

Übersicht

2.1	Der projektive Raum.....	8
2.2	Punkte und Linien	9
2.3	Projektive Abbildungen	10
2.4	Die projektive Gerade.....	11
2.5	Doppelverhältnisse	12
2.6	Der Satz von Pappos.....	14

Dieses Kapitel behandelt die grundlegenden Objekte der projektiven Geometrie: Punkte und Linien. Das schließt auch ihre algebraischen Darstellungen, ihre Dualität und die Doppelverhältnisse zwischen ihnen mit ein.

In der Perspektive sehen wir das unendlich Ferne als Horizont. Der projektive Raum ist dementsprechend der um das unendlich Ferne erweiterte affine Raum. Dabei starten wir mit dem bekannten affinen Raum, der bereits reell (oder komplex) koordinatisiert ist. Die Inzidenzrelationen können dann algebraisch ausgedrückt werden.

Es wäre auch ein synthetischer Zugang möglich: Wir könnten mit Punkten, Linien und ihren Inzidenzen starten und dann nach algebraischen Darstellungen suchen. Dies führt auf allgemeinere projektive Räume, für die unsere geometrische Vorstellung aber weniger hilfreich ist.

Zum weiterführenden Studium sei auf Beutelspacher und Rosenbaum (2004) sowie Coxeter (1987) verwiesen.

2.1 Der projektive Raum

Der reelle projektive Raum kann aus der Sphäre durch Identifizieren der Antipoden oder aus dem affinen Raum durch Hinzufügen der unendlich fernen Punkte gewonnen werden, d. h.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{RP}^N &= S^N / \text{Antipoden} \\
 &= \mathbb{R}^N \dot{\cup} \mathbb{RP}^{N-1} \\
 &= (\mathbb{R}^{N+1} \setminus \{0\}) / (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \\
 &= \{ \text{1-dimensionale Unterräume des } \mathbb{R}^{N+1} \}.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Er ist (zunächst) mit der durch seine doppelte Überlagerung S^N induzierten Metrik versehen und kompakt. Der reelle projektive Raum ist eingebettet in den komplexen projektiven Raum

$$\mathbb{RP}^N \subset \mathbb{CP}^N = (\mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\}) / (\mathbb{C} \setminus \{0\}). \tag{2.2}$$

Speziell erhalten wir die reelle projektive Gerade

$$\mathbb{RP}^1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\} = S^1 / \text{Antipoden} \cong S^1 \tag{2.3}$$

als Kreislinie und die komplexe projektive Gerade

$$\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \tag{2.4}$$

als Riemann-Sphäre.

Die reelle projektive Ebene $\mathbb{RP}^2$ ist die um die Ferngerade erweiterte affine Ebene, wobei die Fernpunkte in entgegengesetzter Richtung jeweils identifiziert werden. Wir zeichnen in $\mathbb{RP}^2$, rechnen aber in $\mathbb{CP}^2$, genauer in projektiven Koordinaten in $\mathbb{C}^3$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \sim \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \tag{2.5}$$

Die Zeichenebene ist in der Regel $\{z = 1\}$, sodass die projektive Gerade $\{z = 0\}$ jenseits der Zeichenebene liegt. Wir schreiben auch $\mathbb{K}$ für $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$.

2.2 Punkte und Linien

Punkte

$$0 \neq P = P^k = \begin{pmatrix} P^1 \\ P^2 \\ P^3 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

mit der Äquivalenz $P \sim \lambda P$ bilden die projektive Ebene $\mathbb{K}P^2$, d. h. 1-dimensionale Unterräume des $\mathbb{K}^3$. Geraden/Linien sind zweidimensionale Unterräume des $\mathbb{K}^3$, dargestellt als 1-Formen (bei leichtem Missbrauch der Notation), ggf. im Ricci-Kalkül:

$$0 \neq g = \{ P \mid g^T P = 0 \} = g_k = \{ P^k \mid g_k P^k = 0 \}. \quad (2.7)$$

(In der vom Ricci-Kalkül der Differentialgeometrie herrührenden Schreibweise $g_k P^k$ wird über den doppelt auftauchenden Index k summiert; die Schreibweisen P^k , g_k bezeichnen Vektoren bzw. 1-Formen mit freiem Index k .) Die Geraden bilden wieder eine projektive Ebene $\mathbb{K}P^2$, dual zur ursprünglichen. In der Tat sind die Begriffe „Punkt“ und „Gerade“ austauschbar.

