Grundlagen der Mengenlehre

1

1.1 Mengen

Mathematik wird heute in der Sprache der Mengenlehre formuliert und gelehrt. Betrachtet werden Objekte, die zu Mengen zusammengefasst werden können. Diese können dann wiederum Elemente von Mengen sein. Die folgende klassische und immer noch aktuelle Beschreibung gibt G. Cantor (1845–1918) in der Arbeit: Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre (Erster Artikel), Math. Ann. **46**, 481–512 (1895):

> Unter einer **Menge** M verstehen wir jede Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unsrer Anschauung oder unseres Denkens (welche die **Elemente** von M genannt werden) zu einem Ganzen.

H. Hermes (1912–2003) kommentierte in seinen Vorlesungen Cantors Definition einer Menge etwas kritisch so: Während die Menschen in einem Hörsaal Objekte unserer Anschauung und die natürlichen Zahlen Objekte unseres Denkens sind, ist die Art der Einordnung z. B. der griechischen Götter und Göttinnen doch zweifelhaft. (Sie als Elemente einer Menge betrachten zu können, wird wohl nicht bezweifelt.)

Seien A eine Menge und a ein Objekt. Dann bedeutet

$$a \in A \quad \text{bzw.} \quad a \notin A,$$

dass a ein Element von A bzw. dass a kein Element von A ist. Eine Menge wird durch die Elemente, die sie enthält, konstituiert. Zwei Mengen sind also genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten. Dies ist der sogenannte **extensionale Standpunkt**.

Durch Bildung einer Menge wird stets ein neues Objekt geschaffen. Insbesondere gibt es keine Mengen $A_0, A_1, \ldots, A_n$ mit $A_0 \in A_1 \in \cdots \in A_{n-1} \in A_n$ und $A_n = A_0$. Speziell gibt es keine Mengen A, B mit $A \in A$ bzw. mit $A \in B \in A$. Die Menge aller Mengen existiert nicht; sie müsste sich ja selbst enthalten. Damit entfällt auch die Grundlage für die sogenannte **Russellsche Antinomie**: B. Russell (1872–1970) betrachtete die Menge B

© Springer-Verlag GmbH Deutschland 2017

U. Storch, H. Wiebe, *Grundkonzepte der Mathematik*, Springer-Lehrbuch,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-54216-3_1

aller Mengen A, die sich nicht selbst enthalten, und stellte fest, dass definitionsgemäß B genau dann Element von B ist, wenn B nicht Element von B ist. Dies wäre paradox. Die Menge B existiert jedoch nicht, denn sie wäre wegen $A \notin A$ für jede Menge A mit der Menge aller Mengen identisch.

Bemerkung 1.1.1 Die Mengenlehre gibt es auch als mathematische Theorie. Diese versucht, die in der Mengenlehre benutzten Schlussweisen axiomatisch zu fassen. Einziger Grundbegriff ist die Element-von-Beziehung $a \in A$. Ein wesentlicher Teil der Axiome bezieht sich auf die Bildung und Existenz spezieller Mengen, wobei insbesondere eine formale Sprache benutzt wird. Eines der heute gebräuchlichsten Axiomensysteme ist das **ZFC**-System von E. Zermelo (1871–1953) und A. Fraenkel (1891–1965). Das „C“ steht dabei für das **Auswahlaxiom** (= Axiom of **C**hoice), auf das wir später eingehen werden, siehe etwa Abschn. 1.4. Der Leser lasse sich aber nicht verwirren: Die Mengentheorie ist eine mathematische Theorie wie jede andere. Um noch einmal H. Hermes zu zitieren: Wie alle Mathematiker nutzen die Mengentheoretiker das gleiche schmutzige Tuch (nämlich die Mengenlehre), um ihr Silber (nämlich die Mengentheorie) zu polieren. – Für einen Einstieg in die axiomatische Mengentheorie sei auf die Bücher [7] und [5] verwiesen. ◇

