

Symmetrien und Kovarianz der Maxwell'schen Gleichungen

Einführung

Schon bei einer festen Aufteilung der vierdimensionalen Raumzeit in den Raum, in dem Experimente ausgeführt werden, und in die Laborzeit zeigen die Maxwell'schen Felder ein interessantes Transformationsverhalten unter kontinuierlichen und diskreten Transformationen. Ihre volle Symmetriestruktur entfaltet sich aber erst wirklich, wenn man die Wirkung der Lorentz-Gruppe auf die Maxwell'schen Gleichungen studiert. Ihre Kovarianz unter dieser Gruppe wird besonders anschaulich am Beispiel der elektromagnetischen Felder einer gleichförmig bewegten Punktladung.

Die Reformulierung der Maxwell-Theorie in der Sprache der äußeren Formen über dem \mathbb{R}^4 wirft einerseits Licht auf einige ihrer Eigenschaften, die im Rahmen der älteren Vektoranalysis nicht so klar hervortreten, andererseits bringt sie den geometrischen Charakter dieser einfachsten aller Eichtheorien zu Tage und bereitet den Boden für das Verständnis der nicht-Abel'schen Eichtheorien, die für die Beschreibung der fundamentalen Wechselwirkungen der Natur wesentlich sind.

Inhalt

2.1 Die Maxwell'schen Gleichungen im festen Bezugssystem	91
2.2 Lorentz-Kovarianz der Maxwell'schen Gleichungen ...	111
2.3 Felder einer gleichförmig bewegten Punktladung	128
2.4 Lorentz-invariante äußere Formen und die Maxwell'schen Gleichungen ...	132

2.1 Die Maxwell'schen Gleichungen im festen Bezugssystem

In einem festen Inertialsystem, in dem \mathbf{x} die Koordinaten im gewöhnlichen Raum \mathbb{R}^3 bezeichnen und t die Koordinatenzeit ist, die ein ruhender Beobachter auf seiner Uhr abliest, lauten die Maxwell'schen Gleichungen (1.44a)–(1.44d)

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (2.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (2.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(t, \mathbf{x}) = 4\pi \varrho(t, \mathbf{x}), \quad (2.1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(t, \mathbf{x}) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(t, \mathbf{x}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(t, \mathbf{x}). \quad (2.1d)$$

Sie werden ergänzt durch die Verknüpfungsrelationen

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (2.2)$$

zwischen dem Verschiebungsfeld und dem elektrischen Feld, bzw. zwischen dem Induktions- und dem Magnetfeld, wo ε die Dielektrizitätskonstante, μ die magnetische Permeabilität ist. (Im Vakuum und bei Verwendung von Gauß'schen Einheiten sind beide gleich 1.) Die auf ein Teilchen wirkende Kraft, das die Ladung q trägt und sich relativ zum Beobachter mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegt, ist die Lorentz-Kraft (1.44e)

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{x}) = q \left[\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) \right], \quad (2.3)$$

an der besonders der zweite, geschwindigkeitsabhängige Anteil bemerkenswert ist. Schließlich notieren wir noch eine Beziehung zwischen der Stromdichte in einem gegebenen Medium und dem angelegten elektrischen Feld

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{x}) = \sigma \mathbf{E}(t, \mathbf{x}), \quad (2.4)$$

in der σ pauschal die Leitfähigkeit des Mediums beschreibt.

Das Bezugssystem im $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_t$, in dem diese Gleichungen formuliert sind, wird für's Erste durch den Beobachter definiert, der seinen Ort als Ursprung interpretiert und im Übrigen geeignete Koordinaten im \mathbb{R}^3 auswählt und seine Uhr zur Messung der Zeit verwendet. Ein Experimentator misst das *elektrische* Feld mit Instrumenten, die von denen verschieden sind, mit denen er *magnetische* Felder misst. Insofern wird die spezifische Natur dieser beiden ansonsten ähnlichen physikalischen Vektorfelder empirisch eindeutig festgestellt. Diese Bemerkung, die scheinbar eine Selbstverständlichkeit ausdrückt, wird wichtig werden, wenn wir fragen, ob ein elektrisches oder ein magnetisches Feld für einen zweiten Beobachter, der sich relativ zum ersten Beobachter mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, ein elektrisches bzw. magnetisches Feld bleibt.

