Verallgemeinerte Funktionen

1

1.1 Der Raum der Grundfunktionen

Für den Vektorraum $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, über $\mathbb{R}$ betrachten wir die Euklidische Norm

$$\| \bullet \|_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \mapsto \sqrt{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}} := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

und bezeichnen eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ als **offen**, falls es zu jedem $\mathbf{x_0} \in A$ eine reelle Zahl $\varepsilon > 0$ gibt mit

$$K_{\mathbf{x_0},\varepsilon} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n;\ \|\mathbf{x} - \mathbf{x_0}\|_2 < \varepsilon\} \subseteq A.$$

Eine Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **offene Umgebung** von $\mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^n$, falls $\mathbf{x_0} \in U$ und U eine offene Menge darstellt.

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **abgeschlossen**, falls das Komplement

$$A^c := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n;\ \mathbf{x} \notin A\}$$

offen ist. Sind für eine beliebige nichtleere Menge I Teilmengen A_i, $i \in I$, des $\mathbb{R}^n$ abgeschlossen, so ist auch der Schnitt

$$A := \bigcap_{i \in I} A_i$$

eine abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **beschränkt**, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit

$$A \subseteq K_{\mathbf{0},\varepsilon}.$$

Abgeschlossene und beschränkte Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ werden als **kompakt** bezeichnet.

© Springer-Verlag GmbH Deutschland 2017

S. Schäffler, *Verallgemeinerte stochastische Prozesse*, DOI 10.1007/978-3-662-54265-1_1

Sei nun $M \subseteq \mathbb{R}^n$, so ist der **Abschluss** vom M definiert als

$$\mathrm{cl}(M) := \bigcap_{A \in \mathfrak{A}} A,$$

wobei

$$\mathfrak{A} := \{B \subseteq \mathbb{R}^n;\ B \text{ ist abgeschlossen und } M \subseteq B\}.$$

Die Menge $\mathrm{cl}(M)$ ist somit die kleinste abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, die M enthält; das heißt: Es gibt keine echte Teilmenge von $\mathrm{cl}(M)$, die M enthält und abgeschlossen ist. Sind für eine beliebige nichtleere Menge I Teilmengen B_i, $i \in I$, des $\mathbb{R}^n$ offen, so ist auch die Vereinigung

$$B := \bigcup_{i \in I} B_i$$

eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Ist nun $M \subseteq \mathbb{R}^n$, so ist das **Innere** von M definiert als

$$\mathrm{int}(M) := \bigcup_{C \in \mathfrak{C}} C,$$

wobei

$$\mathfrak{C} := \{B \subseteq \mathbb{R}^n;\ B \text{ ist offen und } B \subseteq M\}.$$

Die Menge $\mathrm{int}(M)$ ist also die größte offene Teilmenge von M; das heißt: Es gibt keine offene Teilmenge T von M mit $\mathrm{int}(M) \subseteq T$ und $\mathrm{int}(M) \neq T$.

Für eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ wird nun

$$\partial(M) := \mathrm{cl}(M) \setminus \mathrm{int}(M) := \{\mathbf{x} \in \mathrm{cl}(M);\ \mathbf{x} \notin \mathrm{int}(M)\}$$

als **Rand** von M bezeichnet.

Für jedes $M \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt zum Beispiel (Übungsaufgabe):

(i) $\mathrm{int}(M) = M$ falls M offen und $\mathrm{cl}(M) = M$ falls M abgeschlossen,
(ii) $\partial(M) \cap M = \emptyset$ falls M offen,
(iii) $\partial(M) \subseteq M$ falls M abgeschlossen.
(iv) Da $\partial(M)^c = \mathrm{int}(M) \cup \mathrm{cl}(M)^c$, ist der Rand von M abgeschlossen.

Sei nun

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

eine Funktion. Der **Träger** $\mathrm{supp}(f)$ von f ist definiert durch

$$\mathrm{supp}(f) := \mathrm{cl}(\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n;\ f(\mathbf{x}) \neq 0\}).$$

Durch diese Festlegung wird $\text{supp}(f)^c$ eine offene Menge; es gibt also zu jedem $\mathbf{x_0} \in \text{supp}(f)^c$ ein $\varepsilon > 0$ mit:

$$K_{\mathbf{x_0},\varepsilon} \subseteq \text{supp}(f)^c \quad \text{und daher} \quad f(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{für alle} \quad \mathbf{x} \in K_{\mathbf{x_0},\varepsilon}.$$