Mengen werden beschrieben durch explizite Angabe ihrer Elemente – man spricht dann von **aufzählender Schreibweise** – oder durch Charakterisierung ihrer Elemente mittels einer Eigenschaft, die genau den Objekten zukommt, die der betrachteten Menge angehören. Es ist etwa

$$\begin{aligned}\{1,-1\} &= \{1,-1,1\} = \{x \mid x \text{ ist eine reelle Zahl und es ist } x^2 = 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\}.\end{aligned}$$

Ein und dieselbe Menge kann auf vielerlei Weise beschrieben werden. Wie bereits gesagt, entscheidend für die Gleichheit von Mengen ist, dass sie dieselben Elemente enthalten. Wir verwenden folgende Standardbezeichnungen:

$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}$	Menge der natürlichen Zahlen (nach DIN 5473),
$\mathbb{N}^* = \{1,2,3,\ldots\}$	Menge der positiven natürlichen Zahlen,
$\mathbb{Z} = \{0,1,-1,2,-2,\ldots\}$	Menge der ganzen Zahlen,
$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} = a/b \;\middle|\; a,b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$	Menge der rationalen Zahlen,
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen,
$\mathbb{R}^\times = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$	Menge der reellen Zahlen $\neq 0$,
$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$	Menge der nichtnegativen reellen Zahlen,
$\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$	Menge der nichtpositiven reellen Zahlen,
$\mathbb{R}_+^\times = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$	Menge der positiven reellen Zahlen,
$\mathbb{C} = \{a + b\mathrm{i} \mid a,b \in \mathbb{R}\}$	Menge der komplexen Zahlen,
$\mathbb{C}^\times = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0\}$	Menge der komplexen Zahlen $\neq 0$.

Das elementare Rechnen in diesen Zahlbereichen wird von Anfang an benutzt. Auf die reellen und komplexen Zahlen gehen wir aber in Kap. 3 noch ausführlich ein. Zu Beginn spielen die komplexen Zahlen jedoch keine große Rolle.

A und B seien Mengen. A heißt **Teilmenge** (oder **Untermenge**) von B, wenn jedes Element von A auch Element von B ist. Man schreibt dann

$$A \subseteq B \quad \text{oder} \quad B \supseteq A$$

und spricht von der **Inklusion** der Menge A in der Menge B. Ist dabei $A \neq B$, so heißt die Inklusion **echt**. In diesem Fall schreiben wir auch

$$A \subset B \quad \text{oder} \quad B \supset A.$$

$A \subset B$ bedeutet also, dass jedes Element der Menge A auch zur Menge B gehört, es aber wenigstens ein Element in B gibt, das nicht zu A gehört.[1] Offenbar folgt aus den Inklusionen $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$ die Inklusion $A \subseteq C$. Genau dann gilt $A = B$, wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ gelten. Daher beweist man die Gleichheit $A = B$ zweier Mengen A und B in der Regel so, dass man diese beiden Inklusionen verifiziert, also für alle x zeigt: *Aus* $x \in A$ *folgt* $x \in B$ *und aus* $x \in B$ *folgt* $x \in A$. Die Menge, die überhaupt kein Element enthält, heißt die **leere Menge** und wird mit

$$\emptyset$$

bezeichnet. *Sie ist Teilmenge jeder Menge.*[2] – Wir beschreiben kurz die wichtigsten Mengenoperationen. Seien A und B Mengen. Dann heißen die Mengen

$A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$	die **Vereinigung**,
$A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$	der **Durchschnitt** und
$A - B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$	die **Differenz(menge)**

der Mengen A und B. Hier wie im Folgenden bedeutet der Doppelpunkt vor dem Gleichheitszeichen, dass die linke Seite der Gleichung durch die rechte Seite definiert wird (und umgekehrt die rechte Seite durch die linke, wenn der Doppelpunkt hinter dem Gleichheitszeichen steht). Ist B Teilmenge von A, so heißt die Differenz $A - B$ das **Komplement** von B in A. Es wird auch mit $\complement B = \complement_A B$ bezeichnet. Man beachte, dass bei der Definition der Vereinigung das Wort „oder“ wie stets in der Mathematik im nicht ausschließenden Sinne, d. h. nicht im Sinn von „entweder-oder“, gebraucht wird. $A \cap B$ ist also Teilmenge

[1] Die Inklusionszeichen $\subset$ und $\supset$ werden in der Literatur nicht einheitlich verwendet. Sie bezeichnen gelegentlich die nicht notwendig echte Inklusion.