Inzidenz ist damit bereits erklärt:

$$P \in g : \Longleftrightarrow g^T P = 0 \Longleftrightarrow g_k P^k = 0. \quad (2.8)$$

Je zwei (verschiedene) Geraden schneiden sich in genau einem Punkt:

$$g \cap h \sim g \times h = \varepsilon^{jkl} g_k h_l. \quad (2.9)$$

Durch je zwei (verschiedene) Punkte verläuft genau eine Gerade:

$$P \times Q = \varepsilon_{jkl} P^k Q^l. \quad (2.10)$$

Hierbei ist $\varepsilon^{jkl} = \varepsilon_{jkl}$ der antisymmetrische Tensor mit $\varepsilon_\pi = \text{sgn } \pi$ für jede Permutation π der Indices, d. h.

$$P^T(Q \times R) = \varepsilon_{jkl} P^j Q^k R^l = \det[PQR]. \quad (2.11)$$

In der Tat ist stets

$$g^T(g \times h) = \varepsilon^{jkl} g_j g_k h_l = \det[ghh] = 0.$$

Also liegt $g \times h$ wirklich auf h .

Übung 2.1 Der Schnitt konjugiert komplexer Geraden ist – ebenso wie die Gerade durch zwei konjugiert komplexe Punkte – reell.

Drei Punkte P, Q, R sind kollinear, wenn sie auf einer gemeinsamen Geraden liegen, also wenn $\det[PQR] = 0$. Ebenso sind drei Geraden g, h, s konkurrent, wenn sie durch einen gemeinsamen Punkt gehen, also ebenfalls wenn $\det[ghs] = 0$.

Determinanten werden so zu einem zentralen Objekt in der algebraischen Betrachtung des projektiven Raumes. Zur Abkürzung der Notation verwende ich ggf. eine abgekürzte Schreibweise:

$$[ABC] := \det[ABC].$$

Jeder Punkt kann auch als 1-Form (genauer $(N - 1)$ -Form mit $N = 2$ für die projektive Ebene) und jede 1-Form als Punkt interpretiert werden. Punkte und Geraden (Hyperebenen) der projektiven Ebene (des projektiven Raumes) sind zueinander dual.

Übung 2.2 Zeige, dass

$$g \times (P \times Q) \sim (g^T Q)P - (g^T P)Q. \quad (2.12)$$

(In der Tat gilt Gleichheit.) Interpretiere die Terme geometrisch.

2.3 Projektive Abbildungen

Invertierbare lineare Abbildungen $\mathcal{L}: \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^3$ induzieren Abbildungen des $\mathbb{K}\mathbb{P}^2$, die Punkte, Linien und Inzidenz erhalten. Wir werden in [Abschn. 3.4](#) sogar die Umkehrung beweisen:

Satz 3.10 (Fundamentalsatz) *Jede Bijektion $\mathcal{L}: \mathbb{R}\mathbb{P}^N \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^N$, $N \geq 2$, die Geraden (d. h. Kollinearität von Punkten) erhält, wird von einer invertierbaren linearen Abbildung $\mathcal{L} \in \text{GL}(N + 1, \mathbb{R})$ induziert.*

Wir definieren projektive Abbildungen als die durch Elemente aus $\text{GL}(N, \mathbb{K})$ induzierten. In der Ebene werden sie durch Vierecke vermittelt:

