

Kapitel II

Differentialgeometrie

§ 7 Kurven und Flächen im \mathbb{R}^3

In diesem Paragraphen stellen wir die differentialgeometrischen Grundbegriffe Krümmung, Geodätische und Parallelverschiebung für Flächen im \mathbb{R}^3 vor. Das Studium dieses Kapitels ist für das Verständnis der Riemann- und Lorentz-Geometrie nicht unbedingt erforderlich, erleichtert aber den Zugang.

Wir betrachten im Folgenden durchweg C^∞ -differenzierbare Objekte (Kurven, Flächen, Funktionen). Das vereinfacht den Kalkül und bedeutet keinen Verlust an geometrischer Substanz.

1 Krümmung von Kurven

1.1 Kurven im \mathbb{R}^3

(a) Unter einer **Kurve** (genauer **Kurvenparametrisierung**) im \mathbb{R}^3 verstehen wir im Folgenden eine C^∞ -Abbildung

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$$

auf einem offenen Intervall I . Die Bildmenge $\alpha(I)$ heißt **Spur** von α . Eine Kurve heißt **regulär**, wenn

$$\dot{\alpha}(t) = (\dot{\alpha}_1(t), \dot{\alpha}_2(t), \dot{\alpha}_3(t)) \neq \mathbf{0} \text{ für alle } t \in I$$

und **Bogenlängen-Parametrisierung** (**Parametrisierung durch die Bogenlänge**), wenn $\|\dot{\alpha}(t)\| = 1$ für alle $t \in I$.

Wie schon in Band 1, § 24 praktiziert, stellen wir uns die Tangentenvektoren $\dot{\alpha}(t)$ mit ihren Fußpunkten an die Kurvenpunkte $\alpha(t)$ angeheftet vor.

Für Bogenlängen-Parametrisierungen gilt

$$\langle \dot{\alpha}, \ddot{\alpha} \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \dot{\alpha}, \dot{\alpha} \rangle = 0.$$

Zwei reguläre Kurven $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ heißen **äquivalent** (gehen durch **Umparametrisierung** auseinander hervor), wenn es einen C^∞ -Diffeomorphismus $h : I \rightarrow J$ gibt mit $\alpha = \beta \circ h$. Die Kurven heißen **gleich orientiert**, wenn $\dot{h} > 0$ gilt, andernfalls heißen sie **entgegengesetzt orientiert**.

Äquivalente Kurven haben dieselbe Spur; sind zwei reguläre Kurven α, β injektiv und stetig invertierbar, so ist die Gleichheit ihrer Spuren auch hinreichend für ihre Äquivalenz (Bd. 1, § 24 : 1.3).

(b) SATZ. Zu jeder regulären Kurve $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ gibt es eine äquivalente, gleich orientierte Bogenlängen-Parametrisierung $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$. Diese ist nach Vorgabe eines Kurvenpunkts \mathbf{a} durch die Bedingung $\beta(0) = \mathbf{a}$ eindeutig bestimmt.

BEWEIS siehe § 5:2.3 (c) oder Bd. 1, § 24:2.5.

(c) Unter einem **Kurvenstück** verstehen wir (abweichend von Bd. 1, § 24:1) die Einschränkung einer Kurve auf ein kompaktes Intervall.

1.2 Krümmungsradius und Schmiegekreis

(a) SATZ. Gegeben sei eine Bogenlängen-Parametrisierung $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ und ein Kurvenpunkt $\mathbf{a} = \beta(s_0)$ mit $\ddot{\beta}(s_0) \neq \mathbf{0}$, o.B.d.A. $s_0 = 0$.

Dann gibt es genau einen Kreis $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit Radius $r > 0$, der für $s = 0$ die Kurve β im Punkt \mathbf{a} von zweiter Ordnung berührt. Dieser ist gegeben durch

$$\gamma(s) = \mathbf{m} + r \cos(\omega s) \mathbf{v}_1 + r \sin(\omega s) \mathbf{v}_2$$

mit

$$\beta(0) = \gamma(0), \quad \dot{\beta}(0) = \dot{\gamma}(0), \quad \ddot{\beta}(0) = \ddot{\gamma}(0).$$

Für den Mittelpunkt \mathbf{m} , den Radius r und das Orthonormalsystem $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ gilt

$$r = \omega^{-1} = \|\ddot{\beta}(0)\|^{-1}, \quad \mathbf{m} = \mathbf{a} + r^2 \ddot{\beta}(0), \quad \mathbf{v}_1 = r \ddot{\beta}(0), \quad \mathbf{v}_2 = \dot{\beta}(0).$$

Wir nennen die Spur von γ den **Schmiegekreis**, r den **Krümmungsradius**, $\kappa := r^{-1} = \|\ddot{\beta}(0)\|$ die **Krümmung** und \mathbf{m} den **Krümmungsmittelpunkt** der Kurve β im Punkt $\mathbf{a} = \beta(0)$.