[2] Ein Anfänger übersieht leicht, dass eine Menge leer sein kann. Will man etwa aus einer gegebenen Menge A ein Element a_0 herausgreifen, so vergewissere man sich, dass A nicht leer ist.

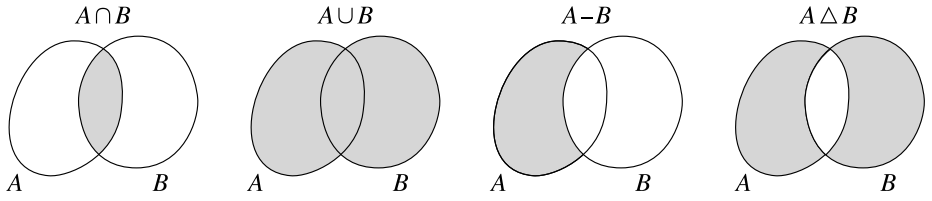


Abb. 1.1 Venn-Diagramme

von $A \cup B$. Die Menge

$$A \triangle B := \{x \mid \text{entweder } x \in A \text{ oder } x \in B\} = (A - B) \cup (B - A)$$
$$= (A \cup B) - (A \cap B)$$

heißt die **symmetrische Differenz** von A und B. Zwei Mengen mit leerem Durchschnitt heißen **disjunkt**. Genau dann gilt also $A \triangle B = A \cup B$, wenn die Mengen A und B disjunkt sind. Diese und ähnliche Begriffsbildungen werden häufig durch sogenannte **Euler**- oder **Venn-Diagramme** veranschaulicht (nach L. Euler (1707–1783) bzw, J. Venn (1834–1923)), vgl. Abb. 1.1.

Wir notieren einige Rechenregeln für die beschriebenen Operationen:

Proposition 1.1.2 *A, B und C seien Mengen. Dann gilt:*

(1) $A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset.$
(2) $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$ **(Kommutativität)**
(3) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$ **(Assoziativität)**
(4) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$ **(Distributivtät)**
(5) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C),$
$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C).$ **(Regeln von De Morgan** (1806–1871)**)**
(6) $A - (A - B) = A \cap B.$

Beweis Wir beweisen exemplarisch die erste der Gleichungen aus (4) und zeigen zunächst die Inklusion $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Sei $x \in A \cup (B \cap C)$. Dann ist $x \in A$ oder $x \in B \cap C$, also $x \in A$ oder aber gleichzeitig $x \in B$ und $x \in C$. Dann sind die Aussagen „$x \in A$ oder $x \in B$“ und „$x \in A$ oder $x \in C$“ beide wahr. Daher ist $x \in A \cup B$ und $x \in A \cup C$ und somit $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Zum Beweis der Inklusion $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$ sei $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Dann ist $x \in A \cup B$ und $x \in A \cup C$, also gilt gleichzeitig „$x \in A$ oder $x \in B$“ und „$x \in A$ oder $x \in C$“. Es folgt $x \in A$ oder $x \in B \cap C$, d. h. $x \in A \cup (B \cap C)$. □

Zu den Assoziativgesetzen 1.1.2 (3) sei bemerkt, dass die Menge $A \cap B \cap C := (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ bzw. die Menge $A \cup B \cup C := (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ einfach die Menge derjenigen Elemente ist, die in allen bzw. in wenigstens einer der Mengen A, B, C liegen. Auf diese Weise lassen sich Durchschnitt und Vereinigung für beliebig viele Mengen definieren, vgl. Abschn. 1.2. Für Teilmengen einer Menge können die Regeln (5) aus Proposition 1.1.2 folgendermaßen formuliert werden: *Das Komplement der Vereinigung ist der Durchschnitt der Komplemente, und das Komplement des Durchschnitts ist die Vereinigung der Komplemente.* Schließlich, *das Komplement des Komplements ist die ursprüngliche Teilmenge.* Wir werden gelegentlich weitere solcher elementaren Mengenbeziehungen benutzen, ohne sie im einzelnen stets zu begründen. Einige Beispiele findet man auch in den Aufgaben zu diesem Abschnitt.

