2

Die Spezielle Relativitätstheorie

Mithilfe des berühmten Michelson-Morley-Experiments wurde entdeckt, dass die Geschwindigkeit des Lichts in allen Inertialsystemen den gleichen Wert hat.[1] Einstein war der Erste, der die weitreichenden Konsequenzen dieser Entdeckung erkannte und um diese kuriosen Eigenschaft der Natur seine Theorie der Speziellen Relativität entwickelte. Ausgehend von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit war Einstein in der Lage, viele seltsame Vorhersagen herzuleiten, die sich alle als richtig erweisen sollten. Wir werden bald sehen, wie mächtig Einsteins Ideen sind, aber zuerst sollten wir klären, worum es bei der Speziellen Relativitätstheorie überhaupt geht. Die zwei Basis-Postulate sind:

- **Das Prinzip der Relativität:** Die Physik ist in allen Inertialsystemen gleich. Mit Inertialsystemen bezeichnet man Bezugsysteme, die sich mit konstanter Geschwindigkeit relativ zueinander bewegen.

- **Die Invarianz der Lichtgeschwindigkeit:** Die Geschwindigkeit des Lichts hat den gleichen Wert c in allen Intertialsystemen.

Das erste Postulat bedeutet konkret, dass es keine Rolle spielt, wie wir unser Koordinatensystem wählen. Unsere physikalischen Gleichungen müssen gleich sein, egal wo wir den Ursprung des Koordinatensystems und den Zeitnullpunkt wählen oder in welche Richtungen die Achsen zeigen. Dasselbe gilt auch für die Geschwindigkeit, mit der sich unser System relativ zum jeweiligen Objekt bewegt. Diese Bedingung wird durch das folgende Gedankenexperiment motiviert: Ein Astronaut kann in einem Raumschiff, das mit gleichmäßiger Geschwindigkeit fliegt, unmöglich sagen, ob sich das Raumschiff überhaupt bewegt. Selbst wenn er aus dem Fenster schaut, kann er nicht sagen, ob er oder alle Sterne um ihn herum sich bewegen. Es gibt keine Möglichkeit, absolut zu definieren, was

[1] Die Geschwindigkeit aller Objekte, die wir im Alltag beobachten, hängt vom gewählten Bezugssystem ab. Nimmt man zum Beispiel an, ein Beobachter misst am Bahnsteig stehend die Geschwindigkeit eines vorbeifahrenden Zuges mit 50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ein zweiter Beobachter, der mit 15 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ relativ zum ersten Beobachter neben dem Zug läuft, wird nur eine Zuggeschwindigkeit von 35 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ messen. Im Gegensatz dazu bewegt sich Licht im Vakuum immer mit $1,08 \cdot 10^9\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

J. Schwichtenberg, *Durch Symmetrie die moderne Physik verstehen*, DOI 10.1007/978-3-662-53812-8_2

„in Ruhe“ bedeutet. Wir können immer nur sagen, dass sich zwei Objekte relativ zueinander in Ruhe befinden. Deswegen muss die konstante Geschwindigkeit, mit der sich unser Koordinatensystem relativ zu irgendeinem anderen Objekt bewegt, keine Rolle spielen. Im Gegensatz dazu wirken in beschleunigten Koordinatensystemen zusätzliche Kräfte, nämlich genau die Kräfte, die für die Beschleunigung verantwortlich sind. Diese zusätzlichen Kräfte wirken auf die Objekte, die wir beschreiben, und verändern aus diesem Grund die physikalischen Gleichungen.

Das Einzige an der Speziellen Relativitätstheorie, was unseren Alltagserfahrungen widerspricht, ist das zweite Postulat. Jedoch bestätigen alle Experimente bis zum heutigen Tag, dass es korrekt ist.

