Vorwort

Das Manuskript dieses Büchleins geht auf eine zweistündige Vorlesung an der Universität des Saarlands in Saarbrücken zurück, die ich 1999 gehalten habe. Ziel war es, anhand der Theorie der quadratischen Zahlkörper in die algebraische Zahlentheorie einführen; der Beschränkung auf quadratische Zahlkörper lag die Einsicht zugrunde, dass man hier noch (fast) alle Beispiele von Hand rechnen kann.

Als Voraussetzungen reichen Kenntnisse der linearen Algebra (Vektorräume, lineare Abbildungen, Matrizenrechnung) sowie eine Vertrautheit mit Begriffen der elementaren Zahlentheorie (eindeutige Primfaktorzerlegung, Kongruenzrechung, Chinesischer Restsatz, Struktur der Restklassenringe, quadratische Reste); nur in den letzten beiden Kapiteln wird etwas abstrakte Algebra auf dem Niveau der Isomorphiesätze und die Irreduzibilität des Kreisteilungspolynoms verwendet.

Eine erste Version dieses Buchs wurde 2011 im SVH-Verlag veröffentlicht; bei dieser Gelegenheit wurden kleinere Änderungen am Manuskript vorgenommen und insbesondere ein Anhang mit einer kleinen Einführung in das Rechnen mit `pari` und `sage` aufgenommen.

Nach einer Anfrage von Herrn Rüdinger, dem ich für sein Interesse an diesem Buch herzlich danken möchte, habe ich mich dazu entschieden, dem Ganzen eine historische Einführung voranzustellen. Darin möchte ich die Tatsache deutlich machen, dass der übliche Aufbau einer solchen Einführung in die algebraische Zahlentheorie nicht vom Himmel gefallen ist, sondern dass sich dieser Zugang erst durch die Überwindung zahlreicher Schwierigkeiten herausgebildet hat, deren Lösung bisweilen Jahrhunderte in Anspruch nahm.

An dieser Stelle möchte ich betonen, dass man die Geschichte der algebraischen Zahlentheorie nur dann ganz verstehen kann, wenn man die dazu notwendigen Begriffe kennt. Wer mit der Sprache der Algebra noch nicht ganz vertraut ist, sollte sich also durch das Einführungskapitel nicht entmutigen lassen, sondern von Zeit zu Zeit darauf zurückzukommen. Auch andere Teile des Buches müssen nicht linear gelesen werden: Wer die Begriffe Ganzheitsring und Ideal schon kennt und an den Hauptsätzen der Idealtheorie in quadratischen Zahlkörpern interessiert ist, kann auch sofort in Kap. 5 einsteigen.

Es war auch nicht mein Ziel, den vielen Lehrbüchern über algebraische Zahlentheorie ein weiteres hinzuzufügen und dabei auch noch auf die Gleichschaltung des Inhalts solcher Vorlesungen im Rahmen eines Bachelor-Studiums Rücksicht zu nehmen. Natürlich gilt es, den „Pflichtstoff“ (Studium von Teilbarkeit und Einheiten, Aufbau der Idealtheorie, Zerlegungsgesetz, Endlichkeit der Klassenzahl) zu behandeln, aber daneben wollte ich vor allem auf Dinge aufmerksam machen, die man in der vorhandenen Literatur nur schwer oder gar nicht findet. Insbesondere ist die Betonung der Modularität und der Fekete-Polynome im letzten Kapitel Werbung für einen anderen Blickwinkel sowohl in der elementaren, als auch in der algebraischen Zahlentheorie.

Für eine vollständige Behandlung der Theorie der quadratischen Zahlkörper wäre es notwendig, sich eingehend mit den folgenden Themen auseinanderzusetzen:

- die Theorie der binären quadratischen Formen und des Zusammenhangs zwischen Reduktionstheorie und Kettenbrüchen;
- die analytische Klassenzahlformel;
- die Theorie der Gaußschen Summen und der Zusammenhang mit der Theorie der Kreisteilungskörper;
- das kubische und biquadratische Reziprozitätsgesetz, sowie das quadratische Reziprozitätsgesetz in beliebigen quadratischen Zahlkörpern.

Wer an der algebraischen Zahlentheorie Gefallen gefunden hat, sollte allerdings die Aneignung der allgemeinen Theorie nicht vernachlässigen (insbesondere seien dafür die Bücher [32, 49, 54, 61] empfohlen), deren Höhepunkt zweifellos die Klassenkörpertheorie bildet.

Jagstzell, Februar 2017 Franz Lemmermeyer

http://www.springer.com/978-3-662-53821-0

Quadratische Zahlkörper
Eine Einführung mit vielen Beispielen
Lemmermeyer, F.
2017, VIII, 189 S. 10 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-662-53821-0