Sei A wieder eine beliebige Menge. Die Menge der Teilmengen von A heißt die **Potenzmenge** von A und wird mit

$$\mathfrak{P}(A)$$

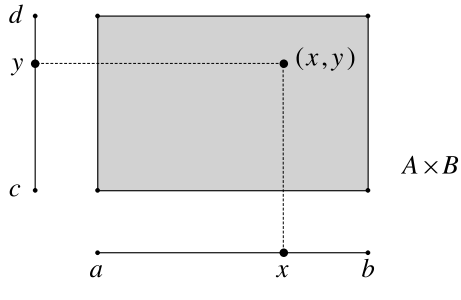
bezeichnet. Die Potenzmenge $\mathfrak{P}\big(\{\square, \lozenge, \triangle\}\big)$ der Menge $\{\square, \lozenge, \triangle\}$ beispielsweise ist die Menge $\big\{\emptyset, \{\square\}, \{\lozenge\}, \{\triangle\}, \{\square, \lozenge\}, \{\square, \triangle\}, \{\lozenge, \triangle\}, \{\square, \lozenge, \triangle\}\big\}$.[3] Durchschnitt, Vereinigung und Differenz von Mengen aus $\mathfrak{P}(A)$ gehören wieder zu $\mathfrak{P}(A)$. Man beachte, dass die Potenzmenge $\mathfrak{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ der leeren Menge $\emptyset$ *nicht* leer ist.[4]

Für Mengen A und B heißt die Menge der **Paare** (x, y), $x \in A$, $y \in B$, das **kartesische Produkt** oder das **Kreuzprodukt** von A und B und wird mit

$$A \times B$$

bezeichnet. Zwei Paare (x, y) und (v, w) sind genau dann gleich, wenn ihre entsprechenden **Komponenten** jeweils übereinstimmen, d. h. wenn $x = v$ und $y = w$ ist. Es ist also zwischen dem Paar (x, y) und der Menge $\{x, y\}$ zu unterscheiden. Bei $x \neq y$ ist $(x, y) \neq (y, x)$ aber natürlich $\{x, y\} = \{y, x\}$.[5]

Abb. 1.2 Kartesisches Produkt



[3] Selbst wenn die Elemente der Menge A konkrete Objekte unserer Anschauung sind, ist ihre Potenzmenge als Ganzes nur ein Objekt des Denkens.

[4] Dies ist gewissermaßen eine Schöpfung aus dem Nichts.

[5] Nach K. Kuratowski (1896–1980) lässt sich der Begriff des Paares direkt auf Grundbegriffe der Mengenlehre zurückführen, indem man etwa $(x, y) := \{x, \{x, y\}\}$ setzt.

Beispiel 1.1.3 Sind A bzw. B die reellen Intervalle $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ bzw. $[c,d] = [y \in \mathbb{R} \mid c \leq y \leq d]$ mit $a < b$ bzw. $c < d$, so ist $A \times B$ das „Rechteck“

$$[a,b] \times [c,d] = \big\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\big\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

vgl. Abb. 1.2. Man veranschaulicht generell das kartesische Produkt zweier Mengen gern als solch ein Rechteck. Kreuzprodukte mit beliebig vielen Faktoren werden in Abschn. 1.2 behandelt. ◇

