

Wir haben in Abschn. 1.1 bereits darauf hingewiesen, dass Hermann Minkowski (1864–1909) die Idee zu einer Taxi-Geometrie hatte, in der er ein von der euklidischen Geometrie abweichendes Modell für die primitiven Terme Punkt und Gerade einführte und einen anderen Abstandsbegriff verwendete. In diesem Kapitel folgen wir Minkowskis Spuren und begeben uns auf eine interessante Entdeckungsreise.

Ausgangspunkt unserer Überlegungen ist eine Stadt mit einem gleichmäßigen Straßenraster in Form eines quadratförmigen Gitters, in der sich ein Taxi ohne Umwege von einer Kreuzung zu einer anderen Kreuzung bewegt. Wir fassen die Kreuzungen dieser T-Stadt (Taxi-Stadt) als **T-Punkte** und den Weg des Taxis zwischen den T-Punkten A_T und B_T als **T-Strecke** auf, die auf einer **T-Geraden** g_T liegt. Abb. 2.1 zeigt drei der möglichen Wege, die das Taxi zwischen den T-Punkten A_T und B_T zurücklegen kann, d. h. drei T-Strecken zwischen diesen T-Punkten.

Wenn wir Abb. 2.1 und alle folgenden Abbildungen dieses Kapitels als Teil des Stadtplans der T-Stadt auffassen, dann können wir die **Bedingung für zulässige Wege** des Taxis so formulieren, dass es sich sowohl horizontal als auch vertikal nur in einer Himmelsrichtung bewegen darf. Bei einer Fahrt von A_T nach B_T darf sich das Taxi nur in Richtung Osten und Norden bewegen, bei der Fahrt von B_T nach A_T nur in Richtung Westen und Süden. Fassen wir vereinbarungsgemäß jeden zulässigen Weg zwischen den T-Punkten A_T und B_T als T-Strecke auf, dann entdecken wir erste merkwürdige Besonderheiten:

- Zwei unterschiedliche T-Punkte können durch mehrere T-Strecken miteinander verbunden werden, d. h., zwischen zwei unterschiedlichen T-Punkten existieren mehrere T-Geraden. Bereits diese Eigenschaft weicht von

einem Axiom der E-Geometrie (euklidischen Geometrie) ab, deshalb ist die T-Geometrie eine nichteuklidische Geometrie.

- T-Strecken können „anders aussehen“ als E-Strecken (Strecken in der euklidischen Geometrie).
- Die T-Punkte liegen nicht dicht, da sie sich am Gitterraster ausrichten.
- Alle T-Strecken zwischen zwei unterschiedlichen T-Punkten haben dieselbe Länge. Ordnen wir jeder Quadratseite des Gitters die Länge 1 zu, dann besitzen alle T-Strecken zwischen den T-Punkten A_T und B_T in Abb. 2.1 die Länge 7, da vom Taxi jeweils vier Einheiten in horizontaler und drei Einheiten in vertikaler Richtung zu durchfahren sind.

Naheliegend ist folgende Frage:

Wie viele T-Strecken gibt es zwischen zwei T-Punkten, die um h horizontale und v vertikale Einheiten voneinander entfernt sind?

Bereits in Abb. 2.1 ist eine geeignete Zählstrategie für die Bestimmung dieser Anzahl erforderlich, denn es gibt wesentlich mehr T-Strecken als wir eingezeichnet haben. In Abb. 2.2 haben wir unter alle T-Punkte die Anzahl an Wegen eingetragen, die von A_T aus bis zum jeweiligen T-Punkt führen, wenn sich das Taxi in Richtung B_T bewegt.

Abb. 2.1 Einige T-Strecken zwischen den T-Punkten A_T und B_T

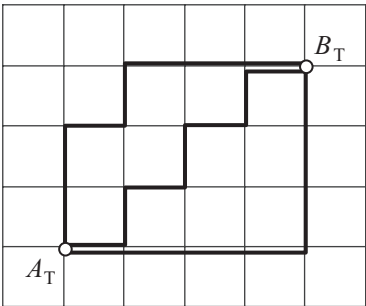
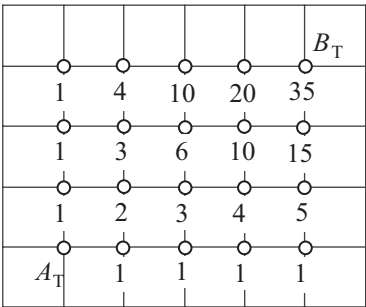