2.1 Die Invariante der Speziellen Relativitätstheorie

In den folgenden Abschnitten benutzen wir die Postulate der Speziellen Relativitätstheorie, um die Minkowski-Metrik herzuleiten. Die Minkowski-Metrik ist ein Werkzeug, mit dem wir den „Abstand“ zweier physikalischen Ereignisse berechnen können. Ein anderer Name für „physikalisches Ereignis“ ist in diesem Zusammenhang „Punkt im Minkowski-Raum“. Der Minkowski-Raum ist die Bühne, auf der die Gesetze der Speziellen Relativitätstheorie gelten. Anschließend leiten wir her, dass alle Transformationen, die zwei Inertialsysteme miteinander verbinden, zwangsläufig die Minkowski-Metrik unverändert lassen. Diese Tatsache können wir dann anwenden, um alle Transformationen, die Bezugssysteme mit einer konstanten Lichtgeschwindigkeit miteinander verbinden, herzuleiten. Im Weiteren machen wir uns dann zunutze, dass wir all diese Transformationen kennen, um Gleichungen herzuleiten, die von diesen Transformationen nicht verändert werden. Wir beginnen mit einem Gedankenexperiment, das uns ermöglicht, eine der wichtigsten Konsequenzen der Postulate der Speziellen Relativitätstheorie herzuleiten.

Abbildung 2.1: Illustration des Gedankenexperiments

Wir stellen uns vor: Wir haben einen Beobachter, der am Ursprung seines Koordinatensystems steht und einen kurzen Lichtpuls direkt nach oben schickt. Dort wird der Lichtpuls von einem Spiegel reflektiert und kommt so wieder zurück an den Ort, von dem er losgeschickt wurde. Diese Abfolge ist in Abbildung 2.1 dargestellt.

Hierbei haben wir drei wichtige Ereignisse:

- **A** : Das Licht wird am Startpunkt losgeschickt.

- **B** : Das Licht wird reflektiert.
- **C** : Das Licht kommt wieder am Startpunkt an.

Das Zeitintervall zwischen den Ereignissen **A** und **C** ist[2]

$$\Delta t = t_C - t_A = \frac{2L}{c}, \tag{2.1}$$

wobei L der Abstand zwischen dem Startpunkt und dem Spiegel ist.

[2] Für eine konstante Geschwindigkeit v haben wir $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, mit der Strecke, die zurückgelegt wird, Δs und der Zeit, die benötigt wird, Δt. Somit gilt $\Delta t = \frac{\Delta s}{v}$.

Als Nächstes stellen wir uns vor: Es gibt einen zweiten Beobachter, der zum Zeitpunkt t_A am Ursprung seines Koordinatensystems steht und sich mit konstanter Geschwindigkeit u, relativ zum ersten Beobachter, nach links bewegt.[3] Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass der Ursprung des zweiten Beobachters zum Zeitpunkt t_A mit dem Ursprung des ersten Beobachters übereinstimmt. Interessant an dieser Konstellation ist, dass der zweite Beobachter die Ereignisse anders als der erste Beobachter sieht. In seinem Bezugssystem stimmt der Punkt, an dem der Lichtstrahl zum Zeitpunkt t_C wieder ankommt, nicht mit dem Startpunkt des Lichts überein (siehe Abb. 2.2).

[3] Transformationen in Koordinatensysteme, die sich mit einer anderen konstanten Geschwindigkeit bewegen, heißen **Boosts**. Wir werden später eine formale Beschreibung solcher Transformationen herleiten.

Mathematisch bedeutet das

$$x'_A = 0 \neq x'_C = u\Delta t' \qquad \rightarrow \qquad \Delta x' = u\Delta t'\,, \tag{2.2}$$

wobei die Koordinaten mit dem Apostroph die Koordinaten des zweiten Beobachters sind. Für den ersten Beobachter haben wir natürlich

$$x_A = x_C \qquad \rightarrow \qquad \Delta x = 0\,. \tag{2.3}$$

Wir nehmen an, der zweite Beobachter bewegt sich entlang der x-Achse, also haben wir

$$y'_A = y'_C \quad \text{und} \quad z'_A = z'_C \quad \rightarrow \quad \Delta y' = 0 \quad \text{und} \quad \Delta z' = 0 \tag{2.4}$$

und gleichermaßen natürlich

$$y_A = y_C \quad \text{und} \quad z_A = z_C \quad \rightarrow \quad \Delta y = 0 \quad \text{und} \quad \Delta z = 0\,. \tag{2.5}$$