2.1.1 Drehungen und diskrete Raum-Zeittransformationen

Bevor wir der eben gestellten Frage nachgehen, bleiben wir noch eine Weile in dem von besagtem Beobachter ausgewählten Inertialsystem und untersuchen die Kovarianz der Gleichungen (2.1a)–(2.4) unter Drehungen, unter Raum- bzw. Zeitspiegelung sowie unter Ladungskonjugation.

a) Drehungen des Bezugssystems im \mathbb{R}^3

Unter Drehungen $\mathbf{R} \in \text{SO}(3)$, d. h. unter Koordinatentransformationen

$$(t, \mathbf{x})^T \longmapsto (t' = t, \mathbf{x}' = \mathbf{R}\mathbf{x})^T, \quad \text{die} \quad \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbb{1}, \det \mathbf{R} = +1$$

erfüllen, bleibt ein Skalarfeld φ invariant,

$$\varphi(t, \mathbf{x}) \longmapsto \varphi'(t', \mathbf{x}') = \varphi(t, \mathbf{x}), \quad (2.5a)$$

während ein Vektorfeld sich gemäß

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) \mapsto \mathbf{A}'(t', \mathbf{x}') = \mathbf{R}\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) \quad (2.5b)$$

transformiert. (Hier haben wir ausgenutzt, dass in der orthogonalen Gruppe $SO(3)$ die Inverse der Transponierten gleich der ursprünglichen Matrix ist, $(\mathbf{R}^T)^{-1} = \mathbf{R}$.) Lässt man Transformationen aus $O(3)$ zu, d. h. auch solche Transformationen $\tilde{\mathbf{R}} \in O(3)$, deren Determinante gleich -1 ist und die daher als Produkt aus einem $\mathbf{R} \in SO(3)$ und der Raumspiegelung Π geschrieben werden können, dann gibt es auch Felder $\tilde{\varphi}$ des ersten Typs (2.5a), die zwar drehinvariant sind, aber bei Raumspiegelung einen Faktor $\det \tilde{\mathbf{R}} = -1$ erhalten. Auch bei der zweiten Kategorie gibt es Felder $\tilde{\mathbf{A}}$, die außer dem Transformationsverhalten (2.5b) denselben Faktor $\det \tilde{\mathbf{R}}$ erhalten. Mit $\mathbf{R} \in SO(3)$ und mit $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\Pi$ gilt für diese

$$\tilde{\varphi}(t, \mathbf{x}) \mapsto \tilde{\varphi}'(t', \mathbf{x}') = (\det \tilde{\mathbf{R}}) \tilde{\varphi}(t, \mathbf{x}), \quad (2.6a)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}(t, \mathbf{x}) \mapsto \tilde{\mathbf{A}}'(t', \mathbf{x}') = (\det \tilde{\mathbf{R}}) \mathbf{R}\tilde{\mathbf{A}}(t, \mathbf{x}). \quad (2.6b)$$

Obwohl – geometrisch gesprochen – hier kein Skalarfeld bzw. Vektorfeld vorliegt, sind die in der Physik gebräuchlichen Bezeichnungen *Pseudoskalarfeld* für $\tilde{\varphi}(t, \mathbf{x})$, bzw. *Axialvektorfeld* für $\tilde{\mathbf{A}}(t, \mathbf{x})$ überaus nützlich. Einige Beispiele über dem \mathbb{R}^3 mögen dies illustrieren:

(i) Eine Geschwindigkeit \mathbf{v} ist ebenso wie der Impuls \mathbf{p} ein echter Vektor, d. h. transformiert sich unter Drehungen $\mathbf{R} \in SO(3)$ wie in (2.5b) angegeben. Wenn sie in glatter Weise über \mathbb{R}^3 definiert sind, dann werden daraus Vektorfelder. Der Bahndrehimpuls $\boldsymbol{\ell} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$ dagegen ist ein Axialvektor: bei einer Raumspiegelung ändern \mathbf{x} und \mathbf{p} beide ihr Vorzeichen, nicht aber $\boldsymbol{\ell}$.

