

1.1 Einführung und Beispiele multiplikativer Funktionen

Eine **arithmetische Funktion** ist eine komplexwertige Funktion, die auf der Menge der natürlichen Zahlen definiert ist. Auch wenn viele Beispiele solcher Funktionen auf völlig beliebige Art definiert werden können, tauchen die interessantesten dadurch auf, dass sie gewisse arithmetische Eigenschaften codieren. Die nachfolgenden ersten Beispiele erscheinen auf diese Art und Weise.

- (i) Die **Eulersche φ -Funktion**¹ wird folgendermaßen definiert:

$$\varphi(n) := \#\{m \in \mathbb{N} : 1 \leq m \leq n, (m; n) = 1\}$$

wobei $(m; n)$ den **größten gemeinsamen Teiler** von m und n bezeichnet.

- (ii) Für eine natürliche Zahl k wird die **Teilersummen-Funktion** σ_k durch

$$\sigma_k(n) := \sum_{d|n} d^k$$

definiert. Im Speziellen ist

$$\sigma(n) := \sigma_1(n) = \sum_{d|n} d$$

die Summe der Teiler von n und

$$\tau(n) := \sigma_0(n) = \sum_{d|n} 1$$

die Anzahl der Teiler von n (wenn in diesem Buch von Teilern gesprochen wird, dann sind stets nur die positiven Teiler gemeint).

¹ Leonhard Euler (1707–1783)

(iii) Für eine natürliche Zahl k wird die Funktion ζ_k durch

$$\zeta_k(n) := n^k \quad (1.1)$$

definiert. Die Funktion $\mathbb{1} := \zeta_0$ mit $\mathbb{1}(n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ heißt **arithmetische Zeta-Funktion**.

Es existieren mehrere nützliche arithmetische Verknüpfungen auf der Menge der arithmetischen Funktionen. Sind f und g arithmetische Funktionen, dann wird deren **Summe** $f + g$ und deren **Produkt** fg punktweise definiert:

$$\begin{aligned} (f + g)(n) &:= f(n) + g(n) \\ (fg)(n) &:= f(n)g(n) \end{aligned}$$

Die Addition und Multiplikation arithmetischer Funktionen ist in natürlicher Weise kommutativ, assoziativ und distributiv.

Die **Dirichlet-Faltung**² $f * g$ von f und g wird durch

$$(f * g) := \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$$

definiert. Beispielsweise gilt damit $\sigma_k = \zeta_k * \mathbb{1}$.

Lemma 1.1 Sind f, g und h arithmetische Funktionen dann gelten die folgende Aussagen:

- (i) $f * g = g * f$
- (ii) $(f * g) * h = f * (g * h)$
- (iii) $f * (g + h) = f * g + f * h$

Beweis Aussage (i) folgt aus der Tatsache, dass mit d auch $\frac{n}{d}$ über alle Teiler von n läuft. Desweiteren gilt

$$(f * (g * h))(n) = \sum_{d|n} f(d) \sum_{e|\frac{n}{d}} g(e) h\left(\frac{n}{de}\right)$$

und mit $D = de$ ist dies äquivalent zu

$$\sum_{D|n} \left(\sum_{e|D} f\left(\frac{D}{e}\right) g(e) \right) h\left(\frac{n}{D}\right) = ((f * g) * h)(n)$$

² Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859)

was Aussage (ii) beweist. Für den Nachweis von Aussage (iii) bemerkt man

$$\begin{aligned}
 (f * (g + h))(n) &= \sum_{d|n} f(d) \left(g\left(\frac{n}{d}\right) + h\left(\frac{n}{d}\right) \right) \\
 &= \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right) + \sum_{d|n} f(d) h\left(\frac{n}{d}\right) \\
 &= (f * g)(n) + (f * h)(n) \\
 &= (f * g + f * h)(n)
 \end{aligned}$$

was den Beweis abschließt. $\square$

Hieraus ergibt sich in der Sprache der abstrakten Algebra, dass die Menge der arithmetischen Funktionen zusammen mit den binären Verknüpfungen Addition und Faltung einen kommutativen Ring $(\mathcal{A}, +, *)$ bildet. Der Ring $\mathcal{A}$ besitzt das Einselement δ , definiert durch

$$\delta(n) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } n = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.2)$$

Wie sich leicht nachrechnen lässt, gilt damit $f * \delta = \delta * f = f$ für jede arithmetische Funktion f .

Für eine arithmetische Funktion f wird eine arithmetische Funktion g mit der Eigenschaft $f * g = g * f = \delta$ eine **inverse Funktion** genannt. Sind g und g' zwei Funktionen mit dieser Eigenschaft, dann gilt

$$g = \delta * g = (g' * f) * g = g' * (f * g) = g' * \delta = g'$$

woraus folgt, dass, wenn eine inverse Funktion existiert, diese eindeutig ist. Für die zu f inverse Funktion wird die Notation f^{-1} verwendet. Die invertierbaren Elemente des Rings $\mathcal{A}$ sind die Einheiten von $\mathcal{A}$.

Lemma 1.2 *Eine arithmetische Funktion f hat genau dann ein Inverses, wenn $f(1) \neq 0$.*

Beweis Angenommen f hat ein Inverses. Dann gilt

$$1 = \delta(1) = (f * f^{-1})(1) = f(1)f^{-1}(1)$$

also auch $f(1) \neq 0$. Umgekehrt, ist $f(1) \neq 0$, dann definieren wir eine Funktion g rekursiv durch

$$g(1) := \frac{1}{f(1)}$$

und für $n > 1$

$$g(n) := -\frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{d|n \\ d>1}} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right) \quad (1.3)$$

Dann gilt $f * g = \delta$ und $g * f = \delta$ und damit nach Lemma 1.1, dass g die zu f inverse arithmetische Funktion ist. $\square$

Hieraus ergibt sich, dass auch die arithmetische Zeta-Funktion $\mathbb{1}$ eine inverse Funktion besitzt. Diese wird mit μ bezeichnet und heißt **Möbius-Funktion**³. Da $\mu * \mathbb{1} = \delta$ ist, gilt

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } n = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Insbesondere gilt für eine Primzahl p und für alle natürlichen Zahlen $a \geq 1$

$$\sum_{j=0}^a \mu(p^j) = 0$$

Daraus folgt $\mu(1) = 1$, $\mu(p) = -1$ und $\mu(p^a) = 0$ für alle $a \geq 2$. Sind f und g arithmetische Funktionen mit der Eigenschaft $f = g * \mathbb{1}$, dann gilt $f * \mu = g$. Dies ist die klassische **Möbius-Umkehrformel**. Die umgekehrte Aussage, das heißt $(f * \mu = g) \Rightarrow (f = g * \mathbb{1})$, ist ebenfalls wahr, da $\mathbb{1}$ und μ zueinander inverse Funktionen sind. Diese Aussagen haben einen stärkeren visuellen Effekt, wenn die Summenschreibweise verwendet wird:

Satz 1.3 (Möbius-Umkehrformel) Sind f und g arithmetische Funktionen, dann gilt

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d)$$

genau dann, wenn

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Beispielsweise folgt damit aus

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$$

die Gültigkeit von

$$n^k = \sum_{d|n} \sigma_k(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

³ August Ferdinand Möbius (1790–1868)

Satz 1.3 kann genutzt werden, um eine Formel für $\varphi(n)$ zu finden.

Lemma 1.4 *Definiert man für $d \mid n$ die Mengen S_d durch*

$$S_d := \left\{ m \frac{n}{d} : 1 \leq m \leq d, (m; d) = 1 \right\}$$

*Dann bilden die Mengen S_d eine **Partition** der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$, wenn d über alle Teiler von n läuft. Das heißt für zwei Teiler $d \mid n, e \mid n$ mit $d \neq e$ gilt*

$$S_d \cap S_e = \emptyset$$

und

$$\bigcup_{d \mid n} S_d = \{1, 2, \dots, n\}$$

Beweis Angenommen $S_d \cap S_e$ ist nicht leer. Dann existieren x und y mit $1 \leq x \leq d, 1 \leq y \leq e, (x; d) = 1 = (y; e)$ und $x \frac{n}{d} = y \frac{n}{e}$, also $xe = yd$. Da x und d keinen gemeinsamen Teiler besitzen, folgt $x \mid y$, und analog $y \mid x$. Das bedeutet aber $x = y$ und $d = e$. Ist $1 \leq m \leq n, (m; n) = \frac{n}{d}$ und $m = x \frac{n}{d}$, dann ist $(x; d) = 1$ und $1 \leq x \leq m \frac{d}{n} \leq d$, also $m \in S_d$. $\square$

Die Menge S_d hat genau $\varphi(d)$ Elemente, woraus sich

$$n = \sum_{d \mid n} \varphi(d)$$

ergibt. Nach Satz 1.3 gilt also auch

$$\varphi(n) = \sum_{d \mid n} d \mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

Für den Spezialfall einer Primzahlpotenz gilt damit insbesondere

$$\varphi(p^a) = \sum_{j=0}^a p^j \mu(p^{a-j}) = p^a - p^{a-1} = p^a \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Eine arithmetische Funktion heißt **multiplikativ**, wenn $f(n) \neq 0$ für mindestens ein n und

$$f(mn) = f(m)f(n)$$

für alle teilerfremden Zahlen n und m . Ist f multiplikativ, dann folgt aus $f(n) \neq 0$, die Aussage $f(n) = f(1)f(n)$ und damit $f(1) \neq 0$, sogar $f(1) = 1$. Eine multiplikative Funktion besitzt nach Lemma 1.2 also eine inverse Funktion.

Eine multiplikative Funktion ist vollständig durch Angabe ihrer Werte auf Primzahlpotenzen bestimmt: Ist $n = p_1^{a_1} \cdot \dots \cdot p_m^{a_m}$, dann gilt

$$f(n) = \prod_{j=1}^m f(p_j^{a_j})$$

Lemma 1.5 *Mit einer multiplikativen Funktion f ist auch deren inverse Funktion f^{-1} multiplikativ.*

Beweis Seien m und n natürliche Zahlen mit $(m; n) = 1$. Ist $m = n = 1$, dann gilt $f^{-1}(mn) = f^{-1}(m)f^{-1}(n)$, da aus der Multiplikativität von f auch $f^{-1}(1) = 1$ folgt. Sei nun $mn \neq 1$. Es gelte weiter $f^{-1}(m_1n_1) = f^{-1}(m_1)f^{-1}(n_1)$ für alle $m_1n_1 < mn$ mit $(m_1; n_1) = 1$. Ist $m_1 = 1$ oder $n_1 = 1$, dann gilt die Aussage zweifelsohne, weshalb im Folgenden $m_1 \neq 1$ und $n_1 \neq 1$ angenommen werden darf. Man setzt analog zu Gleichung (1.3)

$$f^{-1}(mn) = - \sum_{\substack{d|mn \\ d>1}} f(d) f^{-1}\left(\frac{mn}{d}\right)$$

Da m und n teilerfremd sind, kann jeder Teiler d von mn eindeutig als $d = d_1d_2$ mit $d_1 | m$, $d_2 | n$ und $(d_1; d_2) = 1 = \left(\frac{m}{d_1}; \frac{n}{d_2}\right)$ geschrieben werden. Damit ergibt sich

$$f^{-1}(mn) = - \sum_{\substack{d_1|m \\ d_2|n \\ d_1d_2>1}} f(d_1d_2) f^{-1}\left(\frac{mn}{d_1d_2}\right)$$

und da $\frac{m}{d_1} \frac{n}{d_2} < mn$ gilt, ist

$$\begin{aligned} f^{-1}(mn) &= - \sum_{\substack{d_1|m \\ d_2|n \\ d_1d_2>1}} f(d_1)f(d_2) f^{-1}\left(\frac{m}{d_1}\right) f^{-1}\left(\frac{n}{d_2}\right) \\ &= -f^{-1}(m) \sum_{\substack{d_2|n \\ d_2>1}} f(d_2) f^{-1}\left(\frac{n}{d_2}\right) - f^{-1}(n) \sum_{\substack{d_1|m \\ d_1>1}} f(d_1) f^{-1}\left(\frac{m}{d_1}\right) \\ &\quad - \left(- \sum_{\substack{d_1|m \\ d_1>1}} f(d_1) f^{-1}\left(\frac{m}{d_1}\right) \right) \left(- \sum_{\substack{d_2|n \\ d_2>1}} f(d_2) f^{-1}\left(\frac{n}{d_2}\right) \right) \\ &= f^{-1}(m) f^{-1}(n) + f^{-1}(n) f^{-1}(m) - f^{-1}(m) f^{-1}(n) \\ &= f^{-1}(m) f^{-1}(n) \end{aligned}$$

was den Beweis abschließt. □

Die arithmetische Zeta-Funktion $\mathbb{1}$ ist offensichtlich multiplikativ, und damit auch die zu ihr inverse Funktion μ und es gilt

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } n = 1 \\ (-1)^a & \text{wenn } n \text{ ein Produkt aus } a \text{ verschiedenen Primzahlen ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lemma 1.6 Sind f und g multiplikative Funktionen, dann ist auch deren Faltung $f * g$ multiplikativ.