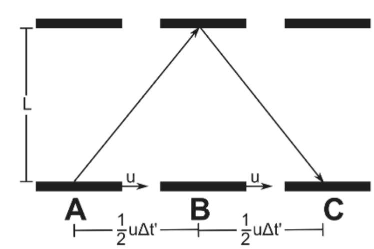

Abbildung 2.2: Illustration des Gedankenexperiments für einen zweiten Beobachter, der sich relativ zum ersten nach links bewegt. Somit bewegt sich der erste Beobachter und mit ihm das Experiment relativ zum zweiten Beobachter nach rechts

Die nächste Frage, die wir uns stellen, ist: **Welches Zeitintervall zwischen den Ereignissen misst der zweite Beobachter?** Um das Ergebnis vorwegzunehmen: Durch die konstante Lichtgeschwindigkeit misst der zweite Beobachter ein anderes Zeitintervall zwischen den Ereignissen A und C! Das Zeitintervall $\Delta t' = t'_C - t'_A$ ist gegeben durch die Strecke l, die das Licht im Bezugssystem des zweiten Beobachters zurücklegt, geteilt durch die Geschwindigkeit des Lichts c:

$$\Delta t' = \frac{l}{c}\,. \tag{2.6}$$

Die Strecke l können wir mit dem guten alten Satz von Pythagoras ausrechnen (siehe Abb. 2.2)

$$l = 2\sqrt{\left(\frac{1}{2}u\Delta t'\right)^2 + L^2}. \tag{2.7}$$

Also können wir mithilfe von Gleichung 2.6 folgern:

$$c\Delta t' = 2\sqrt{\left(\frac{1}{2}u\Delta t'\right)^2 + L^2}\,. \tag{2.8}$$

Jetzt benutzen wir $\Delta x' = u\Delta t'$ aus Gl. 2.2 und schreiben

$$c\Delta t' = 2\sqrt{\left(\frac{1}{2}\Delta x'\right)^2 + L^2}$$

$$\rightarrow (c\Delta t')^2 = 4\left(\left(\frac{1}{2}\Delta x'\right)^2 + L^2\right)$$

$$\rightarrow (c\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = 4\left(\left(\frac{1}{2}\Delta x'\right)^2 + L^2\right) - (\Delta x')^2 = 4L^2\,. \tag{2.9}$$

Als Nächstes erinnern wir uns daran, dass $\Delta t = \frac{2L}{c}$ gilt (Gl. 2.1) . Damit haben wir

$$(c\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = 4L^2 = (c\Delta t)^2 = (\Delta tc)^2 - \underbrace{(\Delta x)^2}_{=0 \text{ siehe Gl. 2.3}}. \tag{2.10}$$

Somit haben wir schlussendlich[4]

$$(c\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - \underbrace{(\Delta y')^2}_{=0} - \underbrace{(\Delta z')^2}_{=0} = (c\Delta t)^2 - \underbrace{(\Delta x)^2}_{=0} - \underbrace{(\Delta y)^2}_{=0} - \underbrace{(\Delta z)^2}_{=0}\,. \tag{2.11}$$

Betrachten wir einen dritten Beobachter, der sich mit einer anderen Geschwindigkeit relativ zum ersten bewegt, können wir analog herleiten, dass

$$(c\Delta t'')^2 - (\Delta x'')^2 - (\Delta y'')^2 - (\Delta z'')^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2\,. \tag{2.12}$$

Somit haben wir etwas gefunden, das für alle Beobachter gleich ist: die quadratische Form

$$(\Delta s)^2 \equiv (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2. \tag{2.13}$$

Außerdem haben wir in diesem Abschnitt gelernt, dass $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$ oder $(c\Delta t)^2$ für verschiedene Beobachter jeweils verschiedene Werte haben. Die Konsequenzen dieses Resultats besprechen wir im nächsten Abschnitt.

[4] Beachte: Was wir hier machen, ist nur der schnellste Weg zum Resultat, weil wir angenommen haben, dass der Ursprung des zweiten Beobachters mit dem des ersten Beobachters übereinstimmt. Allerdings kann man genau analog, allerdings mit mehr Schreibarbeit, die gleichen Schritte für beliebige konstant bewegte Beobachter durchführen. Die Physik muss ja die gleiche sein in allen Interialsystemen. Diese Freiheit haben wir ausgenutzt, um Bezugssysteme zu wählen, in denen die Rechnung besonders einfach ist.

