

1 Einleitung

„Die Logik wird nie mehr dieselbe sein.“

John von Neumann [66]

Die rund 400 km lange Dampferfahrt entlang der Ostseeküste war für Rudolf Carnap, Herbert Feigl, Kurt Gödel und Friedrich Waismann die letzte Etappe ihrer Reise von Wien nach Königsberg. In Swinemünde stießen Kurt Grelling und Hans Hahn hinzu, und gemeinsam gingen die sechs am 4. September 1930 im Königsberger Hafen von Bord [14]. Ihr Ziel war die 2. Tagung für Erkenntnislehre der exakten Wissenschaften, die in der ostpreußischen Metropole vom 5. bis zum 7. September von der Berliner Gesellschaft für Empirische Philosophie abgehalten wurde. Noch deutete an diesem Spätsommertag nichts darauf hin, dass der 7. September 1930 als der Tag in die Wissenschaftsgeschichte eingehen würde, ab dem die Mathematik nicht mehr dieselbe war.

Auf der Agenda standen in jenem Jahr die Grundlagen der Mathematik. Dass die Tagung ein eher philosophisch klingendes Thema zum Inhalt hatte, ist nur im historischen Kontext zu verstehen. In den Dreißigerjahren war die Mathematik noch nicht die isolierte Wissenschaft, wie wir sie heute kennen. Damals waren mathematische und philosophische Fragestellungen fest miteinander verwoben, und entsprechend groß war das Interesse an einem gedanklichen Fundament, auf dem das verästelte mathematische Gebäude solide errichtet werden konnte.

Die Mathematik des beginnenden zwanzigsten Jahrhunderts wurde von drei philosophischen Grundströmungen dominiert, die am ersten Tag der Konferenz in 60-minütigen Vorträgen ausführlich vorgestellt wurden. Als erster trug der deutsche Philosoph Rudolf Carnap über den *Logizismus* vor [8], danach erläuterte der niederländische Mathematiker Arend Heyting den *Intuitionismus* [40], und zu guter Letzt referierte der in Österreich-Ungarn geborene Mathematiker John von Neumann über den *Formalismus*.



John von Neumann
(1903 – 1957)

Aus der heutigen Sicht war der Formalismus die wichtigste der drei philosophischen Grundströmungen, da er eine Vorgehensweise propagierte, die in die gesamte moderne Mathematik hineinwirkt. Die Rede ist von der *axiomatischen Methode*. Deren historische Spur lässt sich bis in das antike Griechenland zurückverfolgen, und genau dort setzen wir unsere Reise fort.

1.1 Die axiomatische Methode



Abb. 1.1 Ein altes Originalfragment von Euklids historischem Werk *Die Elemente*

Die axiomatische Methode basiert auf dem Kerngedanken, die Aussagen einer Wissenschaft logisch deduktiv aus einer Reihe a priori festgelegter Grundannahmen herzuleiten. Wem wir die geistige Urheberschaft dieser mehrere tausend Jahre alten Idee zuschreiben dürfen, ist unter Historikern umstritten. Einige sehen die axiomatische Denkweise durch den griechischen Gelehrten Eudoxos von Knidos begründet [39], andere führen sie auf die Philosophien der großen Denker Platon und Aristoteles zurück [54].

In die Welt getragen wurde die axiomatische Weise durch einen Mann, über dessen Leben wir nur wenig wissen: Euklid von Alexandria. Geboren wurde Euklid um das Jahr 360 v. Chr., und es gilt als wahrscheinlich, dass er zeitweise die Platonische Akademie in Athen besuchte. Seine Beiträge zur griechischen Philosophie waren vergleichsweise gering [3], dafür hatte er auf dem Gebiet der klassischen Mathematik umso Größeres geleistet. Bekannt wurde er durch seine Schrift *Die Elemente*, in denen er die griechische Mathematik der vorangegangenen dreihundert Jahre zusammenfasste. Sein Werk bestand aus 13 Teilen, die wir heute als Kapitel bezeichnen würden und die bei Euklid *Bücher* heißen. Rückblickend sind die *Elemente* die erfolgreichste Schrift der mathematischen Weltliteratur. Sie wurde im Laufe der Zeit in viele Sprachen übersetzt, und auch heute noch erscheinen in regelmäßigen Abständen Neuauflagen.

Das Besondere an diesem Werk ist die methodische Vorgehensweise. Euklid hatte für die Darlegung der Geometrie einen axiomatischen Ansatz gewählt und sämtliche Sätze deduktiv aus einer Reihe a priori festgelegter Grundtatsachen gewonnen. Wir alle stehen heute in der euklidischen Tradition, wenn wir die

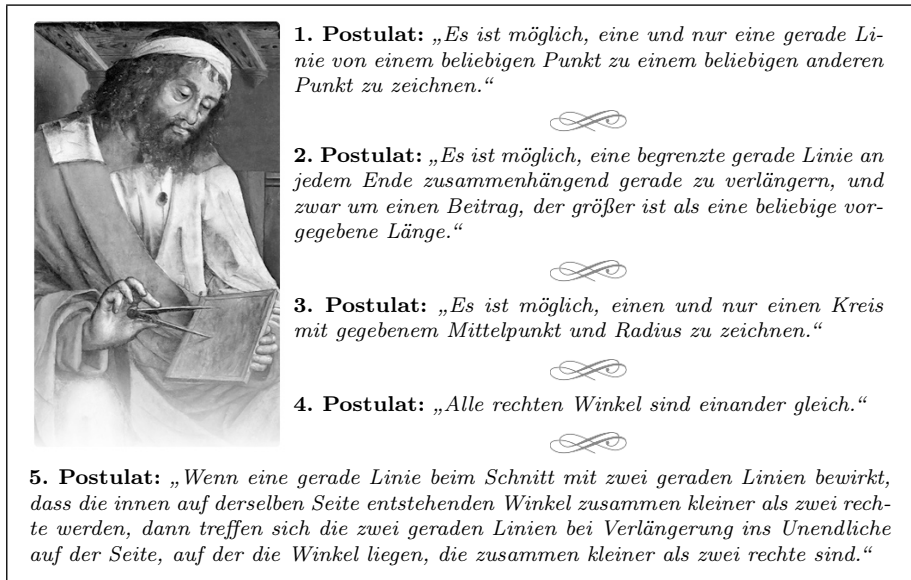


Abb. 1.2 Die fünf Postulate der euklidischen Geometrie (nach [88])

Grundtatsachen einer mathematischen Theorie vorab nennen und uns bei der Ableitung neuer Theoreme an strenge Spielregeln halten. Harro Heuser bezeichnet die axiomatische Methode in [39] als den „*Lebensnerv der Mathematik*“ und den „*größten Beitrag, den das erstaunliche Volk der Griechen der Mathematik zugebracht hat*“. Er übertreibt damit in keiner Weise.

Die berühmtesten Passagen der *Elemente* befinden sich im ersten Buch. Von den zahlreichen Definitionen, Postulaten und Axiomen, die Euklid dort nennt, sind die fünf Postulate in Abbildung 1.2 am wichtigsten. Sie sind das, was wir heute als *Theorieaxiome* bezeichnen.

Betrachten wir Euklids Arbeit aus der modernen Perspektive, so treten zwei Besonderheiten zu Tage:

- Trotz ihres axiomatischen Charakters sind die *Elemente* weniger formal, als wir es von modernen mathematischen Werken gewohnt sind. Es ist richtig, dass Euklid die Sätze der Geometrie deduktiv aus den Axiomen und Postulaten gewinnt, allerdings ist seine Darstellung in vielerlei Hinsicht lückenhaft. An vielen Stellen stützen sich seine logischen Schlüsse auf unausgesprochene Tatsachen, die zwar intuitiv einsichtig sind, aber nicht deduktiv aus den Axiomen hergeleitet werden können. Auch der logische Schlussapparat selbst ist nicht formal definiert.
- In Euklids Werk existiert keine dedizierte Formelsprache. Alle Definitionen, Postulate und Axiome sind, genau wie die daraus abgeleiteten Sätze, umgangssprachlich formuliert. Das heißt, dass die mathematischen Objekte in

derselben Sprache beschrieben sind, in der auch *über* die mathematischen Objekte gesprochen wird.

Euklids axiomatische Methode existierte für lange Zeit in fast unveränderter Form. Mehr als 2000 Jahre verstrichen, bis sie gegen Ende des neunzehnten Jahrhunderts dann urplötzlich aus ihrem Schlaf gerissen wurde. Es war der Beginn einer Metamorphose, die ihr binnen weniger Jahre ein völlig neues Gesicht verlieh.

Maßgeblich vorangetrieben wurde die Entwicklung durch David Hilbert. Der 1862 in Königsberg geborene Mathematiker war ungewöhnlich vielseitig begabt und änderte im Laufe seines Lebens immer wieder seinen Arbeitsschwerpunkt. Wir verdanken ihm nicht nur wichtige Beiträge zur Logik und zu den Grundlagen der Mathematik; auch auf den Gebieten der Analysis, der algebraischen Geometrie, der Zahlentheorie und der theoretischen Physik hat er Maßgebliches geleistet. Sein wissenschaftliches Vermächtnis zählt zu den wertvollsten, die ein einzelner Mathematiker jemals hinterlassen hat.



David Hilbert
(1862 – 1943)

Die meiste Zeit seines Arbeitslebens verbrachte Hilbert an der mathematischen Fakultät in Göttingen. Damit hatte er jenen renommierten Ort zu seiner wissenschaftlichen Heimat gewählt, der schon Gauß, Dirichlet und Riemann als geistige Wirkungsstätte diente. Für die Fakultät war die Berufung Hilberts im Jahr 1895 einen willkommenen Neuanfang. Durch sie konnte die Göttinger Mathematik die alte Strahlkraft wiedergewinnen, die gegen Ende des neunzehnten Jahrhunderts allmählich zu verblassen drohte.