Beweis Es ist $(f * g)(1) = f(1)g(1) = 1$. Für teilerfremde m und n gilt

$$\begin{aligned} (f * g)(mn) &= \sum_{d|mn} f(d)g\left(\frac{mn}{d}\right) \\ &= \sum_{\substack{d_1|m \\ d_2|n}} f(d_1)f(d_2)g\left(\frac{m}{d_1}\right)g\left(\frac{n}{d_2}\right) \\ &= \left(\sum_{d_1|m} f(d_1)g\left(\frac{m}{d_1}\right)\right)\left(\sum_{d_2|n} f(d_2)g\left(\frac{n}{d_2}\right)\right) \\ &= ((f * g)(m))((f * g)(n)) \quad \square \end{aligned}$$

Die in Gleichung (1.1) definierte Funktion ζ_k ist multiplikativ und damit auch $\sigma_k = \zeta_k * \mathbb{1}$. Für eine natürliche Zahl k ist auf Primzahlpotenzen p^a

$$\sigma_k(p^a) = \sum_{j=0}^a p^{jk} = \frac{p^{(a+1)k} - 1}{p^k - 1}$$

Für $n = p_1^{a_1} \cdot \dots \cdot p_m^{a_m}$ ist

$$\sigma_k(n) = \prod_{j=1}^m \frac{p_j^{(a_j+1)k} - 1}{p_j^k - 1}$$

und insbesondere

$$\sigma(n) = \prod_{j=1}^m \frac{p_j^{a_j+1} - 1}{p_j - 1}$$

Mit $\tau(p^a) = a + 1$ ergibt sich

$$\tau(n) = \sigma_0(n) = \prod_{j=1}^m (a_j + 1)$$

Die Eulersche φ -Funktion ist ebenfalls multiplikativ, da sie als Faltung multiplikativer Funktionen $\varphi = \zeta_1 * \mu$ dargestellt werden kann:

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Die Funktion $\varphi(n)$ ist eine Zählfunktion; das heißt, sie gibt die Anzahl der Elemente einer Menge, hier $\{m \in \mathbb{N} : 1 \leq m \leq n, (n; m) = 1\}$, an. Zählfunktionen können gelegentlich über das **Inklusions-Exklusions-Prinzip** ausgewertet werden:

Satz 1.7 (Inklusions-Exklusions-Prinzip) Sind $A_1, \dots, A_m$ Teilmengen einer endlichen Menge S , dann ist

$$\#(S \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_m)) = \#S + \sum_{j=1}^m (-1)^j \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq m} \#(A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_j})$$

Beweis Der Beweis wird per Induktion nach der Anzahl der Teilmengen geführt. Die Behauptung ist wahr für $m = 1$. Sei also $m > 1$ und die Behauptung stimme für $m - 1$ Teilmengen, also

$$\#(S \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{m-1})) = \#S + \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^j \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq m-1} \#(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_j})$$

Betrachtet man nun A_m und die $m - 1$ Teilmengen $A_1 \cap A_m, \dots, A_{m-1} \cap A_m$, dann ist

$$\begin{aligned} & \#((A_m \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{m-1})) \cap A_m) \\ &= \#(A_m \setminus ((A_1 \cap A_m) \cup \dots \cup (A_{m-1} \cap A_m))) \\ &= \#A_m + \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^j \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq m-1} \#(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_j} \cap A_m) \end{aligned}$$

Hieraus folgt nun zusammen mit

$$\begin{aligned} & \#(S \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_m)) \\ &= \#(S \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{m-1})) - \#((A_m \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{m-1})) \cap A_m) \end{aligned}$$

die Behauptung für $\#(S \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_m))$. □

Als Anwendung des Inklusions-Exklusions-Prinzips wird eine Verallgemeinerung der Eulerschen φ -Funktion ausgewertet. Für eine natürliche Zahl k wird die **Jordan-Funktion**⁴ folgendermaßen definiert:

$$J_k(n) := \#\{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k : 1 \leq x_i \leq n, (x_1; \dots; x_k; n) = 1\}$$

⁴ Camille Jordan (1838–1922)

Mit dieser Definition ist $J_1 = \varphi$. Sei $n = p_1^{a_1} \cdot \dots \cdot p_m^{a_m}$, S die Menge aller geordneten k -Tupel natürlicher Zahlen $(x_1, \dots, x_k)$ mit $1 \leq x_i \leq n$ und sei A_i die Menge aller solcher k -Tupel mit $p_i \mid (x_1; \dots; x_k)$. Dann ist

$$J_k(n) = \#(S \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_m))$$

und

$$\#(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_j}) = \left(\frac{n}{p_{i_1} \cdot \dots \cdot p_{i_j}} \right)^k$$

Schließlich ergibt sich

$$\begin{aligned} J_k(n) &= n^k + \sum_{j=1}^m (-1)^j \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq m} \left(\frac{n}{p_{i_1} \cdot \dots \cdot p_{i_j}} \right)^k \\ &= \sum_{d|n} \left(\frac{n}{d} \right)^k \mu(d) \\ &= \sum_{d|n} d^k \mu\left(\frac{n}{d}\right) \end{aligned}$$

also $J_k = \zeta_k * \mu$. Damit ist J_k ebenfalls eine multiplikative Funktion mit

$$J_k(p^a) = p^{ak} - p^{(a-1)k} = p^{ak} \left(1 - \frac{1}{p^k} \right)$$

und daher

$$J_k(n) = n^k \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p^k} \right)$$

Als weitere Verallgemeinerung der Eulerschen φ -Funktion soll die sogenannte **von Sterneck-Funktion**⁵ H_k angeführt werden:

$$H_k(n) := \sum_{[e_1; \dots; e_k] = n} \varphi(e_1) \cdot \dots \cdot \varphi(e_k)$$

wobei sich die Summe über alle geordneten k -Tupel $(e_1, \dots, e_k) \in \mathbb{N}^k$ mit $1 \leq e_i \leq n$ und $[e_1; \dots; e_k] = n$ erstreckt (mit $[e_1; \dots; e_k]$ wird das **kleinste gemeinsame Vielfache** von $e_1, \dots, e_k$ bezeichnet). Angemerkt sei noch, dass $H_1 = \varphi$ und $H_k(1) = 1$ gilt.

⁵ Robert Daublebsky von Sterneck (1871–1928)

Lemma 1.8 Die von Sterneck-Funktion H_k ist multiplikativ.

Beweis Sei $[e_1; \dots; e_k] = mn$ mit $(m; n) = 1$. Für jedes $1 \leq i \leq k$ kann e_i eindeutig in ein Produkt $e_i = c_i d_i$ mit $c_i \mid m$, $d_i \mid n$ zerlegt werden. Dann ist $[c_1; \dots; c_k] = m$ und $[d_1; \dots; d_k] = n$. Nun folgt

$$\begin{aligned}
 H_k(mn) &= \sum_{[e_1; \dots; e_k] = mn} \varphi(e_1) \cdot \dots \cdot \varphi(e_k) \\
 &= \sum_{\substack{[c_1; \dots; c_k] = m \\ [d_1; \dots; d_k] = n}} \varphi(c_1) \cdot \dots \cdot \varphi(c_k) \varphi(d_1) \cdot \dots \cdot \varphi(d_k) \\
 &= \left(\sum_{[c_1; \dots; c_k] = m} \varphi(c_1) \cdot \dots \cdot \varphi(c_k) \right) \left(\sum_{[d_1; \dots; d_k] = n} \varphi(d_1) \cdot \dots \cdot \varphi(d_k) \right) \\
 &= H_k(m) H_k(n) \quad \square
 \end{aligned}$$

Außergewöhnlich ist, dass die von Sterneck- und die Jordan-Funktion gleich sind!

Lemma 1.9 Es gilt $J_k = H_k$.

Beweis Der Beweis wird per Induktion nach k geführt. Bekannt ist $J_1 = H_1 = \varphi$. Sei nun $k > 1$ und die Behauptung für alle Zahlen kleiner als k bewiesen. Da J_k und H_k multiplikativ sind, genügt es die Behauptung auf beliebigen Primzahlpotenzen p^a zu verifizieren.

$$\begin{aligned}
 H_k(p^a) &= \sum_{\max(b_1, \dots, b_k) = a} \varphi(p^{b_1}) \cdot \dots \cdot \varphi(p^{b_k}) \\
 &= \sum_{\substack{\max(b_1, \dots, b_{k-1}) = a \\ b_k < a}} \varphi(p^{b_1}) \cdot \dots \cdot \varphi(p^{b_{k-1}}) \varphi(p^{b_k}) \\
 &\quad + \sum_{\max(b_1, \dots, b_{k-1}) \leq a} \varphi(p^{b_1}) \cdot \dots \cdot \varphi(p^{b_{k-1}}) \varphi(p^a) \\
 &= H_{k-1}(p^a) \sum_{d \mid p^{a-1}} \varphi(d) + \varphi(p^a) \left(\sum_{d \mid p^a} \varphi(d) \right)^{k-1} \\
 &= p^{a-1} H_{k-1}(p^a) + \varphi(p^a) p^{a(k-1)} \\
 &= p^{a-1} J_{k-1} + \varphi(p^a) p^{a(k-1)} \\
 &= p^{a-1} p^{a(k-1)} \left(1 - \frac{1}{p^{k-1}} \right) + p^{a(k-1)} p^a \left(1 - \frac{1}{p} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= p^{ak} \left(\frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{p^{k-1}} \right) + \left(1 - \frac{1}{p} \right) \right) \\
&= p^{ak} \left(1 - \frac{1}{p^k} \right) \\
&= J_k(p^a) \quad \square
\end{aligned}$$

1.2 Vollständig multiplikative Funktionen

Eine arithmetische Funktion heißt **vollständig multiplikativ**, wenn $f(n) \neq 0$ für mindestens eine natürliche Zahl n und $f(mn) = f(m)f(n)$ für alle natürlichen Zahlen m und n – nicht notwendigerweise teilerfremd – gilt. Für eine Primzahl p gilt dann $f(p^a) = f(p)^a$. Eine vollständig multiplikative Funktion ist somit komplett durch ihre Werte auf Primzahlen bestimmt.

Unter den multiplikativen Funktionen sind die vollständig multiplikativen Funktionen über gewisse algebraische Eigenschaften erkennbar.

Lemma 1.10 *Eine multiplikative Funktion f ist genau dann vollständig multiplikativ, wenn $f^{-1} = \mu f$ gilt.*

Beweis Ist f vollständig multiplikativ, dann gilt für alle natürliche Zahlen n

$$\begin{aligned}
(\mu f * f)(n) &= \sum_{d|n} \mu(d) f(d) f\left(\frac{n}{d}\right) \\
&= f(n) \sum_{d|n} \mu(d) \\
&= \begin{cases} 1 & \text{wenn } n = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

Gilt $f^{-1} = \mu f$, dann zeigt man per Induktion nach a , dass für eine Primzahlpotenz p^a die charakterisierende Eigenschaft $f(p^a) = f(p)^a$ vollständig multiplikativer Funktionen gilt. Der Induktionsanfang $a = 1$ ist offensichtlich wahr. Sei nun $a \geq 2$ und $f(p^{a-1}) = f(p)^{a-1}$. Für alle $b \geq 2$ gilt $f^{-1}(p^b) = \mu(p^b)f(p^b) = 0$ und daraus folgt

$$\begin{aligned}
0 &= (f^{-1} * f)(p^a) \\
&= \sum_{b=0}^a \mu(p^b) f(p^b) f(p^{a-b}) \\
&= \mu(1)f(1)f(p^a) + \mu(p)f(p)f(p^{a-1}) \\
&= f(p^a) - f(p)f(p)^{a-1}
\end{aligned}$$

Woraus sich die Behauptung ergibt. Die Gleichung $f^{-1}(p) = -f(p)$ gilt im Übrigen für alle multiplikativen Funktionen. $\square$

Folgerung 1.11 Eine multiplikative Funktion f ist genau dann vollständig multiplikativ, wenn $f^{-1}(p^a) = 0$ für alle $a \geq 2$ gilt.

Folgerung 1.12 Eine multiplikative Funktion f ist genau dann vollständig multiplikativ, wenn

$$f(g * h) = fg * fh \quad (1.4)$$

für beliebige arithmetische Funktionen g und h gilt.

Beweis Ist f vollständig multiplikativ, dann gilt für beliebige Funktionen g und h

$$\begin{aligned} (f(g * h))(n) &= f(n) \sum_{d|n} g(d)h\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= \sum_{d|n} f(d)g(d)f\left(\frac{n}{d}\right)h\left(\frac{n}{d}\right) = (fg * fh)(n) \end{aligned}$$

Sei umgekehrt die Gleichung (1.4) wahr; wählt man dann $g := \mathbb{1}$ und $h := \mu$, so folgt mit der Gleichung (1.2) für δ

$$\delta = f\delta = f(\mathbb{1} * \mu) = f\mathbb{1} * f\mu = f * \mu f$$

und damit $f^{-1} = \mu f$. Nach Lemma 1.10 ist f vollständig multiplikativ. $\square$

Eine ähnliche Charakterisierung von vollständig multiplikativen Funktionen durch andere arithmetische Funktionen, wie in Folgerung 1.12, wird in Übung 1.44 gegeben. Weitere bestimmende Eigenschaften vollständig multiplikativer Funktionen werden in den Übungen 1.45 und 1.46 angeführt.

Für eine beliebige natürliche Zahl k ist die Funktion ζ_k vollständig multiplikativ. Jede der Funktionen $\sigma_k = \zeta_k * \mathbb{1}$ ist eine Faltung von vollständig multiplikativen Funktionen. Arithmetische Funktionen mit dieser Eigenschaft können durch Bedingungen, analog zu denen in Folgerung 1.11, charakterisiert werden.

Lemma 1.13 Eine multiplikative Funktion f ist genau dann als Faltung zweier vollständig multiplikativer Funktionen darstellbar, wenn $f^{-1}(p^a) = 0$ für jede Primzahl p und alle $a \geq 3$.