2.2 Eigenzeit

Wir haben im letzten Abschnitt die Invariante der Speziellen Relativitätstheorie Δs^2 hergeleitet. Das bedeutet, dass Δs^2 eine Größe ist, die für alle Beobachter den gleichen Wert hat. Jetzt besprechen wir die physikalische Bedeutung dieser Größe.

Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf eine räumliche Dimension. Das **Raumzeit-Diagramm** eines (relativ zu einem Beobachter) ruhenden Objekts ist in Abbildung 2.3 dargestellt. Außerdem ist das Raumzeit-Diagramm eines Objekts, das sich (relativ zum selben Beobachter) bewegt, in Abbildung 2.4 dargestellt.

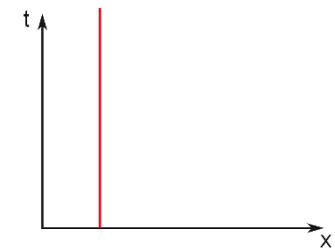

Abbildung 2.3: Weltlinie eines Objekts in Ruhe. Die Position des Objekts bleibt gleich, während die Zeit fortschreitet

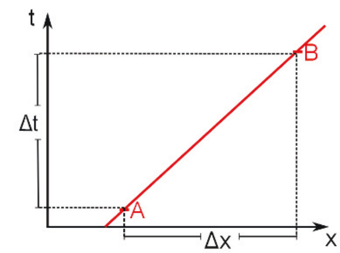

Abbildung 2.4: Weltlinie eines bewegten Objektes mit zwei Ereignissen A und B. Der zurückgelegte Abstand zwischen A und B ist Δx und die vergangene Zeit Δt

Die in diesen Abbildungen dargestellten Linien, die angeben, wo sich ein Objekt zu einem gegebenen Zeitpunkt befindet, heißen **Weltlinien**. Weltlinien sind immer abhängig vom jeweiligen Beobachter. Für zwei verschiedene Beobachter sehen die Raumzeit-Diagramme desselben Objekts vollkommen anders aus. Für einen zweiten Beobachter, der sich mit der gleichen Geschwindigkeit wie das Objekt bewegt, ist das Raumzeit-Diagramm in Abbildung. 2.5 dargestellt. Für diesen zweiten Beobachter ruht das Objekt. Wir benutzen erneut zur Beschreibung der Koordinaten des zweiten Beobachters einen Apostroph x' and t'.

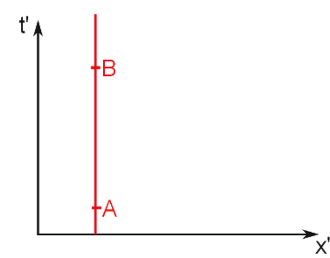

Abbildung 2.5: Weltlinie desselben Objekts, beobachtet von einem zweiten Beobachter, der sich mit der gleichen Geschwindigkeit wie das Objekt relativ zum ersten Beobachter bewegt. Der räumliche Abstand zwischen den Ereignissen A und B ist für diesen Beobachter $\Delta x' = 0$

In den Raumzeit-Diagrammen können wir sehen, dass das Objekt zwischen A und B unterschiedliche Strecken in der Raumzeit für die beiden Beobachter zurücklegt. Für die ersten Beobachter ist $\Delta x \neq 0$, aber für den zweiten $\Delta x' = 0$. Für beide Beobachter ist das Zeitintervall zwischen A und B nicht Null: $\Delta t \neq 0$ und $\Delta t' \neq 0$. Wie im letzten Abschnitt hergeleitet, sind sich die Beobachter über den Wert der Größe $(\Delta s)^2$ einig. Eine überraschende Konsequenz dieser Tatsache ist, dass beide Beobachter sich nicht über die Zeit, die zwischen den Ereignissen A und B vergangen ist, einig sind:

$$(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 \tag{2.14}$$

$$(\Delta s')^2 = (c\Delta t')^2 - \underbrace{(\Delta x')^2}_{=0} = (c\Delta t')^2 \tag{2.15}$$

$$(\Delta s)^2 = (\Delta s')^2 \rightarrow (\Delta t')^2 \neq (\Delta t)^2 \quad \text{weil } (\Delta x)^2 \neq 0 \tag{2.16}$$

Diese sogenannte **Zeitdilatation** ist eines der berühmtesten Phänomene der Speziellen Relativitätstheorie. Zeitintervalle sind vom Beobachter abhängig. Die Uhren ticken für jeden Beobachter unterschiedlich, und deswegen gibt es unterschiedlich viele Ticks zwischen zwei Ereignissen.