Wir werden in den folgenden Aufgaben und auch später häufig den Begriff der Äquivalenz von Aussagen benutzen. Zwei Aussagen heißen **äquivalent**, wenn aus der Gültigkeit je einer von ihnen die Gültigkeit der jeweils anderen folgt. Mehrere Aussagen heißen äquivalent, wenn je zwei von ihnen äquivalent sind. Oft (wenn auch nicht immer) ist es zweckmäßig, die Äquivalenz von Aussagen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ durch einen sogenannten **Ringschluss** zu zeigen, bei dem man (eventuell nach Umnummerieren) die Implikationen $\alpha_1 \Rightarrow \alpha_2$, $\alpha_2 \Rightarrow \alpha_3$, …, $\alpha_{n-1} \Rightarrow \alpha_n$ und schließlich $\alpha_n \Rightarrow \alpha_1$ zeigt. Sind die Aussagen α, β äquivalent, so schreiben wir $\alpha \Leftrightarrow \beta$.

Aufgaben

Aufgabe 1.1.1 Für eine Menge A sind folgende Aussagen äquivalent: (i) $A = \emptyset$. (ii) Für jede Menge B ist $A - B = A \cap B$. (iii) Es gibt eine Menge B mit $A - B = A \cap B$. (iv) Für jede Menge B ist $B - A = B \cup A$. (v) Es gibt eine Menge B mit $B - A = B \cup A$.

Aufgabe 1.1.2 Für Mengen A, B sind folgende Aussagen äquivalent: (i) $A \subseteq B$. (ii) $A \cap B = A$. (iii) $A \cup B = B$. (iv) $A - B = \emptyset$. (v) $B - (B - A) = A$. (vi) Für jede Menge C ist $A \cup (B \cap C) = (A \cup C) \cap B$. (vii) Es gibt eine Menge C mit $A \cup (B \cap C) = (A \cup C) \cap B$.

Aufgabe 1.1.3 Für Mengen A, B gilt $(A \cap B) \cap (A - B) = \emptyset$ und $(A \cap B) \cup (A - B) = A$.

Aufgabe 1.1.4 Für Mengen A, B, C gilt:

a) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$.
b) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$.
c) $(A - B) - C = A - (B \cup C)$.
d) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$.

Aufgabe 1.1.5 Die Mengen A, B sind genau dann gleich, wenn $A \cup B = A \cap B$ ist.

Aufgabe 1.1.6 Für Mengen A, B, C zeige man:

a) $A \triangle A = \emptyset, \quad A \triangle \emptyset = A.$
b) Genau dann ist $A = B$, wenn $A \triangle B = \emptyset$ ist.
c) Genau dann ist $A \cap B = \emptyset$, wenn $A \triangle B = A \cup B$ ist.
d) $(A \triangle B) \cap (A \cap B) = \emptyset, \quad (A \triangle B) \cup (A \cap B) = A \cup B.$
e) $(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C).$
f) Aus $A \triangle B = A \triangle C$ folgt $B = C$.
g) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C).$

Aufgabe 1.1.7 Die *nichtleeren* Mengen A, B sind genau dann gleich, wenn $A \times B = B \times A$ ist.

Aufgabe 1.1.8 Für Mengen A, B, C zeige man:

a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C).$
b) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C).$
c) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C).$

Aufgabe 1.1.9 A, B, C, D seien Mengen. Aus $A \subseteq C$ und $B \subseteq D$ folgt $A \times B \subseteq C \times D$. Bei $A \neq \emptyset$ und $B \neq \emptyset$ gilt auch die Umkehrung.

Aufgabe 1.1.10 Für Mengen A, B, C, D gilt:

a) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D).$
b) $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$. Die Gleichheit gilt hier genau dann, wenn sowohl die Bedingung „$A \subseteq C$ oder $D \subseteq B$“ als auch die Bedingung „$C \subseteq A$ oder $B \subseteq D$“ erfüllt ist.

1.2 Abbildungen und Familien

Der Begriff der Abbildung ist einer der fundamentalsten der ganzen Mathematik. Der Leser sollte sich so früh wie möglich damit vertraut machen.