Beweis Gilt $f = g * h$ mit vollständig multiplikativen Funktionen g und h , so ist für eine Primzahl p und $a \geq 3$

$$\begin{aligned} f^{-1}(p^a) &= (g^{-1} * h^{-1})(p^a) = \sum_{j=0}^a g^{-1}(p^j) h^{-1}(p^{a-j}) \\ &= g^{-1}(1) h^{-1}(p^a) + g^{-1}(p) h^{-1}(p^{a-1}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

nach Folgerung 1.11. Für den Beweis der Umkehrung definiert man eine vollständig multiplikative Funktion g wie folgt: Für jede Primzahl p sei der Wert $g(p)$ eine Nullstelle der quadratischen Gleichung

$$X^2 + f^{-1}(p)X + f^{-1}(p^2) = 0$$

Wir setzen $h := g^{-1} * f$. Dann ist h eine multiplikative Funktion und für jede Primzahl p und jede natürliche Zahl $a \geq 2$ gilt

$$\begin{aligned} h^{-1}(p^a) &= (g * f^{-1})(p^a) \\ &= g(p^a) + g(p^{a-1})f^{-1}(p) + g(p^{a-2})f^{-1}(p^2) \\ &= g(p^{a-2})(g(p)^2 + f^{-1}(p)g(p) + f^{-1}(p^2)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also ist h nach Folgerung 1.11 sogar vollständig multiplikativ, und damit $f = g * h$. $\square$

Die Funktionen aus dem vorhergehenden Lemma 1.13 können auch auf andere Weise charakterisiert werden.

Satz 1.14 *Für eine multiplikative Funktion f sind folgende vier Aussagen äquivalent:*

- (i) f ist als Faltung zweier vollständig multiplikativer Funktionen darstellbar.
- (ii) Es existiert eine multiplikative Funktion F mit

$$f(mn) = \sum_{d|(m;n)} f\left(\frac{m}{d}\right) f\left(\frac{n}{d}\right) F(d) \quad (1.5)$$

für alle natürlichen Zahlen m und n .

- (iii) Es existiert eine vollständig multiplikative Funktion B mit

$$f(m)f(n) = \sum_{d|(m;n)} f\left(\frac{mn}{d^2}\right) B(d) \quad (1.6)$$

für alle natürlichen Zahlen m und n .

- (iv) Für jede Primzahl p und alle $a \geq 1$ gilt

$$f(p^{a+1}) = f(p)f(p^a) + f(p^{a-1})(f(p^2) - f(p)^2) \quad (1.7)$$

Beweis In der Beweisführung wird ersichtlich, dass die Funktionen F und B eindeutig durch die Funktion f bestimmt sind.

(i) $\Rightarrow$ (iv): Sei $f = g * h$ mit vollständig multiplikativen Funktionen f und g . Ist $g(p) = M$ und $h(p) = N$, dann gilt $f(p) = M + N$ und $f(p^2) =$

$M^2 + MN + N^2$. Für $a \geq 1$ ergibt die rechte Seite der Gleichung (1.7)

$$\begin{aligned}
 & f(p) f(p^a) + f(p^{a-1}) (f(p^2) - f(p)^2) \\
 &= (M + N) \sum_{j=0}^a M^j N^{a-j} - MN \sum_{j=0}^{a-1} M^j N^{a-1-j} \\
 &= \sum_{j=0}^a M^{j+1} N^{a-j} + \sum_{j=0}^a M^j N^{a+1-j} - \sum_{j=0}^{a-1} M^{j+1} N^{a-j} \\
 &= M^{a+1} + \sum_{j=0}^a M^j N^{a+1-j} \\
 &= \sum_{j=0}^{a+1} M^j N^{a+1-j} \\
 &= f(p^{a+1})
 \end{aligned}$$

(iv) $\Rightarrow$ (i): Für jede Primzahl p seien M und N als Lösungen der quadratischen Gleichung

$$X^2 - f(p) X + (f(p^2) - f(p)^2) = 0$$

definiert. Natürlich hängen M und N von p ab, aber da die Primzahl p während des Beweises festgehalten wird, ist keinerlei zusätzliche Notation hierfür notwendig. Definiert man die arithmetischen Funktionen g und h über $g(p) = M$ und $h(p) = N$, dann gilt damit $f(p) = M + N = (g * h)(p)$ und für $a \geq 2$:

$$\begin{aligned}
 (g * h)(p) &= \sum_{j=0}^a M^j N^{a-j} \\
 &= (M + N) \sum_{j=0}^{a-1} M^j N^{a-1-j} - MN \sum_{j=0}^{a-2} M^j N^{a-2-j} \\
 &= f(p) f(p^{a-1}) + f(p^{a-2}) (f(p^2) - f(p)^2) \\
 &= f(p^a)
 \end{aligned}$$

Da f multiplikativ ist, gilt $f = g * h$.

(ii) $\Rightarrow$ (iv): Sei $a \geq 1$. Setzt man in Gleichung (1.5) $m = p^a$ und $n = p$, dann ergibt sich

$$f(p^{a+1}) = f(p) f(p^a) + f(p^{a-1}) F(p)$$

Für $a = 1$ folgt $F(p) = f(p^2) - f(p)^2$.

(iv) $\Rightarrow$ (ii): Es gelte Aussage (iv). Mit $(mn; m'n') = 1$ ist auch

$$((m; n); (m'; n')) = 1 \quad \text{und} \quad (mm'; nn') = (m; n)(m'; n').$$

Daher genügt es für den Beweis von Aussage (ii) zu zeigen, dass eine multiplikative Funktion F existiert, die für alle $a, b \geq 1$ folgende Gleichung erfüllt:

$$f(p^{a+b}) = \sum_{j=0}^{\min(a,b)} f(p^{a-j}) f(p^{b-j}) F(p^j) \quad (1.8)$$

Es stellt sich heraus, dass dies der Fall ist, wenn $F = \mu B'$ ist, mit der vollständig multiplikativen Funktion B' , die über

$$B'(p) := f(p)^2 - f(p^2) \quad (1.9)$$

charakterisiert ist.

Ohne Einschränkung kann $b \leq a$ angenommen werden und der Beweis wird per Induktion nach b geführt. Die Gleichung (1.7) stellt den Fall $b = 1$ in Gleichung (1.8) dar. Deshalb kann $b > 1$ und die Gültigkeit der Gleichung für $b - 1$ und alle $a \geq b - 1$ angenommen werden. Mit $F = \mu B'$ ergibt sich $0 = F(p^2) = F(p^3) = \dots$ und somit

$$\begin{aligned} f(p^{a+b}) &= f(p^{a+1+b-1}) \\ &= f(p^{a+1}) f(p^{b-1}) + f(p^a) f(p^{b-2}) F(p) \\ &= (f(p) f(p^a) - f(p^{a-1}) B'(p)) f(p^{b-1}) - f(p^a) f(p^{b-2}) B'(p) \\ &= f(p^a) (f(p) f(p^{b-1}) - f(p^{b-2}) B'(p)) - f(p^{a-1}) f(p^{b-2}) B'(p) \\ &= f(p^a) f(p^b) + f(p^{a-1}) f(p^{b-1}) F(p) \end{aligned}$$

Hiermit ist die Äquivalenz von (i), (ii) und (iv) bewiesen. Gleichzeitig gilt dann auch für alle natürlichen Zahlen m und n

$$f(mn) = \sum_{d|(m;n)} f\left(\frac{m}{d}\right) f\left(\frac{n}{d}\right) \mu(d) B'(d)$$

mit der Funktion B' wie oben definiert.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Mit (ii) gilt auch

$$\begin{aligned} \sum_{d|(m;n)} f\left(\frac{mn}{d^2}\right) B'(d) &= \sum_{d|(m;n)} \sum_{D|(\frac{m}{d}, \frac{n}{d})} f\left(\frac{m/d}{D}\right) f\left(\frac{n/d}{D}\right) \mu(D) B'(D) B'(d) \\ &= \sum_{d|(m;n)} \sum_{\substack{e|(m;n) \\ d|e}} f\left(\frac{m}{e}\right) f\left(\frac{n}{e}\right) \mu\left(\frac{e}{d}\right) B'(e) \\ &= \sum_{e|(m;n)} f\left(\frac{m}{e}\right) f\left(\frac{n}{e}\right) B'(e) \sum_{d|e} \mu\left(\frac{e}{d}\right) \\ &= f(m) f(n) \end{aligned}$$

für alle natürlichen Zahlen m und n . Damit kann die Funktion B' , definiert in Gleichung (1.9), die Rolle von B in (iii) ausfüllen.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Gilt (iii), dann erhält man für $m = n = p$

$$B(p) = f(p^2) - f(p)^2$$

also erneut $B = B'$. Für $n = p$, $m = p^a$ mit $a \geq 1$ erhält man schließlich Aussage (iv). $\square$

In Übung 1.64 soll gezeigt werden, dass bei Gültigkeit von (ii) zwangsläufig $F = \mu B = B^{-1}$ folgt. Wenn die Abhängigkeit von B zur Funktion f verdeutlicht werden soll, wird gelegentlich die Notation $B = B_f$ verwandt. Man beachte, dass im Verlauf des Beweises von Satz 1.14 gezeigt wurde, dass aus der Darstellung $f = g * h$ mit vollständig multiplikativen Funktionen g und h sich notwendigerweise $B = gh$ ergibt. Man vergleiche hierzu den Beweis von (i) $\Rightarrow$ (iv) unter Berücksichtigung von

$$\begin{aligned} B(p) &= f(p^2) - f(p)^2 \\ &= (M + N)^2 - (M^2 + MN + N^2) \\ &= MN \\ &= g(p)h(p) \end{aligned}$$

1.3 Busche-Ramanujan-Identitäten

Arithmetische Funktionen, die die Eigenschaften von Satz 1.14 erfüllen, werden **speziell multiplikative Funktionen** genannt. Als Beispiel kann die Funktion σ_k aufgeführt werden, bei der $B = B_{\sigma_k} = \zeta_k$ ist, denn es gilt

$$\begin{aligned} B(p) &= \sigma_k(p)^2 - \sigma_k(p^2) \\ &= (1 + p^k)^2 - (1 + p^k + p^{2k}) \\ &= p^k \\ &= \zeta_k(p) \end{aligned}$$

Somit gilt auch für alle natürlichen Zahlen m und n

$$\sigma_k(mn) = \sum_{d|(m;n)} \sigma_k\left(\frac{m}{d}\right) \sigma_k\left(\frac{n}{d}\right) \mu(d) d^k \quad (1.10)$$

sowie

$$\sigma_k(m)\sigma_k(n) = \sum_{d|(m;n)} \sigma_k\left(\frac{mn}{d^2}\right) d^k \quad (1.11)$$

Die Identität (1.11) wurde von Edmund Busche⁶ im Jahr 1906 formuliert; die erstgenannte (1.10) für $k = 0$ von Srinivasa Ramanujan⁷ etwa zehn Jahre später. Aus diesem Grund werden die beiden Identitäten in den Gleichungen (1.5) und (1.6) aus Satz 1.14 als **Busche-Ramanujan-Identitäten** bezeichnet.

Viele weitere arithmetische Funktionen werden auch in den Übungen behandelt. Als weiteres Beispiel sei die Funktion β genannt, die durch

$$\beta(n) := \#\{m \in \mathbb{N} : 1 \leq m \leq n, (m; n) \text{ ist eine Quadratzahl}\} \quad (1.12)$$

definiert wird. Ist $1 \leq m \leq n$ und $(m; n)$ eine Quadratzahl, dann existiert ein d mit $d^2 \mid n$ und $m = d^2 y$, wobei $1 \leq y \leq \frac{n}{d^2}$ und $(y; \frac{n}{d^2}) = 1$ gilt. Hieraus folgt die Darstellung

$$\beta(n) = \sum_{d^2 \mid n} \varphi\left(\frac{n}{d^2}\right) \quad (1.13)$$

Nach Übung 1.26 ist β multiplikativ und die Werte auf Primzahlpotenzen sind

$$\begin{aligned} \beta(p^a) &= \sum_{j \leq \frac{a}{2}} \varphi(p^{a-2j}) \\ &= \begin{cases} p^a - p^{a-1} + p^{a-2} - \dots + p^2 - p + 1 & \text{wenn } a \text{ gerade} \\ p^a - p^{a-1} + p^{a-2} - \dots - p^2 + p - 1 & \text{wenn } a \text{ ungerade} \end{cases} \\ &= \sum_{j=0}^a p^j \lambda(p^{a-j}) \end{aligned}$$

mit der Liouville-Funktion λ , die in Übung 1.47 eingeführt wird. Daher ist

$$\beta(n) = \sum_{d \mid n} d \lambda\left(\frac{n}{d}\right) = (\zeta_1 * \lambda)(n)$$

In Übung 1.47 wird gezeigt, dass λ vollständig multiplikativ ist, weshalb β speziell multiplikativ ist. Die Funktion $B = B_\beta = \zeta_1 \lambda$ ist vollständig multiplikativ mit $B(p) = -p$. Nach Satz 1.14 gilt daher auch

$$\beta(mn) = \sum_{d \mid (m;n)} d \lambda(d) \beta\left(\frac{m}{d}\right) \beta\left(\frac{n}{d}\right)$$

sowie

$$\beta(m)\beta(n) = \sum_{d \mid (m;n)} d \lambda(d) \beta\left(\frac{mn}{d^2}\right)$$

⁶ Edmund Busche (1861–1916)

⁷ Srinivasa Ramanujan Aiyangar (1887–1920)

Sei $R(n)$ die Anzahl der Darstellungen von n als Summe zweier Quadrate

$$R(n) := \# \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : n = x^2 + y^2\} \quad (1.14)$$

also beispielsweise $R(5) = 8$. In den klassischen Lehrbüchern von Godfrey Hardy⁸ und Edward Wright⁹ [197] oder von Ivan Niven¹⁰ und Herbert Zuckerman¹¹ [294] wird

$$R_1(n) = \frac{1}{4} R(n) = \sum_{d|n} \chi(n)$$

gezeigt, mit der vollständig multiplikativen arithmetischen Funktion χ

$$\chi(n) := \begin{cases} (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} & \text{wenn } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Funktion χ wird **Charakter** (mod 4) genannt. Die Funktion R_1 ist damit speziell multiplikativ mit $B = \chi$. Die Busche-Ramanujan-Identitäten hierfür sind:

$$R(mn) = \frac{1}{4} \sum_{\substack{d|(m;n) \\ 2 \nmid d}} (-1)^{\frac{1}{2}(d-1)} R\left(\frac{m}{d}\right) R\left(\frac{n}{d}\right) \mu(d)$$

und

$$R(m)R(n) = 4 \sum_{\substack{d|(m;n) \\ 2 \nmid d}} (-1)^{\frac{1}{2}(d-1)} R\left(\frac{mn}{d^2}\right)$$

1.4 Übungen zu Kap. 1

Übung 1.1 Für alle natürlichen Zahlen n gilt

$$\sum_{j \leq n} \mu(j) \left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor = 1$$

wobei $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl $\leq x$ bezeichnet.