BEMERKUNGEN. (i) In Kurvenpunkten $\beta(s_0)$ mit $\ddot{\beta}(s_0) = \mathbf{0}$ setzen wir $\kappa = 0$.

(ii) Das Berühren zweiter Ordnung im Punkt \mathbf{a} kann auch mittels Taylor-Entwicklung gekennzeichnet werden durch die Bedingungen ÜA

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\beta(s) - \gamma(s)}{s^k} = \mathbf{0} \quad \text{für } k = 0, 1, 2.$$

BEWEIS.

Die Berührbedingungen liefern

$$\mathbf{a} = \beta(0) = \gamma(0) = \mathbf{m} + r \mathbf{v}_1,$$

$$\dot{\beta}(0) = \dot{\gamma}(0) = r \omega \mathbf{v}_2,$$

$$\ddot{\beta}(0) = \ddot{\gamma}(0) = -r \omega^2 \mathbf{v}_1.$$

Aus der zweiten Bedingung ergibt sich $r \omega = \|\dot{\beta}(0)\| = 1$, also $\mathbf{v}_2 = \dot{\beta}(0)$. Die dritte Bedingung liefert $\omega \mathbf{v}_1 = r \omega^2 \mathbf{v}_1 = -\ddot{\beta}(0)$, somit $r \|\ddot{\beta}(0)\| = r \omega = 1$. \square

(b) Die Krümmungsgrößen einer beliebigen regulären Kurve $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ an der Stelle $\mathbf{a} = \alpha(t_0)$ definieren wir durch die entsprechenden Größen der zugehörigen, gleich orientierten Bogenlängen-Parametrisierung $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\beta(0) = \mathbf{a}$; hierzu muss die lineare Unabhängigkeit von $\dot{\alpha}(t_0), \ddot{\alpha}(t_0)$ vorausgesetzt werden. Das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren, angewandt auf $\dot{\alpha}(t_0), \ddot{\alpha}(t_0)$, liefert dann ein Orthonormalsystem \mathbf{T}, \mathbf{N} mit

$$\mathbf{T} = \frac{\dot{\alpha}(t_0)}{\|\dot{\alpha}(t_0)\|}, \quad \mathbf{N} = \frac{\ddot{\alpha}(t_0) - \langle \mathbf{T}, \ddot{\alpha}(t_0) \rangle \mathbf{T}}{\|\ddot{\alpha}(t_0) - \langle \mathbf{T}, \ddot{\alpha}(t_0) \rangle \mathbf{T}\|}.$$

Es ergibt sich

$$\kappa = \frac{\|\dot{\alpha}(t_0) \times \ddot{\alpha}(t_0)\|}{\|\dot{\alpha}(t_0)\|^3},$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{a} + \kappa^{-1} \mathbf{N}.$$

Im Fall der linearen Abhängigkeit von $\dot{\alpha}(t_0), \ddot{\alpha}(t_0)$ setzen wir $\kappa = 0$.

Nachweis als ÜA: Sei o.B.d.A. $t_0 = 0$. Folgern Sie aus $\alpha = \beta \circ h$ mit $\dot{h} > 0$, $h(0) = 0$ und aus $\|\dot{\beta}\| = 1$, dass

$$\dot{h}(0) = \|\dot{\alpha}(0)\|,$$

$$\dot{h}(0) \ddot{h}(0) = \langle \dot{\alpha}(0), \ddot{\alpha}(0) \rangle, \quad \ddot{h}(0) = \langle \mathbf{T}, \ddot{\alpha}(0) \rangle, \quad \dot{\beta}(0) = \mathbf{T},$$

$$\begin{aligned} \ddot{\beta}(0) &= \frac{\ddot{\alpha}(0) - \langle \mathbf{T}, \ddot{\alpha}(0) \rangle \mathbf{T}}{\|\dot{\alpha}(0)\|^2} = \frac{\|\ddot{\alpha}(0) - \langle \mathbf{T}, \ddot{\alpha}(0) \rangle \mathbf{T}\|}{\|\dot{\alpha}(0)\|^2} \mathbf{N} \\ &= \frac{\|\dot{\alpha}(0) \times \ddot{\alpha}(0)\|}{\|\dot{\alpha}(0)\|^3} \mathbf{N}; \end{aligned}$$