Obwohl zum Beispiel die trigonometrischen Funktionen `sin` und `cos` jeweils unendlich viele Nullstellen haben, gilt dennoch

$$\text{supp}(\texttt{sin})^c = \text{supp}(\texttt{cos})^c = \emptyset.$$

Im Folgenden betrachten wir die Menge der beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

die wir mit $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ bezeichnen. Mit Hilfe des Trägers einer Funktion definieren wir nun eine wichtige Teilmenge von $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Definition 1.1 (Grundfunktion) *Eine Funktion $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ heißt **Grundfunktion**, falls $\text{supp}(\varphi)$ beschränkt (und somit kompakt) ist. Die Menge aller Grundfunktionen wird mit $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ bezeichnet.* ◁

Offensichtlich gilt für alle partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^m \varphi}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

m-ter Ordnung einer Grundfunktion φ:

$$\text{supp}\left(\frac{\partial^m \varphi}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}}\right) \subseteq \text{supp}(\varphi) \quad \text{für alle} \quad m \in \mathbb{N},\ i_1, \dots, i_m \in \{1, 2, \dots, n\},$$

da $\text{supp}(\varphi)^c$ offen ist und auf dieser Menge somit alle partiellen Ableitungen gleich Null werden.

Zunächst ist nicht klar, ob es neben der Grundfunktion $\varphi \equiv 0$ überhaupt eine weitere Grundfunktion gibt. Sei

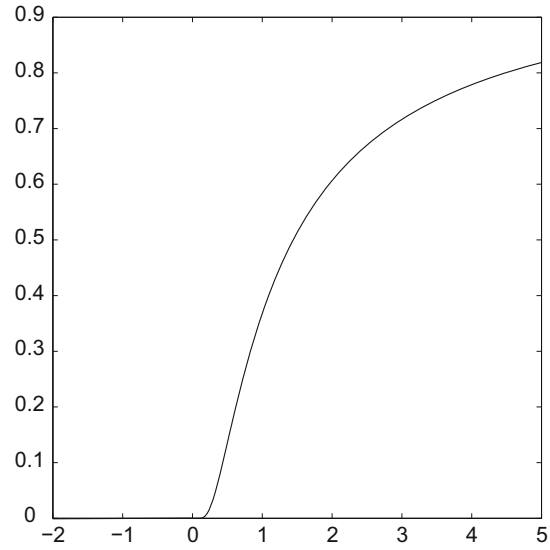
$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für alle } x \leq 0 \\ \exp\left(-\frac{1}{x}\right) & \text{für alle } x > 0 \end{cases},$$

so ist $h \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (siehe Abb. 1.1).

Mit

$$k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \mapsto 1 - \|\mathbf{x}\|_2^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

Abb. 1.1 Die Funktion h



ist

$$\psi := h \circ k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für alle } 1 \leq \|\mathbf{x}\|_2^2 \\ \exp\left(-\frac{1}{1-\|\mathbf{x}\|_2^2}\right) & \text{für alle } 1 > \|\mathbf{x}\|_2^2 \end{cases}$$

in $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ (Kettenregel) und wegen

$$\operatorname{supp}(\psi) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n;\ \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq 1\right\} \quad (= \operatorname{cl}(K_{\mathbf{0},1}))$$

ist ψ eine Grundfunktion (siehe Abb. 1.2).

Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ist

$$\lambda\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \mapsto \lambda \cdot \varphi(\mathbf{x})$$

wegen

$$\operatorname{supp}(\lambda\varphi) = \begin{cases} \operatorname{supp}(\varphi) & \text{für } \lambda \neq 0 \\ \emptyset & \text{für } \lambda = 0 \end{cases}$$

ebenfalls eine Grundfunktion und für $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ist

$$\varphi_1 + \varphi_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \mapsto \varphi_1(\mathbf{x}) + \varphi_2(\mathbf{x})$$

wegen

$$\operatorname{supp}(\varphi_1 + \varphi_2) \subseteq \operatorname{supp}(\varphi_1) \cup \operatorname{supp}(\varphi_2)$$

ebenfalls eine Grundfunktion, denn die endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen. Somit bildet $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ einen Vektorraum über $\mathbb{R}$.