⁸ Godfrey Harold Hardy (1877–1947)

⁹ Edward Maitland Wright (1906–2005)

¹⁰ Ivan Morton Niven (1915–1999)

¹¹ Herbert Samuel Zuckerman (1912–1970)

Übung 1.2 Die Aussage von Übung 1.1 kann verallgemeinert werden. Sind f und g arithmetische Funktionen mit

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d)$$

dann gilt

$$\sum_{j \leq n} f(j) = \sum_{j \leq n} g(j) \left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor$$

Insbesondere ist

$$\sum_{j \leq n} \varphi(j) \left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor = \frac{1}{2} n (n + 1)$$

und

$$\sum_{j \leq n} \left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor = \sum_{j \leq n} \tau(j)$$

Übung 1.3 Sei f eine arithmetische Funktion mit

$$g(n) = \sum_{j \leq n} f((n; r))$$

dann gilt

$$\sum_{d|n} g(d) = \sum_{d|n} d f\left(\frac{n}{d}\right)$$

das heißt $g * \mathbb{1} = f * \zeta_1$, also $g = f * \varphi$.

Übung 1.4 Seien f und g arithmetische Funktionen. Definiert man die Funktion h durch

$$h(n) := \sum_{[a;b]=n} f(a)g(b)$$

dann gilt

$$h = (f * \mathbb{1})(g * \mathbb{1}) * \mu$$

Dieses Resultat kann auf natürliche Weise auf mehr als zwei Funktionen verallgemeinert werden.

Übung 1.5 Es gilt

$$\sum_{\substack{d|n \\ \forall p \in \mathbb{P}: p^2 \nmid d}} \mu\left(\frac{n}{d}\right) = \begin{cases} \mu\left(n^{\frac{1}{2}}\right) & n \text{ ist Quadratzahl} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

siehe auch Übungen 1.30 und 1.35.

Übung 1.6 Das n -te **Kreisteilungspolynom** $\Phi_n(X)$ ist das normierte Polynom dessen Nullstellen die $\varphi(n)$ primitiven Einheitswurzeln sind, konkret:

$$\Phi_n(X) := \prod_{\substack{j \leq n \\ (j;n)=1}} \left(X - e\left(\frac{j}{n}\right) \right) \quad \text{mit } e(x) := e^{2\pi i x}$$

Man zeige

$$X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X)$$

und

$$\Phi_n(X) = \prod_{d|n} (X^d - 1)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)}$$

Übung 1.7 Es gilt

$$\sum_{\substack{j \leq n \\ (j;n)=1}} (n; j-1) = \varphi(n) \tau(n)$$

wobei die Summe auch über ein beliebiges Restklassensystem modulo n laufen kann.

Übung 1.8 Ist f eine multiplikative Funktion, dann gilt

$$\sum_{d|n} \mu(d) f(d) = \prod_{p|n} (1 - f(p))$$

Übung 1.9 Eine arithmetische Funktion f mit $f(1) = 1$ ist genau dann multiplikativ, wenn

$$f(m)f(n) = f((m;n)) f([m;n])$$

für alle natürlichen Zahlen m und n gilt.

Übung 1.10 Eine arithmetische Funktion f mit $f(1) \neq 0$ ist genau dann multiplikativ, wenn

$$f\left(\frac{[m;n]}{[d;e]}\right) = f\left(\frac{m}{d}\right) f\left(\frac{n}{e}\right)$$

für alle Teiler $d \mid m, e \mid n$ mit $(d; e) = (m; n)$ gilt.

Übung 1.11 Sei f eine multiplikative Funktion mit $f(k) \neq 0$. Definiere

$$g(n) := \frac{f(kn)}{f(k)}$$

dann ist g ebenfalls multiplikativ.

Übung 1.12 Ist g eine multiplikative Funktion und $f = g * \mu$, dann ist

$$|\mu(n)| f(n) = \sum_{\substack{d \mid n \\ (d; \frac{n}{d})=1}} g(d) |\mu(d)| \mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

Insbesondere ist

$$|\mu(n)| \varphi(n) = \sum_{\substack{d \mid n \\ (d; \frac{n}{d})=1}} d |\mu(d)| \mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

Übung 1.13 Sei f eine multiplikative Funktion und existiert ein Teiler $m \mid n$ mit $m \neq 1$ und $(m; \frac{n}{m}) = 1$, dann gilt

$$\sum_{d \mid m} f(d) f^{-1}\left(\frac{n}{d}\right) = 0$$

Übung 1.14 Das **Radikal** (oder auch die **Kern-Funktion**) γ wird wie folgt definiert

$$\gamma(n) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } n = 1 \\ p_1 \cdot \dots \cdot p_m & \text{wenn } n = p_1^{a_1} \cdot \dots \cdot p_m^{a_m} \end{cases}$$

Man zeige, dass γ multiplikativ ist und

$$\gamma(n) = \sum_{d \mid n} |\mu(d)| \varphi(d)$$

Übung 1.15 Sind f und g arithmetische Funktionen, dann gilt

$$f(n) = \sum_{\substack{d|n \\ \gamma(d)=\gamma(n)}} g(d)$$

genau dann, wenn

$$g(n) = \sum_{\substack{d|n \\ \gamma(d)=\gamma(n)}} f(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

Übung 1.16 Ist f multiplikativ, dann gilt für alle natürlichen Zahlen n , r und s mit $\gamma(n) \nmid rs$

$$\sum_{d|n} f(rd) f^{-1}\left(\frac{sn}{d}\right)$$

Übung 1.17 Ist f multiplikativ, dann gilt

$$\sum_{\substack{d|n \\ \gamma(d)=\gamma(n)}} f\left(\frac{n}{d}\right) f^{-1}(d) = (-1)^{\omega(n)} f(n)$$

mit der Funktion ω definiert durch

$$\omega(n) := \#\{p \in \mathbb{P} : p \mid n\}$$

Übung 1.18 Ist f multiplikativ, dann gilt für alle natürlichen Zahlen m und n

$$\sum_{d|n} f\left(\frac{mn}{d}\right) f^{-1}(d) = (-1)^{\omega(n)} \sum_{\substack{e|m \\ \gamma(e)=\gamma(n)}} f\left(\frac{m}{e}\right) f^{-1}(ne)$$

Übung 1.19 Sei $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ die $n \times n$ -Matrix mit den Einträgen $a_{ij} = (i; j)$. Dann gilt

$$\det(A) = \varphi(1)\varphi(2) \cdot \dots \cdot \varphi(n)$$

Diese Determinante heißt **Smith-Determinante**¹².

Übung 1.20 Für eine natürliche Zahl k wird die Funktion δ_k durch

$$\delta_k(n) := \max\{d \in \mathbb{N} : d \mid n, (d; k) = 1\}$$

¹² Henry John Stephen Smith (1826–1883)

definiert. Man zeige, dass δ_k multiplikativ ist mit

$$\delta_k(n) = \sum_{\substack{d|n \\ (d:k)=1}} \varphi(d)$$

Übung 1.21 Sei $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten. Definiere die arithmetische Funktion φ_f durch

$$\varphi_f(n) = \#\{m \in \mathbb{N} : m \leq n, (f(m); n) = 1\}$$

Für $f(X) = X$ ist $\varphi_f = \varphi$. Die Funktion φ_f ist multiplikativ und es gilt

$$\varphi_f(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{f_p}{p}\right)$$

wobei f_p für jede Primzahl p die Anzahl der Lösungen der Kongruenz $f(X) \equiv 0 \pmod{p}$ angibt. Sei v_f die multiplikative Funktion, die auf Primzahlpotenzen die Werte $v_f(p^a) = f_p^a$ annimmt. Mit dieser Funktion gilt

$$\sum_{d|n} \varphi_f(d) v_f\left(\frac{n}{d}\right) = n$$

und

$$\varphi_f(n) = \sum_{d|n} d v_f\left(\frac{n}{d}\right) \mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

Übung 1.22 Seien $m_1, \dots, m_s$ natürliche Zahlen und sei $N(p)$ für jede Primzahl p die Anzahl der verschiedenen Restklassen mod p dieser s Zahlen. Dann ist die Anzahl der Folgen

$$x + m_1, \dots, x + m_s$$

mit $1 \leq x \leq n$ und $(x + m_i; n) = 1$ für $i = 1, \dots, s$ gleich

$$n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{N(p)}{p}\right)$$

Tipp: Man wähle $f(X)$ in Übung 1.21 geeignet.

Übung 1.23 Definiere für eine natürliche Zahl k die arithmetische Funktion ϕ_k durch

$$\phi_k(n) := \#\{m \in \mathbb{N} : m \leq n, (m; n) = (n + k - m; n) = 1\}$$

Dann ist $\phi_0 = \varphi$. Die Funktion ϕ_1 wird **Schemmel-Funktion**¹³ genannt. Ist $(m; n) = 1$, dann ist $\phi_k(mn) = \phi_k(m)\phi_k(n)$, das heißt ϕ_k ist multiplikativ und

$$\phi_k(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{\varepsilon(p)}{p}\right)$$

mit

$$\varepsilon(p) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } p \mid k \\ 2 & \text{wenn } p \nmid k \end{cases}$$

Übung 1.24 Definiere die arithmetische Funktion θ durch

$$\theta(n) := \#\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 : n = ab, (a; b) = 1\}$$

Man zeige, dass $\theta(n)$ multiplikativ und

$$\theta(n) = 2^{\omega(n)}$$

ist. Das bedeutet, dass $\theta(n)$ gleich der Anzahl der quadratfreien Teiler von n ist, also

$$\theta(n) = \sum_{d|n} |\mu(d)|$$

Übung 1.25 Sei k eine natürliche Zahl und f und g arithmetische Funktionen. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent

$$f(n) = \sum_{d^k|n} g\left(\frac{n}{d^k}\right)$$

und

$$g(n) = \sum_{d^k|n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d^k}\right)$$

Übung 1.26 Sei k eine natürliche Zahl und f und g multiplikative Funktionen. Dann ist die Funktion

$$h(n) := \sum_{d^k|n} f(d) g\left(\frac{n}{d^k}\right)$$

ebenfalls multiplikativ.

¹³ Victor Schemmel (1840–1897)

Übung 1.27 Sei k eine natürliche Zahl ≥ 2 . Die arithmetische Funktion θ_k , definiert über

$$\theta_k(n) := \#\{d \in \mathbb{N} : d \mid n, \forall p \in \mathbb{P} : p^k \nmid d\}$$

ist multiplikativ, $\theta_2 = \theta$,

$$\theta_{2k}(n) = \#\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 : n = ab, (a; b)_k = 1\}$$

wobei $(a; b)_k$ den **größten gemeinsamen k -Teiler** von a und b symbolisiert, das heißt, sind

$$\begin{aligned} a &= p_1^{a_1} \cdot \dots \cdot p_s^{a_s} \\ b &= p_1^{b_1} \cdot \dots \cdot p_r^{b_r} \end{aligned}$$

die Primfaktorzerlegungen von a und b , dann ist

$$(a; b)_k := \prod_{j=1}^{\min(r, s)} \left(1 + [\min(a_j, b_j) \geq k] \left(p_j^{\min(a_j, b_j)} - 1 \right) \right)$$

mit der **Iverson-Klammer**¹⁴, also

$$[A] = \begin{cases} 1 & \text{wenn } A \text{ wahr ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für eine entscheidbare Aussage A . Insbesondere gilt $(a; b)_1 = (a; b)$.

Desweiteren gilt für θ_k :

$$\sum_{d^k \mid n} \theta_k\left(\frac{n}{d^k}\right) = \tau(n)$$

und

$$\theta_k(n) = \sum_{d^k \mid n} \mu(d) \tau\left(\frac{n}{d^k}\right)$$

Übung 1.28 Definiert man für $x \in \mathbb{R}$

$$\varphi(x, n) := \#\{m \in \mathbb{N} : m \leq x, (m; n) = 1\}$$

dann ist $\varphi(n, n) = \varphi(n)$ und es gilt:

$$\varphi(x, n) = \sum_{d \mid n} \mu(d) \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor$$

¹⁴ Kenneth Eugene Iverson (1920–2004)

sowie

$$\left| \varphi(x, n) - \frac{\varphi(n)}{n} x \right| \leq \theta(n) = 2^{\omega(n)}$$

Übung 1.29 Für eine natürliche Zahl k ist die **Klee-Funktion**¹⁵ $\mathcal{E}_k(n)$ definiert durch

$$\mathcal{E}_k(n) := \# \{m \in \mathbb{N} : m \leq n, (m; n)_k = 1\}$$

wobei $(m; n)_k$ wie in Übung 1.27 definiert ist. Es ist $\mathcal{E}_1 = \varphi$ und es gelten die Gleichungen

$$\sum_{d^k | n} \mathcal{E}_k\left(\frac{n}{d^k}\right) = n$$

$$\mathcal{E}_k(n) = n \sum_{d^k | n} \frac{\mu(d)}{d^k}$$

Tipp: Man formuliere und beweise ein Lemma analog zu Lemma 1.4.