die letzte Gleichheit folgt aus

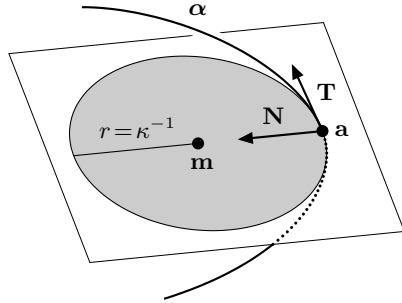
$$\|\mathbf{T} \times \ddot{\alpha}(0)\|^2 = \|\ddot{\alpha}(0)\|^2 - \langle \mathbf{T}, \ddot{\alpha}(0) \rangle^2 = \|\ddot{\alpha}(0) - \langle \mathbf{T}, \ddot{\alpha}(0) \rangle \mathbf{T}\|^2.$$

Die Kurve $t \mapsto \mathbf{m}(t)$ der Krümmungsmittelpunkte wird die **Evolute** von α genannt.

(c) Für ebene reguläre Kurven $t \mapsto (x(t), y(t))$ ergeben sich Krümmung und Evolute aus (b) durch die Interpretation als Kurve $t \mapsto \alpha(t) = (x(t), y(t), 0)$ in \mathbb{R}^3 ÜA

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{x}(t) \ddot{y}(t) - \ddot{x}(t) \dot{y}(t)|}{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^{3/2}},$$

$$\mathbf{m}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \frac{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}{\dot{x}(t) \ddot{y}(t) - \ddot{x}(t) \dot{y}(t)} \begin{pmatrix} -\dot{y}(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}.$$



Für ebene Kurven in Graphengestalt $t \mapsto (t, y(t))$ ergibt sich die in § 2:4.4 (c) und § 5:3.1 (b) verwendete Formel $\kappa(t) = \ddot{y}(t) (1 + \dot{y}(t)^2)^{-3/2}$.

1.3 Aufgaben

(a) Die von NEWTON in den *Principia* verwendete Konstruktion des Krümmungsmittelpunkts einer ebenen Kurve besteht darin, die Normalen benachbarter Kurvenpunkte $\alpha(t)$ und $\alpha(t+h)$ zum Schnitt zu bringen und den sich für $h \rightarrow 0$ ergebenden Grenzwert zu bestimmen. Zeigen Sie die Übereinstimmung mit der hier gegebenen Definition.

(b) Berechnen Sie für die Ellipse $t \mapsto (a \cos t, b \sin t)$ ($a \neq b$) die Krümmung und die Evolute. Zeigen Sie, dass Letztere der Gleichung $(Ax)^{2/3} + (By)^{2/3} = 1$ mit Konstanten $A, B > 0$ genügt, und machen Sie eine Skizze.

(c) Zeigen Sie, dass die Evolute des Zykloidenbogens $t \mapsto (t - \sin t, 1 - \cos t)$ ($0 < t < 2\pi$) ein Zykloidenbogen in verschobener Lage ist. Stellen Sie die Verbindung zwischen diesem Ergebnis und der Huygensschen Konstruktionsidee einer Pendeluhr mit Zykloidenhemmung her, vgl. § 2:2.3 (e).

(d) Zeigen Sie: Die Krümmung einer Kurve ist bewegungsinvariant.

2 Flächen im \mathbb{R}^3

2.1 Darstellung von Flächen, Beispiele

(a) Eine nichtleere Menge $M \subset \mathbb{R}^3$ heißt **Fläche**, wenn es zu jedem Punkt $\mathbf{a} \in M$ eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^3$ und eine C^∞ -Abbildung $\Phi: U_0 \rightarrow U \subset \mathbb{R}^3$ auf einem Gebiet $U_0 \subset \mathbb{R}^2$ gibt mit folgenden Eigenschaften:

- (i) Φ ist injektiv und es gilt $\Phi(U_0) = M \cap U$,
- (ii) die Jacobi-Matrix $d\Phi(\mathbf{u})$ hat an jeder Stelle $\mathbf{u} \in U_0$ den Maximalrang 2,
- (iii) die Umkehrabbildung $\Phi^{-1}: M \cap U \rightarrow U_0$ ist stetig.

Jede solche Abbildung Φ wird eine **Parametrisierung** von M genannt, und $M \cap U = \Phi(U_0)$ heißt eine **Koordinatenumgebung** von \mathbf{a} in M . Flächen, die Bild einer einzigen Parametrisierung sind, heißen Flächenstücke. Zu Beispielen von Flächenstücken und zur Bedeutung der Voraussetzungen (i)–(iii) verweisen wir auf Bd. 1, § 25:1.

