
Vorwort

Was ist besonders an diesem Buch über Geometrie?

Dieses Buch vermittelt einen Einblick in unterschiedliche Geometrien, um den Blick dafür zu schärfen, was unter „Geometrie“ eigentlich zu verstehen ist. Dabei geht es um das Hervorheben zentraler Inhalte und Ideen, ohne einen vollständigen Aufbau anzustreben. Beweise werden auf den Nachweis wichtiger Sätze beschränkt und insbesondere dann geführt, wenn typische Gedankengänge hervorgehoben werden können. Viele andere Inhalte werden durch grafische Darstellungen erläutert. Zum Beispiel werden Eigenschaften geometrischer Abbildungen thematisiert, indem sowohl Skizzen von Abbildungen angegeben werden, bei denen die Eigenschaft erfüllt ist, als auch solche, bei denen die Eigenschaft nicht erfüllt ist.

Welche Ziele verfolgt das Buch und an wen wendet es sich?

Das Buch soll Studierenden der Mathematik, der Natur- und Technikwissenschaften sowie der Informatik

- eine Hilfe sein, die Lehrveranstaltungen besser zu verstehen,
- Anregung bieten, einen „Blick über den Tellerrand“ zu wagen und dabei tiefe Einsichten zu gewinnen.

Außerdem wendet sich das Buch an alle Menschen, für die das Denken ein ästhetischer Genuss ist und eine Quelle der Freude und Entspannung darstellt.

Wie sollen die Ziele des Buches realisiert werden?

Die didaktisch aufbereiteten Beispiele und die vielen Abbildungen sollen insbesondere abstrakte algebraische Darstellungen geometrischer Sachverhalte „mit Leben erfüllen“. Dabei werden folgende Schwerpunkte gesetzt:

- Betonen wesentlicher Sachverhalte,
- Entwickeln des Vorstellungsvermögens,

- Hervorheben der Ästhetik geometrischer Abbildungen,
- Fördern des entdeckenden Lernens,
- Nachvollziehen bedeutender geistiger Entwicklungen und Entdeckungen,
- Ermöglichen von Verständnis für das geometrische Denken.

Besonders der letztgenannte Punkt ist von großer Bedeutung, denn die Art und Weise, Wissenschaft zu betreiben, wurde zumindest in Europa maßgeblich durch die in der Geometrie praktizierte Denkweise und Methodologie beeinflusst.

Wie ist das Buch aufgebaut und welche Inhalte werden angesprochen?

Das Buch ist so konzipiert, dass es parallel zu einer systematisch aufgebauten Lehrveranstaltung an der Hochschule genutzt werden kann. Es gliedert sich in fünf Kapitel unterschiedlichen Umfangs, die sich jeweils mit ausgewählten zentralen Inhalten einer Geometrie beschäftigen. Übergreifend werden in unterschiedlichen Abschnitten analytische, differenzialgeometrische und topologische Betrachtungen durchgeführt, wenn dies erforderlich ist. Eine detaillierte Einführung in den Gegenstandsbereich der jeweiligen mathematischen Teildisziplin erfolgt dabei nicht. Inhalte der darstellenden Geometrie werden anlassbezogen thematisiert. Zur schnellen Orientierung enthalten die Kapitel Zusammenfassungen. Technisch anspruchsvollere Inhalte und Ergänzungen sind in den Anhängen zu finden.

Kap. 1 beschäftigt sich mit der euklidischen Geometrie, um an Vorkenntnisse aus dem Mathematikunterricht der Schule anknüpfen zu können. Die dort erworbenen Kenntnisse werden erheblich erweitert, um die typische Denkweise der euklidischen Geometrie zu erschließen sowie zentrale Begriffe und Sätze zu ergänzen, auf die in den folgenden Kapiteln zurückgegriffen wird. Insbesondere die Definitionen des Teil- und Doppelverhältnisses für orientierte Strecken und orientierte Winkel erlangen eine übergreifende Bedeutung. Beim Beweisen von Sätzen werden unterschiedliche Herangehensweisen gewählt, ohne eine starre Typisierung vorzunehmen. In der Tradition Euklids werden einige Konstruktionsaufgaben gelöst, die über das in der Schule übliche Niveau deutlich hinausgehen. Ein Überblick über Abbildungen rundet das Kapitel ab, dabei erfolgt eine Konzentration auf Parallelprojektionen, Axonometrien sowie affine und projektive Abbildungen. Die Zentralprojektion wird erst in Kap. 3 thematisiert, da sie aus dem Gegenstandsbereich der euklidischen Geometrie hinausführt.

Kap. 2 widmet sich der Taxi-Geometrie. Die gleichberechtigte Positionierung der Taxi-Geometrie neben den „großen“ Geometrien ist als ambitioniert oder kühn zu bezeichnen. Der Autor hat den dafür erforderlichen Mut aufgebracht, da die Taxi-Geometrie die einfachste nichteuklidische Geometrie darstellt, in der mit sehr geringem Aufwand verblüffende Entdeckungen möglich sind. Er ist der Auffassung, dass ausgewählte Inhalte der Taxi-Geometrie auch in der Schule behandelt werden sollten, um durch kontrastierende Beispiele zur euklidischen Geometrie die Flexibilität des Denkens und das Begriffsverständnis zu fördern. Beispielsweise

können Betrachtungen zu parallelen Geraden, Mittelsenkrechten und Kreisen im Rahmen der Taxi-Geometrie zum besseren Begreifen der entsprechenden Inhalte in der euklidischen Geometrie führen.