Wir wissen jetzt also, dass sich zwei Beobachter in der Regel nicht über die Zeit zwischen zwei Ereignissen einig sind. Deswegen ist ein neuer Zeitbegriff, über den sich alle Beobachter einig sind, nützlich. Im obigen Beispiel gilt für den zweiten Beobachter, der sich mit der gleichen Geschwindigkeit wie das Objekt bewegt,

$$(\Delta s)^2 = (c\Delta t')^2 . \tag{2.17}$$

Das bedeutet, dass der numerische Wert der Invarianten der Speziellen Relativitätstheorie $(\Delta s)^2$ gleich dem von diesem speziellem Beobachter gemessenen Zeitintervall mal einer Konstante c ist. Das können wir nutzen, um $(\Delta s)^2$ zu interpretieren und um einen Zeitbegriff zu definieren, über den sich alle Beobachter einig sind. Wir definieren

$$(\Delta s)^2 = (c\Delta \tau)^2, \tag{2.18}$$

wobei τ die **Eigenzeit** genannt wird. Die Eigenzeit ist die Zeit, die von einem Beobachter gemessen wird, der sich in dem Bezugssystem befindet, in dem das Objekt ruht.

Selbstverständlich sind die Objekte in der echten Welt nicht darauf beschränkt, sich mit konstanter Geschwindigkeit zu bewegen. Wenn aber das Zeitintervall kurz genug gewählt wird, im Extremfall infinitesimal, ist jede Bewegung linear, und der Begriff der Eigenzeit ist sinnvoll. Mathematisch ausgedrückt erfordert das, dass wir den Übergang zu infinitesimalen Intervallen machen $\Delta \to d$:

$$(ds)^2 = (cd\tau)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2. \tag{2.19}$$

Sogar wenn sich ein Objekt wild bewegt, können wir uns einen Beobachter vorstellen, der sich mit dem Objekt mitbewegt und für den das Objekt ruht. Das Zeitintervall, das von diesem besonderen Beobachter gemessen wird, heißt Eigenzeit. Alle Beobachter sind sich einig über den Wert der Eigenzeit, weil $(ds)^2 = (cd\tau)^2$ für alle Beobachter den gleichen numerischen Wert hat. Das bedeutet aber nicht, dass alle Beobachter das gleiche Zeitintervall zwischen zwei Ereignissen messen. Sie sind sich nur darüber einige, welchen Wert ein Beobachter misst, der mit dem Objekt mitreist.

2.3 Obere Geschwindigkeitsbegrenzung

Jetzt, da wir eine Interpretation für die Invariante der Speziellen Relativitätstheorie haben, können wir einen Schritt weitergehen und eine der verblüffendsten Konsequenzen der Speziellen Relativitätstheorie herleiten.

Es folgt aus dem Minuszeichen in der Definition, dass Δs^2 für zwei Ereignisse, die in Zeit und Raum getrennt sind, Null sein kann. Außerdem könnte Δs^2 sogar negativ sein, aber dann würden wir einen komplexen Wert für die Eigenzeit erhalten[5], was im Allgemeinen als unphysikalisch betrachtet wird. Somit schlussfolgern wir, dass es eine minimale Eigenzeit für zwei Ereignisse gibt $\tau = 0$, falls $\Delta s^2 = 0$. In diesem Fall können wir schreiben

[5] Wir erinnern uns daran, dass $(ds)^2 = (cd\tau)^2$ gilt und deshalb falls $(ds)^2 < 0$ ist $d\tau$ komplex.

$$\Delta s^2_{\text{min}} = 0 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$$

$$\rightarrow (c\Delta t)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$$

$$\rightarrow c^2 = \frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}{(\Delta t)^2}. \tag{2.20}$$

Auf der rechten Seite haben wir eine quadratische Geschwindigkeit v^2, also den Abstand geteilt durch die Zeit im Quadrat. Im infinitesimalen Grenzfall können wir das schreiben als

$$\rightarrow c^2 = \frac{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}{(dt)^2}. \tag{2.21}$$

Die Funktionen $x(t), y(t), z(t)$ beschreiben den Weg zwischen den beiden Ereignissen. Somit haben wir auf der rechten Seite die Geschwindigkeit zwischen Ereignissen.