Hilbert war ein Verfechter der axiomatischen Methode und die Galionsfigur der Formalisten. Seinen Standpunkt hat er in zahlreichen Publikationen und Vorträgen dargelegt und dabei stets verständliche Worte gefunden. Hilberts Ausdrucksweise ist an vielen Stellen so klar, dass es auch Jahrzehnte nach seinem Tod eine Freude ist, in seinen Werken zu lesen. An dieser Stelle wollen wir ihm selbst das Wort erteilen und aus einem Vortrag zitieren, den er 1917 vor der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft hielt. Dort erklärte er seinen formalistischen Standpunkt mit den folgenden Worten:

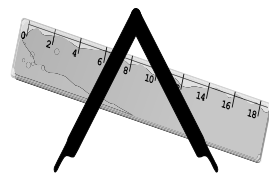
„Wenn wir die Tatsachen eines bestimmten Wissensgebietes zusammenstellen, so bemerken wir bald, daß diese Tatsachen einer Ordnung fähig sind. Diese Ordnung erfolgt jedesmal mit Hilfe eines ge-

wissen Fachwerkes von Begriffen in der Weise, daß dem einzelnen Gegenstande des Wissensgebietes ein Begriff dieses Fachwerkes und jeder Tatsache innerhalb des Wissensgebietes eine logische Beziehung zwischen den Begriffen entspricht. Das Fachwerk der Begriffe ist nichts anderes als die Theorie des Wissensgebietes. [...] Wenn wir eine bestimmte Theorie näher betrachten, so erkennen wir allemal, daß der Konstruktion des Fachwerkes von Begriffen einige wenige ausgezeichnete Sätze des Wissensgebietes zugrunde liegen und diese dann allein ausreichen, um aus ihnen nach logischen Prinzipien das ganze Fachwerk aufzubauen. [...] Diese grundlegenden Sätze können von einem ersten Standpunkte aus als die Axiome der einzelnen Wissensgebiete angesehen werden.“

David Hilbert [41]

Gegen Ende des neunzehnten Jahrhunderts stellte Hilbert eindrucksvoll unter Beweis, wie fruchtbar der Boden ist, den er für die Neubegründung der Mathematik gewählt hatte. In seinem 1899 erschienenen Buch „*Grundlagen der Geometrie*“ führte er ein Axiomensystem ein, aus dem sich alle Sätze der euklidischen Geometrie in einer Präzision ableiten lassen, von der die *Elemente* noch weit entfernt waren. Hilberts axiomatisches System ist dabei wesentlich komplizierter als sein historisches Pendant. Während die Sätze der *Elemente* im Wesentlichen auf 5 Hauptpostulaten fußen, setzt sich das Hilbert'sche System aus insgesamt 21 Axiomen zusammen, die in 5 Gruppen eingeteilt sind. Wir finden darin

- 8 Axiome der Verknüpfung (Gruppe I),
- 4 Axiome der Anordnung (Gruppe II),
- 6 Axiome der Kongruenz (Gruppe III),
- 1 Axiom der Parallelen (Gruppe IV) und
- 2 Axiome der Stetigkeit (Gruppe V).



Es wäre falsch, die Hilbert'schen Axiome lediglich als eine Präzisierung der Euklid'schen Postulate zu betrachten, denn in einem wichtigen Punkt waren sie völlig neu. Über Tausende von Jahren standen Axiome für evidente Grundwahrheit der realen Welt, die nach Aristoteles „*eines Beweises weder fähig noch bedürftig sind*“, und genauso lange Zeit wurden sie verwendet, um mathematischen Objekte zu *definieren*. Im siebten Buch der *Elemente* finden wir z. B. die folgende Definition der natürlichen Zahlen [3]:

1. „*Einheit ist das, wonach jedes Ding eines genannt wird.*“
2. „*Zahl ist die aus Einheiten zusammengesetzte Vielheit.*“

Für Hilbert waren alle Versuche, mathematische Objekte ihrem Wesen nach zu definieren, zum Scheitern verurteilt. Jede Definition führt einen Begriff lediglich auf andere Begriffe zurück, die ihrerseits einer Erklärung bedürfen. In Euklids Axiomen sind dies Begriffe wie „Einheit“, „Ding“ und „Vielheit“. Da wir die Kette von Definitionen nicht in das Unendliche fortsetzen können, sind wir gezwungen, auf einer gewisse Ebene innezuhalten und deren Begriffe als gegeben zu akzeptieren. Aber welche Ebene ist die richtige? Ist es Euklids Ebene der Dinge, Einheiten und Vielheiten oder doch etwa die Ebene der natürlichen Zahlen selbst?

Hilbert löste das Problem, indem er schlicht und einfach darauf verzichtete, die mathematischen Objekte ihrem Wesen nach zu definieren. In seinen Axiomensystemen geht es niemals um die mathematischen Objekte selbst, sondern ausschließlich um die Beziehungen, die zwischen diesen Objekten bestehen, und um die logischen Folgerungen, die sich daraus ergeben. So spielt es in Hilberts Axiomatisierung der Geometrie keine Rolle, was die Begriffe „Punkt“, „Gerade“ und „Fläche“ ihrem Wesen nach bedeuten. Wichtig ist lediglich, dass sie sich untereinander so verhalten, wie es die Axiome vorgeben. Das heißt, dass wir auch dann noch eine Axiomatisierung der euklidischen Geometrie vor uns haben, wenn wir die Begriffe „Punkt“, „Gerade“ und „Fläche“ durch die Begriffe „Bierkrug“, „Bank“ und „Tisch“ ersetzen. Über Hilbert wird erzählt, dass er seinen formalistischen Standpunkt einst mit diesem Beispiel erläutert habe, doch eine gesicherte Quelle haben wir hierfür nicht in Händen.

1.2 Formale Systeme

Mit seinem formalistischen Ansatz etablierte Hilbert eine Sichtweise in der Mathematik, die zwischen einer Objektebene und einer Bedeutungsebene unterscheidet. Um beide klar voneinander zu trennen, wurden für die Objektebene künstliche Formelsprachen erschaffen, die nach präzise festgelegten Bildungsregeln aufgebaut sind. Später gelang es, auch das logische Schließen zu formalisieren, indem die mathematischen Schlussweisen als formale Umformungsregeln in die Objektsprache integriert wurden. Ab diesem Zeitpunkt war es möglich, die Axiome und die daraus abgeleiteten Theoreme als inhaltsleere Symbolketten aufzufassen, die nach festgelegten Regeln umgeformt werden dürfen. In den so entstandenen *formalen Systemen* war die Mathematik zu einem mechanischen Spiel geworden, einem Schachspiel gleich.

Die Formalisierung hatte bewirkt, dass vormalig nur vage definierte Begriffe, wie das Führen eines Beweises, plötzlich mit mathematischer Präzision erfasst werden konnten. Hieraus ist die *Beweistheorie* entstanden, die Hilbert 1923 mit den folgenden Worten umschrieb:

„Alles, was im bisherigen Sinne die Mathematik ausmacht, wird streng formalisiert, so daß die eigentliche Mathematik oder die Mathematik in engerem Sinne zu einem Bestande an Formeln wird. [...] Gewisse Formeln, die als Bausteine des formalen Gebäudes der Mathematik dienen, werden Axiome genannt. Ein Beweis ist eine Figur, die uns als solche anschaulich vorliegen muss; er besteht aus Schlüssen vermöge des Schlußschemas

$$\begin{array}{c} \mathfrak{S} \\ \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{T} \\ \mathfrak{T} \end{array}$$

wo jedesmal jede der Prämissen, d. h. der betreffenden Formeln \mathfrak{S} und $\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{T}$, entweder ein Axiom ist bzw. direkt durch Einsetzung aus einem Axiom entsteht oder mit der Endformel \mathfrak{T} eines Schlusses übereinstimmt, der vorher im Beweis vorkommt bzw. durch Einsetzung aus einer solchen Endformel entsteht. Eine Formel soll beweisbar heißen, wenn sie entweder ein Axiom ist bzw. durch Einsetzen aus einem Axiom entsteht oder die Endformel eines Beweises ist.“

David Hilbert [42]

Die Hilbert'sche Beweistheorie ist für das Verständnis dieses Buches von so zentraler Bedeutung, dass wir sie an zwei konkreten Systemen genauer untersuchen wollen. Beide Beispiele werden in zwei Schritten eingeführt. Im ersten Schritt definieren wir die Syntax des formalen Systems, d. h., wir legen fest, aus welchen Zeichen und nach welchen Regeln die Formeln aufgebaut sind, die innerhalb des Systems existieren. Im zweiten Schritt werden die Axiome und die Schlussregeln eingeführt. Sie definieren, wie aus den Axiomen und dem bereits Bewiesenen neue Theoreme gewonnen werden können.

System B

Unser erstes Beispiel basiert auf einer Kunstsprache, die mit der gewöhnlichen Mathematik nicht viel gemeinsam hat. Als Alphabet legen wir die Menge $\{\square, \blacksquare, (,)\}$ zugrunde und sehen für die Bildung von Formeln die nachstehenden Regeln vor:



Definition 1.1 (Syntax des Systems B)

Die Sprache des Systems B ist folgendermaßen festgelegt:

1. \square und \blacksquare sind Formeln.
2. Sind φ und ψ Formeln, dann ist auch $(\varphi\psi)$ eine Formel.

Tab. 1.1 Axiome und Schlussregeln des formalen Systems B

Axiome des Systems B			
<div>■</div>		(B1)	
Schlussregeln des Systems B			
<div> <div>■</div> <div>(■□)</div> </div>	(S1)	<div> <div>$(\varphi\psi)\chi$</div> <div>$\varphi(\psi\chi)$</div> </div>	(S4)
<div> <div>□</div> <div>(□□)</div> </div>	(S2)	<div> <div>$\varphi(\psi\chi)$</div> <div>$(\varphi\psi)\chi$</div> </div>	(S5)
<div> <div>□</div> <div>(■■)</div> </div>	(S3)	<div> <div>$((\varphi\psi)(\varphi\psi))$</div> <div>□</div> </div>	(S6)

Die Zeichenketten

$$\Box, \blacksquare, (\blacksquare\Box), (\Box\blacksquare), ((\Box\Box)\blacksquare), (\Box(\Box\blacksquare)), ((\Box\Box)(\blacksquare\blacksquare)), ((\blacksquare(\blacksquare\blacksquare))((\Box\Box)\Box))$$

sind Formeln, die nachstehenden dagegen nicht:

$$\Box\blacksquare, (\blacksquare)\Box, \blacksquare\blacksquare\blacksquare, (\Box\blacksquare\Box), (\Box\Box)(\blacksquare)$$