(ii) Das Skalarprodukt $\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}$ ist ein Skalar, ebenso das Skalarprodukt $\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\ell}$ aus einem Spin und einem Bahndrehimpuls, die Produkte $\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\ell}$ und $\mathbf{x} \cdot \mathbf{s}$ sind dagegen Pseudoskalar.

Was die Größen (2.6a) und (2.6b) geometrisch wirklich bedeuten, in der Sprache der äußeren Formen, wird weiter unten in Abschn. 2.4.3 klar werden. Für den Moment behalten wir die eben definierte Terminologie bei.

Ein Blick auf die Maxwell'schen Gleichungen (2.1a)–(2.1b) zeigt, dass sie unter Drehungen aus $SO(3)$ kovariant sind, wenn die Felder \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{H} , \mathbf{B} und die Stromdichte \mathbf{j} gemäß (2.5b), die Ladungsdichte ϱ gemäß (2.5a) transformieren. In der ersten Gleichung (2.1a) steht die Divergenz von \mathbf{B} , die unter $\mathbf{R} \in SO(3)$ ein Skalar ist. In der zweiten (2.1b) gilt für den ersten Term

$$(\nabla' \times \mathbf{E}') = (\mathbf{R}\nabla) \times (\mathbf{R}\mathbf{E}) = \mathbf{R}(\nabla \times \mathbf{E}),$$

und für den zweiten Term ganz offensichtlich

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}' = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{R}\mathbf{B}) = \mathbf{R} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \right),$$

womit die Kovarianz von (2.1b) erwiesen ist. Eine ähnliche Argumentation zeigt die Kovarianz der beiden inhomogenen Maxwell'schen Gleichungen (2.1c) und (2.1d). Alle Terme, die durch die Maxwell'schen Gleichungen verknüpft werden, haben dasselbe Transformationsverhalten.

b) Raumspiegelung des Bezugssystems

Das Verhalten der Maxwell'schen Gleichungen unter Spiegelung der räumlichen Koordinaten am Ursprung,

$$(t, \mathbf{x})^T \longmapsto (t' = t, \mathbf{x}' = -\mathbf{x})^T$$

ist weniger offensichtlich. Zunächst stellt man fest, dass die Rotation eines echten Vektorfeldes (im \mathbb{R}^3) ein Axialvektorfeld ist,

$$\mathbf{A}'(t', \mathbf{x}') = -\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) \iff \nabla' \times \mathbf{A}'(t', \mathbf{x}') = +\nabla \times \mathbf{A}(t, \mathbf{x}),$$

während die Rotation eines Axialvektorfeldes wieder ein Vektorfeld ist. Mit diesem Wissen ausgestattet sieht man, dass die Maxwell'schen Gleichungen unter der Raumspiegelung invariant sind, wenn

\mathbf{E} , \mathbf{D} und \mathbf{j} Vektorfelder sind,

\mathbf{B} und \mathbf{H} Axialvektorfelder sind,

ϱ ein Skalarfeld ist.

Dies scheint vernünftig, wenn man sich einige konkrete physikalische Anordnungen in Erinnerung ruft, bei denen elektrische oder magnetische Felder entstehen. So ist z. B. das elektrische Feld einer ruhenden Punktladung

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

proportional zum Ortsvektor \mathbf{r} , mit Vorfaktoren, die unter Π invariant bleiben, und ist somit ein Vektorfeld. Eine Stromdichte \mathbf{j} kann man durch den Fluss von punktförmigen Ladungen modellieren, die mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} durch den Raum strömen. Auch dies ist ein echtes Vektorfeld. Die magnetische Dipoldichte (1.120a) ist dem Kreuzprodukt aus \mathbf{x} und $\mathbf{j}(\mathbf{x})$ proportional und ist daher ein Axialvektorfeld. Dieselbe Aussage gilt auch für das entsprechende Induktionsfeld (1.124b). Die Ladungsdichte schließlich muss schon deshalb ein Skalarfeld sein, weil die Kontinuitätsgleichung (1.21) die Zeitableitung von ϱ mit der Divergenz der Stromdichte verknüpft und als Ganzes invariant sein muss.