Wir schlussfolgern, dass der niedrigste Wert der Eigenzeit von jemandem gemessen wird, der sich mit der Geschwindigkeit

$$\rightarrow c^2 = v^2 \tag{2.22}$$

bewegt. Das bedeutet wiederum, dass sich nichts schneller als mit der Geschwindigkeit c bewegen kann! **Wir haben eine obere Geschwindigkeitsgrenze!** Zwei Ereignisse in der Raumzeit können mit nichts verbunden sein, das sich schneller als c bewegt.

Aus dieser Schlussfolgerung folgt das **Prinzip der Lokalität**, das besagt, dass Vorgänge in der Physik immer nur von ihrer unmittelbaren Umgebung beeinflusst werden.[6] Durch die obere Geschwindigkeitsbegrenzung benötigt jede Wechselwirkung eine gewisse Zeit.

[6] Eine Ausnahme sind spezielle Effekte in der Quantenmechanik, durch die allerdings keine Informationen oder Energie übertragen werden können.

2.4 Die Minkowski-Notation

> „Von Stund' an sollen Raum für sich und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken und nur noch eine Art Union der beiden soll Selbständigkeit bewahren.“
>
> **Hermann Minkowski**

Wir können die Invariante der Speziellen Relativitätstheorie

$$ds^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \tag{2.23}$$

umschreiben, indem wir eine neue Notation einführen, die auf den ersten Blick ziemlich kompliziert aussieht, sich aber als enorm wichtig herausstellen wird:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu = \eta^{00}(dx_0)^2 + \eta^{11}(dx_1)^2 + \eta^{22}(dx_2)^2 + \eta^{33}(dx_3)^2 \\ &= dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 . \end{aligned} \tag{2.24}$$

Hierbei benutzen wir mehrere neue Notationen und Konventionen, an die man sich gewöhnen muss, weil sie heutzutage überall in der Physik benutzt werden:

- Einsteins Summenkonvention: Wenn ein Index doppelt auftaucht, wird implizit eine Summe angenommen $\sum_{i=1}^{3} a_i b_i = a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$, aber $\sum_{i=1}^{3} a_i b_j = a_1 b_j + a_2 b_j + a_3 b_j \neq a_i b_j$.
- Griechische Indices[7], wie μ, ν oder σ, werden immer von 0 bis 3 summiert: $x_\mu y_\mu = \sum_{\mu=0}^{3} x_\mu y_\mu$.
- Umbenennung der Variablen: $x_0 \equiv ct$, $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$ und $x_3 \equiv z$, um es offensichtlich zu machen, dass Raum und Zeit jetzt gleichwertig behandelt werden und um die obigen beiden Regeln benutzen zu können.
- Einführung der Minkowski-Metrik $\eta^{00} = 1$, $\eta^{11} = -1$, $\eta^{22} = -1$, $\eta^{33} = -1$ und $\eta^{\mu\nu} = 0$ für $\mu \neq \nu$ (eine äquivalente Art, dies zu schreiben, ist [8] $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$).

[7] Im Gegensatz dazu, werden römische Indices i, j, k immer von von 1 bis 3 summiert $x_i x_i \equiv \sum_i^3 x_i x_i$. Viel später im Buch werden wir noch römische Großbuchstaben A, B, C benutzen, die von 1 bis 8 summiert werden.

[8] $\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Außerdem ist es üblich **Vierervektoren** einzuführen:

$$dx_\mu = \begin{pmatrix} dx_0 \\ dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}, \tag{2.25}$$

weil man dann Gleichung 2.24 wie folgt schreiben kann

$$\begin{aligned} (ds)^2 = dx_\mu \eta^{\mu\nu} dx_\nu &= \begin{pmatrix} dx_0 & dx_1 & dx_2 & dx_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_0 \\ dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} \\ &= dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 . \end{aligned} \tag{2.26}$$

Das ist einfach nur eine clevere Methode, um Dinge in der Speziellen Relativitätstheorie aufzuschreiben. Eine physikalische Interpretation ist, dass ds der Raumzeit-„Abstand“ zwischen zwei Ereignissen ist.