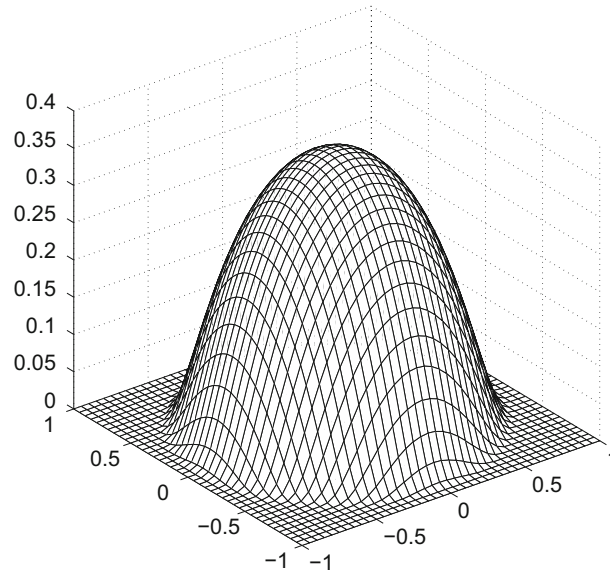


Abb. 1.2 Die Funktion ψ für $n = 2$

Da für die Funktion

$$\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für alle } 1 \leq \|\mathbf{x}\|_2^2 \\ \exp\left(-\frac{1}{1-\|\mathbf{x}\|_2^2}\right) & \text{für alle } 1 > \|\mathbf{x}\|_2^2 \end{cases}$$

offensichtlich

$$0 < I_\psi := \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} < \infty \quad \text{(Riemann-Integral)}$$

gilt, folgt natürlich für $\psi_1 := \frac{\psi}{I_\psi}$ (siehe Abb. 1.3):

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi_1(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 1.$$

Nun wählen wir eine reelle Zahl $R > 0$ und untersuchen die Funktion

$$\psi_R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \mapsto \frac{\psi_1\left(\frac{\mathbf{x}}{R}\right)}{R^n}.$$

Die Substitution $\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{R}$ liefert:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi_R(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 1.$$

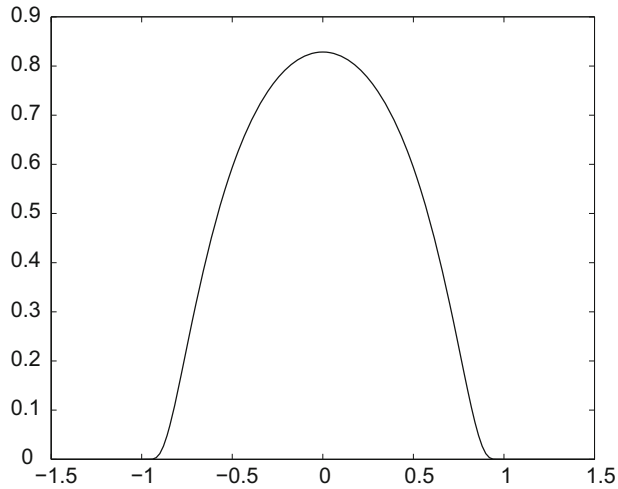


Abb. 1.3 Die Funktion ψ_1 für $n = 1$

Ferner erhalten wir

$$\operatorname{supp}(\psi_R) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n;\ \|\mathbf{x}\|_2 \leq R\} = \operatorname{cl}(K_{\mathbf{0},R}).$$

Durch die Funktionen ψ_R können wir weitere Grundfunktionen gewinnen. Sei

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

stetig mit kompaktem Träger, so ist durch

$$\varphi_R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{\xi})\psi_R(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x})\, d\boldsymbol{\xi}$$

für jedes $R > 0$ eine neue Grundfunktion gegeben, denn da

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{\xi})\psi_R(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x})\, d\boldsymbol{\xi} = \int\limits_{\operatorname{cl}(K_{\mathbf{x},R})} f(\boldsymbol{\xi})\psi_R(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x})\, d\boldsymbol{\xi},$$

ist $\varphi_R \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ (Differentiation und Integration können vertauscht werden). Wegen

$$\varphi_R(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{für alle} \quad \mathbf{x} \in \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n;\ \operatorname{cl}(K_{\mathbf{y},R}) \cap \operatorname{supp}(f) = \emptyset\}$$

ist der Träger von φ_R beschränkt. Wählt man für $n = 1$ zum Beispiel die stetige Funktion (Abb. 1.4)

$$\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 4 - \big|\, 2|x| - 2\,\big| & \text{für } -3 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