Satz 2.3 *Sind vier Urbildpunkte P, Q, R, S in allgemeiner Lage (d. h. keine drei kollinear) und vier Bildpunkte $\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R}, \tilde{S}$ (ebenfalls keine drei kollinear) in $\mathbb{K}\mathbb{P}^2$ gegeben, so existiert genau eine projektive Abbildung auf $\mathbb{K}\mathbb{P}^2$, die die vorgegebenen Punkte auf ihre entsprechenden Bilder abbildet.*

Beweis (Wähle Vertreter in $\mathbb{K}^3$.) O.B.d.A. (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) sind

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(Zerlege die gesuchte Abbildung ggf. in zwei Abbildungen mit den obigen speziellen Punkten als Zwischenschritt.) Der Ansatz

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \lambda \tilde{P} & \mu \tilde{Q} & \nu \tilde{R} \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu, \nu \neq 0,$$

liefert

$$\mathcal{L} S = \tilde{S} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \tilde{P} & \tilde{Q} & \tilde{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \tilde{S}.$$

Nun ist $\det [\tilde{P} \tilde{Q} \tilde{R}] \neq 0$ nach Voraussetzung, also gibt es eine (bis auf Skalierung) eindeutige Lösung $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{K}P^2$. $\square$

Übung 2.4 Die durch $\mathcal{L} \in GL(3, \mathbb{K})$ auf den Geraden der projektiven Ebene induzierte Abbildung ist durch ihre inverse Transponierte gegeben, d. h.

$$P \mapsto \mathcal{L}P, \quad g \mapsto \mathcal{L}^{-T}g. \quad (2.13)$$

2.4 Die projektive Gerade

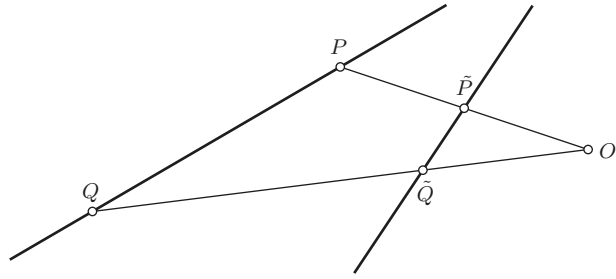
Die Geraden der projektiven Ebene sind selbst wieder projektive Räume:

$$\begin{aligned} \mathbb{K}P^1 &= (\mathbb{K}^2 \setminus \{0\}) / (\mathbb{K} \setminus \{0\}) \\ &\cong \{ \lambda P + \mu Q \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}P^1 \}, \quad P \neq Q. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Die projektiven Abbildungen werden wieder durch invertierbare lineare Abbildungen $\mathcal{L} \in GL(2, \mathbb{K})$ induziert. Wählen wir Repräsentanten $P = \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}$, so sind dies die Möbius-Transformationen

$$p \mapsto \frac{ap+b}{cp+d}, \quad \mathcal{L} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Abb. 2.1 Koordinatenwechsel
der projektiven Geraden



Satz 2.5 Sind drei paarweise verschiedene Urbildpunkte P, Q, R und drei Bildpunkte $\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R}$ (ebenfalls paarweise verschieden) in $\mathbb{KP}^1$ gegeben, so existiert genau eine projektive Abbildung auf $\mathbb{KP}^1$, die die vorgegebenen Punkte auf ihre entsprechenden Bilder abbildet.

Beweis Der Beweis ist analog zum entsprechenden Satz 2.3 für die Ebene. $\square$

Wählen wir zwei verschiedene Punkte $P, Q \in g$ einer projektiven Geraden g , genauer feste Vertreter $P, Q \in \mathbb{K}^3 \setminus \{0\}$, so finden wir die baryzentrischen Koordinaten

$$\mathbb{KP}^1 \cong \left\{ \lambda P + \mu Q \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{KP}^1 \right\}. \quad (2.16)$$

Der Koordinatenwechsel zu zwei anderen Bezugspunkten $\tilde{P}, \tilde{Q} \in \tilde{g}$ ist eine projektive Abbildung. Betrachte dazu homogene Koordinaten mit Ursprung O außerhalb der Geraden (Abb. 2.1). Im Fall $g \sim \tilde{g}$ nutze eine weitere Gerade $h \neq g$ als Zwischenschritt.

