

In Kap. 1 haben wir die Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen im Vakuum besprochen, unter anderem auch bei Anwesenheit von „Hindernissen“ (Randbedingungen), was zur Beugung der Wellen führt.

In vielen realen Anwendungen breiten sich die Wellen aber in bzw. durch Medien aus – in durchsichtigen wie Luft, Wasser, Glas usw., aber auch in für Licht undurchsichtige Stoffe können elektromagnetische Wellen mit anderen Wellenlängen natürlich eindringen. Wir unterscheiden im Folgenden nichtleitende und leitende Medien. In beiden tritt normalerweise *Dispersion* auf, d. h., Wellen unterschiedlicher Frequenz haben unterschiedliche Ausbreitungsgeschwindigkeiten; in letzteren werden die Wellen außerdem absorbiert.

Die nichtleitenden Medien besprechen wir in Abschn. 2.1 und als Anwendung in der Optik in Abschn. 2.2 dann die Brechung beim Übergang zwischen zwei Medien. Im dritten Abschnitt gehen wir dann auf die technisch wichtigen Wellenleiter ein, in denen man Wellenausbreitung in Medien hat und gleichzeitig Randbedingungen berücksichtigen muss. Die zusätzlichen Komplikationen in leitenden Medien diskutieren wir erst im letzten Abschnitt.

Im ganzen Kapitel betrachten wir nur den einfachen Spezialfall linearer homogener isotroper Medien, sprich: Permittivität ϵ und Permeabilität μ sind räumlich (und zeitlich) konstante skalare Größen. Außerdem gehen wir davon aus, dass in den Medien keine freien Ladungsträger sitzen und auch keine externen Stromquellen vorhanden sind.

2.1 Ausbreitung in nichtleitenden Medien

Mit den genannten Voraussetzungen (ϵ , μ skalare Konstanten, $\rho = 0$, $\mathbf{j} = \mathbf{0}$) sind die Maxwell-Gleichungen einfach

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad (2.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (2.3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (2.4)$$

was *sehr* ähnlich aussieht wie die Maxwell-Gleichungen (1.1) bis (1.4) im Vakuum – der einzige Unterschied sind die Faktoren ϵ und μ in der vierten Gleichung! Dementsprechend verläuft auch die Rechnung fast identisch zu der in Kap. 1.

2.1.1 Wieder: Ebene Wellen – aber langsamere!

Wir nehmen wieder die Rotation der zweiten Gleichung (2.2),

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \operatorname{rot} \mathbf{B},$$

und setzen auf der rechten Seite die vierte Gleichung (2.4) ein,

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \left(\frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right).$$

Mit $\operatorname{rot} \operatorname{rot} = \operatorname{grad} \operatorname{div} - \Delta$ wird dies zunächst zu

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} = -\frac{\epsilon\mu}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{E},$$

und wegen der ersten Gleichung (2.1) verschwindet der erste Term wieder. Es folgt

$$\left(\frac{\epsilon\mu}{c^2} \partial_t^2 - \Delta \right) \mathbf{E} = 0,$$

und mit den Abkürzungen

$$\bar{c} := \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad (2.5)$$

und

$$\square' := \frac{1}{\bar{c}^2} \partial_t^2 - \Delta$$

bleibt wieder einfach eine Wellengleichung,

$$\square' \mathbf{E} = 0. \quad (2.6)$$

Völlig analog zeigt man (macht mal!)

$$\square' \mathbf{B} = 0.$$

Im Folgenden beschränken wir uns auf die Lösungen in kartesischen Koordinaten. Auch hier laufen die Rechnungen fast identisch zu denen in Kap. 1, sodass wir nur die Ergebnisse angeben: Die Basislösungen sind monochromatische transversale ebene elektromagnetische Wellen,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} \left(\hat{\mathbf{E}} e^{i(\mathbf{k} \circ \mathbf{r} \pm \omega t)} \right) \quad \text{und} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} \left(\hat{\mathbf{B}} e^{i(\mathbf{k} \circ \mathbf{r} \pm \omega t)} \right),$$

wobei \mathbf{k} , $\hat{\mathbf{E}}$ und $\hat{\mathbf{B}}$ ein Rechtssystem bilden. Für die Polarisation und die allgemeinen Lösungen mit bzw. ohne feste(r) Ausbreitungsrichtung gilt dasselbe wie in Kap. 1.