Die Einschränkung einer Parametrisierung $\Phi: U_0 \rightarrow M$ auf ein Teilgebiet von U_0 ist wieder eine Parametrisierung von M . Wir verzichten auf den rein technischen Beweis.

Für zwei Parametrisierungen $\Phi: U_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\Psi: V_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$ von M mit $D := M \cap \Phi(U_0) \cap \Psi(V_0) \neq \emptyset$ vermittelt die **Parametertransformation** (**Koordinatentransformation**)

$$\mathbf{h} = \Psi^{-1} \circ \Phi$$

einen C^∞ -Diffeomorphismus zwischen offenen Mengen $\Phi^{-1}(D), \Psi^{-1}(D) \subset \mathbb{R}^2$. Der BEWEIS wird in Bd. 2, § 11 : 1.3 gegeben.

Die Betrachtung von Flächen mit schwächeren Differenzierbarkeitsvoraussetzungen ist durchaus sinnvoll, liefert aber keine neuen Einsichten in die Geometrie. Die Forderung der C^∞ -Differenzierbarkeit vereinfacht den Kalkül und bedeutet keinen Verlust an geometrischer Substanz.

Im Hinblick auf die ab § 8 verwendete Indexkonvention der Tensoranalysis schreiben wir bereits hier die Parameter und die Koordinaten der Flächenpunkte mit hochgestellten Indizes:

$$\mathbf{u} = (u^1, u^2), \quad \mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3);$$

eine Verwechslung mit Potenzen ist nicht zu befürchten.

(b) Wir erinnern an die Definition des **Tangentialraums** $T_{\mathbf{a}}M$ einer Fläche M im Punkt $\mathbf{a} \in M$ (Bd. 1, § 25 : 3.3, Bd. 2, § 11 : 1.6). Dieser besteht aus den Tangentenvektoren $\mathbf{v} = \dot{\alpha}(0)$ aller Kurven $\alpha :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$ mit $\alpha(0) = \mathbf{a}$, und ist mit dem Ursprung an den Flächenpunkt \mathbf{a} angeheftet (für die Formalisierung der Fußpunktanheftung siehe § 8 : 2.4*).

Für jede Parametrisierung Φ von M mit $\mathbf{a} = \Phi(\mathbf{u})$ wird $T_{\mathbf{a}}M$ von den nach (ii) linear unabhängigen partiellen Ableitungen $\partial_1 \Phi(\mathbf{u}), \partial_2 \Phi(\mathbf{u})$ aufgespannt, ist also zweidimensional.

(c) SATZ. Für jede C^∞ -Funktion $f : \mathbb{R}^3 \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Nullstellenmenge

$$M = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid f(\mathbf{x}) = 0\}$$

eine Fläche im \mathbb{R}^3 , falls M nicht leer ist und falls

$$\nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0} \text{ für alle } \mathbf{x} \in M.$$

Es gilt $\nabla f(\mathbf{a}) \perp T_{\mathbf{a}}M$, d.h. die Normale von M im Punkt $\mathbf{a} \in M$ wird vom Vektor $\nabla f(\mathbf{a})$ aufgespannt (Bd. 2, § 11 : 1.6).

Der Beweis ergibt sich mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen, vgl. Bd. 1, § 22 : 5.5, 5.7. Ist $\mathbf{a} = (a^1, a^2, a^3) \in M$ und etwa $\partial_3 f(\mathbf{a}) \neq 0$, so gibt es Umgebungen U_0 von (a^1, a^2) und V_0 von a^3 sowie eine eindeutig bestimmte C^∞ -Funktion $\varphi : U_0 \rightarrow V_0$ mit

$$f(x^1, x^2, x^3) = 0 \iff x^3 = \varphi(x^1, x^2) \quad \text{für } (x^1, x^2, x^3) \in U := U_0 \times V_0,$$

also

$$M \cap U = \{ \Phi(x^1, x^2) = (x^1, x^2, \varphi(x^1, x^2)) \mid (x^1, x^2) \in U_0 \}.$$

ÜA: Prüfen Sie die Eigenschaften (i)–(iii) für $\Phi : U_0 \rightarrow M \cap U$ nach.