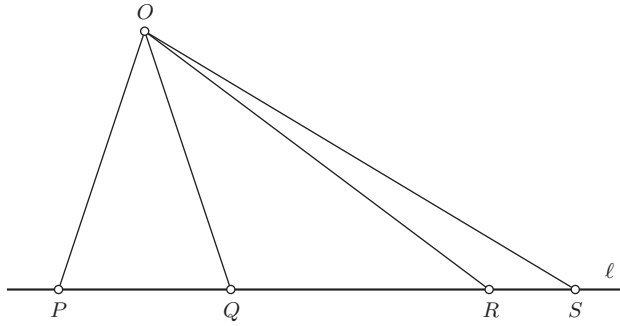
2.5 Doppelverhältnisse

Das Doppelverhältnis zweier (geordneter) Punktpaare auf der projektiven Geraden ist über die Determinanten ihrer homogenen Koordinaten oder die vorzeichenbehafteten (euklidischen) Abstände in einer beliebigen Projektion definiert:

$$(P, Q; R, S) := \frac{\det[PR] \det[QS]}{\det[PS] \det[QR]} = \frac{P-R}{P-S} \bigg/ \frac{Q-R}{Q-S} \quad (2.17)$$

(Abb. 2.2). In der Tat ist das Doppelverhältnis unabhängig

- von der Wahl der Vertreter der Punkte, d. h. der Skalierung ihrer Koordinaten,
- von der Wahl des Ursprungs O in $\mathbb{K}^2$,
- von der Wahl der Projektion, d. h. der Linie ℓ ,
- (und folglich) von beliebigen projektiven Transformationen der projektiven Geraden.

**Abb. 2.2** Das Doppelverhältnis

Vertauschung der Punkte liefert:

$$\begin{aligned}
 (P, Q; R, S) &= (R, S; P, Q) && \text{(Tausch der Paare),} \\
 &= 1/(P, Q; S, R) && \text{(Tausch innerhalb eines Paares),} \\
 &= 1 - (P, R; Q, S) && \text{(Tausch zwischen den Paaren).}
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

(Für die letzte Gleichung wähle o.B.d.A. $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $S = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.) Insbesondere gilt

$$(P, Q; R, S) = 1 \quad \Rightarrow \quad P \sim Q \text{ oder } R \sim S. \tag{2.19}$$

Ist die projektive Gerade als Linie ℓ in der projektiven Ebene gegeben, so kann das Doppelverhältnis auch über die Determinanten bezüglich eines beliebigen Zentrums $O \in \mathbb{K}\mathbb{P}^2 \setminus \ell$ ausgedrückt werden:

$$(P, Q; R, S) = \frac{\det[OPR] \det[OQS]}{\det[OPS] \det[OQR]}. \tag{2.20}$$

Der Ausdruck ist nach wie vor unabhängig von projektiven Transformationen der Ebene und der Wahl des Punktes $O \notin \ell$. Analog kann das Doppelverhältnis zweier Paare konkurrenter Geraden definiert werden.

Übung 2.6 Definiere das Doppelverhältnis zweier Paare $(P, q), (R, s)$ aus Punkt und Gerade durch

$$(P, q; R, s) := 1 - \frac{(q^T P)(s^T R)}{(s^T P)(q^T R)} = 1 - \frac{P^k q_k R^\ell s_\ell}{P^\ell q_k R^k s_\ell}. \tag{2.21}$$

Zeige, dass dies mit dem Doppelverhältnis $(P, Q; R, S)$ übereinstimmt, sofern Q, S die Schnittpunkte von q, s mit der Geraden durch P und R bezeichnen. Diskutiere Symmetrieeigenschaften. Bringe insbesondere den Tausch

$$(P, q; R, s) = 1 - \frac{1}{1 - (P, s; R, q)}$$

zwischen den Paaren in Einklang mit (2.18).