Wiederum verweisen wir auf die geometrische Formulierung der Maxwell-Theorie, um den eben festgestellten Unterschied zwischen den elektrischen Größen \mathbf{E} und \mathbf{D} einerseits und den magnetischen Größen \mathbf{B} und \mathbf{H} andererseits klarer herauszuarbeiten. Dabei wird sich herausstellen, dass die ersten beiden zu äußeren *Eins*formen äquivalent sind, die beiden letzten dagegen zu äußeren *Zwei*formen.

c) Verhalten unter Zeitumkehr

Es ist sicher sinnvoll zu fordern, dass die Ladungsdichte $\varrho(t, \mathbf{x})$ nicht davon abhängt, in welcher Richtung, in die Zukunft oder die Vergangenheit, die Zeit abläuft, d. h. dass sie unter der Zeitumkehr **T** invariant ist,

$$\varrho'(t', \mathbf{x}') = \varrho(t, \mathbf{x}), \quad t' = -t, \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x}.$$

Dann folgt aus der Kontinuitätsgleichung, die die erste Ableitung der Ladungsdichte nach der Zeit enthält, dass die Stromdichte *ungerade* sein muss, $\mathbf{j}'(t', \mathbf{x}') = -\mathbf{j}(t, \mathbf{x})$ – eine Eigenschaft, die man auch aufgrund der oben entwickelten Modellvorstellung erwartet. Damit die beiden inhomogenen Maxwell'schen Gleichungen (2.1c) und (2.1d) invariant bleiben, muss

$$\mathbf{H}'(t', \mathbf{x}') = -\mathbf{H}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{D}'(t', \mathbf{x}') = +\mathbf{D}(t, \mathbf{x})$$

gelten. Das elektrische Feld \mathbf{E} transformiert sich wie das Verschiebungsfeld \mathbf{D} , das Induktionsfeld \mathbf{B} wie das magnetische Feld \mathbf{H} .

d) Die Ladungskonjugation

Besonders interessant und neu gegenüber der Mechanik ist die Frage, wie die Maxwell'schen Gleichungen sich verhalten, wenn man die Vorzeichen aller darin vorkommenden Ladungen umkehrt. Dies ist die Operation der *Ladungskonjugation* **C**, die in der quantentheoretischen Dynamik eine wichtige Rolle spielt. Auf ein Wasserstoffatom angewandt, als Beispiel, heißt dies, dass man das Proton p durch \bar{p} , ein Antiproton, das Elektron e^- durch ein Positron e^+ ersetzt.

Per Definition kehren sowohl die Ladungsdichte als auch die Stromdichte ihre Vorzeichen um, symbolisch geschrieben also $\mathbf{C}\varrho(t, \mathbf{x}) = -\varrho(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{C}\mathbf{j}(t, \mathbf{x}) = -\mathbf{j}(t, \mathbf{x})$. Aus (2.1c) und der ersten dieser Beziehungen folgt, dass das Verschiebungsfeld \mathbf{D} sein Vorzeichen ebenfalls umkehrt. Dies gilt dann auch für das elektrische Feld. Die zweite Beziehung, zusammen mit (2.1d), verlangt, dass \mathbf{H} und damit auch \mathbf{B} ebenfalls ungerade sind. Insgesamt also

$$\begin{aligned} \mathbf{C}\mathbf{D}(t, \mathbf{x}) &= -\mathbf{D}(t, \mathbf{x}), & \mathbf{C}\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) &= -\mathbf{E}(t, \mathbf{x}), \\ \mathbf{C}\mathbf{H}(t, \mathbf{x}) &= -\mathbf{H}(t, \mathbf{x}), & \mathbf{C}\mathbf{B}(t, \mathbf{x}) &= -\mathbf{B}(t, \mathbf{x}). \end{aligned}$$