A und B seien Mengen. Unter einer **Abbildung von A in B** versteht man eine Vorschrift f, die jedem Element $x \in A$ genau ein Element aus B zuordnet, das wir im Allgemeinen mit $f(x)$ bezeichnen. Eine Abbildung f von A in B schreibt man kurz in der Form

$$f: A \longrightarrow B \quad \text{oder} \quad A \xrightarrow{f} B$$

und gibt sie auf Elementebene durch

$$x \longmapsto f(x), \quad x \in A,$$

an. A heißt der **Definitionsbereich** und B der **Wertebereich** oder auch der **Bildbereich** von f. Beide Bereiche gehören konstitutiv zur Abbildung f. Für $x \in A$ heißt $f(x) \in B$ das **Bild** von x unter f oder auch der **Wert** von f für das **Argument** x oder an der **Stelle** x. Der **Graph** von f ist die Teilmenge

$$\Gamma := \Gamma(f) := \Gamma_f := \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subseteq A \times B$$

von $A \times B$. Zusammen mit Definitions- und Wertebereich charakterisiert der Graph $\Gamma(f)$ die Abbildung f vollständig. Prinzipiell sind Abbildungen mit ihren Graphen zu identifizieren. Die Definition einer Abbildung als Zuordnung(svorschrift) ist in der Regel zu vage. Eine Abbildung f mit Definitionsbereich A und Wertebereich B ist also eine Teilmenge Γ von $A \times B$ mit folgender Eigenschaft: Zu jedem $x \in A$ gibt es genau ein $y \in B$ (nämlich $y = f(x)$) mit $(x, y) \in \Gamma$. Wir halten fest, dass Abbildungen f und g genau dann gleich sind, wenn ihre Definitions- bzw. Wertebereiche jeweils übereinstimmen und wenn für alle Elemente x aus dem gemeinsamen Definitionsbereich $f(x) = g(x)$ gilt. In welcher Weise die Werte dabei beschrieben werden, ist unwesentlich. Dies ist wieder der extensionale Standpunkt, vgl. Abschn. 1.1. Die Menge aller Abbildungen von A in B bezeichnen wir mit[6]

$$\mathrm{Abb}(A, B) \quad \text{oder} \quad B^A.$$

Statt von Abbildungen spricht man häufig auch von **Funktionen**. Diese Sprechweise ist insbesondere dann üblich, wenn die Werte in Zahlbereichen liegen. Summe, Produkt und ähnliche Verknüpfungen von Funktionen f, g auf der Menge A mit Werten in ein und demselben Zahlbereich, etwa den reellen Zahlen $\mathbb{R}$, werden dann durch die entsprechenden Operationen für die Werte definiert. Es ist beispielsweise

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{und} \quad (fg)(x) := f(x)g(x)$$

für alle x aus dem gemeinsamen Definitionsbereich A von f und g. Analog ist die Multiplikation mit einer Zahl a erklärt:

$$(af)(x) := af(x), \quad x \in A.$$

Die **konstante Funktion** a ordnet jedem Argument x den festen Wert a zu.

Beispiel 1.2.1 Die Quadratfunktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wird durch $x \mapsto x^2$ gegeben. Die Quadratwurzel liefert zunächst keine Funktion von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, da negative Zahlen keine reelle Quadratwurzel haben. Auch auf $\mathbb{R}_+$ liefert die Quadratwurzel noch keine Funktion $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, da eine positive reelle Zahl zwei Quadratwurzeln in $\mathbb{R}$ besitzt. Durch $x \mapsto \sqrt{x}$ wird jedoch eine Funktion $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definiert, wenn – wie allgemein üblich – *unter* $\sqrt{x}$ *für* $x \in \mathbb{R}_+$ *die nichtnegative Quadratwurzel verstanden wird*. Die zugehörigen Graphen sind also die in Abb. 1.3 dargestellten Teilmengen von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. ◇

[6] Die Potenzschreibweise B^A ist durch die weiter unten eingeführten allgemeinen Produkte von Mengen motiviert.