Zwei Unterschiede gibt es aber doch (die ihr beide nachrechnen solltet): Die beiden komplexen Amplitudenvektoren $\hat{\mathbf{E}}$ und $\hat{\mathbf{B}}$ haben nun nicht mehr denselben Betrag, sondern es gilt

$$|\hat{\mathbf{B}}| = \sqrt{\epsilon \mu} |\hat{\mathbf{E}}|. \quad (2.7)$$

Allerdings haben die elektrische und die magnetische Welle immer noch dieselbe Phase. Außerdem lautet die Dispersionsrelation nun

$$\omega = \kappa \bar{c} = \frac{\kappa c}{\sqrt{\epsilon \mu}}; \quad (2.8)$$

im Folgenden werden wir sehen, dass dies wichtige Konsequenzen hat. Eine Folgerung sieht man allerdings natürlich sofort: Da ja in fast allen Medien $\epsilon > 1$ und $\mu > 1$ gelten, folgt aus (2.5), dass $\bar{c} < c$ ist. Weil in der Dispersionsrelation und

damit auch in den Wellenlösungen aber nun \bar{c} steht, ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen *kleiner* als die Vakuumlichtgeschwindigkeit c .

Wenn es nur dabei bleiben würde, dass elektromagnetische Wellen in Medien langsamer sind als im Vakuum, wären wir fertig. Wir müssen aber noch etwas sehr Wichtiges berücksichtigen: In den allermeisten Medien hängen ϵ und μ ihrerseits wieder von der Frequenz der Welle ab! Dies liegt an den Wechselwirkungen der Elektronen und der Gitterschwingungen (bzw. deren Quanten, der Phononen) mit der einfallenden elektromagnetischen Welle. Details dazu werden meist in Vorlesungen zur Festkörperphysik besprochen; siehe aber auch Aufgabe 2.7.

Die Dispersionsrelation (2.8) sollte ausführlich also eigentlich lauten:

$$\omega = \kappa \bar{c}(\omega) \quad \text{mit} \quad \bar{c}(\omega) = \frac{c}{\sqrt{\epsilon(\omega)\mu(\omega)}}. \quad (2.9)$$

ω ist somit nicht mehr einfach eine lineare Funktion von k , sondern nur noch durch eine implizite Gleichung gegeben – die man in praktisch allen realen Fällen nur numerisch nach ω auflösen kann. Trotzdem ist natürlich klar, dass man statt $\bar{c}(\omega)$ genauso gut auch $\bar{c}(\kappa)$ schreiben kann, wenn der Zusammenhang zwischen ω und κ eindeutig ist.

Eben diese Abhängigkeit der Wellengeschwindigkeit von der (Kreis-)Frequenz bzw. der Wellenzahl bezeichnet man nun als *Dispersion*. In vielen transparenten Medien nimmt \bar{c} mit zunehmender Frequenz ab; dies heißt deswegen *normale Dispersion*. Es gibt aber auch Beispiele für Medien und Frequenzbereiche, in denen \bar{c} mit zunehmender Frequenz zunimmt – also *anomale Dispersion* vorliegt. Dies tritt immer in Frequenzbereichen auf, in denen auch starke Absorption stattfindet; der genaue mathematische Zusammenhang wird durch die sogenannten Kramers-Kronig-Relationen beschrieben (siehe z. B. Bartelmann et al. (2014)).

2.1.2 Wellenpakete und Gruppengeschwindigkeit

Für *monochromatische* Wellen ist die Abhängigkeit der Geschwindigkeit von ω letztlich nicht sehr wichtig (man setzt eben einfach für ϵ und μ die Werte zum entsprechenden ω ein); allerdings haben wir ja bereits in Kap. 1 auch Lösungen besprochen, die sich durch Überlagerung von Wellen verschiedener Frequenzen ergeben. Diese allgemeine Lösung ist nun ausführlich (für Wellen, die in dieselbe Richtung \mathbf{e}_κ laufen, und wieder mit $x_\kappa := \mathbf{e}_\kappa \circ \mathbf{r}$):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int d\kappa \tilde{\mathbf{E}}(\kappa) e^{i(\kappa x_\kappa - \omega(\kappa)t)} = \int d\kappa \tilde{\mathbf{E}}(\kappa) e^{i\kappa(x_\kappa - \bar{c}(\kappa)t)}. \quad (2.10)$$

Da \bar{c} von k abhängt, ist dies hier *kein* Fourier-Integral mehr, d. h., die allgemeine Lösung hat nun *nicht* mehr die Form

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(x_\kappa - ct).$$

Mit anderen Worten: Die „Form“ der Welle bzw. des Wellenpakets bleibt im Allgemeinen bei der Ausbreitung nicht mehr erhalten – außer eben im Spezialfall einer monochromatischen Welle.