Beachte, dass wir hier nicht einfach den räumlichen Abstand meinen, sondern auch den zeitlichen Abstand mitberücksichtigen müssen. Im 3-dimensionalen Euklidischen Raum[9] ist der quadratische (kürzeste) Abstand zwischen zwei Punkten[10]

$$(ds)^2 = dx_i \delta_{ij} dx_j = \begin{pmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}$$
$$= (ds)^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 \,. \tag{2.27}$$

[9] Der dreidimensionale Euklidische Raum ist der Raum der klassischen Physik, in dem Zeit separat von räumlichen Abständen behandelt wurde und deshalb die Zeit nicht für geometrische Betrachtungen mitberücksichtigt wurde. Der Begriff der Raumzeit wurde erst mit der Speziellen Relativitätstheorie eingeführt, weil es hier möglich ist, dass sich Raum- und Zeit-Koordinaten mischen.

[10] Das Kronecker-Symbol δ_{ij} ist einfach nur die Einheitsmatrix in Index-Notation und ist in Appendix B.5.5 definiert.

Das mathematische Werkzeug, das wir benutzen können, um den Abstand zweier infinitesimal getrennter Punkte berechnen zu können, heißt **Metrik**. Im langweiligen Euklidischen Raum ist die Metrik einfach die Einheitsmatrix δ_{ij}. Im Gegensatz dazu können in der gekrümmten Raumzeit der Allgemeinen Relativitätstheorie extrem komplizierte Metriken auftreten. Die Geometrie der Speziellen Relativitätstheorie ist in der ziemlich unkomplizierten Minkowski-Metrik $\eta^{\mu\nu}$ zusammengefasst. Weil die Metrik das Werkzeug ist, das es uns erlaubt, Abstände zu berechnen, brauchen wir sie, um die **Länge eines Vierervektors** zu definieren. Die Länge eines Vierervektors ist durch das Skalarprodukt des Vierervektors mit sich selbst gegeben[11]:

$$x^2 = x \cdot x \equiv x_\mu x_\nu \eta^{\mu\nu} \,.$$

[11] Das Gleiche gilt im Euklidischen Raum Länge$^2(v) = \vec{v} \cdot \vec{v} = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$, weil die Metrik hier einfach $\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist.

Analog definieren wir das Skalar-Produkt zweier beliebiger Vierervektoren:

$$x \cdot y \equiv x_\mu y_\nu \eta^{\mu\nu}. \tag{2.28}$$

Es gibt eine weitere übliche Notation, mit der wir Rechnungen noch weiter verkürzen können. Wir definieren einen Vierervektor mit oberen Index als[12]

$$x^\mu \equiv \eta^{\mu\nu} x_\nu \tag{2.29}$$

[12] Vierervektoren mit Index unten werden oft als kovariant und Vierervektoren mit Index oben als kontravariant bezeichnet.

oder gleichermaßen

$$y^\nu \equiv \eta^{\mu\nu} y_\mu \underbrace{=}_{\text{Die Minkowski-Metrik ist symmetrisch.} \eta^{\mu\nu} = \eta^{\nu\mu}} \eta^{\nu\mu} y_\mu \tag{2.30}$$

Deswegen können wir das Skalarprodukt wie folgt schreiben[13]

$$x \cdot y \equiv x_\mu y_\nu \eta^{\mu\nu} = x_\mu y^\mu = x^\nu y_\nu. \tag{2.31}$$

[13] Der Name des Index hat keinerlei Bedeutung. Mehr Informationen zur Indexnotation sind in Appendix B.5.1 zusammengefasst.

Es spielt keine Rolle, welchen Index wir zu einem oberen Index machen. Mit dieser Notation können wir vermeiden, dass wir die ganze Zeit die Minkowski-Metrik aufschreiben müssen. Die Grundidee ist vergleichbar mit Einsteins Summenkonvention, die verhindert, dass wir die ganze Zeit Summenzeichen schreiben müssen.