Mit diesem Satz lassen sich zahlreiche Gebilde im \mathbb{R}^3 als Flächen erkennen, z.B.

$$\begin{aligned} & \left\{ (x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\} \quad (a, b, c > 0) \quad \textbf{Ellipsoid}, \\ & \left\{ (x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} = \cosh z \right\} \quad \textbf{Katenoid}, \\ & \left\{ (x, y, z) \mid \left(\sqrt{x^2 + y^2} - r \right)^2 + z^2 = h^2 \right\} \quad (0 < h < r) \quad \textbf{Torus}, \\ & \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1 \right\} \quad \textbf{einschaliges Hyperboloid}, \\ & \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 - z^2 = -1 \right\} \quad \textbf{zweischaliges Hyperboloid}. \end{aligned}$$

ÜA Skizzieren Sie diejenigen dieser Flächen, von denen Sie keine anschauliche Vorstellung haben.

(d) Eine Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$ kann in einer Umgebung jedes Flächenpunktes als Graph dargestellt werden:

SATZ. Zu jedem Flächenpunkt $\mathbf{a} = (a^1, a^2, a^3) \in M$ gibt es nach eventueller Umnummerierung der räumlichen Koordinaten eine Umgebung $V_0 \subset \mathbb{R}^2$ von (a^1, a^2) , eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^3$ von \mathbf{a} und eine C^∞ -Funktion $\varphi : V_0 \rightarrow \mathbb{R}$, deren Graph $M \cap U$ ist.

Nach Ausführung einer Bewegung des \mathbb{R}^3 lässt sich noch $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, $\mathbf{e}_3 \perp T_{\mathbf{a}}M$ und $\varphi(0, 0) = \partial_1 \varphi(0, 0) = \partial_2 \varphi(0, 0) = 0$ erreichen.

BEWEIS.

Umnummerierungen der Raumkoordinaten und Bewegungen im \mathbb{R}^3 sind C^∞ -Diffeomorphismen, die Flächen wieder in Flächen und Tangentialebenen wieder in Tangentialebenen überführen.

Wir wählen eine Parametrisierung $\Phi : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$ für M und eine Koordinatenumgebung U von \mathbf{a} mit $\Phi(U_0) = M \cap U$. Für $\mathbf{u}_0 = \Phi^{-1}(\mathbf{a})$ hat $d\Phi(\mathbf{u}_0)$ den Rang 2; bei entsprechender Nummerierung der Raumkoordinaten dürfen wir deshalb annehmen, dass

$$\begin{vmatrix} \partial_1 \Phi^1(\mathbf{u}_0) & \partial_2 \Phi^1(\mathbf{u}_0) \\ \partial_1 \Phi^2(\mathbf{u}_0) & \partial_2 \Phi^2(\mathbf{u}_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Wir wenden den Umkehrsatz Bd. 1, § 22:5.2 auf $\Psi := (\Phi^1, \Phi^2)$ an. Nach der Bemerkung (a) über die Einschränkung von Parametrisierungen können wir U_0 gleich so wählen, dass Ψ ein C^∞ -Diffeomorphismus zwischen U_0 und einer Umgebung V_0 von (a^1, a^2) ist. Die Abbildung $\Phi \circ \Psi^{-1} : V_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$ hat die Gestalt $(u^1, u^2) \mapsto (u^1, u^2, \varphi(u^1, u^2))$ mit der C^∞ -Funktion $\varphi = \Phi^3 \circ \Psi^{-1}$ und besitzt die Bildmenge $\Phi \circ \Psi^{-1}(V_0) = \Phi(U_0) = M \cap U$. \square

2.2 Differentialrechnung auf Flächen

(a) Eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$ heißt **differenzierbar**, wenn es zu jedem Punkt $\mathbf{a} \in M$ eine Parametrisierung $\Phi : U_0 \rightarrow M \cap U$ einer Koordinatenumgebung von \mathbf{a} gibt, so dass $f \circ \Phi$ auf U_0 differenzierbar ist. Für jede andere Parametrisierung $\Psi : V_0 \rightarrow M \cap V$ einer Koordinatenumgebung $M \cap V$ von \mathbf{a} ist $f \circ \Psi = (f \circ \Phi) \circ (\Phi^{-1} \circ \Psi)$ dann nach 2.1 (a) ebenfalls in einer Umgebung von $\Phi^{-1}(\mathbf{a})$ differenzierbar, so dass der Begriff der Differenzierbarkeit von Funktionen nicht von der Wahl der Parametrisierung abhängt.

Differenzierbare Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ sind stetig wegen $f = (f \circ \Phi) \circ \Phi^{-1}$. Es ist klar, wie C^r -Differenzierbarkeit zu definieren ist. Auf den Begriff der Ableitung einer differenzierbaren Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ gehen wir in (c) ein.