Die Axiome und Schlussregeln des Systems B sind in Tabelle 1.1 zusammengefasst. Mit der Formel \blacksquare existiert in B ein einziges Axiom, d. h., jeder Beweis muss mit dieser Formel beginnen. Für die Ableitung neuer Theoreme stehen uns 6 Regeln zur Verfügung. Die ersten 3 erlauben uns, die Symbole \blacksquare und \Box durch gewisse Symbolkombinationen zu ersetzen, und mit Hilfe der Regeln (S4) und (S5) können wir die Klammern innerhalb einer Formel verschieben. Die drei Platzhalter φ , ψ und χ stehen dabei für beliebige Teilformeln, die vor der Regelanwendung passend substituiert werden müssen. Die Regel (S6) ist die einzige, die uns eine Formel verkürzen lässt. Sie besagt, dass wir zwei geklammerte Teilausdrücke, die sich unmittelbar wiederholen, durch das Symbol \Box ersetzen dürfen. Wir legen fest, dass die Schlussregeln so zu verwenden sind, wie es in sogenannten *Termersetzungssystemen* üblich ist. Dort dürfen Ersetzungen nicht nur auf ganze Formeln, sondern auf beliebige Teilausdrücke einer Formel angewendet werden. Was dies genau bedeutet, klären die folgenden Beispiele:

■ Beispiel 1: Ableitung von $((\blacksquare(\blacksquare\blacksquare))((\Box\Box)\Box))$

$$1. \vdash \blacksquare \quad (B1)$$

$$2. \vdash (\blacksquare\Box) \quad (S1,1)$$

3. $\vdash ((\blacksquare\Box)\Box)$ (S1,2)
4. $\vdash ((\blacksquare(\blacksquare\blacksquare))\Box)$ (S3,3)
5. $\vdash ((\blacksquare(\blacksquare\blacksquare))(\Box\Box))$ (S2,4)
6. $\vdash ((\blacksquare(\blacksquare\blacksquare))((\Box\Box)\Box))$ (S2,5)

■ Beispiel 2: Ableitung von $(\Box\blacksquare)$

1. $\vdash \blacksquare$ (B1)
2. $\vdash (\blacksquare\Box)$ (S1,1)
3. $\vdash (\blacksquare(\blacksquare\blacksquare))$ (S3,2)
4. $\vdash ((\blacksquare\blacksquare)\blacksquare)$ $[\varphi, \psi, \chi = \blacksquare]$ (S5,3)
5. $\vdash (((\blacksquare\Box)\blacksquare)\blacksquare)$ (S1,4)
6. $\vdash (((\blacksquare\Box)(\blacksquare\Box))\blacksquare)$ (S1,5)
7. $\vdash (\Box\blacksquare)$ $[\varphi = \blacksquare, \psi = \Box]$ (S6,6)

Auch wenn das System B meilenweit von einem praktischen Nutzen entfernt ist, lassen sich daran die wesentlichen Bausteine und Ideen der Hilbert'schen Beweistheorie erkennen. Diese fassen wir in einer eigenen Definition zusammen:



Definition 1.2 (Formales System, Kalkül, Beweis)

Ein *formales System* oder *Kalkül* besteht

- aus einer Menge von Axiomen und
- einer Menge von Schlussregeln.

Ein formaler Beweis ist eine Kette von Formeln $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, die nach den folgenden Konstruktionsregeln gebildet wird:

- φ_i ist ein Axiom, oder
- φ_i entsteht aus den vorangegangenen Gliedern der Beweiskette durch die Anwendung einer Schlussregel.

Die letzte Formel dieser Kette ist das bewiesene *Theorem*. Wir schreiben $\vdash \varphi$, um auszudrücken, dass φ ein Theorem ist.

Die Definition klärt auch die Bedeutung des Zeichens \vdash , das in den Ableitungssequenzen am Anfang jeder Zeile auftaucht. Es drückt aus, dass eine Formel beweisbar ist, d. h. durch die wiederholte Anwendung von Schlussregeln aus den Axiomen hergeleitet werden kann.

Behalten Sie stets im Gedächtnis, dass jedes Axiom auch ein Theorem ist, das es auf triviale Weise bewiesen werden kann. Der Beweis besteht aus einer elementarigen Kette, in der das Axiom gleichzeitig Start- und Endformel ist.

Bevor wir das System B hinter uns lassen, wollen wir die Frage aufwerfen, ob auch die Formel (■■■) aus den Axiomen abgeleitet werden kann. Bitte versuchen Sie vor dem Weiterlesen, durch die Konstruktion einer entsprechenden Ableitungssequenz, selbst für Klarheit zu sorgen.

System E

Das nächste System, das wir als Beispiel betrachten, reicht in Form und Struktur schon recht nahe an jene Systeme heran, die Hilbert zur Neubegründung der Mathematik im Sinn hatte.

Die Formeln des Systems E basieren auf dem Alphabet $\{0, s, (,), =, >, \neg, \rightarrow\}$ und werden nach den folgenden Regeln gebildet:



Definition 1.3 (Syntax des Systems E)

Die Sprache des Systems E ist folgendermaßen festgelegt:

- 0 ist ein Term.
- Ist σ ein Term, dann ist es auch $s(\sigma)$.
- Sind σ, τ Terme, dann sind die folgenden Ausdrücke Formeln:

$$(\sigma = \tau), (\sigma > \tau), \neg(\sigma = \tau), \neg(\sigma > \tau)$$
- Sind φ und ψ Formeln, so ist auch $\varphi \rightarrow \psi$ eine Formel.

Anders als das System B unterscheidet das System E zwischen *Termen* und *Formeln*. Jede Zeichenkette der Form

$$0, s(0), s(s(0)), s(s(s(0))), s(s(s(s(0)))) \dots$$

gehört zu den Termen von E, aber nicht zu den Formeln. Letztere entstehen erst dann, wenn zwei Terme mit Symbolen aus der Menge $\{=, >, \neg\}$ kombiniert werden. Unter anderem lassen sich über die vereinbarten Syntaxregeln die folgenden Formeln konstruieren:

$$(0 = 0), (0 > 0), \neg(0 = 0), \neg(0 > 0), (s(0) = s(0)), (0 = 0) \rightarrow (0 > 0)$$

Die Axiome und Schlussregeln des Systems E sind in Tabelle 1.2 zusammengefasst. Der Kalkül besitzt 6 *Axiomenschemata*, aus denen die Axiome durch die Ersetzung der beiden Platzhalter σ und τ gewonnen werden. Die Platzhalter stehen für beliebige Terme, so dass wir aus jedem Schema unendlich viele verschiedene Axiome erzeugen können.

Tab. 1.2 Axiome und Schlussregeln des formalen Systems E

Axiome (Kalkül E)			
$(\sigma = \sigma)$	(A1)	$(\sigma > \tau) \rightarrow \neg(\sigma = \tau)$	(A4)
$(\sigma = \sigma) \rightarrow (\mathbf{s}(\sigma) > \sigma)$	(A2)	$(\sigma > \tau) \rightarrow \neg(\tau = \sigma)$	(A5)
$(\sigma > \tau) \rightarrow (\mathbf{s}(\sigma) > \tau)$	(A3)	$(\sigma > \tau) \rightarrow \neg(\tau > \sigma)$	(A6)
Schlussregeln (Kalkül E)			
$\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$			(MP)

Der logische Schlussapparat von E kommt vergleichsweise mager daher. Die einzige Schlussregel, die uns für die Ableitung neuer Theoreme zur Verfügung steht, ist die *Abtrennungsregel* (*Modus ponens*, kurz MP). Sie ist die klassische Schlussregel der Logik und besagt in Worten, dass ψ wahr ist, wenn φ wahr ist und ψ aus φ gefolgert werden kann.

Die folgenden Beispiele demonstrieren die Ableitung neuer Theoreme:

■ Beispiel 1: Ableitung von $(\mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(0))) > \mathbf{s}(0))$

1. $\vdash (\mathbf{s}(0) = \mathbf{s}(0))$ $[\sigma = \mathbf{s}(0)]$ (A1)
2. $\vdash (\mathbf{s}(0) = \mathbf{s}(0)) \rightarrow (\mathbf{s}(\mathbf{s}(0)) > \mathbf{s}(0))$ $[\sigma = \mathbf{s}(0)]$ (A2)
3. $\vdash (\mathbf{s}(\mathbf{s}(0)) > \mathbf{s}(0))$ (MP, 1,2)
4. $\vdash (\mathbf{s}(\mathbf{s}(0)) > \mathbf{s}(0)) \rightarrow (\mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(0))) > \mathbf{s}(0))$ $[\sigma = \mathbf{s}(\mathbf{s}(0)), \tau = \mathbf{s}(0)]$ (A3)
5. $\vdash (\mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(0))) > \mathbf{s}(0))$ (MP, 3,4)

■ Beispiel 2: Ableitung von $\neg(\mathbf{s}(\mathbf{s}(0)) = \mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(0))))$

1. $\vdash (\mathbf{s}(\mathbf{s}(0)) = \mathbf{s}(\mathbf{s}(0)))$ $[\sigma = \mathbf{s}(\mathbf{s}(0))]$ (A1)
2. $\vdash (\mathbf{s}(\mathbf{s}(0)) = \mathbf{s}(\mathbf{s}(0))) \rightarrow (\mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(0))) > \mathbf{s}(\mathbf{s}(0)))$ $[\sigma = \mathbf{s}(\mathbf{s}(0))]$ (A2)
3. $\vdash (\mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(0))) > \mathbf{s}(\mathbf{s}(0)))$ (MP, 1,2)
4. $\vdash (\mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(0))) > \mathbf{s}(\mathbf{s}(0))) \rightarrow \neg(\mathbf{s}(\mathbf{s}(0)) = \mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(0))))$ (A5)
5. $\vdash \neg(\mathbf{s}(\mathbf{s}(0)) = \mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(0))))$ $[\sigma = \mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(0))), \tau = \mathbf{s}(\mathbf{s}(0))]$
(MP, 3,4)

Bis jetzt haben wir das System E ausschließlich auf der syntaktischen Ebene betrachtet, in der die Theoreme eines Kalküls nichts weiter als inhaltsleere Zeichenketten sind, die sich nach festgelegten Regeln mechanisch manipulieren lassen.