Abb. 1.4 Die Funktion μ

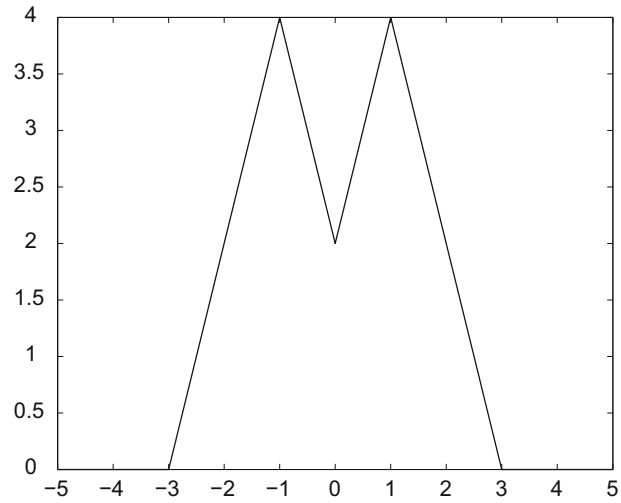
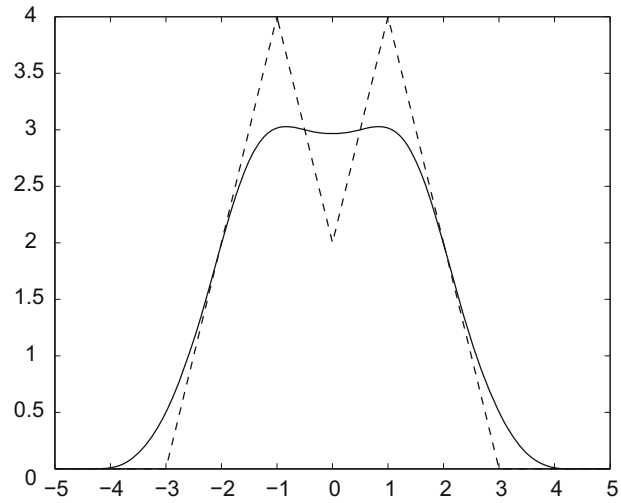


Abb. 1.5 Die Funktion $\varphi_{1.5}$



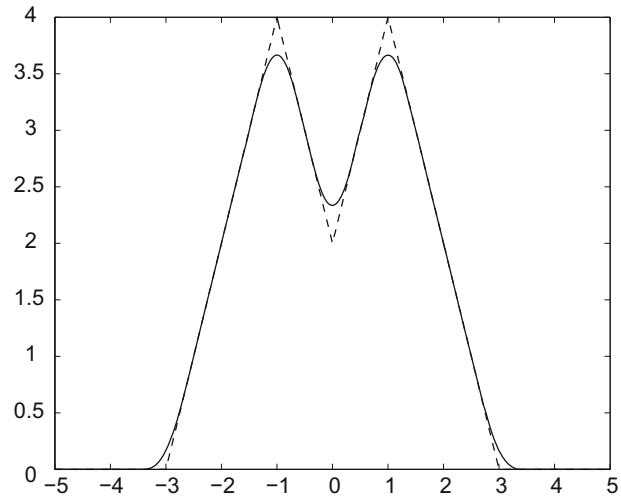
so erhält man für $R = 1.5$ und $R = 0.5$ die Funktionen $\varphi_{1.5}$ und $\varphi_{0.5}$ wie in den Abb. 1.5 und Abb. 1.6 dargestellt.

Die Funktion f läßt sich durch eine Grundfunktion beliebig genau approximieren, wie der folgende Satz zeigt.

Theorem 1.2 (Approximationssatz) *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit beschränktem (und damit kompaktem) Träger dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Grundfunktion φ mit*

$$|f(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})| < \varepsilon \quad \textit{für alle} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Abb. 1.6 Die Funktion $\varphi_{0.5}$



Ferner gilt mit

$$\varphi_R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{\xi})\psi_R(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x})\, d\boldsymbol{\xi}:$$

$$\lim_{R \to 0,\, R>0} \varphi_R = f$$

gleichmäßig im $\mathbb{R}^n$. ◁

Beweis Da f einen kompakten Träger hat, ist f gleichmäßig stetig; es gibt also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}')| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|_2 < \delta.$$

Mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung (siehe etwa [Wal02]) folgt für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$\varphi_R(\mathbf{x}) = \int_{\mathrm{cl}(K_{\mathbf{x},R})} f(\boldsymbol{\xi})\psi_R(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x})\, d\boldsymbol{\xi} = f(\mathbf{x}') \quad \text{für ein} \quad \mathbf{x}' \in \mathrm{cl}(K_{\mathbf{x},R}).$$

Wählt man $R < \delta$, so erhalten wir für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$|f(\mathbf{x}) - \varphi_R(\mathbf{x})| = |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}')| < \varepsilon, \quad \text{da } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|_2 < \delta.$$

Damit ist auch die zweite Behauptung bewiesen. **q. e. d.**

Im nächsten Abschnitt werden wir Grundfunktionen verwenden, um eine größere Klasse von Funktionen zu beschreiben.