Abb. 2.2 Anzahl der T-Strecken zwischen den T-Punkten A_T und B_T



Wir ermitteln aus Abb. 2.2 folgende Gesetzmäßigkeiten (die zweite Eigenschaft ergibt sich beim systematischen Auszählen zunächst als Vermutung, die mittels vollständiger Induktion bewiesen werden kann):

- Zu allen T-Punkten, die auf der horizontalen oder der vertikalen T-Geraden bezüglich des Startpunktes liegen, führt jeweils genau ein Weg.
- Die Anzahl der Wege vom Startpunkt bis zu einem nordöstlich gelegenen „inneren“ T-Punkt des Gitters ist gleich der Summe der Wege vom Startpunkt bis zum westlichen und südlichen Nachbarpunkt des betrachteten T-Punkts. Beispielsweise ergibt sich die Anzahl der Wege vom Startpunkt A_T bis zum Zielpunkt B_T als Summe aus 20 und 15, da zum westlichen bzw. südlichen Nachbarpunkt von B_T genau 20 bzw. 15 Wege führen.

Die in Abb. 2.2 entdeckten Gesetzmäßigkeiten begegnen uns auch in anderen Kontexten:

- Beim Potenzieren von Binomen ergeben sich für die Koeffizienten der Summanden analoge Zusammenhänge wie bei der Bestimmung der Anzahl von Wegen in der T-Geometrie.

$$(a + b)^1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b$$

$$(a + b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot a \cdot b + 1 \cdot b^2$$

$$(a + b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + 1 \cdot b^3$$

$$(a + b)^4 = 1 \cdot a^4 + 4 \cdot a^3 \cdot b + 6 \cdot a^2 \cdot b^2 + 4 \cdot a \cdot b^3 + 1 \cdot b^4$$

Alle außen stehenden Koeffizienten sind gleich 1.

Jeder „innere“ Koeffizient ergibt sich als Summe zweier Koeffizienten aus dem Term der vorhergehenden Potenz. Beispielsweise ergibt sich der zweite Koeffizient bei der vierten Potenz als Summe aus dem ersten und zweiten Koeffizienten der dritten Potenz: $4 = 1 + 3$. Dieser Koeffizient gibt die Anzahl von Möglichkeiten an, den Term $a^3 \cdot b$ zu bilden: $a \cdot a \cdot a \cdot b, a \cdot a \cdot b \cdot a, a \cdot b \cdot a \cdot a, b \cdot a \cdot a \cdot a$.

Tatsächlich entdecken wir in Abb. 2.2 entlang der Nebendiagonalen des Gitters das Pascal'sche Dreieck, das auch die Koeffizienten beim Potenzieren von Binomen enthält.

- Bei einer Bernoulli-Kette der Länge vier gibt es vier Möglichkeiten, das Ergebnis „3 Treffer und 1 Niete“ zu erzielen, da es nicht auf die Reihenfolge der Versuchsausgänge ankommt: TTTN, TTNT, TNTT, NT TT. Die Anzahl dieser Möglichkeiten ist gleich der Anzahl der Möglichkeiten, beim Bilden der vierten Potenz eines Binoms den Term $a^3 \cdot b$ zu erhalten.

Sowohl die Anzahl von Möglichkeiten, beim n -fachen Potenzieren des Binoms $(a + b)$ den Term $a^k \cdot b^{n-k}$ zu erhalten als auch die Anzahl von k Treffern und $(n - k)$ Nieten bei einer Bernoulli-Kette der Länge n , ist

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$. Analog dazu ist die Anzahl der T-Strecken zwischen zwei T-Punkten, die um h horizontale und v vertikale Einheiten voneinander entfernt sind: $\binom{h+v}{h} = \binom{h+v}{v}$. Für die Anzahl der Strecken zwischen den T-Punkten A_T und B_T ergibt sich damit der bereits ermittelte Wert

$$\binom{4+3}{4} = \binom{4+3}{3} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35.$$

Nach diesen anstrengenden Anzahlbestimmungen wenden wir uns wieder geometrischen Fragestellungen der T-Geometrie zu.

Wir finden anhand der Darstellung zweier T-Geraden g_T und h_T in Abb. 2.3 folgende interessante Besonderheiten:

- Die T-Geraden g_T und h_T haben sechs gemeinsame T-Punkte.
- Wir entdecken mit dem T-Zweieck A_TB_T ein geometrisches Objekt, das keine Entsprechung in der euklidischen Geometrie besitzt (in der sphärischen Geometrie wird uns wieder ein Zweieck begegnen, das allerdings anders „aussieht“ als das T-Zweieck).