Die C^r -Differenzierbarkeit von Vektorfeldern $\mathbf{X} = (X^1, X^2, X^3) : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ wird auf die C^r -Differenzierbarkeit der Koordinatenfunktionen X^1, X^2, X^3 zurückgeführt. Damit ist auch klar, was C^r -Differenzierbarkeit einer Abbildung $\varphi : M \rightarrow N$ zwischen zwei Flächen M und N bedeutet.

Wenn nichts Anderes gesagt wird, setzen wir die C^∞ -Differenzierbarkeit voraus. Den Vektorraum der C^∞ -Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit \mathcal{FM} .

Unter einer **Kurve** auf einer Fläche M verstehen wir eine Kurve $\alpha : I \rightarrow M$ mit der Eigenschaft, dass für jede Parametrisierung $\Phi : U_0 \rightarrow M \cap U$ die Koordinatenkurve $t \mapsto \Phi^{-1}(\alpha(t))$ für alle $t \in I$ mit $\alpha(t) \in M \cap U$ eine C^∞ -Kurve im \mathbb{R}^2 ist.

Meist lassen wir das Attribut „ C^∞ -differenzierbar“ weg und sprechen einfach von **Funktionen**, **Vektorfeldern** und **Kurven** auf einer Fläche M .

(b) Unter einem **tangentialem Vektorfeld** \mathbf{X} auf M verstehen wir ein C^∞ -Vektorfeld auf M mit $\mathbf{X}(\mathbf{a}) \in T_{\mathbf{a}}M$ für jedes $\mathbf{a} \in M$. Die Gesamtheit der tangentialem Vektorfelder auf M bezeichnen wir mit \mathcal{VM} . Die Menge \mathcal{VM} enthält mit $X, Y \in \mathcal{VM}$, $f, g \in \mathcal{FM}$ auch die Linearkombination $fX + gY$.

Für jede Parametrisierung $\Phi : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$ von M mit Koordinatenumgebung $M \cap U = \Phi(U_0)$ definieren wir die **lokalen Basisfelder** auf $M \cap U$ durch

$$\mathbf{X}_i(\mathbf{a}) := \partial_i \Phi(\mathbf{u}) \quad \text{für } \mathbf{a} = \Phi(\mathbf{u}) \in M \cap U \quad (i = 1, 2).$$

Wegen $\mathbf{X}_i \circ \Phi = \partial_i \Phi$ und der C^∞ -Differenzierbarkeit von $\Phi : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sind diese C^∞ -differenzierbar.

Jedes tangential Vektorfeld $\mathbf{X} \in \mathcal{VM}$ hat auf $M \cap U$ die **lokale Basisdarstellung**

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^2 \xi^i \mathbf{X}_i$$

mit C^∞ -differenzierbaren Koeffizientenfunktionen ξ^1, ξ^2 .

Denn mit

$$a_{ik} = \langle \partial_i \Phi, \partial_k \Phi \rangle, \quad b_k = \langle \mathbf{X} \circ \Phi, \partial_k \Phi \rangle$$

ergibt sich aus $\mathbf{X} \circ \Phi = \sum_{i=1}^2 (\xi^i \circ \Phi) \partial_i \Phi$ durch Skalarproduktbildung mit $\partial_k \Phi$ das 2×2 -Gleichungssystem

$$\sum_{k=1}^2 a_{ik} (\xi^i \circ \Phi) = b_k \quad (k = 1, 2)$$

mit der Determinante

$$\|\partial_1 \Phi\|^2 \|\partial_2 \Phi\|^2 - \langle \partial_1 \Phi, \partial_2 \Phi \rangle^2 = \|\partial_1 \Phi \times \partial_2 \Phi\|^2 > 0.$$

Dessen Lösungen $\xi^i \circ \Phi$ ergeben sich mit der Cramerschen Regel als rationale Ausdrücke in den differenzierbaren Funktionen a_{ik}, b_k , woraus sich definitionsgemäß die C^∞ -Differenzierbarkeit der ξ^i ergibt.