1.2 Darstellung von Funktionen durch Funktionale

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion, so heißt f **lokal integrierbar**, falls $|f|$ für jedes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$ auf der Kugel $\mathrm{cl}(K_{\mathbf{x},\varepsilon})$ integrierbar ist. Wir können also jeder lokal integrierbaren Funktion f eine Abbildung

$$F_f : \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

zuordnen; für eine positive Grundfunktion φ mit

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 1$$

gilt für eine stetige Funktion f:

$$F_f(\varphi) = f(\mathbf{x}') \quad \text{für ein} \quad \mathbf{x}' \in \mathrm{supp}(\varphi).$$

Die Funktion F_f wird als **Funktional** bezeichnet. Ist allgemein ein Vektorraum $\mathbb{V}$ über einem Körper $\mathbb{K}$ gegeben, so wird jede Abbildung

$$G : \mathbb{V} \to \mathbb{K}$$

als Funktional bezeichnet. Gilt zudem

$$\begin{aligned} G(\lambda \cdot \mathbf{x}) &= \lambda \cdot G(\mathbf{x}) \quad \text{für alle} \quad \lambda \in \mathbb{K},\ \mathbf{x} \in \mathbb{V} \\ G(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= G(\mathbf{x}) + G(\mathbf{y}) \quad \text{für alle} \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V}, \end{aligned}$$

so heißt G **lineares Funktional**. In diesem Sinne ist F_f für jedes lokal integrierbare f ein lineares Funktional.

Nachdem wir jeder lokal integrierbaren Funktion f das Funktional F_f zuordnen können, stellt sich nun die Frage, ob wir nur mit Kenntnis des Funktionals F_f die Funktionswerte von f eindeutig rekapitulieren können. Dazu betrachten wir basierend auf den bereits eingeführten Grundfunktionen ψ_R für jedes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ die Grundfunktionen

$$\psi_{\mathbf{x},R} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \boldsymbol{\xi} \mapsto \psi_R(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}).$$

Da für eine stetige Funktion f gilt:

$$F_f(\psi_{\mathbf{x},R}) = f(\mathbf{x}') \quad \text{für ein} \quad \mathbf{x}' \in \mathrm{cl}(K_{\mathbf{x},R}),$$

folgt:

$$\lim_{R \to 0,\, R > 0} F_f(\psi_{\mathbf{x},R}) = f(\mathbf{x}) \quad \text{für alle} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Sei nun $n = 1$, f differenzierbar (und damit lokal integrierbar) und f' lokal integrierbar, so gilt mit partieller Integration und $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \Big[f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}) \Big]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x})\varphi'(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = -\int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x})\varphi'(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Somit erhalten wir

$$F_{f'}(\varphi) = -F_f(\varphi') \quad \text{für alle} \quad \varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Das Interessante an dieser Gleichung ist nun, dass die linke Seite nur für differenzierbare Funktionen f definiert ist, deren Ableitung lokal integrierbar ist, während die rechte Seite für alle lokal integrierbaren Funktionen f definiert ist. Wir können also durch die rechte Seite dieser Gleichung eine „Ableitung" betrachten, die im klassischen Differentialkalkül nicht notwendig existiert. Dies ist die Grundidee verallgemeinerter Funktionen. Kehren wir zurück zum Beispiel (Abb. 1.4)

$$\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 4 - \big|\, 2|x| - 2 \,\big| & \text{für } -3 \le x \le 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und verwenden wir erneut die Grundfunktionen ψ_R, so ergibt sich als Approximation der (im klassischen Sinne nicht existenten) „Ableitung" von μ die Funktion $\tilde{\mu}$ mit

$$\tilde{\mu} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto -\int_{-\infty}^{\infty} \mu(\xi)\psi_R'(\xi - x)\, d\xi.$$

Für $R = 0.5$ erhält man die Funktion $\tilde{\mu}$ wie in Abb. 1.7 dargestellt.

Die Funktion $\tilde{\mu}$ existiert auch als Grenzwert für $R \to 0$ (siehe Abb. 1.8). Dabei zeigen die Sterne die Funktionswerte an den Unstetigkeiten an. Nun betrachten wir eine Funktion $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die zwar stetig ist, aber an keiner Stelle differenzierbar (Abb. 1.9). Abb. 1.10 stellt das zugehörige $\tilde{w}$ für $R = 0.01$ dar.

Die Funktion w wird aus Pfaden Brownscher Bewegungen gewonnen, auf die wir noch zurückkommen werden.

Zum Abschluss dieses Abschnitts untersuchen wir noch eine wichtige Eigenschaft der linearen Funktionale F_f. Zu diesem Zweck führen wir einen Konvergenzbegriff für Grundfunktionen ein und definieren die Stetigkeit von Funktionalen.