Wir werden den einzelnen Formelbestandteilen nun eine inhaltliche Bedeutung verleihen und die syntaktische Ebene hierdurch um eine semantische Ebene ergänzen. Damit dies möglichst einfach gelingt, vereinbaren wir vorab die nachstehende Schreibweise:

$$\bar{n} := \underbrace{s(s(\dots s(0) \dots))}_{n\text{-mal}} \quad (1.1)$$

Die bewiesenen Theoreme können wir damit sehr kompakt formulieren:

$$\begin{aligned} (\bar{3} > \bar{1}) &\text{ entspricht } (s(s(s(0))) > s(0)) \\ \neg(\bar{2} = \bar{3}) &\text{ entspricht } \neg(s(s(0)) = s(s(s(0)))) \end{aligned}$$

Jetzt legen wir die inhaltliche Bedeutung der Formeln folgendermaßen fest:

$$\begin{aligned} \bar{n} &\text{ steht für die Zahl } n \in \mathbb{N} \\ (\bar{n} = \bar{m}) &\text{ steht für die Aussage } n = m \\ (\bar{n} > \bar{m}) &\text{ steht für die Aussage } n > m \\ \neg(\bar{n} = \bar{m}) &\text{ steht für die Aussage } n \neq m \\ \neg(\bar{n} > \bar{m}) &\text{ steht für die Aussage } n \leq m \\ \varphi \rightarrow \psi &\text{ steht für die Aussage „Aus } \varphi \text{ folgt } \psi\text{“} \end{aligned}$$

Erst auf der Bedeutungsebene sind wir in der Lage, von wahren und von falschen Aussagen zu sprechen. Symbolisch verwenden wir hierfür das Zeichen \models , in Anlehnung an das bereits eingeführte Zeichen \vdash :



Definition 1.4 (Beweisbarkeitsrelation, Modellrelation)

Die *Beweisbarkeitsrelation* \vdash hat die folgende Bedeutung:

$$\begin{aligned} \vdash \varphi &:\Leftrightarrow \text{Die Formel } \varphi \text{ ist innerhalb des Kalküls beweisbar} \\ \nvdash \varphi &:\Leftrightarrow \text{Die Formel } \varphi \text{ ist nicht innerhalb des Kalküls beweisbar} \end{aligned}$$

Die *Modellrelation* \models hat die folgende Bedeutung:

$$\begin{aligned} \models \varphi &:\Leftrightarrow \text{Die inhaltliche Aussage der Formel } \varphi \text{ ist wahr} \\ \not\models \varphi &:\Leftrightarrow \text{Die inhaltliche Aussage der Formel } \varphi \text{ ist falsch} \end{aligned}$$

	Wahre Formeln ($\models \varphi$)	Falsche Formeln ($\not\models \varphi$)
Beweisbare Formeln ($\vdash \varphi$)	$(0 = 0)$ $(s(0) = s(0))$ $(s(0) > 0)$ $(s(s(0)) > 0)$ $(s(s(s(0)))) > s(0))$ $\neg(s(s(0)) = s(s(s(0))))$ \dots	
Unbeweisbare Formeln ($\nvdash \varphi$)	$\neg(0 > 0)$ $\neg(s(0) > s(0))$ $\neg(s(s(0)) > s(s(0)))$ $\neg(s(s(s(0)))) > s(s(s(0))))$ $\neg(s(s(s(s(0)))) > s(s(s(s(0))))))$ \dots	$\neg(0 = 0)$ $\neg(s(0) = s(0))$ $\neg(s(0) > 0)$ $\neg(s(s(0)) > 0)$ $\neg(s(s(s(0)))) > s(0))$ $(s(s(0)) = s(s(s(0))))$ \dots

Abb. 1.3 Quadrantendarstellung für das formale System E

Behalten sie stets im Gedächtnis, dass die Relationen \vdash und \models davon abhängen, welches formale System bzw. welche *Interpretation* wir zugrunde legen. Eine Formel, die in einem bestimmten formalen System beweisbar ist, kann in einem anderen unbeweisbar sein, genauso wie eine wahre Formel zu einer falschen werden kann, wenn wir die inhaltlichen Bedeutungen ihrer Symbole verändern. Kurzum: Wahrheit und Beweisbarkeit sind zwei orthogonale Begriffe, die durch die Wahl des formalen Systems und durch die inhaltliche Interpretation der Formelsymbole unabhängig voneinander beeinflusst werden. Für jede Formel φ ergibt sich daher eine von vier Möglichkeiten:

- φ ist inhaltlich wahr und formal beweisbar ($\models \varphi$ und $\vdash \varphi$)
- φ ist inhaltlich wahr, aber formal unbeweisbar ($\models \varphi$ und $\nvdash \varphi$)
- φ ist inhaltlich falsch, aber formal beweisbar ($\not\models \varphi$ und $\vdash \varphi$)
- φ ist inhaltlich falsch und formal unbeweisbar ($\not\models \varphi$ und $\nvdash \varphi$)

Die Situation lässt sich graphisch veranschaulichen, wenn wir die Formeln, wie in Abbildung 1.3 geschehen, auf vier Quadranten verteilen. In der Abbildung sind diese so angeordnet, dass sich alle beweisbaren Formeln in den beiden

oberen und alle unbeweisbaren in den beiden unteren Quadranten befinden. Ob eine Formel oben oder unten einzutragen ist, wird also ausschließlich durch die Axiome und die Schlussregeln bestimmt. In analoger Weise beeinflusst die Wahl der Interpretation, ob eine Formel links oder rechts erscheint. Die wahren Formeln befinden sich in den beiden linken und die falschen Formeln in den beiden rechten Quadranten.

1.3 Metamathematik

Formale Systeme erlauben es, Mathematik in höchster Präzision zu betreiben. Beweise werden durch das strikte Regelwerk mechanisch überprüfbar und auf diese Weise von sämtlichen Interpretationsspielräumen befreit. Darüber hinaus bergen formale Systeme eine Besonderheit in sich, die uns einen völlig neuen Blick auf die mathematische Methode werfen lässt: Wir können sie, aufgrund ihres streng formalen Charakters, selbst zum Gegenstand mathematischer Untersuchungen machen. Das bedeutet, dass wir die uns bekannten mathematischen Mittel einsetzen können, um Aussagen *über* ein formales Systems zu beweisen. Auf diese Weise entsteht eine Metamathematik, die neben der gewöhnlichen Mathematik existiert.

Erinnern Sie sich an die Aufgabe, die wir am Ende der Besprechung des Systems B gestellt hatten? Konkret ging es um die Frage, ob die Formel $(\blacksquare\blacksquare)$ ein Theorem von B ist. Was wir hier vor uns haben, ist eine klassische Fragestellung der Metamathematik, da sie eine Aussage *über* das System tätigt und nicht *innerhalb* von B beantwortet werden kann. In der Sprache von B hätten wir nicht einmal die nötigen Mittel zur Verfügung, um diese Frage überhaupt zu formulieren.

Metatheoretisch lässt sich die Frage mit einem verblüffend einfachen Argument beantworten, das auf der folgenden Beobachtung beruht:



*In jedem Theorem von B
kommt das Symbol \blacksquare ungerade häufig vor.*

Ein Blick auf die Axiome und die Schlussregeln reicht aus, um die Eigenschaft zu verifizieren. Das einzige Axiom \blacksquare besitzt eine ungerade Anzahl an \blacksquare 's, und die Schlussregeln sind so aufgebaut, dass sich diese Eigenschaft von der Prämisse auf die Konklusion vererbt. Die Formel $(\blacksquare\blacksquare)$ besitzt aber eine gerade Anzahl \blacksquare 's und kann deshalb niemals die Endformel einer Beweiskette sein. Damit haben wir erfolgreich einen ersten metamathematischen Beweis geführt.

Hilbert erklärte den Sinn einer Metamathematik folgendermaßen:

„Zu der eigentlichen so formalisierten Mathematik kommt eine gewissermaßen neue Mathematik, eine Metamathematik, die zur Sicherung jener notwendig ist, in der – im Gegensatz zu den rein formalen Schlußweisen der eigentlichen Mathematik – das inhaltliche Schließen zur Anwendung kommt, aber lediglich zum Nachweis der Widerspruchsfreiheit der Axiome. In dieser Metamathematik wird mit den Beweisen der eigentlichen Mathematik operiert, und diese letzteren bilden selbst den Gegenstand der inhaltlichen Untersuchung.“

David Hilbert [42]

Die von Hilbert angesprochene Widerspruchsfreiheit ist eine von vier Fragestellungen, die in der Metamathematik von besonderem Interesse sind.



Definition 1.5 (Metaeigenschaften formaler Systeme)

- **Widerspruchsfreiheit** (☞ $\not\vdash \varphi$ oder $\not\vdash \neg\varphi$)
Ein formales System heißt *widerspruchsfrei*, wenn eine Formel niemals gleichzeitig mit ihrer Negation aus den Axiomen abgeleitet werden kann.
- **Negationsvollständigkeit** (☞ $\vdash \varphi$ oder $\vdash \neg\varphi$)
Ein formales System heißt *negationsvollständig*, wenn für jede Formel die Formel selbst oder deren Negation aus den Axiomen abgeleitet werden kann.
- **Korrektheit** (☞ Aus $\vdash \varphi$ folgt $\models \varphi$)
Ein formales System heißt *korrekt*, wenn jede Formel, die innerhalb des formalen Systems bewiesen werden kann, inhaltlich wahr ist.
- **Vollständigkeit** (☞ Aus $\models \varphi$ folgt $\vdash \varphi$)
Ein formales System heißt *vollständig*, wenn jede Formel, die inhaltlich wahr ist, auch innerhalb des formalen Systems bewiesen werden kann.

Die Widerspruchsfreiheit und die Negationsvollständigkeit sind Begriffe, die ausschließlich die syntaktische Ebene eines formalen Systems berühren; sie machen von dem Begriff der Wahrheit keinen Gebrauch und sind auch dann sinntragend, wenn die Formelsymbole uninterpretiert bleiben. Das bedeutet, dass wir diese Begriffe auf jedes formale System anwenden können, in dem sich Formeln auf der symbolischen Ebene negieren lassen. In nahezu allen der heute gebräuchlichen Logiken wird hierfür das Symbol \neg verwendet, das wir in weiser Voraussicht auch schon in das Beispielsystem E integriert hatten. In unserem ersten Beispiel, dem System B, ist die Negation nicht verankert, so dass die Frage nach der Widerspruchsfreiheit oder der Negationsvollständigkeit dort keinen Sinn ergibt.

Die Korrektheit und die Vollständigkeit sind Begriffe, die einen Zusammenhang zwischen der syntaktischen und der semantischen Ebene herstellen. Folgerichtig ergeben sie nur dann einen Sinn, wenn sich die Symbole eines formalen Systems so interpretieren lassen, dass jede Formel für eine inhaltlich wahre oder eine inhaltlich falsche Aussage steht.