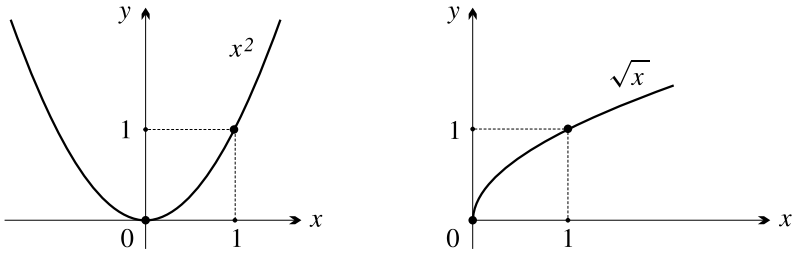


Abb. 1.3 Quadratfunktion und Quadratwurzelfunktion

Beispiel 1.2.2 Wir erwähnen einige weitere häufig benutzte Funktionen, vgl. Abb. 1.4.

(1) Die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x$ heißt die **Identität** von $\mathbb{R}$. Sie ist in analoger Weise für jede Menge A definiert und wird dann mit $\mathrm{id} = \mathrm{id}_A$ bezeichnet. Ihr Graph ist die **Diagonale** $\Delta_A := \{(x, x) \mid x \in A\} \subseteq A \times A$. Ist $f\colon A \to A$ eine beliebige Abbildung der Menge A in sich, so heißt ein Punkt $x \in A$ mit $f(x) = x$ ein **Fixpunkt** von f. Die Abbildung f hat einen Fixpunkt genau dann, wenn ihr Graph $\Gamma(f)$ die Diagonale $\Delta_A = \Gamma(\mathrm{id}_A)$ schneidet. Die Identität von A ist diejenige Abbildung von A in sich, für die jeder Punkt von A ein Fixpunkt ist. Die Menge der Fixpunkte von $f\colon A \to A$ bezeichnen wir mit

$$\mathrm{Fix}\, f = \mathrm{Fix}(f, A) = \{x \in A \mid f(x) = x\}.$$

Viele wichtige Sätze der Mathematik sind Sätze über die Existenz von Fixpunkten, sogenannte **Fixpunktsätze**.

(2) Die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto |x| := \begin{cases} x, \text{ falls } x \geq 0, \\ -x, \text{ falls } x < 0, \end{cases}$ heißt **(Absolut-)Betrag** oder **Betragsfunktion** (auf $\mathbb{R}$).

(3) Die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \mathrm{Sign}\, x := \begin{cases} 1, \text{ falls } x > 0, \\ 0, \text{ falls } x = 0, \\ -1, \text{ falls } x < 0, \end{cases}$ heißt **Vorzeichen(funktion)** oder **Signum** (auf $\mathbb{R}$).