Übung 2.7 Definiere das Doppelverhältnis eines Punktepaares (P, Q) und eines Geradenpaares (r, s) durch

$$(P, Q; r, s) := \frac{(r^T P)(s^T Q)}{(s^T P)(r^T Q)} = \frac{P^k Q^\ell r_k s_\ell}{P^\ell Q^k r_k s_\ell}. \quad (2.22)$$

Zeige, dass dies mit dem Doppelverhältnis $(P, Q; R, S)$ übereinstimmt, sofern R, S die Schnittpunkte von r, s mit der Geraden durch P und Q bezeichnen. Diskutiere Symmetrieeigenschaften.

Übung 2.8 Ersetze in (2.22) die Geraden r, s durch

$$\tilde{r} := r + \lambda(P \times Q), \quad \tilde{s} := s + \mu(P \times Q)$$

und vergleiche dies mit der Wahl eines anderen Zentrums O in (2.20). Zeige so, dass (2.20) tatsächlich unabhängig von O ist.

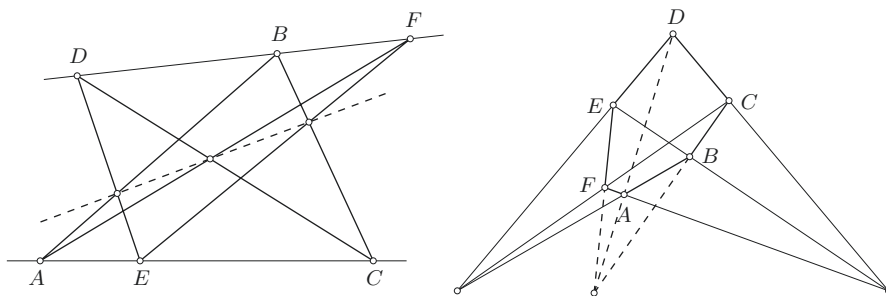
Definition 2.9 Ist ihr Doppelverhältnis -1 , so nennen wir die (ungeordneten) Punktepaares bzw. Geradenpaare auch *harmonisch*.

Harmonische Verhältnisse spielen in [Kap. 3](#) eine tragende Rolle.

2.6 Der Satz von Pappos

Satz 2.10 (Pappos von Alexandria) *Liegen die Ecken eines (ebenen, überschlagenen) Sechsecks abwechselnd auf zwei Geraden, so schneiden sich die Paare gegenüberliegender Seiten in drei kollinearen Punkten ([Abb. 2.3 links](#)).*

Alternative, selbstduale Version: Verlaufen in einem Sechseck zwei Diagonalen durch die Schnittpunkte der jeweilig gegenüberliegenden Seiten, so ist auch die dritte Diagonale zu den beiden ihr gegenüberliegenden Seiten konkurrent ([Abb. 2.3 rechts](#)).



www.stefan-liebscher.de/geometry?preset=pappus&metric=elliptic

Abb. 2.3 Der Satz von Pappos

Beweis Wir setzen die allgemeine Lage der Ausgangspunkte $ABCDEF$ voraus. Die vorausgesetzten Kollinearitäten können wir in Determinanten ausdrücken:

$$\det[AEC] = \det[DBF] = 0.$$

Der Schnittpunkt zweier durch je zwei Punkte gegebenen Geraden, z. B. $\overline{AB}$ und $\overline{DE}$, ist gegeben durch

$$(A \times B) \times (D \times E) \sim \det[ABE]D - \det[ABD]E.$$

Diese Darstellung geht auf Plücker zurück, beachte die Variante (2.12). (Die Kollinearität mit A, B bzw. C, D kann direkt getestet werden.) Die behauptete Kollinearität der Schnittpunkte kann erneut als Determinantengleichung ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} 0 = & [ABE][CDA][EFC][DFB] - [ABE][CDA][EFB][DFC] \\ & - [ABE][CDF][EFC][DAB] + [ABE][CDF][EFB][DAC] \\ & - [ABD][CDA][EFC][EFB] + [ABD][CDA][EFB][EFC] \\ & + [ABD][CDF][EFC][EAB] - [ABD][CDF][EFB][EAC] \end{aligned}$$

Diese Identität folgt direkt aus der Voraussetzung. Beachte dabei die drei Paare sich aufhebender Terme.