Beide Eigenschaften können grafisch gedeutet werden, wenn wir die Quadrantendarstellung in Abbildung 1.3 zugrunde legen. Ist ein System korrekt, so ist keine inhaltlich falsche Formel beweisbar und der obere rechte Quadrant leer. Ist ein System vollständig, so ist ausnahmslos jede inhaltlich wahre Formel beweisbar und damit der untere linke Quadrant ohne Einträge.

1.3.1 Widerspruchsfreiheit

Für die Durchführung von Widerspruchsfreiheitsbeweisen haben sich zwei Ansätze etabliert. Beide werden wir jetzt nacheinander verwenden, um die Widerspruchsfreiheit des Systems E zu zeigen.

Beweis der Widerspruchsfreiheit auf der Bedeutungsebene

Eine Möglichkeit, die Widerspruchsfreiheit eines formalen Systems zu beweisen, ist die Angabe eines *Modells*. In der Logik wird hierunter eine Interpretation verstanden, die alle Theoreme zu inhaltlich wahren Aussagen werden lässt. Ein Modell für das System E haben wir bereits weiter oben konstruiert, als wir die Terme 0 , $s(0)$, $s(s(0))$, ... mit den natürlichen Zahlen identifiziert und die Symbole $=$ und $>$ mit ihrer gewöhnlichen mathematischen Bedeutung versehen haben. Auf diese Weise wird jedes Axiom zu einer wahren Aussage der Zahlentheorie, und die Anwendung der Modus-Ponens-Schlussregel vererbt die Wahrheit der Prämissen auf die Konklusion. Das bedeutet, dass sämtliche Theoreme von E wahre Aussagen der Zahlentheorie sind.

Jetzt kommt der entscheidende Schritt: Gäbe es tatsächlich eine Formel φ , so dass sich neben φ auch $\neg\varphi$ aus den Axiomen ableiten ließe, so würde ein Widerspruch im Bereich der natürlichen Zahlen sichtbar werden (Abbildung 1.4). Im Umkehrschluss gilt: Vertrauen wir der Arithmetik, so folgt daraus die Widerspruchsfreiheit des formalen Systems E.

Auf die gleiche Weise hatte Hilbert die Widerspruchsfreiheit seines Axiomensystems der euklidischen Geometrie bewiesen. Hierzu konstruierte er einen speziellen Zahlenbereich, so dass jede beweisbare Beziehung zwischen den geometrischen Objekten einer beweisbaren Beziehung zwischen den Elementen dieses Zahlenbereichs entspricht und umgekehrt. Folgerichtig würde jeder Widerspruch, der sich aus den geometrischen Axiomen ergibt, als Widerspruch in der Arithmetik sichtbar werden.

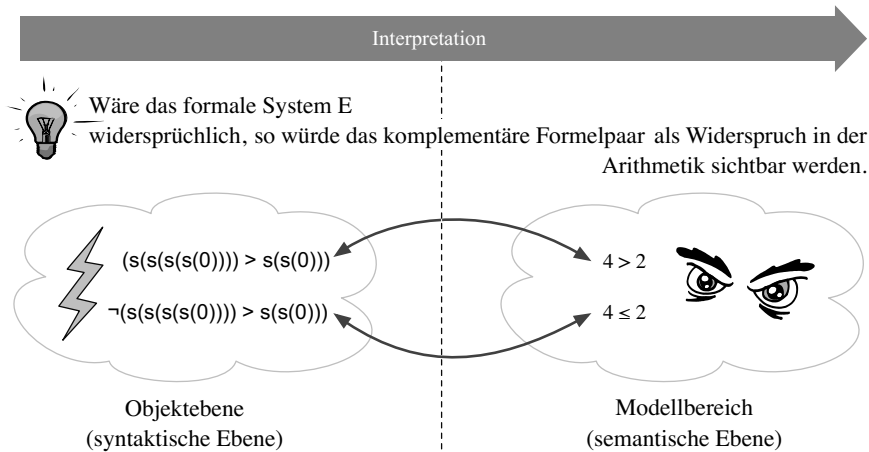


Abb. 1.4 Ein relativer Widerspruchsfreiheitsbeweis für den Beispieldkalkül E. Durch die Angabe eines Modells überträgt sich die Widerspruchsfreiheit des Modellbereichs auf die Objektebene.

Es ist ein wesentlicher Punkt dieser Methode, dass die Widerspruchsfreiheit eines formalen Systems hier nicht in einem absoluten Sinne bewiesen wird. Unser Beweis vertraut darauf, dass die Arithmetik frei von Widersprüchen ist, und überträgt diese Eigenschaft auf das System E. Wir haben also lediglich einen *relativen* Widerspruchsfreiheitsbeweis geführt.

Ist ein modelltheoretischer Beweis für das System E überhaupt sinnvoll? Ein gezielter Blick auf dessen Axiome und Schlussregeln macht deutlich, dass E nichts weiter als ein kleiner Ausschnitt der Arithmetik ist, mit dem wir elementare Aussagen über die Anordnung der natürlichen Zahlen beweisen können. Offensichtlich sichern wir unseren Widerspruchsfreiheitsbeweis mit einem Argument ab, das sich auf die Widerspruchsfreiheit eines komplizierteren und damit potenziell unsichereren Systems beruft.

In Wirklichkeit ist die Situation noch prekärer. Würden wir nämlich versuchen, unsere modelltheoretischen Argumente zu formalisieren, so müssten wir, bewusst oder unbewusst, auf Wissen und Schlussweisen der Mengenlehre zurückgreifen. In Kapitel 2 werden Sie sehen, dass wir dabei auf weit weniger stabilem Boden stehen, als es der erste Anschein vermuten lässt.

Wenn uns also ein relativer Widerspruchsfreiheitsbeweis zur Absicherung des Systems E nicht weiterbringt, kann dies nur eines bedeuten: Wir müssen einen Weg finden, um die Widerspruchsfreiheit in einem absoluten Sinne zu beweisen. Tatsächlich ist ein solcher Beweis für das System E gar nicht schwer. ...

Beweis der Widerspruchsfreiheit auf der Objektebene

Wir wollen versuchen, die Widerspruchsfreiheit von E zu beweisen, ohne einen Bezug auf Interpretationen, Modelle oder andere Begriffe der Bedeutungsebene zu nehmen. Hierzu führen wir einen klassischen Widerspruchsbeweis und nehmen an, für eine Formel φ sei sowohl φ als auch $\neg\varphi$ aus den Axiomen ableitbar. Die folgenden Überlegungen werden zeigen, dass diese Annahme mit dem Aufbau der Axiome und der Schlussregel unvereinbar ist. Da sich in der Sprache von E keine Formeln der Form $\neg(\varphi \rightarrow \psi)$ bilden lassen, genügt es, zwei Fälle zu unterscheiden:

■ **1. Fall: Angenommen, es gelte $\vdash (\sigma = \tau)$ und $\vdash \neg(\sigma = \tau)$**

Eine Formel der Bauart $(\sigma = \tau)$ kann nur durch die Instanziierung des Axiomenschemas (A1) entstanden sein. Dann sind aber σ und τ identische Terme, so dass wir lediglich die Frage klären müssen, ob eine Formel der Form

$$\neg(\sigma = \sigma) \quad (1.2)$$

aus den Axiomen abgeleitet werden kann. Die Modus-Ponens-Schlussregel kann diese Formel nur hervorbringen, wenn in der Beweiskette an früherer Stelle die Formel

$$(\sigma > \sigma) \quad (1.3)$$

vorkommt; nur dann wäre die Formel (1.2) über eine Instanz von (A4) oder (A5) ableitbar. Eine Formel der Bauart (1.3) kann nur über das Axiomenschema (A3) entstanden sein. Das bedeutet, dass eine Formel der Form

$$(\sigma > s(\sigma)) \quad (1.4)$$

an früherer Stelle in der Beweiskette vorkommen muss. Für den Beweis von (1.4) benötigen wir ein Theorem der Form $(\sigma > s(s(\sigma)))$, und diese Argumentation können wir beliebig oft wiederholen. Für jede Zahl n müsste die Formel

$$(\sigma > \underbrace{s(\dots s(\sigma) \dots)}_{n\text{-mal}}) \quad (1.5)$$

bereits bewiesen sein, im Widerspruch zur Endlichkeit einer Beweiskette.

■ **2. Fall: Angenommen, es gelte $\vdash (\sigma > \tau)$ und $\vdash \neg(\sigma > \tau)$**

Die Formel $\neg(\sigma > \tau)$ lässt sich nur über das Axiomenschema (A6) und die Formel $(\tau > \sigma)$ herleiten. Das bedeutet, dass neben $(\sigma > \tau)$ auch $(\tau > \sigma)$ in der Beweiskette vorkommen muss. Ist $(\sigma = \tau)$, so sind diese Formeln mit (1.3) identisch und nach dem oben Gesagten unbeweisbar. Ist $(\sigma \neq \tau)$, so hat eine der beiden Formeln die Gestalt (1.5) und ist nach dem oben Gesagten ebenfalls nicht beweisbar.

Damit ist die Widerspruchsfreiheit von E bewiesen. \square

Tatsächlich gilt in unserem Beispielkalkül noch mehr: Alle beweisbaren Formeln sind inhaltlich wahr, d. h., der Kalkül E ist nicht nur widerspruchsfrei, sondern auch korrekt.

1.3.2 Vollständigkeit

Nachdem die Widerspruchsfreiheit sichergestellt ist, wollen wir in diesem Abschnitt klären, ob das System E auch vollständig ist. Hierzu werfen wir einen erneuten Blick auf Abbildung 1.3. Die Einträge im linken unteren Quadranten deuten bereits darauf hin, dass E unvollständig ist, denn es existieren wahre Formeln, die nicht aus den Axiomen abgeleitet werden können. Dass die angegebenen Formeln tatsächlich unbeweisbar sind, lässt sich leicht einsehen. Eine Formel der Bauart

$$\neg(\sigma > \sigma) \quad (1.6)$$

lässt sich nämlich nur dann ableiten, wenn an früherer Stelle in der Beweiskette die Formel $(\sigma > \sigma)$ vorkommt, und diese ist in E nach dem oben Gesagten unbeweisbar.

Das Problem lässt sich beseitigen, indem das Schema

$$(\sigma = \tau) \rightarrow \neg(\tau > \sigma) \quad (A7)$$

zu den Axiomen von E hinzugefügt wird. Da die Formel $(\sigma = \sigma)$ für jeden Term σ ein Theorem ist, sind jetzt alle Formeln der Bauart (1.6) beweisbar.