Auch diese Transformationsregeln sind einleuchtend: wenn man die Ladungen, die die Quellen für das elektrische Feld sind, im Vorzeichen umkehrt ohne ihren Betrag zu ändern, dann kehrt sich das elektrische Feld überall von $\mathbf{E}(t, \mathbf{x})$ zu $-\mathbf{E}(t, \mathbf{x})$ um. Da auch alle Stromdichten ihr Vorzeichen ändern, gilt dies auch für die dadurch hervorgerufenen Magnetfelder.

Insgesamt stellen wir fest, dass die Maxwell'schen Gleichungen unter den Drehungen im festgehaltenen Bezugssystem sowie unter den diskreten Transformationen **Π** , **T** und **C** kovariant sind. Ob allerdings

diese diskreten Transformationen im Sinne der Quantenmechanik erhalten sind, ist eine Frage nach den anderen Wechselwirkungen als der Elektrodynamik, denen die Bausteine der Materie unterworfen sind. Die elektromagnetische Wechselwirkung, für sich genommen, ist in der Tat invariant unter Raumspiegelung und Zeitumkehr sowie unter Ladungskonjugation. In einer Welt, in der man alle Protonen durch Antiprotonen, alle Neutronen durch Antineutronen und alle Elektronen durch Positronen ersetzt, haben die Atome dieselben gebundenen Zustände, die Spektrallinien der Atomphysik sind dieselben wie in unserer gewohnten Welt.

2.1.2 Die Maxwell'schen Gleichungen und äußere Formen

In diesem Abschnitt gehen wir zum ersten, aber nicht zum letzten Mal der geometrischen Natur der in den Maxwell'schen Gleichungen auftretenden physikalischen Größen nach. Insbesondere klären wir die wahre Bedeutung dessen, was man in der physikalisch-intuitiven Sprache Pseudoskalar und Axialvektor nennt. Dies tun wir anhand einer kurzen Zusammenstellung der wichtigsten Definitionen und Eigenschaften des äußeren Differentialkalküls auf Euklidischen Räumen \mathbb{R}^n , verweisen für eine ausführlichere und allgemeinere Darstellung aber auch auf Band 1, Kap. 5.

a) Äußere Formen auf \mathbb{R}^n

Äußere Einsformen $\overset{1}{\omega}$ im Punkt $x \in M = \mathbb{R}^n$ sind lineare Abbildungen der Tangentialvektoren an M in x , d. h. von Elementen des Tangentialraums $T_x M$ in die reellen Zahlen,

$$\overset{1}{\omega} : T_x M \longrightarrow \mathbb{R} : v \longmapsto \overset{1}{\omega}(v). \quad (2.7a)$$

Ein wichtiges Beispiel, das der unmittelbaren Anschauung entgegenkommt, ist das totale Differential df einer glatten Funktion auf \mathbb{R}^n , für welches

$$df(v)|_x = v(f)(x) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_x \equiv \sum_{i=1}^n v^i \partial_i f \Big|_x \quad (2.7b)$$

die Richtungsableitung der Funktion f am Punkt x und entlang der Richtung von v darstellt. Die Wirkung von df auf den Tangentialvektor v ist gleich der Wirkung $v(f)$ dieses Vektors auf die Funktion und ist nichts Anderes als die Ableitung von f in der von v vorgegebenen Richtung. Die Richtungsableitung ist in der Tat eine reelle Zahl. In der Formalisierung (2.7b) dieser Aussagen haben wir gleich die kompakte Notation

$$\partial_i f := \frac{\partial f}{\partial x^i} \quad (2.7c)$$

für die Ableitung nach der kontravarianten Komponente x^i eingeführt, die selbst kovariant ist.