Gewiss sind wir bereits gespannt, ob das Parallelenaxiom der E-Geometrie auch in der T-Geometrie gilt, Abb. 2.4 hilft uns bei der Klärung dieses Sachverhaltes.

Das Parallelenaxiom der euklidischen Geometrie gilt in der T-Geometrie nicht, da wir zu einer T-Geraden g_T mehrere Parallelen durch einen T-Punkt P_T außerhalb dieser T-Geraden finden. Diese Parallelen haben ein anderes Aussehen als in der E-Geometrie, doch sie verlaufen alle durch den T-Punkt P_T und sie besitzen jeweils mit der T-Geraden g_T keinen gemeinsamen Punkt.

Abb. 2.3 T-Geraden

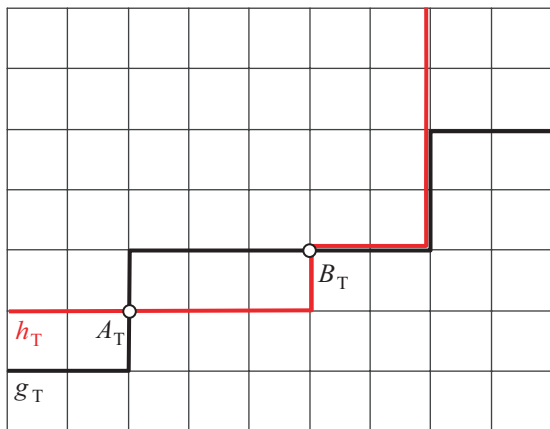


Abb. 2.4 T-Parallelen zur T-Geraden g_T durch T-Punkt P_T

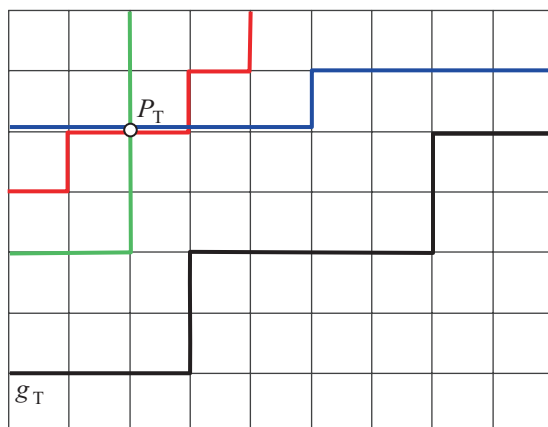
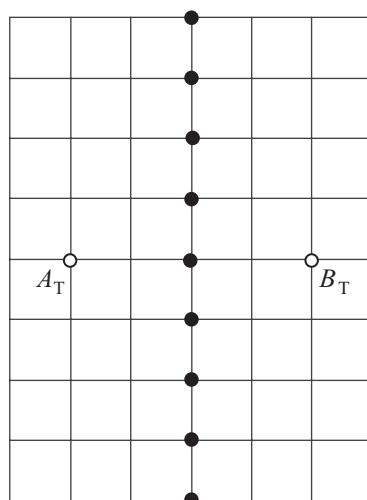


Abb. 2.5 Beispiel 1 für eine T-Mittelsenkrechte



Ein weiteres interessantes Untersuchungsfeld sind geometrische Orte als Punkt-mengen mit einer charakteristischen Eigenschaft. Wir betrachten anschließend zwei unterschiedliche geometrische Orte.

Erster geometrischer Ort Menge aller T-Punkte, die von zwei gegebenen T-Punkten den gleichen Abstand besitzen.

In der E-Geometrie wird der gesuchte geometrische Ort als Mittelsenkrechte, Mittellot oder Streckensymmetrale bezeichnet. Abb. 2.5 zeigt eine T-Mittelsenkrechte.