Vollständig ist das erweiterte System dennoch nicht, da mit

$$(0 = 0) \rightarrow (0 = 0)$$

immer noch eine Formel existiert, die inhaltlich wahr ist, aber nicht aus den Axiomen hergeleitet werden kann.

Korrekte und zugleich vollständige Kalküle sind der Traum vieler Mathematiker. Jede wahre mathematische Aussage, die sich in der Kunstsprache des Kalküls formulieren lässt, ist auf formalem Weg beweisbar, und auf der anderen Seite ist sichergestellt, dass sich niemals eine inhaltlich falsche Aussage aus den Axiomen ableiten lässt. In solchen Systemen befinden sich die Begriffe der Beweisbarkeit und der Wahrheit in harmonischer Kongruenz. Dort, und nur dort, sind die beweisbaren Formeln die wahren Aussagen.

Die Idee, Begriffe und Gedanken auf diese Weise mit den Objekten einer formalen Sprache zu verschmelzen, reicht in das siebzehnte Jahrhundert zurück. Sie findet ihre Personifizierung in Gottfried Wilhelm Leibniz, einem der großen Denker der frühen Neuzeit. Leibniz wurde 1646 in Leipzig geboren und zählte

zu den außergewöhnlichsten Gelehrten des ausgehenden siebzehnten und beginnenden achtzehnten Jahrhunderts.

Es wäre kleindenkend, seine Person auf einen Wissenschaftler, einen Philosophen oder einen Rechtskundler zu reduzieren. In all diesen Bereichen hat er Maßgebliches geleistet, und so sprengt sein Lebenswerk die üblichen Kategorien. Wir wollen uns daher all Jenen anschließen, die Leibniz, mangels begrifflicher Alternativen, als Universalgelehrten bezeichnen. Vielsagend ist dieser Titel nicht, doch keiner könnte ehrender sein.

Leibniz baute seine Anschauung auf mehreren „großen Prinzipien“ auf, von denen das *Prinzip des Widerspruchs* und das *Prinzip des zureichenden Grundes* die wichtigsten waren. Letzteres bringt die Überzeugung zum Ausdruck, dass jeder Wirkung eine Ursache vorausgeht und nichts in der Welt ohne Grund geschieht. In Leibniz' Worten ist es das Prinzip,

„[...] *kraft dessen wir schließen, dass keine Tatsache wahr oder wirklich, kein Satz wahrhaft sein könne, ohne dass ein hinreichender Grund vorhanden ist, warum es sich so und nicht anders verhalte, obgleich diese Gründe sehr häufig uns weder sämtlich bekannt sind, noch es jemals werden.*“ [60]

„[...] *en vertu du quel nous considérons qu'aucun fait ne sauroit se trouver vray ou existent, aucune Enonciation veritable, sans qu'il y ait une raison suffisante, pour quoy il en soit ainsi, et non pas autrement; quoyque ces raisons le plus souvent ne puissent point nous estre connues.*“ [61]

Leibniz hatte eine universelle Sprache im Sinn, die ausdrucksstark genug ist, um als Projektionsmedium der menschlichen Erkenntnis zu dienen. Diese *Characteristica universalis* sollte eine symbolische Sprache sein, ganz ähnlich der, die wir heute in der Mathematik unser Eigen nennen. Innerhalb dieser Sprache wollte er die Objekte und Konzepte der realen Welt so codieren, dass die Beziehungen, die zwischen den Objekten und den Konzepten bestehen, auf der syntaktischen Ebene sichtbar werden.

Leibniz glaubte fest daran, dass der Wahrheitswert jeder formalisierten Aussage ausgerechnet werden könne. Dies sollte mit dem *Calculus ratiocinator* geschehen, einem festen Regelkatalog, der nach ähnlichen Prinzipien funktioniert wie die algorithmisch arbeitenden Computer unserer Tage (Abbildung 1.5). Ein solches Regelwerk in der Hinterhand ließe uns allen offenen Problemen mit erhobenem Haupt entgegentreten. Wir wären bereit, auf



Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646 – 1716)

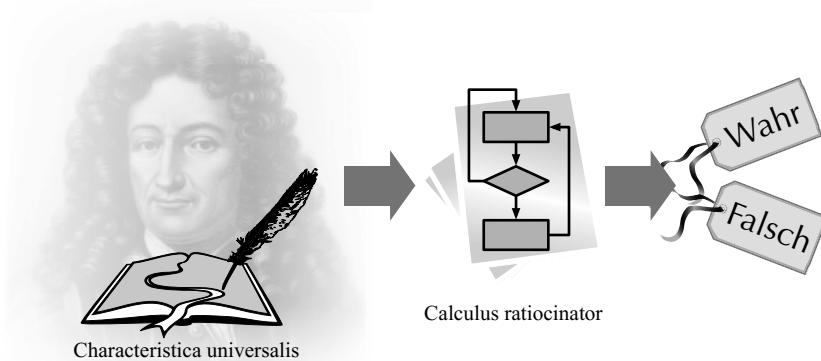


Abb. 1.5 Zeitlebens war Leibniz von der Existenz eines *Calculus ratiocinator* überzeugt, mit dem sich der Wahrheitsgehalt einer formalisierten Aussage im Sinne einer mechanischen Prozedur systematisch ausrechnen ließe.

jede von ihnen eine Antwort zu geben, die mit dem berühmten Leibniz'schen Ausspruch beginnt: „*Calculemus – Lasst uns rechnen!*“

Mit seiner visionären Idee war Leibniz seiner Zeit weit voraus, und bis zu seinem Tod gelang es weder ihm noch einem anderen Gelehrten, sie in die Realität umzusetzen. Doch dann, mehr als 200 Jahre später, mehrten sich die Anzeichen für eine beginnende Inkarnation. Es war der Ausbau der axiomatischen Methode durch Hilbert, der eine *Characteristica universalis* – zumindest für den Bereich der Mathematik – in greifbare Nähe zu rücken schien.

1.3.3 Hilbert-Programm

Mit dem Ausbau der axiomatischen Methode verfolgte Hilbert ein ganz praktisches Interesse. Er sah darin die Chance, einen Streit zu beenden, der zu Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts zu kontroversen Diskussionen in der Frage führte, welche Begriffe und Methoden in der Mathematik erlaubt seien und welche nicht.

Dem begnadeten Zahlentheoretiker Leopold Kronecker wird der Ausspruch zugeschrieben, die „*natürlichen Zahlen habe der liebe Gott gemacht, alles andere sei Menschenwerk*“ [90]. Kronecker war einer der prominenten und zugleich verbissensten Gegner einer neuen Mathematik, die sein Schüler Georg Cantor gegen Ende des neunzehnten Jahrhunderts ins Leben rief. Die von Cantor konstruierten Mengen – damals hießen sie *Mannigfaltigkeiten* – bedienten sich des Begriffs des Unendlichen in einer für damalige Verhältnisse respektlosen Art und Weise. Indem er unendliche Mengen von Häufungspunkten wieder und wieder zu immer neuen Mengen zusammenfasste, konnte Cantor wichtige Ergebnisse

auf dem Gebiet der Fourier-Reihen erzielen [6, 76]. Seine Konstruktionen waren jedoch so abenteuerlich, dass sie von etlichen, darunter namhaften, Mathematikern zurückgewiesen wurden.

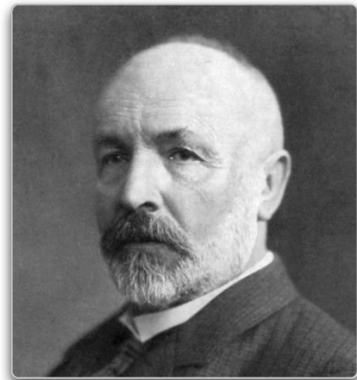


Leopold Kronecker
(1823 – 1891)

Die meisten Kritiker waren der Meinung, dass seine wild konstruierten Punktmengen niemals als etwas abgeschlossenes Ganzes betrachtet werden dürfen, aber genau davon ging Cantor aus. Er hatte seine Mannigfaltigkeiten nach den gleichen Prinzipien gebildet, die wir heute für die Konstruktion von *Ordinalzahlen* verwenden, und jede seiner Mengen als ein eigenständiges, in sich abgeschlossenes Individuum betrachtet. Was wir heute als eine Standardmethode der Mathematik ansehen, wirkte damals auf viele Mathematiker befremdlich. Die Schwere des vermeintlichen Vergehens wurde dabei ganz

unterschiedlich beurteilt. Für manche war Cantors Mathematik lediglich eine unzüchtige, aber harmlose Liaison mit dem *aktual Unendlichen*, für andere ein gefährliches Spiel mit dem Feuer.

In Kapitel 2 werden wir aufdecken, dass diese Furcht nicht unbegründet war. Tatsächlich hatte sich Cantor mit einigen seiner neuen Methoden einen Schritt zu weit vorgewagt. Genau wie der deutsche Mathematiker Gottlob Frege, auf den wir später ausführlich zu sprechen kommen, hatte Cantor – zunächst unbemerkt – ein Einlasstor für logische Antinomien geöffnet. Was als Spiel mit dem Feuer begann, drohte zu einem Flächenbrand zu werden, und die neue Mathematik war nicht weit davon entfernt, in einem lodernden Flammenmeer zu versinken.



Georg Cantor
(1845 – 1918)

Zu Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts eröffnete der Mathematiker Luitzen Brouwer mit dem *mathematischen Intuitionismus* eine weitere Front. Er kritisierte damit nicht nur den hemmungslosen Umgang mit der Unendlichkeit, sondern stellte im gleichen Atemzug altbewährte Grundprinzipien in Frage.

Im Kern der Brouwer'schen Philosophie stand der Gedanke einer konstruktiven Mathematik. Von den Intuitionisten wurde eine Aussage nur dann als wahr anerkannt, wenn sie durch einen konstruktiven Beweis abgesichert war, und ein mathematisches Objekt nur dann als real existent betrachtet, wenn es explizit

konstruiert werden konnte. In diesem Punkt bildet der Intuitionismus einen Gegenpol zum *Platonismus*, der den mathematischen Objekten eine unabhängige Existenz in der Gedankenwelt zubilligt. Dort ist die Wahrheit oder die Falschheit einer Aussage eine genauso imaginäre wie statische Eigenschaft, die unabhängig von der realen Welt existiert. Platoniker sehen in der Mathematik lediglich ein technisches Vehikel, mit dem wir den Wahrheitswert einer Aussage durch logisch deduktives Denken entdecken können.