(c) Für eine Funktion $f \in \mathcal{FM}$ und einen Punkt $\mathbf{a} \in M$ definieren wir die **Ableitung in Richtung eines Tangentialvektors** $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{a}}M$ durch

$$\partial_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) := (f \circ \alpha)'(0) = \left. \frac{d}{dt} f(\alpha(t)) \right|_{t=0},$$

wobei $\alpha :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$ eine Flächenkurve ist mit $\alpha(0) = \mathbf{a}$, $\dot{\alpha}(0) = \mathbf{v}$. Die Wahl der Kurve α spielt hierbei keine Rolle; das ergibt sich aus der Koordinatenstellung der Richtungsableitung: Für jede Parametrisierung Φ einer Koordinatenumgebung $M \cap U$ von \mathbf{a} mit $\Phi(\mathbf{u}_0) = \mathbf{a}$ und die zugehörigen lokalen Basisfelder $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ gilt

$$(1) \quad \partial_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^2 v^i \partial_i f(\mathbf{a}), \quad \text{falls } \mathbf{v} = \sum_{i=1}^2 v^i \mathbf{X}_i(\mathbf{a});$$

hierbei ist

$$(2) \quad \partial_i f(\mathbf{a}) := \partial_i (f \circ \Phi)(\mathbf{u}_0) = \partial_{\mathbf{v}_i} f(\mathbf{a}) \quad \text{mit } \mathbf{v}_i := \mathbf{X}_i(\mathbf{a}) \quad (i = 1, 2).$$

Denn für $\mathbf{u}(t) = (u^1(t), u^2(t)) := \Phi^{-1}(\alpha(t))$ gilt $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ und

$$\mathbf{v} = \dot{\alpha}(0) = (\Phi \circ \mathbf{u})'(0) = \sum_{i=1}^2 \partial_i \Phi(\mathbf{u}_0) \dot{u}^i(0) = \sum_{i=1}^2 \dot{u}^i(0) \mathbf{X}_i(\mathbf{a}).$$

Es folgt $v^i = \dot{u}^i(0)$ für $i = 1, 2$ und damit

$$\begin{aligned} (f \circ \alpha)'(0) &= ((f \circ \Phi) \circ \mathbf{u})'(0) = \sum_{i=1}^2 \partial_i (f \circ \Phi)(\mathbf{u}_0) \dot{u}^i(0) \\ &= \sum_{i=1}^2 v^i \partial_i f(\mathbf{a}). \end{aligned}$$

Aus (1) folgt insbesondere $\partial_i f(\mathbf{a}) = \partial_{\mathbf{v}_i} f(\mathbf{a})$ mit $\mathbf{v}_i := \mathbf{X}_i(\mathbf{a})$ ($i = 1, 2$).

Rechenregeln für die Richtungsableitung

- (3) $\mathbf{v} \mapsto \partial_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a})$ ist linear auf $T_{\mathbf{a}}M$,
 (4) $f \mapsto \partial_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a})$ ist linear und genügt der Produktregel.

BEWEIS als $\boxed{\ddot{U}A}$.

- (d) Für Vektorfelder

$$\mathbf{X} = (X^1, X^2, X^3) : M \rightarrow \mathbb{R}^3$$

erklären wir die Ableitung in Richtung $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{a}}M$ durch

$$\partial_{\mathbf{v}} \mathbf{X}(\mathbf{a}) := (\partial_{\mathbf{v}} X^1(\mathbf{a}), \partial_{\mathbf{v}} X^2(\mathbf{a}), \partial_{\mathbf{v}} X^3(\mathbf{a})) .$$

Wie in (c) ergibt sich die Linearität dieser Richtungsableitung bezüglich \mathbf{v} und bezüglich \mathbf{X} ; ferner gilt die **Skalarproduktregel** $\boxed{\ddot{U}A}$

$$\partial_{\mathbf{v}} \langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle(\mathbf{a}) = \langle \partial_{\mathbf{v}} \mathbf{X}(\mathbf{a}), \mathbf{Y}(\mathbf{a}) \rangle + \langle \mathbf{X}(\mathbf{a}), \partial_{\mathbf{v}} \mathbf{Y}(\mathbf{a}) \rangle .$$

Für ein tangentiales Vektorfeld \mathbf{X} und ein beliebiges Vektorfeld \mathbf{Y} definieren wir das Feld $\partial_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}$ durch die punktweise ausgeführte Richtungsableitung

$$\partial_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}(\mathbf{a}) := \partial_{\mathbf{X}(\mathbf{a})} \mathbf{Y}(\mathbf{a}) \quad \text{für } \mathbf{a} \in M .$$

Bei gegebener Parametrisierung mit zugehörigen lokalen Basisfeldern $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ setzen wir wie oben

$$\partial_i \mathbf{Y} := \partial_{\mathbf{X}_i} \mathbf{Y} .$$

Für die lokalen Basisfelder $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ gelten die Vertauschungsrelationen

$$\partial_i \mathbf{X}_k = \partial_k \mathbf{X}_i, \quad \partial_i \partial_j \mathbf{X}_k = \partial_j \partial_i \mathbf{X}_k ,$$

denn diese bedeuten nichts anderes als

$$\partial_i \partial_k \Phi = \partial_k \partial_i \Phi, \quad \partial_i \partial_j \partial_k \Phi = \partial_j \partial_i \partial_k \Phi .$$

2.3 Die innere Geometrie von Flächen

- (a) Zur **inneren Geometrie** einer Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$ zählen wir seit GAUSS alle Begriffe, die sich auf Längenmessung innerhalb von M zurückführen lassen.