Kap. 3 beschäftigt sich mit Inhalten der projektiven Geometrie. Mit Betrachtungen zur endlichen Geometrie und zur Zentralprojektion werden unterschiedliche Zugänge zur projektiven Geometrie dargestellt, die zu einer Vertiefung des Wissens über Axiomensysteme und Abbildungen beitragen. Die Erarbeitung der Eigenschaften der Zentralprojektion erfolgt ausführlich, da

- diese Thematik in vielen modernen Quellen ausgeklammert oder nur sehr abstrakt behandelt wird,
- Bezüge zur bildenden Kunst und Architektur nicht nur interessant, sondern auch allgemeinbildend sind.

Es werden mehrere Modelle der projektiven Geometrie thematisiert und Maße für Längen und die Größe von Winkeln ermittelt. Dabei werden komplexe Koordinaten eingeführt und geometrische Sachverhalte mithilfe von Determinanten beschrieben. Mit diesen Betrachtungen sollen Inhalte der Hochschulausbildung vorbereitet werden.

Kap. 4 zur sphärischen Geometrie thematisiert Inhalte, die teilweise seit einigen Jahrhunderten bekannt waren, aber nicht als nichteuklidisch interpretiert wurden. Wichtige Formeln der sphärischen Trigonometrie werden auf unterschiedlichen Wegen hergeleitet. Es wird erarbeitet, dass die Berechnung eines kleinen sphärischen Dreiecks näherungsweise durch die eines ebenen Dreiecks möglich ist. Diese lokale Approximation einer nichteuklidischen Geometrie durch die euklidische Geometrie wird in unterschiedlichen Kontexten der Hochschulmathematik aufgegriffen. Die Anwendungen der Formeln der sphärischen Trigonometrie führen zu ausgewählten Inhalten der Astronomie, Nautik und Kartografie. Dabei ergeben sich Anforderungen zur Transformation von Koordinaten auf natürliche Weise.

Kap. 5 behandelt mit der hyperbolischen Geometrie diejenige Geometrie, die als erste nichteuklidische Geometrie erkannt wurde. Es werden die interessante Entstehungsgeschichte der hyperbolischen Geometrie und mehrere ihrer Modelle vorgestellt. Das Halbebenenmodell von Poincaré wird ausführlicher betrachtet, da es das Modell ist, welches bei Konstruktionen und Berechnungen ohne Hilfsmittel mit vertretbarem technischem Aufwand angewendet werden kann. Im Anhang zu diesem Kapitel werden Hyperbeln und Hyperbelfunktionen in Analogie zu Kreisen bzw. trigonometrischen Funktionen thematisiert. Mit dieser Ergänzung soll der Einstieg in die Hochschulmathematik erleichtert werden.

Welche Besonderheit ist zu beachten?

Zur Kennzeichnung der betrachteten Mengen von Punkten und Geraden, für die gewisse Axiome gelten, wird der Begriff **Raum** verwendet. Da dieser Terminus in verschiedenen Teildisziplinen der Mathematik unterschiedlich definiert wird, skizzieren wir die im vorliegenden Buch genutzte Bedeutung telegraphisch:

- **affiner Raum:** Menge von Punkten und Geraden, Existenz einer Inzidenzrelation zwischen einem Punkt und einer Geraden im Sinne von „der Punkt liegt auf der Geraden“ oder „die Gerade enthält den Punkt“, Existenz einer Parallelitätsrelation zwischen zwei Geraden, Existenz eines Verbindungsvektors zwischen zwei Punkten, Punkte und Geraden erfüllen spezielle Axiome, nicht gefordert ist die Definition einer Metrik (deshalb werden der Abstand zweier Punkte und die Größe eines Winkels nicht betrachtet),
- **euklidischer Raum:** analog zum affinen Raum mit der Änderung, dass eine Metrik definiert ist (meist mithilfe des Skalarproduktes von Verbindungsvektoren) und deshalb Längen und Winkelgrößen bestimmt werden können, der dreidimensionale euklidische Raum wird auch als **Anschauungsraum** bezeichnet,
- **projektiver Raum:** analog zum affinen Raum mit der Änderung, dass keine echte Parallelität existiert, da sich zwei unterschiedliche Geraden stets in einem Punkt schneiden (bei diesem Schnittpunkt kann es sich um einen eigentlichen Punkt oder um einen uneigentlichen Fernpunkt handeln), in projektiven Räumen kann eine Metrik definiert werden.

Dresden, Deutschland
Oktober 2016

Jürgen Wagner

<http://www.springer.com/978-3-662-54071-8>

Einblicke in die euklidische und nichteuklidische
Geometrie

Verständlich erklärt vom Abiturniveau aus

Wagner, J.

2017, XVIII, 282 S. 161 Abb., 41 Abb. in Farbe.,

Softcover

ISBN: 978-3-662-54071-8