$\mathcal{E}_k$ ist multiplikativ mit

$$\mathcal{E}_k(n) = n \prod_{p^k | n} \left(1 - \frac{1}{p^k}\right)$$

Übung 1.30 Sei $k \in \mathbb{N}$ vorgegeben. Definiere die arithmetische Funktion μ_k durch

$$\mu_k(n) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } n = 1 \\ (-1)^m & \text{wenn } n = (p_1 \cdot \dots \cdot p_m)^k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Also $\mu_1 = \mu$. Die Funktion μ_k ist multiplikativ und es gilt

$$\xi(n) := (\mu_k * \mathbb{1})(n) = \sum_{d|n} \mu_k(d) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } n \text{ } k\text{-frei ist, d. h. } \forall p \in \mathbb{P} : p^k \nmid n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Desweiteren gilt $\mathcal{E}_k = \xi_1 * \mu_k$.

Übung 1.31 Für eine natürliche Zahl k gilt

$$\mathcal{E}_k(n) = \sum_{\substack{d|n \\ \forall p: p^k \nmid d}} \varphi\left(\frac{n}{d}\right)$$

¹⁵ Victor LaRue Klee (1925–2007)

und

$$\sum_{d|n} \mathcal{E}_k(d) = \sum_{d^k|n} \sigma\left(\frac{n}{d^k}\right) \mu(d) = n \sum_{\substack{d|n \\ \forall p: p^k \nmid d}} \frac{1}{d}$$

Übung 1.32 Man definiert für eine natürliche Zahl $k \geq 2$ die arithmetische Funktion τ_k durch

$$\tau_k(n) := \#\{(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{N}^k : n = a_1 \cdot \dots \cdot a_k\}$$

Also insbesondere $\tau_2 = \tau$. Die Funktion τ_k ist multiplikativ und für die Werte auf Primzahlpotenzen gilt

$$\tau_k(p^a) = \binom{a+k-1}{a}$$

Desweiteren gilt für $k \geq 3$ die Rekursionsformel

$$\tau_k(n) = \sum_{d|n} \tau_{k-1}(d)$$

Übung 1.33 Definiert man für $h, k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$ die arithmetische Funktion $\tau_{k,h}$ durch

$$\tau_{k,h}(n) := \#\{(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{N}^k : a_i = m_i^h, n = a_1 \cdot \dots \cdot a_k\}$$

dann gilt

$$\tau_{k,h}(n) = \begin{cases} \tau_k(n^{\frac{1}{h}}) & \text{wenn } n = m^h \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Funktion $\tau_{k,h}$ ist multiplikativ und es gilt die Identität

$$\sum_{d|n} \tau_{k,h}(d) \mathcal{E}_h\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} d \tau_{k-1,h}\left(\frac{n}{d}\right)$$

mit der Klee-Funktion $\mathcal{E}_h$.

Übung 1.34 Man definiert die Funktion ψ_k durch

$$\psi_k(n) := \sum_{d|n} d^k \left| \mu\left(\frac{n}{d}\right) \right|$$

$\psi = \psi_1$ heißt **Dedekind-Funktion**¹⁶. Die Funktion ψ_k ist multiplikativ und es gilt

$$\psi_k(n) = \sum_{d|n} \left(\frac{d}{(d; \frac{n}{d})} \right)^k J_k \left(\left(d; \frac{n}{d} \right) \right) = n^k \prod_{p|n} \left(1 + \frac{1}{p^k} \right) = \frac{J_{2k}(n)}{J_k(n)}$$

mit der Jordan-Funktion J_k .

Übung 1.35 Definiert man für eine natürliche Zahl k die Funktion q_k durch

$$q_k(n) := \begin{cases} \left| \mu(n^{\frac{1}{k}}) \right| & \text{wenn } n = m^k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

dann ist q_k multiplikativ und für q_1 gilt

$$q_1(n) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } n \text{ quadratfrei ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Mit $\Psi_k := \zeta_1 * q_k$ gilt $\Psi_1 = \psi$ sowie

$$\Psi_k(n) = n \prod_{p^k | n} \left(1 + \frac{1}{p^k} \right)$$

Übung 1.36 Für eine natürliche Zahl k wird ein vollständiges Restklassensystem modulo n^k als **(n, k) -Restklassensystem** bezeichnet. Die Menge $R_{(n,k)} := \{m \in \mathbb{N} : m \leq n^k\}$ heißt **minimales (n, k) -Restklassensystem**. Die Menge aller m in einem (n, k) -Restklassensystem mit $(m; n^k) = 1$ wird als **primes (n, k) -Restklassensystem** bezeichnet. Die Menge

$$R_{(n,k)}^* := \{m \in \mathbb{N} : m \leq n^k, (m; n^k) = 1\}$$

heißt **minimales primes (n, k) -Restklassensystem**. Definiert man für $d \mid n$ die Menge S_d durch

$$S_d := \left\{ m \left(\frac{n}{d} \right)^k : m \in R_{(d,k)}^* \right\}$$

dann gilt für $d \mid n$, $e \mid n$ mit $d \neq e$, dass die Mengen S_d eine Partition von $\{1, \dots, n^k\}$ bilden, also $S_d \cap S_e = \emptyset$ sowie

$$\bigcup_{d|n} S_d = \{1, \dots, n^k\}$$

¹⁶ Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831–1916)

Übung 1.37 Definiert man für $k \in \mathbb{N}$ die Funktion φ_k durch

$$\varphi_k(n) := \#R_{(n,k)}^*$$

dann gilt $\varphi_1 = \varphi$ sowie

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \varphi_k(d) &= n^k \\ \varphi_k(n) &= \sum_{d|n} d^k \mu\left(\frac{n}{d}\right) \end{aligned}$$

also $\varphi_k = \zeta_k * \mu = J_k = H_k$ mit der Jordan-Funktion J_k bzw. der von Sterneck-Funktion H_k .

Übung 1.38 Für natürliche Zahlen k, n und m mit $(m; n) = 1$ gilt

$$R_{(mn,k)}^* = \left\{ xm^k + yn^k : x \in R_{(n,k)}^*, y \in R_{(m,k)}^* \right\}$$

also ist die Menge ein primes (mn, k) -Restklassensystem.

Übung 1.39 Für eine natürliche Zahl k und $d \mid n$ ist jedes prime (n, k) -Restklassensystem die Vereinigung von $\frac{\varphi_k(n)}{\varphi_k(d)}$ paarweise verschiedenen, primen (d, k) -Restklassensystemen. Insbesondere ist jedes prime Restklassensystem modulo n die Vereinigung von $\frac{\varphi(n)}{\varphi(d)}$ paarweise verschiedenen, primen Restklassensystemen modulo d . (Tipp: Man betrachte die drei Fälle $(d; \frac{n}{d}) = 1$, $\gamma(d) \mid \gamma(\frac{n}{d})$ und den allgemeinen Fall.)

Übung 1.40 Sei k eine natürliche Zahl. Für $d \mid n^k$ und $(d; n^k)_k = 1$ definiert man

$$M_d := \left\{ md : 1 \leq m \leq \frac{n^k}{d}, \left(m; \frac{n^k}{d}\right) = 1 \right\}$$

Dann gilt für $d \mid n^k, e \mid n^k$ mit $d \neq e$ und $(d; n^k)_k = (e; n^k)_k = 1$:

$$M_d \cap M_e = \emptyset$$

und

$$\bigcup_{\substack{d|n^k \\ (d;n^k)_k=1}} M_d = \left\{ m : 1 \leq m \leq n^k, \left(m; \frac{n^k}{d}\right)_k = 1 \right\}$$

Als Folgerung hieraus ergibt sich

$$\varphi_k(n) = \sum_{\substack{d|n^k \\ (d;n^k)_k=1}} \varphi\left(\frac{n^k}{d}\right)$$

Übung 1.41 Für eine natürliche Zahl k heißt die Menge

$$R_n^{(k)} := \{(m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{N}^k : \text{jedes } m_i \text{ läuft über ein vollst. Restklassensystem mod } n\}$$

ein k -Restklassensystem modulo n . Die Menge

$$(R_n^{(k)})^* := \{(m_1, \dots, m_k) \in R_n^{(k)} : (m_1; \dots; m_k; n) = 1\}$$

heißt **primes k -Restklassensystem modulo n** . Für $d \mid n$ ist jedes prime k -Restklassensystem modulo n die Vereinigung von $\frac{J_k(n)}{J_k(d)}$ paarweise verschiedenen primen k -Restklassensystemen modulo d .

Übung 1.42 Man beweise Lemma 1.9 mit Hilfe von Übung 1.4.

Übung 1.43 Sei $k \in \mathbb{N}$, $k = k_1 + \dots + k_m$ mit $k_i \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$J_k(n) = \sum_{[d_1; \dots; d_m] = n} J_{k_1}(d_1) \cdot \dots \cdot J_{k_m}(d_m)$$

Übung 1.44 Ist f eine multiplikative Funktion und $f * f = f\tau$, dann ist f sogar vollständig multiplikativ.

Übung 1.45 Sei f eine multiplikative Funktion. Gibt es eine vollständig multiplikative Funktion g mit $g(p)^a \neq 1$ und $f(g * \mu) = fg * f^{-1}$, dann ist f vollständig multiplikativ. Gilt beispielsweise $f\varphi = f\zeta_1 * f^{-1}$, dann ist f vollständig multiplikativ.

Übung 1.46 Eine multiplikative Funktion f ist genau dann vollständig multiplikativ, wenn $(fg)^{-1} = fg^{-1}$ für jede beliebige invertierbare arithmetische Funktion g gilt.

Übung 1.47 Definiere die **Liouville-Funktion**¹⁷ durch

$$\lambda(n) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } n = 1 \\ (-1)^{a_1 + \dots + a_m} & \text{wenn } n = p_1^{a_1} \cdot \dots \cdot p_m^{a_m} \end{cases}$$

Die Liouville-Funktion λ ist vollständig multiplikativ und es gilt

$$\sum_{d|n} \lambda(n) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } n \text{ eine Quadratzahl ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

¹⁷ Joseph Liouville (1809–1882)

Damit ist auch

$$\lambda(n) = \sum_{d^2|n} \mu\left(\frac{n}{d^2}\right) \quad (1.15)$$

und

$$\sum_{d^2|n} \lambda(n) \tau\left(\frac{n}{d}\right) = \#\{d \in \mathbb{N} : d^2 \mid n\}$$

sowie $\theta^{-1} = \lambda\theta$, siehe Übung 1.24.

Übung 1.48 In dieser und den nachfolgenden Übungen werden Identitäten aufgeführt für deren Beweise es hilfreich sein könnte, dass die involvierten Funktionen multiplikativ sind oder sich als Dirichlet-Faltung darstellen lassen. Im Folgenden seien $k, s, m \in \mathbb{N}_0$, wobei der Index von J_k stets positiv sein muss. Es gilt

$$\sum_{d|n} d^s \sigma_k(d) = \sum_{d|n} d^{s+k} \sigma_s\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} d^s \sigma_{s+k}\left(\frac{n}{d}\right)$$

Übung 1.49 Es gilt

$$\sum_{d|n} d^s \sigma_{k+m}(d) \sigma_k\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} d^k \sigma_{s+m}(d) \sigma_s\left(\frac{n}{d}\right)$$

Übung 1.50 Es gilt

$$\sigma_{k+s}(n) = \sum_{d|n} d^s J_k(d) \sigma_s\left(\frac{n}{d}\right)$$

Übung 1.51 Es gilt

$$\sum_{d|n} J_k(d) \sigma_s\left(\frac{n}{d}\right) = \begin{cases} n^s \sigma_{k-s}(n) & \text{wenn } k \geq s \\ n^k \sigma_{s-k}(n) & \text{wenn } k < s \end{cases}$$

Übung 1.52 Es gilt

$$\begin{aligned} \tau(n^2) &= \sum_{d|n} \theta(d) \\ \tau(n) &= \sum_{d^2|n} \theta\left(\frac{n}{d^2}\right) \\ \theta(n) &= \sum_{d|n} \tau(d^2) \mu\left(\frac{n}{d}\right) \end{aligned}$$

Übung 1.53 Es gilt

$$\sum_{d|n} \theta(d)^k \sigma_s \left(\frac{n}{d} \right) = \sum_{d|n} d^s \tau \left(\left(\frac{n}{d} \right)^{2^k} \right)$$

Übung 1.54 Es gilt

$$\tau \left(n^{2^k} \right) = \sum_{d|n} \theta(d)^k$$

Übung 1.55 Es gilt

$$\sum_{d|n} \tau \left(d^{2^k} \right) \theta \left(\frac{n}{d} \right) = \sum_{d|n} \tau(d^2) \theta \left(\frac{n}{d} \right)^k$$

Übung 1.56 Es gilt

$$\sum_{d|n} \lambda(d) \tau(d^2) \sigma_k \left(\frac{n}{d} \right) = \sum_{d|n} d^k \tau \left(\frac{n}{d} \right) \lambda \left(\frac{n}{d} \right)$$

Übung 1.57 Es gilt

$$\sum_{d|n} \tau \left(d^{2^k} \right) \lambda \left(\frac{n}{d} \right) = \sum_{d^2|n} \theta \left(\frac{n}{d^2} \right)^k$$

Übung 1.58 Es gilt

$$\sum_{d^2|n} \lambda(d) \tau \left(\frac{n}{d^2} \right) = \sum_{d^4|n} \theta \left(\frac{n}{d^4} \right)$$

Übung 1.59 Es gilt

$$\sum_{d|n} \lambda(d) \sigma_k \left(\frac{n}{d} \right) = \sum_{d^2|n} \left(\frac{n}{d^2} \right)^k$$

Übung 1.60 Seien f und g arithmetische Funktionen. Mit

$$F(n) := \sum_{d|n} f(d), \quad G(n) := \sum_{d|n} g(d)$$

gilt

$$\sum_{d|n} f(d) G \left(\frac{n}{d} \right) = \sum_{d|n} g(d) F \left(\frac{n}{d} \right)$$

Übung 1.61 Sei k eine natürliche Zahl. Eine multiplikative Funktion f ist genau dann als Dirichlet-Faltung von k vollständig multiplikativen Funktionen darstellbar, wenn $f^{-1}(p^a) = 0$ für alle Primzahlen p und alle $a \geq k + 1$ gilt.