Die Menge der linearen Abbildungen von $T_x M$ nach \mathbb{R} liegt (definitionsgemäß) im dazu dualen Vektorraum $T_x^* M$, dem sog. *Kotangentenraum*, der ebenso wie $T_x M$ an den Punkt x „angeheftet“ wird.

Bemerkung

Wenn M eine n -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit ist, die kein \mathbb{R}^n ist, dann muss man einen vollständigen Atlas mit lokalen Karten (oder, wie man auch sagt, Koordinatensystemen) (φ, U) verwenden, wo U eine offene Umgebung des Punktes $p \in M$ ist und

$$\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^n : U \mapsto \varphi(U)$$

ein Homöomorphismus von U auf M in das Bild $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ ist. Bezeichnet man die lokalen Koordinaten in dieser Karte mit $\{x^i\}$, $i = 1, \dots, n$, so ist die partielle Ableitung einer Funktion f durch

$$\partial_i^{(\varphi)} \Big|_p (f) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p)) \quad (2.8)$$

gegeben. Nur die Zusammensetzung aus $\varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow M$ und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine reelle Funktion auf \mathbb{R}^n , die man nach den Regeln der Analysis differenzieren kann. Ist die Mannigfaltigkeit selbst ein \mathbb{R}^n , dann vereinfachen sich die Verhältnisse: Für $M = \mathbb{R}^n$ benötigt man nur eine einzige Karte $U = M$ und kann als Kartenabbildung $\varphi = \text{id}$, die identische Abbildung, verwenden. In diesem Fall gilt der ursprünglich lokale Ausdruck (2.8) auf ganz M und vereinfacht sich zur gewohnten partiellen Ableitung (2.7c) der reellen Analysis.

Wenn $v(f)$ die Richtungsableitung der Funktion f im Punkt x und wenn $\partial_i f$ die partielle Ableitung nach der Koordinate x^i ist, dann ist

$$v = \sum_{i=1}^n v^i \partial_i$$

die Zerlegung des Vektors v nach den Basisfeldern $\{\partial_i\}$, $i = 1, \dots, n$. Diese spannen den Tangentialraum $T_x M$ auf. Im Fall des \mathbb{R}^n kann man aber alle Tangentialräume untereinander und mit der Mannigfaltigkeit selbst identifizieren. Dies bedeutet, dass man jedes glatte Vektorfeld V auf $M = \mathbb{R}^n$ in der Form

$$V = \sum_{i=1}^n v^i(x) \partial_i \quad (2.9)$$

zerlegen kann, wobei die Koeffizienten $v^i(x)$ glatte Funktionen sind.

Natürlich sind auch die Koordinaten x^i glatte Funktionen auf M : x^i ordnet dem Punkt $x \in M$ seine i -te Koordinate zu. Die Differentiale dx^i dieser Funktionen sind Einsformen, die *Basis-Einsformen* genannt werden. Die Gesamtheit der $\{dx^i\}$, $i = 1, \dots, n$, ist dual zur Basis $\{\partial_i\}$,

denn es gilt

$$dx^i(\partial_k) = \partial_k(x^i) \equiv \frac{\partial}{\partial x^k} x^i = \delta_k^i.$$

Daher kann man jede Einsform $\overset{1}{\omega} \in T_x^*M$ nach dieser Basis entwickeln, $\overset{1}{\omega} = \sum \omega_i dx^i$.

Glatt heißt eine Einsform $\overset{1}{\omega}$, wenn sie überall auf M definiert ist und wenn $\overset{1}{\omega}(V)$ für alle glatten Vektorfelder $V \in \mathcal{V}(M)$ eine glatte Funktion ist. Auf $M = \mathbb{R}^n$ heißt das, dass man jede Einsform $\overset{1}{\omega}$ durch die Entwicklung

$$\overset{1}{\omega} = \sum_{i=1}^n \omega_i(x) dx^i \quad (2.10)$$

darstellen kann, in der die n Koeffizienten $\omega_i(x)$ glatte Funktionen sind. Diese Koeffizientenfunktionen lassen sich aus der Wirkung der Form auf die Basis-Vektorfelder berechnen, d. h.