Die Intuitionisten um Brouwer weigerten sich vehement, einer Aussage einen Wahrheitswert zuzuordnen, wenn sich dieser nicht auf konstruktivem Weg bestimmen ließ. Damit wandten sie sich offen gegen das *Prinzip des ausgeschlossenen Dritten* (*Tertium non datur*), nach dem bei einer Aussage entweder die Aussage selbst oder ihre Negation wahr sein muss. Mit seinem intuitionistischen Programm startete Brouwer einen Frontalangriff auf das tragende Gerüst der Mathematik in ihrem ursprünglichen Sinne, denn sämtliche Herleitungen, die eine Aussage durch den Ausschluss des Gegenteils beweisen, verlören darin ihre Gültigkeit.

Hilbert waren die Intuitionisten zeitlebens ein Dorn im Auge, und er bekämpfte ihre Versuche, die Mathematik in ihrem Sinne zu verändern, mit unbändiger Vehemenz. In seiner berühmten Abhandlung *Über das Unendliche* aus dem Jahr 1926 verteidigte er die Methoden, die mit der Cantor'schen Denkweise in die Mathematik Einzug hielten, mit dem blumigen Ausspruch:

„Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können.“

David Hilbert [43]

Für Hilbert war das *Prinzip des ausgeschlossenen Dritten* untrennbar mit der mathematischen Methode verbunden; es daraus zu entfernen, kam für ihn einer Enthauptung gleich. 1928 äußerte sich Hilbert mit den berühmten Worten:

„Dieses *Tertium non datur* dem Mathematiker zu nehmen, wäre etwa, wie wenn man dem Astronomen das Fernrohr oder dem Boxer den Gebrauch der Fäuste untersagen wollte.“

David Hilbert [44]

In der axiomatischen Methode sah Hilbert das Instrument, dem vielstimmigen Meinungskanon Einhalt zu gebieten. Für ihn stand die Korrektheit der kritisierten Begriffe und Methoden außer Frage, und er war überzeugt, sie mit formalen Argumenten absichern zu können. Das *Hilbert-Programm* begann in den Zwanzigerjahren und wird in [42] mit den folgenden Worten motiviert:

„Meine Untersuchungen zur Neubegründung der Mathematik bezwecken nichts Geringeres, als die allgemeinen Zweifel an der Sicherheit des mathematischen Schließens definitiv aus der Welt zu schaffen.“

Wie nötig eine solche Untersuchung ist, gewahren wir, wenn wir bedenken, wie wechselnd und unpräzise die diesbezüglichen Anschauungen oft selbst der hervorragendsten Mathematiker waren, oder wenn wir uns erinnern, daß von einigen der namhaftesten Mathematiker der neuesten Zeit die bisher für die sichersten gehaltenen Schlüsse in der Mathematik verworfen werden.“

David Hilbert [42]

Die Umsetzung seines Vorhabens hätte die Aufstellung eines formalen Systems bedingt, in dem sich die Begriffe und Methoden der klassischen Mathematik abbilden lassen. Die natürlichen, rationalen und reellen Zahlen wären darin genauso enthalten wie der zur damaligen Zeit umstrittene Mengenbegriff. Auch die gängigen Beweisprinzipien hätten darin Platz. Darunter befänden sich anerkannte Methoden wie der direkte, konstruktive Beweis, aber auch umstrittene Prinzipien wie die transfinite Induktion oder das *Tertium non datur*. Von innen betrachtet wäre das System die Mathematik, wie wir sie kennen, verpackt in einem formalen System, das im Sinne von Definition 1.5 vollständig ist.

Von außen betrachtet wäre das System ein komplexes Regelwerk, das nach den gleichen Grundprinzipien funktioniert wie unsere Beispielsysteme B und E. Was von innen betrachtet einem Beweisschritt der klassischen Mathematik entspräche, wäre von außen betrachtet eine Folge mechanischer Operationen, die eine Zeichenkette auf der syntaktischen Ebene manipulieren.

In der Dualität eines solchen formalen Systems sah Hilbert die Möglichkeit, die Widerspruchsfreiheit der klassischen Mathematik abzusichern. Ein solcher Beweis sollte *von außen* geführt werden, d. h., es sollte durch eine mathematisch präzise Analyse der Schlussregeln sichergestellt werden, dass sich innerhalb des Systems keine Widersprüche ableiten lassen. Dass so etwas für kleine formale Systeme durchaus möglich ist, haben wir weiter oben am Beispiel des Systems E demonstriert. Würde ein entsprechender Beweis für das von Hilbert angedachte System gelingen, so wären sämtliche Methoden, die *innerhalb* des Systems existieren, ebenfalls gegen Widersprüche gefeit. Dies ist in kurzen Worten der Inhalt dessen, was wir heute als das *Hilbert-Programm* bezeichnen (Abbildung 1.6).

Natürlich wäre nichts gewonnen, wenn der Beweis die gleichen, potenziell unsicheren Methoden nutzen würde, um deren Absicherung es geht. Hilbert sah vor, den Beweis der Widerspruchsfreiheit ausschließlich mit *finiten Mitteln* zu führen. Grob gesprochen, sind damit alle Beweismethoden gemeint, die über die zerstrittenen Lager hinweg als legitim erachtet wurden. Ausgeschlossen waren Methoden, die auf dem umkämpften Satz des ausgeschlossenen Dritten beruhten oder unendliche Ansammlungen von Objekten als etwas abgeschlossenes Ganzes betrachteten.

Zunächst entwickelte sich das Hilbert-Programm ganz nach Plan. Für wichtige Teilgebiete der Mathematik war es tatsächlich gelungen, die Widerspruchsfrei-

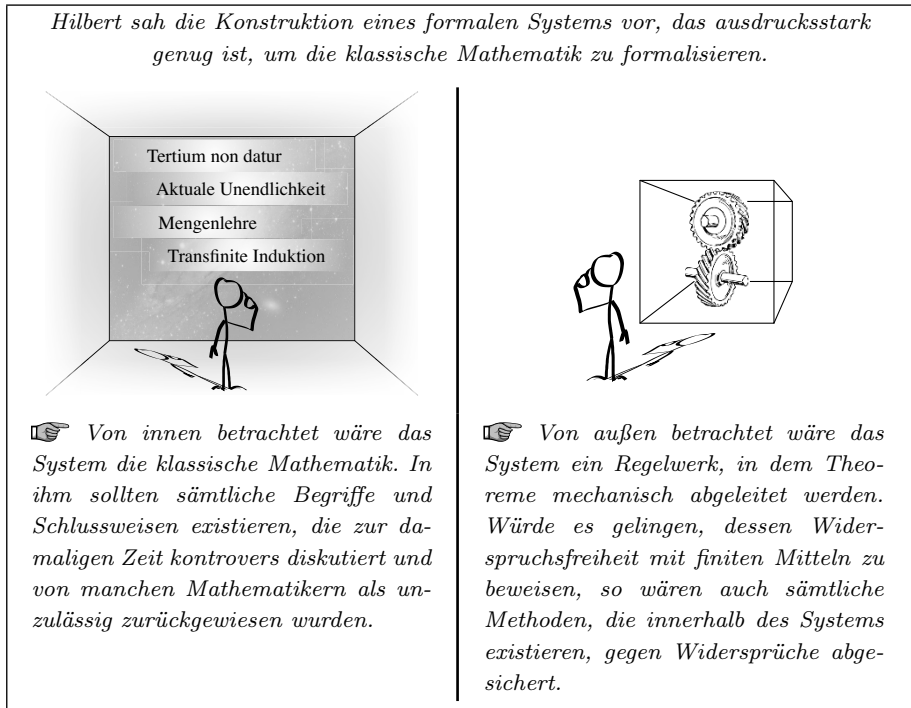


Abb. 1.6 Das Hilbert-Programm

heit auf die geforderte Weise zu zeigen, und so war es für Hilbert und seine Mitstreiter nur eine Frage der Zeit, bis die Widerspruchsfreiheit der gesamten klassischen Mathematik durch finite Mittel gesichert würde.

Für Brouwer und seine Anhängerschaft war das Hilbert-Programm eine reale Gefahr. Sie wussten: Würde Hilbert einen im intuitionistischen Sinne einwandfreien Beweis vorlegen, so wäre dies der Todesstoß für ihre philosophische Strömung.

Damit beenden wir unseren Exkurs in die Geschichte der Mathematik und gehen an den Ort zurück, an dem unsere Reise begann. Es war Mittag geworden in Königsberg, als John von Neumann seine Ausführungen über den Formalismus mit einem Überblick über den damals gegenwärtigen Stand des Hilbert-Programms beendete:

„Der gegenwärtige Stand der Dinge ist dadurch gekennzeichnet, daß die Widerspruchsfreiheit der klassischen Mathematik immer noch unbewiesen ist, dagegen dieser Beweis für ein etwas engeres mathematisches System bereits geglückt ist. [...] Dadurch hat Hilberts System die erste Kraftprobe bestanden: die Rechtfertigung eines nicht finiten und nicht rein konstruktiven mathematischen Systems ist mit finit-konstruktiven Mitteln geglückt. Ob es gelingen wird, diese Recht-

fertigung am schwierigeren und wesentlicheren System der klassischen Mathematik zu wiederholen, wird die Zukunft lehren.“

John von Neumann [67]

Von Neumann ahnte nicht, wie nah die Antwort auf diese Frage bereits war.

1.4 Die Unvollständigkeitssätze

Der zweite Tag begann mit Vorträgen von Hans Reichenbach und Werner Heisenberg über die Auswirkungen der Quantenmechanik auf den Begriff der physikalischen Wahrheit und den Begriff der Kausalität. Auf der Agenda für den Nachmittag standen ein 60-minütiger Vortrag über die Geschichte der vorgriechischen Mathematik sowie drei 20-minütige Kurzvorträge über die Grundlagen der Mathematik. Die Kurzvorträge wurden von Arnold Scholz, Walter Dubislav und Kurt Gödel gehalten.