Etwas kürzer und eleganter ist der Beweis in der alternativen Formulierung. Aus den Voraussetzungen

$$\begin{aligned} 0 &= [EDB][AFC] - [EDA][BFC], \\ 0 &= [AFD][CBE] - [AFC][DBE] \end{aligned}$$

folgt durch Addition ohne Umschweife die Behauptung

$$0 = [CBF][EDA] - [CBE][FDA].$$

Die Äquivalenz beider Formulierungen erkennt man z. B., indem man in der Originalversion F, C durch ihre Diagonalepunkte ersetzt und D, E vertauscht. $\square$

Der Satz von Pappos ist Ausdruck der Kommutativität der unserer Koordinatisierung zugrunde liegenden reellen bzw. komplexen Zahlen. Projektive Räume, in denen der Satz nicht gültig ist, können ebenfalls studiert werden. Diese liegen jedoch weit jenseits unserer geometrischen Anschauungswelt.

Übung 2.11 Zeige, dass

$$(A \times B) \times (D \times E) = \det[ABE]D - \det[ABD]E \quad (2.23)$$

(mit Koeffizient 1), z. B. im Ricci-Kalkül.

Übung 2.12 Für beliebige Vektoren $P_1, \dots, P_{n-1}, Q_1, \dots, Q_{n+1} \in \mathbb{K}^n$ gilt die Graßmann-Plücker-Relation

$$0 = \sum_{\ell=1}^{n+1} (-1)^\ell \det[P_1 \cdots P_{n-1} Q_\ell] \det[Q_1 \cdots Q_{\ell-1} Q_{\ell+1} \cdots Q_{n+1}] =: \psi. \quad (2.24)$$

Diese kann bewiesen werden, indem man ψ als alternierende Multilinearform in den Q_ℓ auffasst. Als alternierende $(n+1)$ -Form auf $\mathbb{K}^n$ muss sie identisch verschwinden. Betrachte stattdessen die Fälle $n = 2, 3$ in der Form

$$\begin{aligned} 0 &= [OPQ_1][OQ_2Q_3] - [OPQ_2][OQ_1Q_3] + [OPQ_3][OQ_1Q_2], \\ 0 &= [P_1P_2Q_1][Q_2Q_3Q_4] - [P_1P_2Q_2][Q_1Q_3Q_4] + \\ &\quad + [P_1P_2Q_3][Q_1Q_2Q_4] - [P_1P_2Q_4][Q_1Q_2Q_3]. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Interpretiere die erste Relation als Eigenschaft des Doppelverhältnisses (2.18) und die zweite Relation als Mehrdeutigkeit bei der Bildung des Spatprodukts:

$$\begin{aligned} \det[P_1 \times P_2, Q_1 \times Q_2, Q_3 \times Q_4] &= (P_1 \times P_2)^T((Q_1 \times Q_2) \times (Q_3 \times Q_4)) \\ &= \det[P_1, P_2, (Q_1 \times Q_2) \times (Q_3 \times Q_4)] \\ \det[P_1 \times P_2, Q_1 \times Q_2, Q_3 \times Q_4] &= (Q_3 \times Q_4)^T((P_1 \times P_2) \times (Q_1 \times Q_2)) \\ &= \det[Q_3, Q_4, (P_1 \times P_2) \times (Q_1 \times Q_2)]. \end{aligned}$$

Beachte dabei die Darstellungen (2.12) und (2.23).

Projektive Geometrie der Ebene

Ein klassischer Zugang mit interaktiver Visualisierung

Liebscher, S.

2017, XIV, 118 S. 61 Abb., 46 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-662-54079-4