Übung 1.62 Seien $g_1, \dots, g_k$ vollständig multiplikative Funktionen und $f = g_1 * \dots * g_k$. Ist die natürliche Zahl n ein Produkt aus unterschiedlichen Primzahlen, dann gilt

$$f^{-1}(n^k) = \mu(n)^k g_1(n) \cdot \dots \cdot g_k(n)$$

Übung 1.63 Sind g_1, g_2, h_1 und h_2 vollständig multiplikative Funktionen, dann gilt

$$g_1 g_2 * g_1 h_2 * h_1 g_2 * h_1 h_2 = (g_1 * h_1)(g_2 * h_2) * u$$

mit

$$u(n) := \begin{cases} g_1 h_1 g_2 h_2 \left(n^{\frac{1}{2}}\right) & \text{wenn } n \text{ eine Quadratzahl ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Übung 1.64 Gilt Gleichung (1.5) in Satz 1.14 für eine multiplikative Funktion f , dann ist $F = \mu B$.

Übung 1.65 Ist f speziell multiplikativ und h vollständig multiplikativ, dann ist hf speziell multiplikativ und $B_{hf} = h^2 B_f$ mit $h^2 := hh$.

Übung 1.66 Eine speziell multiplikative Funktion f ist genau dann vollständig multiplikativ, wenn $B_f = \pm \delta$.

Übung 1.67 Definiere die Funktion V durch

$$V(m, n) := \begin{cases} (-1)^{\omega(n)} & \text{wenn } \gamma(m) = \gamma(n) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Ist f multiplikativ, dann gilt für beliebige natürliche Zahlen m und n

$$f(mn) = \sum_{d|m} \sum_{e|n} f\left(\frac{m}{d}\right) f\left(\frac{n}{e}\right) f^{-1}(de) V(d, e)$$

Tipp: Übung 1.18 kann hilfreich sein.

Übung 1.68 Die Identität in Übung 1.67 kann auch direkt gezeigt werden, wenn nur der Spezialfall nachgewiesen wird, in welchem n und m Potenzen derselben Primzahl sind.

Übung 1.69 Ist f speziell multiplikativ, dann ist die Identität aus Übung 1.67 dieselbe, wie die aus Satz 1.14 (ii). Damit gibt es einen weiteren Beweis, nämlich durch den Beweis von Satz 1.14.

Übung 1.70 Für eine multiplikative Funktion f wird die **Norm** $N(f)$ einer multiplikativen Funktion durch

$$N(f)(n) := \sum_{d|n^2} f\left(\frac{n^2}{d}\right) \lambda(d) f(d)$$

definiert. Die Norm $N(f)$ ist ebenfalls multiplikativ. Ist f vollständig multiplikativ, dann auch $N(f)$ mit $N(f) = f^2$.

Übung 1.71 Sind f und g multiplikative Funktionen, dann ist

$$N(f * g) = N(f) * N(g)$$

Übung 1.72 Ist f speziell multiplikativ, dann auch $N(f)$ und $B_{N(f)} = (B_f)^2$.

Übung 1.73 Ist f multiplikativ und $f' = f * \lambda f$, dann gilt

$$f'(n) = \begin{cases} N(f)(n^{\frac{1}{2}}) & \text{wenn } n \text{ eine Quadratzahl ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Übung 1.74 Ist f speziell multiplikativ, dann gilt

$$f^2 = N(f) * \theta B = N(f) * \mu^2 B * B$$

Übung 1.75 Ist f speziell multiplikativ, dann gilt

$$f^2 * \lambda f^2 = N(f) * \lambda N(f)$$

Übung 1.76 Man finde die arithmetischen Funktionen $N(\zeta_k)$, $N(\lambda)$, $N(\sigma_k)$, $N(\beta)$, $N(\chi)$ und $N(R_1)$.

Übung 1.77 Man finde die arithmetischen Funktionen $N(\mu)$ und $N(\varphi)$.

Übung 1.78 Für eine natürliche Zahl k definiert man die arithmetische Funktion β_k durch

$$\beta_k(n) := \# \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq n^k, (x; n^k)_k \text{ ist eine } 2k\text{-te Potenz}\}$$

Man setzt $\beta := \beta_1$. Dann gilt

$$\beta_k(n) = \sum_{d^2|n} \varphi_k\left(\frac{n}{d^2}\right) = \sum_{d|n} d^k \lambda\left(\frac{n}{d}\right)$$

Insbesondere ist β_k speziell multiplikativ mit $B = \zeta_k \lambda$. Man finde die Norm $N(\beta_k)$. Wie lauten die zugehörigen Busche-Ramanujan-Identitäten?

Übung 1.79 Sei f eine speziell multiplikativ arithmetische Funktion, g eine beliebige arithmetische Funktion und $G = g * \mu$. Dann ist

$$\sum_{d|(m;n)} G(d)B(d)f\left(\frac{m}{d}\right)f\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|(m;n)} g(d)B(d)f\left(\frac{mn}{d^2}\right)$$

Insbesondere gilt für jede beliebige natürliche Zahl k

$$\sum_{d|(m;n)} J_k(d)B(d)f\left(\frac{m}{d}\right)f\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|(m;n)} d^k B(d)f\left(\frac{mn}{d^2}\right)$$

sowie für eine natürliche Zahl $h \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{d|(m;n)} d^h J_k(d)\sigma_h\left(\frac{m}{d}\right)\sigma_h\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|(m;n)} d^{h+k}\sigma_h\left(\frac{mn}{d^2}\right)$$

Übung 1.80 Ein Teiler $d \mid n$ heißt **Blockfaktor** von n , wenn $(d; \frac{n}{d}) = 1$ ist (in Kap. 4 heißt ein solcher Teiler unitärer Teiler – aber hier soll aus historischen Gründen der Ausdruck Blockfaktor verwendet werden, vgl. die Anmerkungen nach diesen Übungen). Sei k im Folgenden eine natürliche Zahl. Haben m und n keinen gemeinsamen Blockfaktor (selbstverständlich außer der 1), dann gilt

$$J_k(n) = \sum_{d|(m;n)} d^k J_k\left(\frac{m}{d}\right) J_k\left(\frac{n}{d}\right)$$

Dies kann auch direkt nachgewiesen werden, da die Jordan-Funktion J_k multiplikativ ist.

Übung 1.81 Ist in der Identität aus Übung 1.67 $f := J_k$, und haben m und n keinen gemeinsamen Blockfaktor, dann ergibt sich ebenfalls die Aussage aus Übung 1.80.

Übung 1.82 Sei f eine arithmetische Funktion. Eine **eingeschränkte Busche-Ramanujan-Identität** gilt, wenn zu f eine multiplikative Funktion F existiert, so dass für alle m und n ohne gemeinsamen Blockfaktor folgende Identität besteht:

$$f(mn) = \sum_{d|(m;n)} f\left(\frac{m}{d}\right)f\left(\frac{n}{d}\right)F(d)$$

Eine Funktion f heißt **Totient**, wenn vollständig multiplikative Funktionen g und h existieren mit $f = g * h^{-1}$. Ist f eine solche Funktion, dann gilt eine eingeschränkte Busche-Ramanujan-Identität mit $F = gh$.

Übung 1.83 Für eine arithmetische Funktion f ist die k -te **Faltung** Ω_k definiert als

$$\Omega_k(f)(n) := \begin{cases} f\left(n^{\frac{1}{k}}\right) & \text{wenn } n = m^k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zum Beispiel gilt für die in Übung 1.30 definierte Funktion $\mu_k = \Omega_k(\mu)$. Faltungen anderer Funktionen tauchen auch in den Übungen 1.5, 1.33, 1.35, 1.47, 1.63, 1.73, 1.89 und 1.91 auf.

Für zwei arithmetische Funktionen f und g gilt:

$$\begin{aligned} \Omega_k(f + g) &= \Omega_k(f) + \Omega_k(g) \\ \Omega_k(fg) &= \Omega_k(f) \Omega_k(g) \\ \Omega_k(f * g) &= \Omega_k(f) * \Omega_k(g) \end{aligned}$$

Besitzt f eine inverse Funktion, dann auch $\Omega_k(f)$ und es gilt $\Omega_k(f^{-1}) = \Omega_k(f)^{-1}$. Ist f ein Totient, dann gilt desweiteren eine eingeschränkte Busche-Ramanujan-Identität für $\Omega_2(f)$.

Übung 1.84 Eine multiplikative Funktion f heißt eine **Kreuzung** zwischen Funktionen aus einer Menge $\{f_i : i \in I\}$ arithmetischer Funktionen, wenn es für jede Primzahl p ein $i \in I$ gibt, mit $f(p^a) = f_i(p^a)$ für jede natürliche Zahl a . Ist f eine Kreuzung zwischen speziell multiplikativen Funktionen, Totienten oder 2. Faltungen von Totienten, dann gilt für f eine eingeschränkte Busche-Ramanujan-Identität.

Übung 1.85 Für eine arithmetische Funktion gelte eine eingeschränkte Busche-Ramanujan-Identität. Dann ist die Funktion eine Kreuzung zwischen speziell multiplikativen Funktionen, Totienten oder 2. Faltungen von Totienten.

Übung 1.86 Seien f und h arithmetische Funktionen und für f gelte eine eingeschränkte Busche-Ramanujan-Identität. Desweiteren sei $H = h * \mathbb{1}$. Haben m und n keinen gemeinsamen Blockfaktor, dann gilt

$$\sum_{d|(n;m)} H(d) F(d) f\left(\frac{m}{d}\right) f\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|(n;m)} h(d) F(d) f\left(\frac{mn}{d^2}\right)$$

Übung 1.87 Gilt für f eine eingeschränkte Busche-Ramanujan-Identität und haben m und n keinen gemeinsamen Blockfaktor, dann gilt

$$f(m)f(n) = \sum_{d|(m;n)} \mu(d) F(d) f\left(\frac{mn}{d^2}\right)$$

(Tipp: Man setze $h := \mu$ in Übung 1.86). Speziell gilt:

$$J_k(m)J_k(n) = \sum_{d|(m;n)} \mu(d)d^k J_k\left(\frac{mn}{d^2}\right)$$

Übung 1.88 Sei h vollständig multiplikativ, $f = h * \mathbb{1}$ und $g = h * \mu$. Dann gilt für alle natürlichen Zahlen n

$$\sum_{d|n} h\left(\frac{n}{d}\right) g\left(\frac{n}{d}\right) f(d)f(nd) = \sum_{d|n} h^2\left(\frac{n}{d}\right) f(nd^2)$$

sowie

$$\sum_{d|n} h\left(\frac{n}{d}\right) f\left(\frac{n}{d}\right) g(d)g(nd) = \sum_{d|n} h^2\left(\frac{n}{d}\right) g(nd^2)$$

(Tipp: Man setze $m = n^2$ in den Übungen 1.79 und 1.86). Speziell gilt

$$\sum_{d|n} \frac{J_k\left(\frac{n}{d}\right)}{d^k} \sigma_k(d)\sigma_k(nd) = n^k \sum_{d|n} \frac{\sigma_k(nd^2)}{d^{2k}}$$

sowie

$$\sum_{d|n} \frac{\sigma_k\left(\frac{n}{d}\right)}{d^k} J_k(d)J_k(nd) = n^k \sum_{d|n} \frac{J_k(nd^2)}{d^{2k}}$$

Übung 1.89 Für $k \in \mathbb{N}_0$ und $s \in \mathbb{N}$ wird die **Gegenbauer-Funktion**¹⁸ $\rho_{k,s}$ durch

$$\rho_{k,s}(n) = \sum_{\substack{d|n \\ \exists m \in \mathbb{N} : \frac{n}{d} = m^s}} d^k$$

definiert. Also ist auch $\rho_{k,s} = \zeta_k * v_s$ mit

$$v_s(n) := \begin{cases} 1 & \exists m \in \mathbb{N} : n = m^s \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Funktion v_s ist die s -te Faltung von $\mathbb{1}$. Desweiteren gilt:

$$\sum_{d|n} d^h \rho_{k,s}\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} d^k \rho_{h,s}\left(\frac{n}{d}\right)$$

sowie

$$\sum_{d|n} d^k J_h(d) \rho_{k,s}\left(\frac{n}{d}\right) = \rho_{h+k,s}(n)$$

¹⁸ Leopold Gegenbauer (1849–1903)

Übung 1.90 Sind h, k und s natürliche Zahlen mit $h \geq k$, dann gilt für beliebiges $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{d^s | n} J_{sk}(d) \rho_{h,s} \left(\frac{n}{d^s} \right) = n^k \rho_{h-k,s}(n)$$

sowie

$$\sum_{d|n} \rho_{h,s}(d) \rho_{k,s} \left(\frac{n}{d} \right) = n^k \sum_{d^s | n} \tau(d) \frac{\sigma_{h-k} \left(\frac{n}{d^s} \right)}{d^{ks}}$$

Übung 1.91 Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{d|n} d^k \lambda(d) \rho_{k,2s} \left(\frac{n}{d} \right) = \sum_{d|n} \lambda(d) \rho_{k,s}(d) \rho_{k,s} \left(\frac{n}{d} \right)$$

sowie

$$\sum_{d^s | n} \lambda(d) \rho_{k,s} \left(\frac{n}{d^s} \right) = \rho_{k,2s}(n)$$

Übung 1.92 Gegeben seien natürliche Zahlen q und k mit $0 < q < k$ und $S_{k,q}$ sei die Menge aller natürlicher Zahlen $n = p_1^{a_1} \cdot \dots \cdot p_t^{a_t}$, die für alle $1 \leq i \leq t$ eine der Bedingungen $a_i \equiv 0 \pmod{k}$, $a_i \equiv 1 \pmod{k}$, $\dots$, oder $a_i \equiv q-1 \pmod{k}$ erfüllen. Es gilt $n \in S_{k,q}$ genau dann, wenn $n = m^k r$ wobei r eine k - und q -freie Zahl ist. Die Zahl r heißt der **k -freie Teil** von n . Also gilt $n \in S_{k,q}$ genau dann, wenn der k -freie Teil von n auch q -frei ist. Die natürlichen Zahlen in $S_{k,q}$ heißen **(k, q) -Zahlen**. Bezeichnet $\lambda_{k,q}$ die multiplikative arithmetische Funktion, die auf Primzahlpotenzen folgendermaßen definiert ist

$$\lambda_{k,q}(p^a) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } a \equiv 0 \pmod{k} \\ -1 & \text{wenn } a \equiv q \pmod{k} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

dann ist $\lambda_{k,q} * \mathbb{1} = \zeta_{k,q}$ mit

$$\zeta_{k,q}(n) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } n \in S_{k,q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Desweiteren ist $\lambda_{2,1} = \lambda$, die Liouville-Funktion.