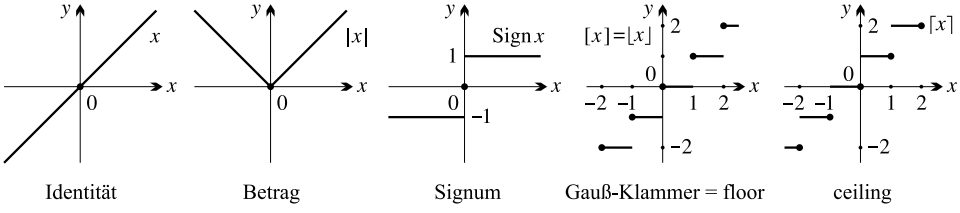


Abb. 1.4 Beispiele von Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

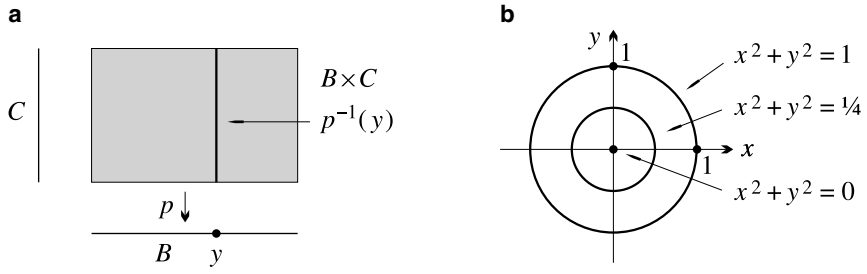


Abb. 1.5 Fasern einer Projektion, Fasern von $x^2 + y^2$

(4) Die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto [x]$, wobei $[x]$ für $x \in \mathbb{R}$ die größte ganze Zahl ist, die $\leq x$ ist, heißt die **Gauß-Klammer** (nach C. F. Gauß (1777–1855)). Für $x \in \mathbb{R}$ ist also $[x]$ durch die folgenden beiden Bedingungen festgelegt: (1) $[x] \in \mathbb{Z}$ und (2) $[x] \leq x < [x] + 1$. Beispielsweise ist $[\pi] = 3$ und $[-\pi] = -4$. Die Gauß-Klammer von x wird häufig auch mit $\lfloor x \rfloor$ bezeichnet und heißt im Englischen **floor** von x. Die kleinste ganze Zahl, die $\geq x$ ist, wird mit $\lceil x \rceil$ bezeichnet. Im Englischen heißt sie **ceiling** von x. Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$, und für $x \notin \mathbb{Z}$ ist $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$, vgl. Abb. 1.4. ◇

Sei $f: A \to B$ eine Abbildung. Für $A' \subseteq A$ bzw. $B' \subseteq B$ heißen

$$f(A') := \{f(x) \mid x \in A'\} \subseteq B \quad \text{und} \quad f^{-1}(B') := \{x \in A \mid f(x) \in B'\} \subseteq A$$

das **Bild** von A' bzw. das **Urbild** von B' unter f. Das Bild $f(A)$ heißt das **Bild** (nicht zu verwechseln mit dem Bildbereich) von f schlechthin und wird mit Bild f bezeichnet. Es ist eine Teilmenge des Bildbereichs von f (und im Allgemeinen von diesem verschieden). Für $y \in B$ heißt $f^{-1}(y) := f^{-1}\big(\{y\}\big) = \{x \in A \mid f(x) = y\}$ die **Faser von** f **über** y. Für $x \in A$ ist $f^{-1}\big(f(x)\big)$ die **Faser von** f **durch** x. Ist $f: A \to A$ eine Abbildung von A in sich, so heißt $A' \subseteq A$ f-**invariant**, wenn $f(A') \subseteq A'$ gilt. Dann induziert f durch Beschränken eine Abbildung $f' = f|A': A' \to A'$, $f'(x) := f(x)$ für $x \in A'$, von A' in sich. Beispielsweise ist Bild $f = f(A)$ stets f-invariant.

Beispiel 1.2.3 Sind B und C Mengen, so sind die Fasern der **Projektion** $p: (y, z) \mapsto y$ von $B \times C$ auf B die Mengen $\{y\} \times C \subseteq B \times C$, $y \in B$, vgl. Abb. 1.5a. Die Faser $f^{-1}(a)$ der Funktion $f: (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ ist bei $a < 0$ leer, enthält bei $a = 0$ nur den Punkt $0 = (0, 0)$ und ist bei $a > 0$ der Kreis um 0 mit Radius $\sqrt{a}$, vgl. Abb. 1.5b. ◇

Seien $f: A \to B$ eine Abbildung und $A' \subseteq A$ bzw. $B' \subseteq B$ Teilmengen mit $f(A') \subseteq B'$. Dann definiert f in natürlicher Weise eine Abbildung $A' \to B'$ dadurch, dass der Definitionsbereich auf A' beschränkt und der Wertebereich auf B' eingeschränkt wird und die Argumente $x \in A'$ wie bei f abgebildet werden. Man bezeichnet diese **Beschränkung**

http://www.springer.com/978-3-662-54215-6

Grundkonzepte der Mathematik
Mengentheoretische, algebraische, topologische Grundlagen sowie reelle und komplexe Zahlen
Storch, U.; Wiebe, H.
2017, XII, 635 S. 101 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-662-54215-6