Definition 1.3 (Konvergenz von Grundfunktionen, stetige Funktionale) *Ist $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Grundfunktionen, so heißt $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ **konvergent** gegen eine Grundfunktion φ, falls es eine beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ gibt mit*

$$\operatorname{supp}(\varphi_i) \subseteq M \quad \textit{für alle} \quad i \in \mathbb{N}$$

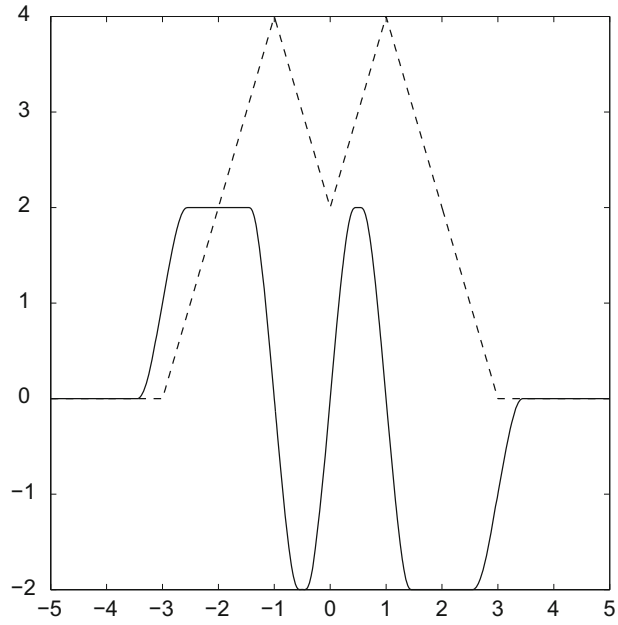


Abb. 1.7 Die Funktion $\tilde{\mu}$ für $R = 0.5$

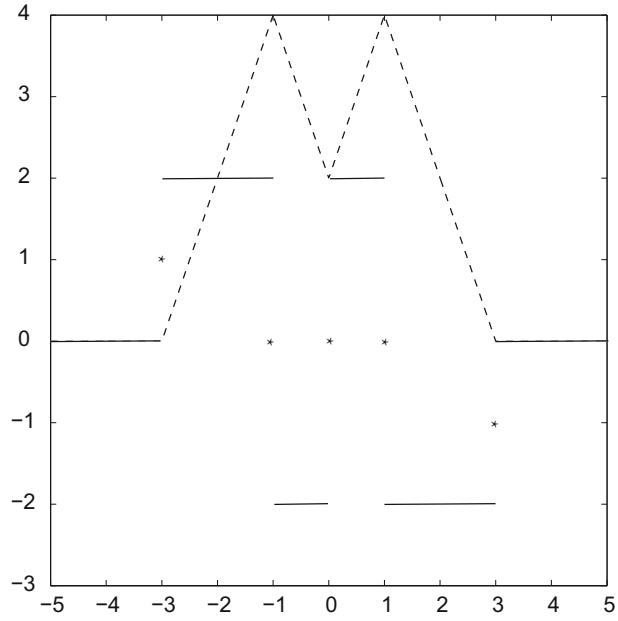


Abb. 1.8 Die Funktion $\tilde{\mu}$ für $R \to 0$



Abb. 1.9 Die Funktion w

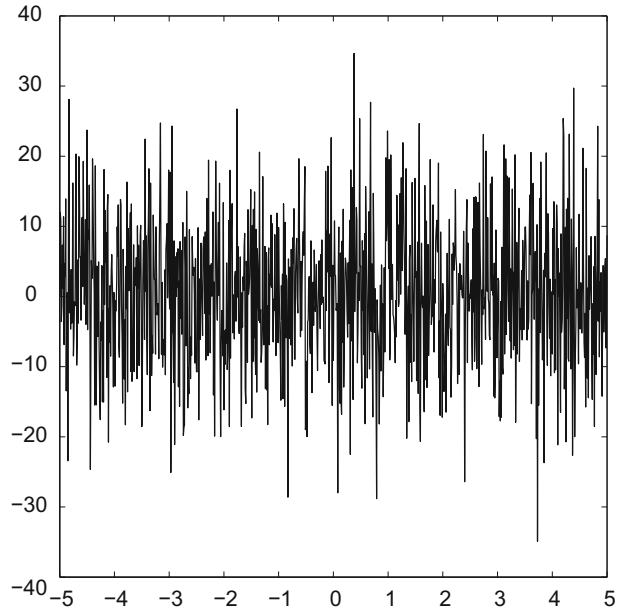


Abb. 1.10 Die Funktion $\tilde{w}$, $R = 0.01$

und falls die Folge $\{\varphi_i - \varphi\}_{i\in\mathbb{N}}$ *und alle Folgen partieller Ableitungen beliebiger Ordnung von* $(\varphi_i - \varphi)$, $i \in \mathbb{N}$, *gleichmäßig im* $\mathbb{R}^n$ *gegen Null konvergieren. Ein Funktional*

$$F : \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

heißt ***stetig****, falls für jede konvergente Folge* $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *von Grundfunktionen (mit Grenzwert* φ*) gilt:*