Übung 1.93 Anknüpfend an Übung 1.92, sei $\mu_{k,q}$ die multiplikative arithmetische Funktion, die auf Primzahlpotenzen folgendermaßen definiert ist.

Für $q \mid k$ durch

$$\mu_{k,q}(p^a) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } 0 \leq a \leq k - q \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für $q \nmid k$ durch

$$\mu_{k,q}(p^a) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } a \equiv 0 \pmod{q} \\ -1 & \text{wenn } a \geq k \text{ und } a \equiv k \pmod{q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt

$$\lambda_{k,q}^{-1} = \mu_{k,q}$$

Übung 1.94 Anknüpfend an Übung 1.93, sei eine arithmetische Funktion f mit $F = f * \mathbb{1}$ gegeben, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$g(n) = \sum_{\substack{d \mid n \\ d \in S_{k,q}}} f\left(\frac{n}{d}\right)$$

genau dann, wenn

$$g(n) = \sum_{d \mid n} \lambda_{k,q}(d) F\left(\frac{n}{d}\right)$$

gilt.

Übung 1.95 Anknüpfend an Übung 1.94, sei $\varphi_{k,q}$ durch

$$\varphi_{k,q}(n) := \#\{1 \leq x \leq n : (x, n) \in S_{k,q}\}$$

definiert. Dann ist

$$\varphi_{k,q}(n) = n \sum_{\substack{d \mid n \\ d \in S_{k,q}}} \frac{\lambda_{k,q}(d)}{n} = \sum_{\substack{d \mid n \\ d \in S_{k,q}}} \varphi\left(\frac{n}{d}\right)$$

Übung 1.96 Anknüpfend an Übung 1.95, sei $\theta_{k,q}$ die multiplikative arithmetische Funktion, die durch

$$\theta_{k,q}(n) := \#\{d : d \mid n \text{ und } d \in S_{k,q}\}$$

definiert ist. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\theta_{k,q}(n) = \sum_{d^k \mid n} \theta_q\left(\frac{n}{d^k}\right)$$

Übung 1.97 Einer Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ komplexer Zahlen kann die **formale Potenzreihe**

$$a(X) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$$

zugeordnet werden. Gleichheit von formalen Potenzreihen bedeutet Gleichheit jedes einzelnen Terms. Die **Summe** und das **Produkt** von $a(X)$ und

$$b(X) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n$$

werden durch

$$a(X) + b(X) := \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) X^n$$

und

$$a(X)b(X) := \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) X^n$$

definiert. Die Menge der formalen Potenzreihen bildet mit diesen beiden binären Verknüpfungen einen kommutativen Ring mit Eins, der **Ring der formalen Potenzreihen** (über dem Körper der komplexen Zahlen) genannt wird. Mit $a \in \mathbb{C}$ ist die formale Potenzreihe

$$a(X) := 1 - aX$$

eine Einheit in diesem Ring, das heißt, sie besitzt bezüglich der Multiplikation ein inverses Element, nämlich

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n X^n$$

Also gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n X^n = \frac{1}{1 - aX}$$

Übung 1.98 Sei eine arithmetische Funktion f und eine Primzahl p gegeben. Die formale Potenzreihe

$$f_p(X) := \sum_{n=0}^{\infty} f(p^n) X^n$$

heißt die **Bell-Reihe**¹⁹ von f in Bezug auf p . Sind f und g multiplikative arithmetische Funktionen, dann ist $f = g$ genau dann, wenn $f_p(X) = g_p(X)$ für jede Primzahl p gilt. Für jede Primzahl p ist

$$\mu_p(X) = 1 - X$$

und für eine natürliche Zahl k

$$(J_k)_p(X) = \frac{1 - X}{1 - p^k X}$$

Übung 1.99 Für jede Primzahl p ist

$$(\zeta_k)_p(X) = \frac{1}{1 - p^k X}$$

$$(\mu^2)_p(X) = 1 + X$$

$$\lambda_p(X) = \frac{1}{1 + X}$$

$$(\sigma_k)_p(X) = \frac{1}{1 - (p^k + 1)X + p^k X^2}$$

$$\theta_p(X) = \frac{1 + X}{1 - X}$$

$$(\beta_k)_p(X) = \frac{1}{1 - (p^k - 1)X - p^k X^2}$$

$$(\rho_{k,s})_p(X) = \frac{1}{1 - p^k X - X^s + p^k X^{s+1}}$$

Übung 1.100 Sind f und g arithmetische Funktionen, dann gilt für jede Primzahl p

$$(f * g)_p(X) = f_p(X) g_p(X)$$

Viele der Identitäten, die in diesem Kapitel genannt sind, können direkt aus dieser Gleichung und den Identitäten aus Übung 1.99 abgeleitet werden.

Übung 1.101 Ist f eine vollständig multiplikative Funktion, dann gilt sogar

$$f_p(X) = \frac{1}{1 - f(p)X}$$

Ist g eine speziell multiplikative Funktion, dann gilt mit $B = B_g$

$$g_p(X) = \frac{1}{1 - g(p)X + B(p)X^2}$$

¹⁹ Eric Temple Bell (1883–1960)

Übung 1.102 Ist g eine multiplikative Funktion, h eine vollständig multiplikative Funktion und gilt stets

$$g_p(X) = \frac{1}{1 - g(p)X + h(p)X^2}$$

für jede Primzahl p , dann ist g speziell multiplikativ mit $h = B_g$.

1.5 Anmerkungen zu Kap. 1

Die frühe Geschichte der Theorie arithmetischer Funktionen ist im ersten Band von Leonard Dicksons²⁰ monumentaler Abhandlung [140] enthalten. Drei Kapitel hieraus sind relevant: Kapitel V („Euler’s ϕ -function, generalizations; Farey series“), Kapitel X („Sum and number of divisors“) und Kapitel XIX („Inversion of functions; Möbius’ function $\mu(n)$; numerical integrals and derivatives“). Das älteste Schriftstück, auf welches in den genannten drei Kapiteln referenziert wird, ist ein Brief von Leonhard Euler an Daniel Bernoulli²¹ und stammt aus dem Jahr 1741. Dies bedeutet also, dass das Thema dieses Buchs ungefähr 245 Jahre alt ist.

Die Dirichlet-Faltung zweier arithmetischer Funktionen spielte von Anfang an eine bedeutende Rolle und viele der ersten Beweise benutzten die Faltung mehrerer arithmetischer Funktionen. Dies ist nirgendwo klarer ersichtlich als in der langen Liste arithmetischer Identitäten, welche von Joseph Liouville entdeckt und im Jahr 1857 veröffentlicht wurde (siehe beispielsweise [140, S. 285f]). Viele der Identitäten in den Übungen 1.48 bis 1.59 sind dieser Liste entnommen.

Zu Beginn des 20. Jahrhunderts wurden die Dirichlet-Faltung sowie die Addition und Multiplikation arithmetischer Funktion als binäre Verknüpfungen auf der Menge der arithmetischen Funktionen erkannt. In den Arbeiten von Michele Cipolla²² und Eric Bell wurde gezeigt, dass die arithmetischen Funktionen mit der Addition und Dirichlet-Faltung einen kommutativen Ring mit Eins bilden. Eine Darstellung von Michele Cipollas Arbeiten durch Franco Pellegrino²³ findet sich in dessen Veröffentlichung [299]. Die früheren Ergebnisse von Eric Bell sind in seinem Artikel [18] zu finden. Eine Zusammenfassung seines Werks findet sich in seinem Brief [24] an Ramaswamy Vaidyanathaswamy²⁴, der an den gleichen Themen arbeitete.

Die Untersuchungen der Struktur des Rings der arithmetischen Funktionen wurden fortgesetzt und es soll auf die Arbeiten von Leonard Carlitz²⁵ [41], [42] und [43], Edmond Cashwell²⁶ und Cornelius Everett²⁷ [53] sowie Harold Shapi-

²⁰ Leonard Eugene Dickson (1874–1954)

²¹ Daniel Bernoulli (1700–1782)

²² Michele Cipolla (1880–1947)

²³ Franco Pellegrino (1908–1979)

²⁴ Ramaswamy S. Vaidyanathaswamy (1894–1960)

²⁵ Leonard Carlitz (1907–1999)

²⁶ Edmond Darrell Cashwell (1920–1981)

²⁷ Cornelius Joseph Everett (1914–1987)

ro²⁸ [368] hingewiesen werden. Neben der Dirichlet-Faltung gibt es noch andere Verknüpfungen, die auf der Menge der arithmetischen Funktionen zusammen mit der Addition einen Ring bilden. Einige von diesen werden in Kap. 4 besprochen. Das Cauchy-Produkt, welches im nächsten Kapitel eingeführt wird, ist eine multiplikative Verknüpfung, die von Eckford Cohen²⁹ [69], [71] betrachtet wurde. Eine Übersicht verschiedener binärer Verknüpfungen auf der Menge der arithmetischen Funktionen wurde von Mathukumalli Subbarao³⁰ [397] gegeben.

Die Möbius-Funktion tauchte zuerst im Jahr 1832 in einer Arbeit von August Möbius über die Umkehrung von Funktionenreihen auf. John Loxton³¹ und Jeff Sanders³² [246] erläutern die Entwicklung von Anwendungen der Möbius-Funktion auf die Umkehrung von Reihen sowie anderer Probleme, die keinen direkten zahlentheoretischen Hintergrund haben. Darauf wird in den Anmerkungen zu Kap. 5 nochmals eingegangen.

Satz 1.3 ist der erste von vielen Sätzen, die die Umkehrung von arithmetischen Funktionen behandeln. Die Aussagen in Übungen 1.15 und 1.25 sind Beispiele für solche. Die Erstgenannte wurde von Paul McCarthy [258] bewiesen; die Zweitgenannte ist eine natürliche Verallgemeinerung des Satzes 1.3, welche oft wieder entdeckt wird, sobald sie benötigt wird. Umkehrsätze werden ebenfalls bei David Daykin³³ [135], [137], Upadhyayula Satyanarayana³⁴ [355], [356], Tom Apostol³⁵ [5], Rodney Hansen³⁶ [186] sowie bei Rodney Hansen und Leonard Swanson³⁷ [187] besprochen.

Sowohl Satz 1.3 als auch das Inklusions-Exklusions-Prinzip sind Folgerungen eines allgemeinen Satzes aus der Theorie der Gitter, was wirklich bemerkenswert ist. Es ist dieser Teil der Gittertheorie, der in Kap. 7 behandelt wird. Das entsprechende Inklusions-Exklusions-Prinzip ist dann in Übung 7.44 dargestellt. S. Pankajam³⁸ [298] behandelt einige Anwendungen dieses Prinzips auf die Auswertung arithmetischer Funktionen.

Die Geschichte der Jordan-Funktion J_k wurde von Leonard Dickson [140, S. 147–155] zusammen gefasst und er betont, dass Robert von Sterneck $J_k = H_k$ bewiesen hat. Dessen Beweis ist in den Übungen 1.7, 1.42 und 1.43 enthalten. Die Funktion φ_k aus Übung 1.37 wurde durch Eckford Cohen [68] eingeführt. Die in den Übungen 1.36 bis 1.41 genannten Aussagen stammen aus dessen Artikel und werden in diesem sowie in den Veröffentlichungen [75], [76] und [84] bewiesen.