In seinem Vortrag *Über die Vollständigkeit des Logikkalküls* referierte Gödel über jenen Satz, den wir heute als den *Gödel'schen Vollständigkeitssatz* bezeichnen. Er hatte



Kurt Gödel

(1906 – 1978)

ihn im Rahmen seiner Dissertation bewiesen und damit eine wichtige Grundlagenfrage auf dem Gebiet der mathematischen Logik gelöst. Inhaltlich macht der Vollständigkeitssatz eine Aussage über die *Prädikatenlogik erster Stufe*, kurz PL1, auf die wir in Abschnitt 6.2.2 noch genauer eingehen werden. Gödel bewies, dass die PL1 vollständig ist, wenn wir diesen Begriff auf die Ableitbarkeit *allgemeingültiger Formeln* beziehen. Soviel vorweg: Eine Formel heißt allgemeingültig, wenn sie unter *allen möglichen* Interpretationen ihrer Prädikat- und Funktionssymbole zu einer wahren Aussage wird.

Für die Formalisten war der Gödel'sche Vollständigkeitssatz ein wichtiger Etappensieg. Durch ihn schien die Verwirklichung des Hilbert-Programms zum Greifen nahe zu sein, und niemand rechnete damit, dass sich die Hoffnung auf eine baldige Vollendung bereits am nächsten Morgen zerschlagen würde.

1.4.1 Der erste Unvollständigkeitssatz

Auf der Agenda des dritten und letzten Tages stand eine Diskussion über die Grundlagen der Mathematik, die durch einen längeren Vortrag von Hans Hahn eröffnet wurde. Neben Rudolf Carnap, John von Neumann und Arend Heyting war auch Kurt Gödel anwesend. Unser Protagonist meldete sich erst gegen Ende der Diskussion zu Wort, in der zurückhaltenden und präzisen Weise, die für ihn typisch war:

„Man kann – unter Voraussetzung der Widerspruchsfreiheit der klassischen Mathematik – sogar Beispiele für Sätze [...] angeben, die zwar inhaltlich richtig, aber im formalen System der klassischen Mathematik unbeweisbar sind.“

Kurt Gödel [9]

Was der junge Mathematiker an diesem Morgen aussprach, war die erste öffentliche Formulierung dessen, was wir heute als den *ersten Gödel'schen Unvollständigkeitssatz* bezeichnen.

Benutzen wir die Begriffe aus Definition 1.5, so können wir Gödels Worte folgendermaßen formulieren:

**Satz 1.1 (Gödel, 1930)**

Jedes widerspruchsfreie formale System, das ausdrucksstark genug ist, um die gewöhnliche Mathematik zu formalisieren, ist unvollständig.

Gödel hatte herausgefunden, dass sich in jedem hinreichend ausdrucksstarken formalen System wahre Aussagen formulieren lassen, die sich nicht innerhalb des Systems beweisen lassen. Damit zerstörte er die Hoffnung all jener, die wie Hilbert an die Existenz eines widerspruchsfreien und zugleich vollständigen formalen Systems für die Mathematik glaubten. Mit seiner Aussage, dass sich der Begriff der Wahrheit und der Begriff der Beweisbarkeit nicht in Einklang bringen lassen, trägt der erste Gödel'sche Unvollständigkeitssatz die Leibniz'sche Idee zu Grabe. Eine *Characteristica universalis* kann es nicht geben; sie wurde vor mehreren hundert Jahren als visionärer Traum geboren und wird es für immer bleiben.

1.4.2 Der zweite Unvollständigkeitssatz

Direkt nach der Diskussion suchte John von Neumann das Gespräch mit Gödel. Anders als die meisten Zuhörer, die Gödels Kommentar eher reglos zur Kenntnis

nahmen, schien er sofort die explosive Sprengkraft erfasst zu haben, die in dem beiläufig eingeflossenen Wortbeitrag steckte.

Einige Wochen später wandte sich von Neumann schriftlich an Gödel. Nach der Königsberger Tagung hatte er sich ausführlich mit dessen Unvollständigkeitssatz beschäftigt und dabei eine nicht minder frappierende Entdeckung gemacht. Sein Brief vom 20. November 1930 beginnt mit den folgenden Worten:

„Lieber Herr Gödel!

Ich habe mich in der letzten Zeit wieder mit Logik beschäftigt, unter Verwendung der Methoden, die Sie zum Aufweisen unentscheidbarer Eigenschaften so erfolgreich benützt haben. Dabei habe ich ein Resultat erzielt, das mir bemerkenswert erscheint. Ich konnte nämlich zeigen, dass die Widerspruchsfreiheit der Mathematik unbeweisbar ist.“

John von Neumann [36]

Von Neumann hatte einen Beweis des *zweiten Gödel'schen Unvollständigkeitssatzes* gefunden. Dieser besagt, dass ein formales System, das stark genug ist, um den ersten Unvollständigkeitssatz zu formalisieren, seine eigene Widerspruchsfreiheit nicht beweisen kann.

Bereits der erste Unvollständigkeitssatz war für das Hilbert-Programm ein schwer zu verkraftender Schlag, doch was der zweite Unvollständigkeitssatz besagte, glich einem Gang zum Schafott. Der Grund hierfür ist folgender: Wenn es im System der klassischen Mathematik unmöglich ist, die Widerspruchsfreiheit der klassischen Mathematik zu beweisen, so kann ein solcher Beweis erst recht nicht gelingen, wenn wir die zur Verfügung stehenden Beweismittel beschneiden. Aber genau dies war der Plan, den Hilbert im Rahmen seines ehrgeizigen Programms verfolgte: der Beweis der Widerspruchsfreiheit der klassischen Mathematik mit finiten Mitteln.

1.5 Die Gödel'sche Arbeit

Von Neumanns Brief kam zu spät, denn kurz nach der Tagung in Königsberg hatte Gödel den Inhalt des zweiten Unvollständigkeitssatzes selbst entdeckt. Bereits am 23. Oktober 1930 hatte er eine Zusammenfassung an die Wiener Akademie der Wissenschaften geschickt und die vervollständigte Arbeit am 17. November 1930 nachgereicht [30, 14].

Erschienen ist Gödels Arbeit im Jahr 1931 im Monatsheft für Mathematik und Physik der Akademischen Verlagsgesellschaft, unter dem etwas holprig klingenden Titel

Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I¹⁾.

Von Kurt Gödel in Wien.

¹⁾ Vgl. die im Anzeiger der Akad. d. Wiss. in Wien (math.-naturw. Kl.) 1930, Nr. 19 erschienene Zusammenfassung der Resultate dieser Arbeit.

Die Arbeit sollte der erste von zwei Teilen werden. Für den angekündigten zweiten Teil hatte Gödel vor, den nur skizzenhaft geführten Beweis des zweiten Unvollständigkeitssatzes detailliert auszuarbeiten, doch dazu kam es nie. Bei den meisten Mathematikern stießen Gödels Argumente in der präsentierten Form auf so große Akzeptanz, dass er für den ursprünglich geplanten zweiten Teil keine Notwendigkeit mehr sah.

Gödels Beweislücken wurden später von David Hilbert und Paul Bernays geschlossen, so dass wir heute auch für den zweiten Unvollständigkeitssatz präzise Beweise in Händen halten [50]. Die Details wollen wir auf später verschieben und zunächst Gödel das Wort erteilen:

1.

Die Entwicklung der Mathematik in der Richtung zu größerer Exaktheit hat bekanntlich dazu geführt, daß weite Gebiete von ihr formalisiert wurden, in der Art, daß das Beweisen nach einigen wenigen mechanischen Regeln vollzogen werden kann. Die umfassendsten derzeit aufgestellten formalen Systeme sind das System der Principia Mathematica (PM)²⁾ einerseits, das Zermelo-Fraenkel-sche (von J. v. Neumann weiter ausgebildete) Axiomensystem der Mengenlehre³⁾ andererseits. Diese beiden Systeme sind so weit, daß alle heute in der Mathematik angewendeten Beweismethoden in ihnen formalisiert, d. h. auf einige wenige Axiome und Schlußregeln zurückgeführt sind. Es liegt daher die Vermutung nahe, daß diese Axiome

²⁾ A. Whitehead und B. Russell, Principia Mathematica, 2. Aufl., Cambridge 1925. Zu den Axiomen des Systems PM rechnen wir insbesondere auch: Das Unendlichkeitsaxiom (in der Form: es gibt genau abzählbar viele Individuen), das Reduzibilitäts- und das Auswahlaxiom (für alle Typen).

³⁾ Vgl. A. Fraenkel, Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre, Wissensch. u. Hyp. Bd. XXXI. J. v. Neumann, Die Axiomatisierung der Mengenlehre. Math. Zeitschr. 27, 1928. Journ. f. reine u. angew. Math. 154 (1925), 160 (1929). Wir bemerken, daß man zu den in der angeführten Literatur gegebenen mengentheoretischen Axiomen noch die Axiome und Schlußregeln des Logikkalküls hinzufügen muß, um die Formalisierung zu vollenden. — Die nachfolgenden Überlegungen gelten auch für die in den letzten Jahren von D. Hilbert und seinen Mitarbeitern aufgestellten formalen Systeme (soweit diese bisher vorliegen). Vgl. D. Hilbert, Math. Ann. 88, Abh. aus d. math. Sem. der

Univ. Hamburg I (1922), VI (1928). P. Bernays, Math. Ann. 90. J. v. Neumann, Math. Zeitschr. 26 (1927). W. Ackermann, Math. Ann. 93.

Gödel beginnt seine Arbeit mit einer Momentaufnahme der Mathematik des frühen zwanzigsten Jahrhunderts und führt mit den *Principia Mathematica* und der *Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre* zwei wichtige Fundamente an, auf denen die Mathematik in einem formalen Sinne errichtet werden sollte. Tatsächlich wurden die hier erwähnten Systeme aus der Not geboren; sie stammen aus der Zeit, in der sich die Mathematik in den Netzen der mengentheoretischen Antinomien verfang und eine ihrer größten Krisen durchlebte.

Gödel nimmt an vielen Stellen auf die genannten Systeme Bezug, und bereits die Eingangsworte machen eines ganz deutlich: Die Gödel'sche Arbeit zu verstehen, bedingt, die Geschichte zu verstehen. Aus diesem Grund wollen wir die Arbeit auch schon wieder verlassen und uns erneut in die Geschichte zurückversetzen. Das Ziel unserer Reise ist dieses Mal die Mathematik des ausgehenden neunzehnten und des beginnenden zwanzigsten Jahrhunderts.

Die Gödel'schen Unvollständigkeitssätze
Eine geführte Reise durch Kurt Gödels historischen
Beweis

Hoffmann, D.W.

2017, XI, 356 S. 47 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-662-54299-6