$$\lim_{i\to\infty} F(\varphi_i) = F(\varphi).$$ ◁

Ist

$$F : \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

linear, so ist F offensichtlich stetig, falls

$$\lim_{i\to\infty} F(\varphi_i) = 0$$

für alle Folgen von Grundfunktionen $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ die gegen

$$\mathbf{0}_{\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \mapsto 0$$

konvergieren. Sei nun $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine derartige Folge, so gibt es ein $\rho > 0$ derart, dass

$$\operatorname{supp}(\varphi_i) \subseteq \operatorname{cl}(K_{\mathbf{0},\rho}) \quad \text{für alle} \quad i \in \mathbb{N}$$

und es gilt:

$$\begin{aligned}\lim_{i\to\infty} |F_f(\varphi_i)| &= \lim_{i\to\infty} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\varphi_i(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \right| = \lim_{i\to\infty} \left| \int_{\operatorname{cl}(K_{\mathbf{0},\rho})} f(\mathbf{x})\varphi_i(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \right| \\ &\le \lim_{i\to\infty} \left(\sup_{\mathbf{x}\in\operatorname{cl}(K_{\mathbf{0},\rho})} \{|\varphi_i(\mathbf{x})|\} \int_{\operatorname{cl}(K_{\mathbf{0},\rho})} |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \right) = 0.\end{aligned}$$

Somit sind die linearen Funktionale F_f stetig.

1.3 Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen)

Jeder lokal integrierbaren Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ haben wir im letzten Abschnitt ein stetiges lineares Funktional F_g zugeordnet. Dabei konnten wir einer lokal integrierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$(F_f)' : \mathfrak{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\, dx$$

ein weiteres stetiges lineares Funktional zuordnen, das als „Ableitung“ von f interpretiert werden kann – insbesondere wenn f im klassischen Differentialkalkül nicht differenzierbar ist. Ist f differenzierbar und ist f' lokal integrierbar, so gilt:

$$(F_f)' = F_{f'}.$$

Diese Beobachtung nehmen wir nun zum Anlass für folgende Definition.

Definition 1.4 ((reguläre) verallgemeinerte Funktion, (reguläre) Distribution) *Sei $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ der Vektorraum aller Grundfunktionen $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ über $\mathbb{R}$, so wird jedes stetige lineare Funktional*

$$F : \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

*als **verallgemeinerte Funktion** bzw. **Distribution** bezeichnet. Gibt es eine lokal integrierbare Funktion f mit*

$$F = F_f,$$

*so wird F als **reguläre verallgemeinerte Funktion** bzw. **reguläre Distribution** bezeichnet.* ◁

Die Menge aller verallgemeinerten Funktionen wird mit $\mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ bezeichnet. Für $n = 1$ ist die Ableitung F' einer verallgemeinerten Funktion F gegeben durch

$$F' : \mathfrak{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto -F(\varphi')$$

und existiert immer. Durch

$$\lambda F : \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto F(\lambda\varphi)\ (= \lambda F(\varphi)), \quad \lambda \in \mathbb{R},\ F \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

und

$$F + G : \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto F(\varphi) + G(\varphi), \quad F, G \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

wird $\mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ zu einem Vektorraum über $\mathbb{R}$ (dem **Dualraum** von $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$). Die wichtigsten Vertreter verallgemeinerter Funktionen, die nicht regulär sind, sind die **Dirac-Distributionen** $\delta_{\mathbf{x_0}}$:

Zu jedem $\mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^n$ betrachtet man die Abbildung

$$\delta_{\mathbf{x_0}} : \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto \varphi(\mathbf{x_0}).$$

Offensichtlich sind die Abbildungen $\delta_{\mathbf{x_0}}$ linear und stetig. Wir zeigen nun indirekt, dass für jedes $\mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^n$ die Distribution $\delta_{\mathbf{x_0}}$ nicht regulär ist. Sei also f eine lokal integrierbare Funktion mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{x_0}) \quad \text{für alle} \quad \varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}),$$