$$\omega_i(x) = \overset{1}{\omega}(\partial_i);$$

die Wirkung auf ein beliebiges, glattes Vektorfeld ist somit

$$\overset{1}{\omega}(V) = \sum_{i=1}^n V^i(x) \omega_i(x),$$

wo

$$V = \sum_j V^j(x) \partial_j \quad \text{und} \quad \overset{1}{\omega} = \sum_k \omega_k(x) dx^k.$$

Für äußere Formen gibt es ein schiefsymmetrisches, assoziatives Produkt, das sog. *äußere Produkt*, das am Einfachsten für Basis-Einsformen und durch deren Wirkung auf Vektoren wie folgt definiert wird¹

$$(dx^i \wedge dx^j)(v, w) = v^i w^j - v^j w^i = \det \begin{pmatrix} v^i & w^i \\ v^j & w^j \end{pmatrix}, \quad (2.11a)$$

worin die Antisymmetrie

$$dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i \quad (2.11b)$$

benutzt wurde. Wie man am folgenden Beispiel sieht, ist dies die direkte Verallgemeinerung des bekannten Kreuzproduktes im \mathbb{R}^3 :

Im \mathbb{R}^3 gibt es drei Basis-Einsformen, dx^1 , dx^2 und dx^3 . Wendet man das Dachprodukt der zweiten und der dritten hiervon auf zwei Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} an,

$$(dx^2 \wedge dx^3)(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a^2 b^3 - a^3 b^2 = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_1 \quad (\text{auf } \mathbb{R}^3),$$

so ist das Ergebnis die erste Komponente des Kreuzprodukts. Diese Formel um die beiden zyklischen Permutationen der Indizes ergänzt, ergibt das volle Kreuzprodukt $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

¹ Das äußere Produkt wird auch „Dachprodukt“, auf englisch *wedge product* genannt.

Das äußere Produkt lässt sich auf drei oder mehr Faktoren fortsetzen, so z. B. für drei Basis-Einsformen und drei Tangentialvektoren

$$(\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k)(u, v, w) = \det \begin{pmatrix} u^i & v^i & w^i \\ u^j & v^j & w^j \\ u^k & v^k & w^k \end{pmatrix} \quad (2.11c)$$

An dieser Formel wird offensichtlich, dass keine Klammern gesetzt werden müssen, d. h. dass $(\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j) \wedge \mathrm{d}x^k$ das Gleiche ist wie $\mathrm{d}x^i \wedge (\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k)$. (Im zweiten Beispiel entspricht die Klammersetzung der Entwicklung der Determinante nach der ersten Zeile.)

Die Produkte $\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j$ mit $i < j$, von denen es $n(n-1)/2 = \binom{n}{2}$ Stück gibt, sind Elemente aus $T_x^* \times T_x^*$, die überdies antisymmetrisch sind. Ihre Gesamtheit bildet eine Basis für beliebige glatte *Zweiformalen*

$$\stackrel{2}{\omega} = \sum_{i < j} \omega_{ij}(x) \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j. \quad (2.12)$$

Die Koeffizienten $\omega_{ij}(x)$ sind dabei glatte Funktionen auf $M = \mathbb{R}^n$. In der Sprache der klassischen Tensoranalysis ist ein solches $\stackrel{2}{\omega}$ ein Tensorfeld vom Typus $(0, 2)$

$$\stackrel{2}{\omega} \in \mathfrak{T}_2^0(M),$$

das überdies antisymmetrisch ist. Die Koeffizienten ω_{ij} geben seine Darstellung in Koordinaten und in der Form eines kovarianten, antisymmetrischen Tensors zweiter Stufe.

Die Kette der Basisformen lässt sich in endlich vielen Schritten bis zum Dachprodukt von n Basis-Einsformen fortsetzen. Dabei entstehen Basis- k -Formen $\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \mathrm{d}x^{i_2} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$, $k = 3, \dots, n$, von denen es jeweils $\binom{n}{k}$ Stück gibt. Mit deren Hilfe kann man glatte k -Formen konstruieren

$$\stackrel{k}{\omega} = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k}(x) \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}, \quad (2.13)$$

wo die Koeffizienten $\omega_{i_1 \dots i_k}(x)$ wiederum glatte Funktionen auf \mathbb{R}^n sind.