Unser Ergebnis in Abb. 2.5 „sieht so aus“ wie eine Mittelsenkrechte in der E-Geometrie (im Unterschied zu E-Punkten liegen die T-Punkte allerdings nicht

dicht). Es scheint so, als würde dieser geometrische Ort keine Besonderheiten aufweisen. Doch Vorsicht: Wir haben bisher nur einen Sonderfall betrachtet, bei dem die beiden T-Punkte A_T und B_T auf einer speziellen T-Geraden liegen! Bereits eine kleine Variation hält die erste Überraschung bereit: Wenn die beiden T-Punkte A_T und B_T immer noch auf einer horizontal verlaufenden T-Geraden liegen, aber einen ungeradzahigen Abstand voneinander haben, dann existiert gar keine T-Mittelsenkrechte! So vorgewarnt, variieren wir die gegenseitige Lage der T-Punkte A_T und B_T weiter. Beim Betrachten der Abb. 2.6 und 2.7 bemerken wir, dass der von uns gewählte erste geometrische Ort sehr interessante Eigenschaften besitzt (in Abb. 2.7 haben wir Punkte gleichen Abstands von A_T und B_T gleichfarbig eingezeichnet).

Zweiter geometrischer Ort Menge aller T-Punkte, die von einem gegebenen T-Punkt den gleichen Abstand besitzen.

In der ebenen E-Geometrie handelt es sich bei dem gesuchten geometrischen Ort um einen Kreis. Abb. 2.8 stellt einen T-Kreis um den T-Punkt M_T mit T-Radius $r_T = 3$ dar.

Inzwischen hält sich gewiss unser Erstaunen in Grenzen, dass in der T-Geometrie auch ein Kreis „anders aussieht“ als in der E-Geometrie. Der Umfang eines T-Kreises wird durch vier T-Strecken gebildet, für deren Darstellung wir mehrere Möglichkeiten haben. In Abb. 2.9 haben wir uns für eine Variante entschieden, die eine gewisse Ähnlichkeit mit einem E-Kreis besitzt.

Jede der vier T-Strecken, die jeweils ein Viertel des Umfangs eines T-Kreises mit T-Radius r_T darstellt, besitzt die T-Länge $2 \cdot r_T$, da jede dieser T-Strecken zwei T-Punkte verbindet, die sich sowohl in horizontaler als auch in vertikaler Richtung

Abb. 2.6 Beispiel 2 für eine T-Mittelsenkrechte

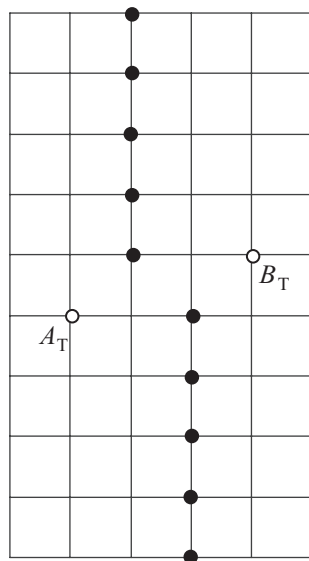
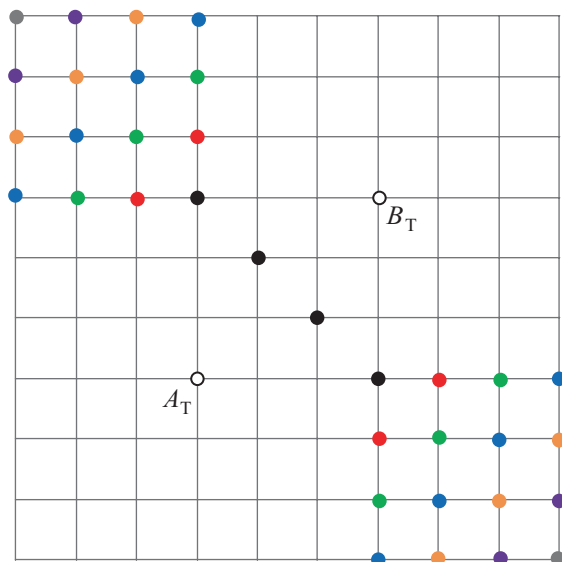
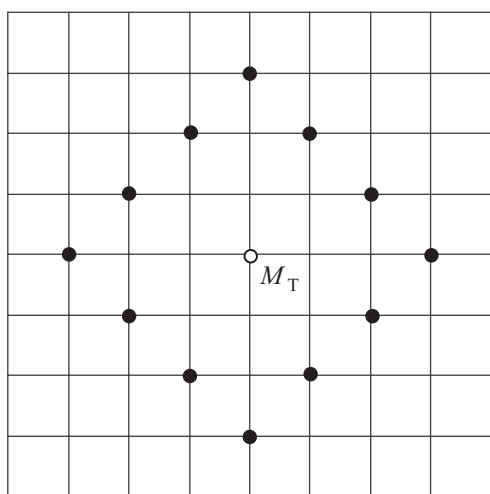