2.5 Lorentz-Transformationen

Als Nächstes versuchen wir herauszufinden, wie wir unsere Beschreibung eines physikalischen Systems in einem gegebenen Bezugssystem transformieren dürfen, ohne die Postulate der Speziellen Relativitätstheorie zu verletzen. In den letzten Abschnitten haben wir gelernt, dass $ds^2 = \eta^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$ in allen Inertialsystemen den gleichen Wert hat:

$$ds'^2 = dx'_\mu dx'_\nu \eta^{\mu\nu} = ds^2 = dx_\mu dx_\nu \eta^{\mu\nu} . \tag{2.32}$$

Daraus folgern wir, dass die gesuchten erlaubten Transformationen diejenigen sind, die diese quadratische Form oder gleichermaßen das Skalarprodukt der Minkowski-Raumzeit invariant lassen. Wir benutzen das Symbol Λ für eine generische Transformation, die unsere Beschreibung von einem Bezugssystem in ein anderes transformiert. Außerdem benutzen wir Apostrophe dx'_μ um die transformierten Koordinaten zu kennzeichnen. Wir schreiben also

$$dx_\mu \to dx'_\mu = \Lambda_\mu^\sigma dx_\sigma \, . \tag{2.33}$$

Dann können wir die Invarianz-Bedingung wie folgt schreiben:

$$(ds)^2 = (ds')^2$$

$$\to dx \cdot dx \stackrel{!}{=} dx' \cdot dx' \to dx_\mu dx_\nu \eta^{\mu\nu} \stackrel{!}{=} dx'_\mu dx'_\nu \eta^{\mu\nu} \underbrace{=}_{\text{Gl. 2.33}} \Lambda_\mu^\sigma dx_\sigma \Lambda_\nu^\gamma dx_\gamma \eta^{\mu\nu}$$

$$\underbrace{\to}_{\text{Umbenennung der Dummy-Indices}} dx_\mu dx_\nu \eta^{\mu\nu} \stackrel{!}{=} \Lambda_\sigma^\mu dx_\mu \Lambda_\gamma^\nu dx_\nu \eta^{\sigma\gamma}$$

$$\underbrace{\to}_{\text{weil die Gleichung für beliebige } dx_\mu \text{ gilt}} \eta^{\mu\nu} \stackrel{!}{=} \Lambda_\sigma^\mu \Lambda_\gamma^\nu \eta^{\sigma\gamma} \tag{2.34}$$

Wir können das Gleiche auch in Matrix-Notation schreiben[14]:

[14] Solltest du dich über das Transponiert-Zeichen T hier wundern, wirf einen Blick in Appendix C.1.

$$\eta = \Lambda^T \eta \Lambda \, . \tag{2.35}$$

Dies ist die Bedingung, die Transformationen Λ_μ^ν zwischen erlaubten Bezugssystemen erfüllen müssen.

Mach dir keine Sorgen, falls dich das zunächst einmal verwirrt. Wir werden gleich sehen, dass so eine Bedingung eigentlich etwas ziemlich Normales ist. Im nächsten Kapitel werden wir beispielsweise sehen, dass Rotationen im gewöhnlichen Euklidischen Raum als diejenigen Transformationen[15] O definiert werden können, die das Skalar-Produkt des Euklidischen Raums invariant lassen[16]:

[15] Die Bezeichnung O wird gleich Sinn machen.

[16] Es ist üblich, das Symbol $\cdot$ für das Skalar-Produkt von Vektoren zu benutzen. Wir haben also $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}^T \vec{b}$, wobei wir auf der rechten Seite die gewöhnliche Matrixmultiplikation zwischen den Vektoren haben und ein Vektor eine 1×3 Matrix ist. Die Tatsache, dass $(Oa)^T = a^T O^T$, wird in Gl. C.3 in Appendix C.1 erklärt.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \stackrel{!}{=} \vec{a}' \cdot \vec{b}' \underbrace{=}_{\text{Beachte: } (Oa)^T = a^T O^T} \vec{a}^T O^T O \vec{b}. \tag{2.36}$$

http://www.springer.com/978-3-662-53811-1

Durch Symmetrie die moderne Physik verstehen
Ein neuer Zugang zu den fundamentalen Theorien
Schwichtenberg, J.
2017, XVII, 299 S. 26 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-662-53811-1