Die äußere Form $\stackrel{k}{\omega}$ liegt in $\mathfrak{T}_k^0(M)$, d. h. im Raum der kovarianten Tensorfelder k -ter Stufe und ist außerdem in allen k Vektorfeldern, auf die sie angewandt wird, antisymmetrisch. Für die Räume der antisymmetrischen, kovarianten Tensorfelder hat sich eine eigene Notation eingebürgert, nämlich

$$\stackrel{k}{\omega} \in \Lambda^k(M). \quad (2.14)$$

Es ist nicht schwer, z. B. anhand der Basiselemente $\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \mathrm{d}x^{i_2} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$ die Dimension dieser Räume abzuzählen: Die Dimension von

$\Lambda^k(M)$ ist (s. Aufgabe 2.1)

$$\dim \Lambda^k(M) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

So hat Λ^1 die Dimension n , ebenso wie Λ^{n-1} . Λ^n hat die Dimension 1, während es keinen Raum Λ^m gibt, dessen Grad größer als n ist.

b) Die äußere Ableitung

Die äußere Ableitung ist die Verallgemeinerung des totalen Differentials bei Funktionen, des Gradienten, der Rotation und der Divergenz bei Vektorfeldern im \mathbb{R}^3 , und hat folgende Eigenschaften: Sie bildet k -Formen auf $(k+1)$ -Formen ab (die gleich null sein können),

$$d : \Lambda^k(M) \rightarrow \Lambda^{k+1}(M) : \omega \mapsto d\omega ; \quad (2.15a)$$

Auf den glatten Funktionen gibt sie das totale Differential

$$df \mapsto df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i ; \quad (2.15b)$$

Sie erfüllt eine gradierte, d. h. mit Vorzeichen versehene Leibniz-Regel: Angewandt auf das äußere Produkt einer r - und einer s -Form ($r, s = 0, 1, \dots, n$) gibt sie

$$d(\overset{r}{\omega} \wedge \overset{s}{\omega}) = (d\overset{r}{\omega}) \wedge \overset{s}{\omega} + (-)^r \overset{r}{\omega} \wedge (d\overset{s}{\omega}) . \quad (2.15c)$$

Dies ist ähnlich wie die gewohnte Produktregel der Differentialrechnung, mit dem Unterschied, dass der zweite Term sein Pluszeichen nur dann behält, wenn die erste Form eine *geradzahlige* äußere Form war, aber ein Minuszeichen erhält, wenn ihr Grad r *ungerade* ist. Als Faustregel kann man sich merken, dass das „Vorbeiziehen“ von d an einer r -Form ein Vorzeichen $(-)^r$ liefert. Klarerweise liegt das äußere Produkt $\overset{r}{\omega} \wedge \overset{s}{\omega}$ in Λ^{r+s} , die äußere Ableitung davon liegt in Λ^{r+s+1} .

Wendet man d zweimal hintereinander an, so ist das Resultat immer null

$$d \circ d = 0 . \quad (2.15d)$$

Eine für die Praxis nützliche Rechenregel ist folgende Formel für die äußere Ableitung einer k -Form in der Darstellung (2.13)

$$\begin{aligned} d\overset{k}{\omega} &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} d\omega_{i_1 \dots i_k}(x) \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_k} \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_k}(x)}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} . \end{aligned} \quad (2.15e)$$

Hierbei tritt das totale Differential der Funktionen $\omega_{i_1, \dots, i_k}(x^1, \dots, x^n)$ auf und ist nach der Regel (2.15b) für Funktionen zu berechnen. Am

Theoretische Physik 3

Klassische Feldtheorie: Von Elektrodynamik,
nicht-Abelschen Eichtheorien und Gravitation

Scheck, F.

2017, XVI, 438 S. 69 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-662-53638-4