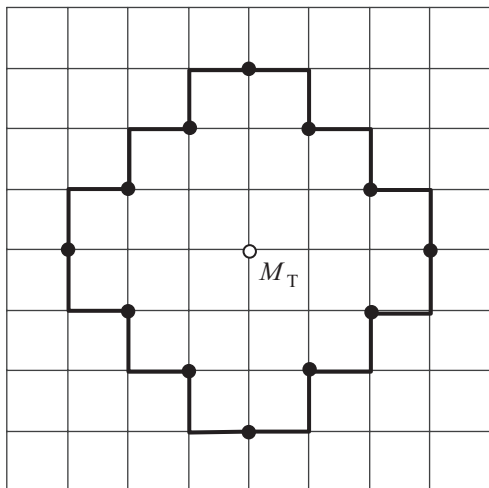
Abb. 2.7 Beispiel 3 für eine T-Mittelsenkrechte**Abb. 2.8** T-Kreis

um r_T Einheiten unterscheiden. Damit können wir den Wert der Kreiszahl π_T in der T-Geometrie berechnen:

$$\pi_T = \frac{u_T}{2 \cdot r_T} = \frac{4 \cdot (2 \cdot r_T)}{2 \cdot r_T} = 4.$$

Auch in der T-Geometrie ergibt sich für jeden T-Kreis dieselbe Kreiszahl, allerdings ist deren Wert schlicht und einfach 4, d. h., die schwer verständliche

Abb. 2.9 Umfang eines T-Kreises



Transzendenz der Kreiszahl in der E-Geometrie ist in der T-Geometrie nicht vorhanden.

Zu Beginn dieses Kapitels haben wir mitgeteilt, dass in der T-Geometrie ein anderer Abstandsbegriff existiert als in der E-Geometrie. Wir haben dies in unseren Untersuchungen bereits berücksichtigt, indem wir beachtet haben, dass das Taxi nur entlang von Straßen fahren kann. In der E-Geometrie sind wir es gewohnt, dass auch „schräg verlaufende“ Verbindungen zwischen zwei Punkten existieren. Wenn wir in beiden Geometrien jeweils ein kartesisches Koordinatensystem einführen, dann können wir den Abstand zweier Punkte mithilfe der Punktkoordinaten berechnen:

In der E-Geometrie ergibt sich nach dem Satz des Pythagoras

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

In der T-Geometrie ergibt sich $d(A_T, B_T) = |x_{TA} - x_{TB}| + |y_{TA} - y_{TB}|$.

Beide Abstandsfunktionen besitzen die Eigenschaften einer **Metrik**, da sie

- wegen $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ positiv definit sind,
- wegen $d(x, y) = d(y, x)$ symmetrisch sind,
- wegen $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ die Dreiecksungleichung erfüllen.

Deshalb wird die T-Geometrie in der Literatur zuweilen als eine Geometrie charakterisiert, in der die **Taxi-Metrik** gilt.

- **Bemerkung** Zuweilen wird die Taxi-Metrik auch als Cityblock-Metrik, Mannheimer-Metrik oder Manhattan-Metrik bezeichnet, da die Stadt Mannheim und der Stadtteil Manhattan in New York ein gleichmäßiges Straßenraster in Form eines quadratförmigen Gitters besitzen.

Die T-Geometrie lädt zu weiteren Betrachtungen ein, z. B. durch

- die Untersuchung weiterer geometrischer Orte wie Ellipsen, Parabeln oder Hyperbeln,
- die Untersuchung der Eigenschaften von n -Ecken,
- die Verwendung eines Dreieckrasters statt des Quadratrasters,
- den Übergang von der Ebene in den Raum.

Wir verzichten auf die Bearbeitung dieser Fragestellungen, da es uns in diesem kurzen Kapitel vorrangig um die Thematisierung einer nichteuklidischen Geometrie ging, die mit erstaunlich geringem Aufwand möglich war. Damit sind wir bereit, weitere nichteuklidische Geometrien kennenzulernen.

<http://www.springer.com/978-3-662-54071-8>

Einblicke in die euklidische und nichteuklidische
Geometrie

Verständlich erklärt vom Abiturniveau aus

Wagner, J.

2017, XVIII, 282 S. 161 Abb., 41 Abb. in Farbe.,

Softcover

ISBN: 978-3-662-54071-8