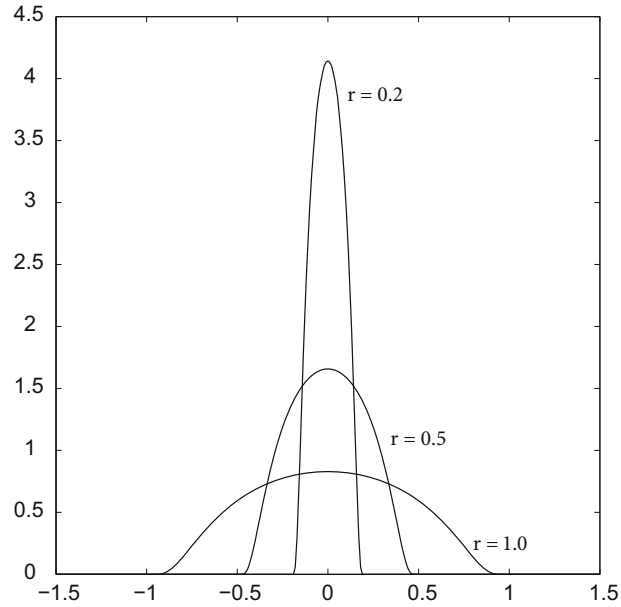


Abb. 1.11 Die Funktion $\psi_{0,r}$ für $r = 1.0, 0.5, 0.2$

so gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\int\limits_{\mathrm{cl}(K_{\mathbf{x_0},\varepsilon})} |f(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} = d < 1.$$

Wählt man nun für φ die bereits bekannten Grundfunktionen

$$\psi_{\mathbf{x_0},\varepsilon} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \boldsymbol{\xi} \mapsto \psi_\varepsilon(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x_0}),$$

so folgt:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})\psi_{\mathbf{x_0},\varepsilon}(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} &\le \sup_{\mathbf{x}\in\mathrm{cl}(K_{\mathbf{x_0},\varepsilon})} \{|\psi_{\mathbf{x_0},\varepsilon}(\mathbf{x})|\} \int\limits_{\mathrm{cl}(K_{\mathbf{x_0},\varepsilon})} |f(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} \\ &= \psi_{\mathbf{x_0},\varepsilon}(\mathbf{x_0}) \cdot d < \psi_{\mathbf{x_0},\varepsilon}(\mathbf{x_0}).\end{aligned}$$

Um sich von den Dirac-Distributionen eine Vorstellung machen zu können, betrachten wir die regulären verallgemeinerten Funktionen $F_{\psi_{\mathbf{x_0},r}}$. Es gilt:

$$F_{\psi_{\mathbf{x_0},r}}(\varphi) = \varphi(\mathbf{x}') \quad \text{mit } \mathbf{x}' \in \mathrm{cl}(K_{\mathbf{x_0},r}) \quad \text{für alle} \quad \varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}).$$

Einer Dirac-Distribution $\delta_{\mathbf{x_0}}$ würde somit die Funktion $\psi_{\mathbf{x_0},r}$ für $r \to 0$ entsprechen (siehe Abb. 1.11).

Die Ableitung einer Dirac-Distribution ist gegeben durch

$$\delta'_{x_0} : \mathfrak{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto -\varphi'(x_0).$$

Für $n = 1$ ergeben sich die Dirac-Distributionen δ_{x_0}, $x_0 \in \mathbb{R}$, als Ableitung regulärer verallgemeinerter Funktionen. Sei

$$\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq x_0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{(Heaviside-Funktion)},$$

so gilt

$$F'_\eta : \mathfrak{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto -\int_{-\infty}^{\infty} \eta(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_{x_0}^{\infty} \varphi'(x)\,dx = \varphi(x_0).$$

Ist eine Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lösung einer speziellen gewöhnlichen Differentialgleichung, so kann wegen

$$(F_y)' = F_{y'}$$

auch die reguläre verallgemeinerte Funktion F_y als Lösung dieser gewöhnlichen Differentialgleichung interpretiert werden. Um nun untersuchen zu können, ob es auch nichtreguläre verallgemeinerte Funktionen gibt, die eine spezielle gewöhnliche Differentialgleichung lösen, ob also durch den Übergang zum Kalkül der Distributionen zusätzliche Lösungen gewonnen werden können, ist eine Integration verallgemeinerter Funktionen zu definieren. Folgt man der gleichen Grundidee wie beim Differenzieren, so erhält man für eine lokal integrierbare Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_{-\infty}^{x} g(\xi)d\xi \quad \text{(Existenz vorausgesetzt)}$$

durch partielle Integration

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{x} g(\xi)\,d\xi \cdot \varphi(x) \right) dx &= \left[G(x) \int_{-\infty}^{x} \varphi(\xi)\,d\xi \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \left(\int_{-\infty}^{x} \varphi(\xi)\,d\xi \right) dx \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{x} \varphi(\xi)\,d\xi \right)}_{=:\hat{\varphi}(x)} dx + c, \end{aligned}$$

wobei die Existenz von

$$c := \lim_{x \to \infty} G(x) \int_{-\infty}^{x} \varphi(\xi)\,d\xi$$

vorausgesetzt ist.

http://www.springer.com/978-3-662-54264-4

Verallgemeinerte stochastische Prozesse
Modellierung und Anwendung technischer Rauschprozesse
Schäffler, S.
2017, XV, 183 S. 73 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-662-54264-4