²⁸ Harold Nathaniel Shapiro (1922–2013)

²⁹ Eckford Cohen (1920–2005)

³⁰ Mathukumalli Venkata Subbarao (1921–2006)

³¹ John Harold Loxton (geb. 1947)

³² Jeffrey William Sanders

³³ David Edward Daykin (1932–2010)

³⁴ Upadhyayula Venkata Satyanarayana

³⁵ Tom Mike Apostol (1923–2016)

³⁶ Rodney Thor Hansen (geb. 1941)

³⁷ Leonard George Swanson

³⁸ S. Pankajam

Vollständig multiplikative Funktionen wurden von Ramaswamy Vaidyanathaswamy auf Grund der Form ihrer zugehörigen Bell-Reihen als **lineare Funktionen** bezeichnet, vgl. auch Übung 1.101. Die Folgerung 1.11 sowie die notwendige Bedingung in Lemma 1.10 wurden von Ramaswamy Vaidyanathaswamy [482] angegeben. Er stellt ebenfalls die Notwendigkeit der Bedingung in Folgerung 1.12 fest. Das vollständige Resultat, einschließlich des Beweis der Rückrichtung wurde von Joachim Lambek³⁹ [233] erbracht. Tom Apostol [7] hat einen Artikel zur Theorie der vollständig multiplikativen Funktionen, die die Beweise der Folgerungen 1.11 und 1.12, des Lemmas 1.10 sowie der Übungen 1.45 und 1.46 enthalten, geschrieben. Für Anmerkungen zur Übung 1.45 kann auch der Artikel [236] von Eric Langford⁴⁰ zu Rate gezogen werden. Der Spezialfall in Übung 1.45 ist von Ramakrishna Sivaramakrishnan⁴¹ [372], und das Ergebnis in Übung 1.44 von Leonard Carlitz [48].

Die Untersuchung von speziell multiplikativen Funktionen analog zu Satz 1.14 stammt von Ramaswamy Vaidyanathaswamy [483], [484]. Er nennt diese **quadratische Funktionen**, siehe auch Übung 1.101, und der Begriff „speziell multiplikative Funktion“ wurde von Derrick Lehmer⁴² [242] eingeführt. Aus dem Artikel [483] von Ramaswamy Vaidyanathaswamy aus dem Jahr 1930 stammt die Identität in Übung 1.67; er nennt diese die **identische Gleichung** der Funktion f . Wie er bemerkt, ist für eine speziell multiplikative Funktion die identische Gleichung die Gleichung aus Satz 1.14 (ii). Sie entspricht dem Spezialfall eines einzigen Arguments in einem allgemeineren Ergebnis von Ramaswamy Vaidyanathaswamy, das dieser im Artikel [484] aus dem Jahr 1931 für arithmetische Funktionen mit mehreren Argumenten anführt. Ein Beweis der identischen Gleichung analog zu Übung 1.68 wurde von Anthony Gioia⁴³ [160] angegeben.

Die Aussage in Übung 1.62 genauso wie die notwendige Bedingung in Übung 1.61 wurden ebenfalls von Ramaswamy Vaidyanathaswamy in seinem Artikel [483] bewiesen. Die vollständige Äquivalenz aus Übung 1.61 wurde von Timothy Carroll⁴⁴ und Anthony Gioia [52] erbracht, sowie unabhängig davon der Spezialfall $k = 2$ von Ramakrishna Sivaramakrishnan [375]. Die Gleichung in Übung 1.63 stammt von Ramaswamy Vaidyanathaswamy [484] und ein anderer Beweis hiervon wurde auch durch Joachim Lambek [233] erbracht.

In der Einleitung seines Artikels [484] schreibt Ramaswamy Vaidyanathaswamy, dass der Artikel aus seinem Interesse, die Gleichung

$$\sigma_k(mn) = \sum_{d|(m;n)} \sigma_k\left(\frac{m}{d}\right) \sigma_k\left(\frac{n}{d}\right) \mu(d) d^k \quad (1.16)$$

³⁹ Joachim Lambek (1922–2014)

⁴⁰ Eric Siddon Langford

⁴¹ Ramakrishna Ayya Sivaramakrishnan (geb. 1936)

⁴² Derrick Henry Lehmer (1905–1991)

⁴³ Anthony Alfred Gioia (1917–2008)

⁴⁴ Timothy B. Carroll

zu verstehen, entstanden sei; sowie auch, um das umgekehrte Problem zu lösen, nämlich eine möglichst allgemeine Klasse von Funktionen zu bestimmen, die eine Gleichung dieser Form erfüllt [484, S. 582]. Seine Bemühungen waren durch den Beweis von Satz 1.14 erfolgreich. Tatsächlich ist sein Theorem XXXV ein noch allgemeineres Ergebnis für arithmetische Funktionen mehrerer Argumente. Die Gleichung (1.16) im Fall $k = 0$ wurde von Srinivasa Ramanujan [322] angegeben und der allgemeine Fall wurde von Sarvadaman Chowla⁴⁵ [66] bewiesen. Der Beweis des Satzes 1.14 ist aus dem Artikel [251] von Paul McCarthy entnommen.

Das analoge Problem für die eingeschränkte Busche-Ramanujan-Identität wurde von Ramaswamy Vaidyanathaswamy [484] in einem Beweis, welcher für arithmetische Funktionen mehrerer Argumente gilt (vgl. Theorem XXXVIII in [484]), gelöst. Sein Ergebnis im eindimensionalen Fall bildet die Grundlage für die Übungen 1.80 bis 1.85. Er führt die k -te Faltung einer arithmetischen Funktion ein, welche von Harald Scheid⁴⁶ [360], [361] und von diesem zusammen mit Ramakrishna Sivaramakrishnan [364] untersucht wurde. Die Aussagen in den Übungen 1.79 sowie 1.86 bis 1.88 wurden von Paul McCarthy [251], [255], [256] bewiesen.

Speziell multiplikative Funktionen tauchen naturgemäß in der Theorie der Modulformen auf, die beispielsweise in Tom Apostols Buch [12] behandelt werden. Die Werte mancher speziell multiplikativer Funktionen treten nämlich als Fourier-Koeffizienten⁴⁷ von Modulformen auf. In Kapitel 6 des Buchs [12] wird ein Satz von Erich Hecke⁴⁸ bewiesen, der die Modulformen, die auf diese Weise mit speziell multiplikativen Funktionen verbunden sind, charakterisiert. Eine solche arithmetische Funktion ist beispielsweise **Ramanujans τ -Funktion**, die nicht mit der Teilersummen-Funktion τ verwechselt werden sollte (nur hier, in diesen Anmerkungen zu Kap. 1, steht τ für Ramanujans τ -Funktion). Srinivasa Ramanujan führte diese Funktion als Koeffizienten einer Potenzreihe über die Gleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) x^n = x \prod_{k=1}^{\infty} (1 - x^k)^{24}$$

ein. Sowohl die Reihe als auch das Produkt konvergieren für $|x| < 1$. Die Definition von τ über eine Modulform lässt sich in Tom Apostols Buch [12, S. 20] finden; darin [12, S. 92f] findet sich auch die Beweisidee dafür, dass τ speziell multiplikativ ist mit $B_\tau = \zeta_{11}$. Das bedeutet also, erstens,

$$\tau(p^{a+1}) = \tau(p) \tau(p^a) - p^{11} \tau(p^{a-1})$$

für jede Primzahl p und alle natürlichen Zahlen a , zweitens, für alle natürlichen Zahlen m und n

$$\tau(mn) = \sum_{d|(m,n)} \tau\left(\frac{m}{d}\right) \tau\left(\frac{n}{d}\right) \mu(d) d^{11}$$

⁴⁵ Sarvadaman D. S. Chowla (1907–1995)

⁴⁶ Harald Scheid (geb. 1939)

⁴⁷ Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830)

⁴⁸ Erich Hecke (1887–1947)

was auch von Kollagunta Ramanathan⁴⁹ [317] bemerkt wurde, sowie, drittens,

$$\tau(m)\tau(n) = \sum_{d|(m;n)} d^{11} \tau\left(\frac{mn}{d^2}\right)$$

Aus dem Beweis von Satz 1.14 ((iv) $\Rightarrow$ (i)) ergibt sich daher

$$\tau = g_1 * g_2$$

mit vollständig multiplikativen Funktionen g_1 und g_2 , die auf Primzahlen p über

$$g_{1/2}(p) := \frac{1}{2} \left(\tau(p) \pm \sqrt{\tau(p)^2 - 4p^{11}} \right)$$

definiert sind. Srinivasa Ramanujan vermutete [321], dass der Ausdruck unter der Wurzel stets negativ ist. Diese Vermutung wurde von Pierre Deligne⁵⁰ bewiesen, siehe auch [12, S. 136].

Godfrey Hardy hat ein Kapitel seines Buchs [196] Ramanujans τ -Funktion gewidmet. Eine Übersicht der Aussagen über τ wurde von Frederick van der Blij⁵¹ [36] erstellt, in welcher eine lange, wenn auch längst veraltete, Literaturübersicht enthalten ist. John Ewell⁵² hat in seinem Artikel [151] eine Formel für $\tau(n)$ gefunden, in welche diese als die Anzahl der Darstellungen einer natürlichen Zahl als Summe von 16 Quadraten eingeht.

Die Norm $N(f)$ einer multiplikativen Funktion wurde durch Puliya Kot Menon⁵³ in seinem Artikel [270], der Ramanujans τ -Funktion behandelt, eingeführt. Die Normen speziell multiplikativer Funktionen wurden von Ramakrishna Sivaramakrishnan [375] untersucht.

Die Auswertung der Summe in Übung 1.7 wird üblicherweise Puliya Kot Menon [271] zugeschrieben. Sie ist auch in einem allgemeinen Ergebnis von Eckford Cohen [82] enthalten, worauf nochmals in den Anmerkungen zu Kap. 2 eingegangen wird. Dieses Ergebnis wurde oft bewiesen und verallgemeinert, beispielsweise in den Artikeln von K. Nageswara Rao⁵⁴ [331], [338], Ramakrishna Sivaramakrishnan [371], [374], S. Venkatramaiah⁵⁵ [503], T. Venkataraman⁵⁶ [502], V. Sita Ramaiah⁵⁷ [311] und I. M. Richards⁵⁸ [349].

Die Funktion φ_f aus Übung 1.21 wurde von Puliya Kot Menon [272], sowie unabhängig von Harlan Stevens⁵⁹ [386] eingeführt. Diese Funktion, ebenso wie viele

⁴⁹ Kollagunta Gopalaiyer Ramanathan (1920–1992)

⁵⁰ Pierre Deligne (geb. 1944)

⁵¹ Frederick van der Blij (geb. 1923)

⁵² John Albert Ewell (1928–2007)

⁵³ Puliya Kot Kesava Menon (1917–1979)

⁵⁴ K. Nageswara Rao

⁵⁵ S. Venkatramaiah

⁵⁶ T. Venkataraman

⁵⁷ V. Sita Ramaiah

⁵⁸ I. M. Richards

⁵⁹ Harlan Riley Stevens

andere Funktionen, die mit Hilfe eines Polynoms oder einer Menge von Polynomen definiert sind, wurden von Jayanthi Chidambaraswamy⁶⁰ untersucht [57], [59], [60], [63].

Die grundlegenden Eigenschaften der Klee-Funktion $\mathcal{E}_k$, die in Übung 1.29 definiert wurde, sind von Victor Klee [229] beschrieben worden; aus diesem Grund trägt sie seither seinen Namen, wenngleich jene auch bereits im Jahr 1900 durch Franz Rogel⁶¹ untersucht wurde (vgl. hierzu [140, S. 134]). Wenige Jahre bevor Victor Klees Artikel erschien, wurde die Funktion $\mathcal{E}_2$ durch Edward Haviland⁶² [198] untersucht. Andere Eigenschaften von $\mathcal{E}_k$ wurden von Paul McCarthy [249], K. Nageswara Rao [325], Upadhyayula Satyanarayana und K. Pattabhiramasastri⁶³ [357] sowie von A. C. Vasu⁶⁴ [489] publiziert.

Die Funktionen τ_k und $\tau_{k,h}$ aus den Übungen 1.32 und 1.33 wurden von Martin Beumer⁶⁵ [35] und Ramakrishna Sivaramakrishnan [370] untersucht. Letztgenannter bewies die Aussage, die $\tau_{k,h}$ und die Klee-Funktion in Verbindung zueinander setzt. Die Funktion τ_k wurde sogar mehrere Male entdeckt, siehe [140, S. 135, S. 287 sowie S. 308].

Das Radikal aus Übung 1.14 wurde von Severin Wigert⁶⁶ [510] eingeführt und ebenfalls von anderen Mathematikern, einschließlich Eckford Cohen [85] und D. Suryanarayana⁶⁷ [431], betrachtet. Die Funktion δ_k aus Übung 1.20 wurde ebenfalls von D. Suryanarayana untersucht [419]. Zu den ersten Untersuchungen der Schemmel-Funktion aus Übung 1.23 wird auf Leonard Dicksons Buch [140, S. 147] verwiesen. Eine Verallgemeinerung von ihr wurde durch K. Nageswara Rao [329] vorgenommen. Die Verallgemeinerungen der Dedekind-Funktion aus den Übungen 1.34 und 1.35 wurden durch D. Suryanarayana [418] und J. Hanumanthachari⁶⁸ [190] eingeführt. Die (k, q) -Zahlen sowie die zugehörigen arithmetischen Funktionen aus den Übungen 1.92 bis 1.96 wurden durch Mathukumalli Subbarao und V. C. Harris⁶⁹ [399] definiert.

Die Bell-Reihen in den Übungen 1.97 bis 1.102 wurden von Eric Bell [18] eingeführt. Die Bell-Reihen für arithmetische Funktionen, die von mehreren Argumenten abhängen, waren eines der wichtigsten Hilfsmittel für Ramaswamy Vaidyanathaswamy [484].

⁶⁰ Jayanthi Swamy Chidambaraswamy (1928–2006)

⁶¹ Franz Rogel (geb. 1852)

⁶² Edward Kenneth Haviland

⁶³ K. Pattabhiramasastri

⁶⁴ A. C. Vasu

⁶⁵ Martin G. Beumer

⁶⁶ Carl Severin Wigert (1871–1941)

⁶⁷ D. Suryanarayana

⁶⁸ J. Hanumanthachari

⁶⁹ V. C. Harris



<http://www.springer.com/978-3-662-53731-2>

Arithmetische Funktionen

McCarthy, P.J.

2017, VIII, 253 S., Softcover

ISBN: 978-3-662-53731-2