Für die Länge

$$L(\alpha) = \int_0^1 \|\dot{\alpha}(t)\| dt$$

eines Kurvenstücks $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ auf der Fläche benötigen wir nur die Kenntnis der Norm von Tangentenvektoren $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{a}}M$, $\mathbf{a} \in M$. Die innere Geometrie

der Fläche M ist dadurch festgelegt, wenn wir für alle Tangentenvektoren von M die \mathbb{R}^3 -Norm übernehmen, oder, was auf dasselbe hinausläuft, das \mathbb{R}^3 -Skalarprodukt $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ von Tangentenvektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_{\mathbf{a}}M$, $\mathbf{a} \in M$.

Wir bezeichnen das auf $T_{\mathbf{a}}M$ eingeschränkte Skalarprodukt mit

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{a}} : T_{\mathbf{a}}M \times T_{\mathbf{a}}M \rightarrow \mathbb{R}$$

und nennen dieses die **erste Fundamentalform** von M an der Stelle $\mathbf{a} \in M$. Entsprechend bezeichnen wir die auf $T_{\mathbf{a}}M$ eingeschränkte \mathbb{R}^3 -Norm mit $\|\cdot\|_{\mathbf{a}}$. Zur inneren Geometrie der Fläche M zählt somit alles, was sich mit Hilfe der ersten Fundamentalform ausdrücken lässt. Hierzu gehören Winkel, Flächeninhalt, und, wie wir im Folgenden zeigen, die Gaußsche Krümmung, Geodätische und Parallelverschiebung von Vektoren. GAUSS entwickelte dieses Programm in seiner Flächentheorie (*Disquisitiones generales circa superficies curvas 1827* [69], veröffentlicht 1828).

(b) Sei $\Phi : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$ Parametrisierung einer Koordinatenumgebung $M \cap U = \Phi(U_0)$, und $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ seien die zugehörigen lokalen Basisfelder, d.h. für $i = 1, 2$ gilt

$$\mathbf{X}_i(\mathbf{a}) = \partial_i \Phi(\mathbf{u}_0) \quad \text{mit} \quad \mathbf{a} = \Phi(\mathbf{u}_0).$$

Dann sind die Koeffizienten der ersten Fundamentalform

$$g_{ij} = \langle \mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j \rangle$$

C^∞ -differenzierbar auf $M \cap U$ wegen $g_{ij} \circ \Phi = \langle \partial_i \Phi, \partial_j \Phi \rangle \in C^\infty(U_0)$.

Demnach sind die g_{ij} (von der Parametrisierung Φ abhängige) Funktionen auf M . In solchen Fällen, in denen die Fläche durch konkrete Parametrisierungen gegeben ist, bezeichnen wir die Skalarprodukte $\langle \partial_i \Phi, \partial_j \Phi \rangle = g_{ij} \circ \Phi^{-1}$ bequemlichkeitshalber ebenfalls mit g_{ij} , so wie dies in § 6:2.3 und in Bd. 1, § 25:2.1 praktiziert wurde.

Für tangentielle Vektorfelder \mathbf{X}, \mathbf{Y} mit den Basisdarstellungen

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^2 \xi^i \mathbf{X}_i, \quad \mathbf{Y} = \sum_{j=1}^2 \eta^j \mathbf{X}_j$$

erhalten wir

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} \xi^i \eta^j, \quad \|\mathbf{X}\|^2 = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} \xi^i \xi^j.$$

Die zweite Gleichung wird in traditioneller Notation geschrieben als

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} du^i du^j$$

mit der Interpretation von ds als Abstand zweier „infinitesimal benachbarter“ Punkte mit den Koordinaten (u^1, u^2) und $(u^1 + du^1, u^2 + du^2)$.

Mathematik für Physiker Band 3
Variationsrechnung - Differentialgeometrie -
Mathematische Grundlagen der Allgemeinen
Relativitätstheorie
Fischer, H.; Kaul, H.
2017, VIII, 408 S., Softcover
ISBN: 978-3-662-53968-2