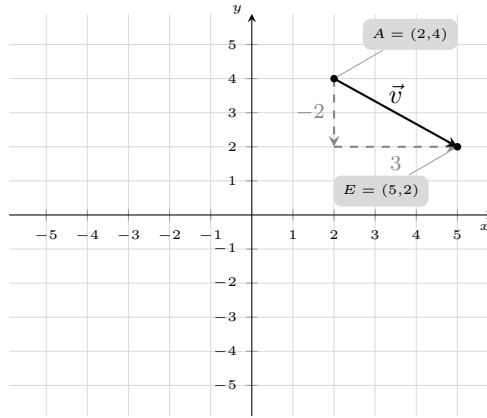


Abbildung 2.2.: Graphische Darstellung eines gegebenen Vektors in Koordinatendarstellung.

Die freie Wahl des Anfangspunktes macht die Darstellung als Pfeil im $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ zwar nicht eindeutig, ist aber aus Anwendungssicht eine sinnvolle Eigenschaft. Der jeweils ausgezeichnete Pfeil mit Anfangspunkt $(0, 0)$ bzw. $(0, 0, 0)$ wird als Ortsvektor bezeichnet.

2.7 Merkregel

Wählt man (p_1, p_2) als Anfangspunkt der Darstellung von $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ als Pfeil, so ist $(p_1 + v_1, p_2 + v_2)$ der Endpunkt des Pfeils.

Ist die Darstellung eines Vektors $\vec{v}$ in der Koordinatenebene als Pfeil mit Anfangspunkt (p_1, p_2) und Endpunkt (q_1, q_2) gegeben, so ist seine Koordinatendarstellung:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{pmatrix}.$$

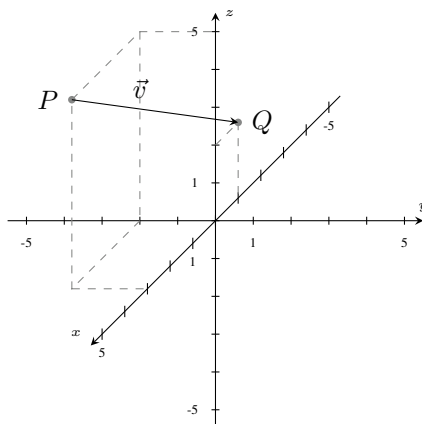
Analoges gilt auch für reelle Vektoren mit mehr als zwei Komponenten.

2.8 Beispiel

- (i) Der Endpunkt des in Beispiel 2.6 dargestellten Vektors $\vec{v}$ ist

$$Q = (2 + 3, 4 + (-2)) = (5, 2).$$

- (ii) Gegeben sei der Pfeil mit Anfangspunkt $P = (3, -2, 5)$ und Endpunkt $Q = (-1, 0, 2)$ (vgl. Abbildung 2.3).

Abbildung 2.3.: Graphische Darstellung des Vektors $\vec{v}$.

Der dadurch definierte Vektor $\vec{v}$ hat somit die Koordinatendarstellung

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 - 0 \\ 0 - (-2) \\ 3 - (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

2.3.2. Addition von Vektoren

Vektoren können addiert und subtrahiert werden. Die entsprechende Regel wird anhand einiger Beispiele illustriert. Die Addition ist grundsätzlich nur sinnvoll für Vektoren mit identischer Komponentenzahl.

2.9 Addition von Vektoren

Die Addition von Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ wird komponentenweise ausgeführt. Damit ergibt sich im

- $\mathbb{R}^2$: $\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix},$
- $\mathbb{R}^3$: $\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{pmatrix},$
- $\mathbb{R}^n$: $\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix}.$

Toolbox Mathematik für MINT-Studiengänge
Cramer, E.; Kamps, U.; Lehmann, J.; Walcher, S.
2017, XIII, 273 S. 65 Abb. in Farbe., Softcover
ISBN: 978-3-662-53629-2