In vielen physikalisch wichtigen Situationen ist $\tilde{E}(\kappa)$ aber nur in einem recht engen Bereich um einen festen Wert κ_0 deutlich von null verschieden. In diesem engen Bereich ändert sich $\omega(\kappa)$ meist kaum; wir können also eine Taylor-Entwicklung ansetzen:

$$\omega(\kappa) = \omega(\kappa_0) + \omega'(\kappa_0) \cdot (\kappa - \kappa_0) + \dots$$

Damit wird (2.10) zu

$$\begin{aligned} E(\mathbf{r}, t) &= \int d\kappa \tilde{E}(\kappa) \exp(i[\kappa x_\kappa - \omega(\kappa_0)t - \omega'(\kappa_0)(\kappa - \kappa_0)t]) \\ &= \exp(i[-\omega(\kappa_0) + \kappa_0 \omega'(\kappa_0)]t) \cdot \int d\kappa \tilde{E}(\kappa) \exp(i\kappa [x_\kappa - \omega'(\kappa_0)t]), \end{aligned}$$

wobei wir alle von κ unabhängigen Faktoren vor das Integral geschrieben haben. Das übrige Integral ist nun aber wieder ein Fourier-Integral; wir können also schreiben

$$E(\mathbf{r}, t) = e^{i\varphi(t)} \hat{E}(x_\kappa - \omega'(\kappa_0)t).$$

Mit anderen Worten: Das Feld zu einer späteren Zeit t ergibt sich, indem man das Feld zur Zeit $t = 0$ um $\omega'(\kappa_0)t$ verschiebt und mit einer zeitabhängigen Phase multipliziert. Damit haben wir nun also doch wieder so etwas wie ein Wellenpaket, das sich praktisch ohne Änderung seiner Form ausbreitet – seine Amplitude wird nur durch die zeitabhängige Phase moduliert. (Dieses Ergebnis ist nicht verwunderlich: Wir hatten bereits in Kap. 1 gesehen, dass sich Wellenpakete ohne Änderung ihrer Form ausbreiten, wenn ω linear von κ abhängt – und hier hatten wir ja diese Abhängigkeit als linear angenähert!) Ein konkretes Beispiel dazu wird in Aufgabe 2.1 besprochen.

Die Ausbreitung erfolgt nun allerdings nicht mehr mit c oder \bar{c} , sondern mit der sogenannten *Gruppengeschwindigkeit*

$$c_{\text{gr}}(\kappa_0) := \omega'(\kappa_0) = \left. \frac{d\omega}{d\kappa} \right|_{\kappa_0}.$$

Streng davon zu unterscheiden ist die *Phasengeschwindigkeit*: Dies ist die Geschwindigkeit, mit der sich die Phase einer einzelnen der monochromatischen Wellen, aus denen das Wellenpaket zusammengesetzt ist, ausbreitet. Aus (2.10) sehen

wir sofort, dass einfach

$$c_{\text{ph}}(\kappa_0) = \bar{c}(\kappa_0) = \frac{\omega(\kappa_0)}{\kappa_0}$$

gilt.

Aus der Definition von $c_{\text{ph}} = \bar{c}$ in (2.9) folgt, dass die Phasengeschwindigkeit auch größer sein kann als die (Vakuum-)Lichtgeschwindigkeit c – es gibt ja Medien mit $\epsilon\mu < 1$. Aber auch die Gruppengeschwindigkeit kann größer sein als c , wie wir im Folgenden zeigen.

Dafür kürzen wir zunächst $n := \sqrt{\epsilon\mu} \equiv c/c_{\text{ph}}$ ab (das ist natürlich der aus der Optik bekannte Brechungsindex – siehe Abschn. 2.2) und schreiben die Dispersionsrelation (2.9) in der Form

$$\kappa = \frac{\omega}{c_{\text{ph}}(\omega)} = n(\omega) \frac{\omega}{c}.$$

Leiten wir beide Seiten nach ω ab, so folgt

$$\frac{d\kappa}{d\omega} \equiv \frac{1}{c_{\text{gr}}} = \frac{dn}{d\omega} \frac{\omega}{c} + n \frac{1}{c},$$

also

$$c_{\text{gr}} = \frac{c}{\omega \frac{dn}{d\omega} + n}. \quad (2.11)$$

In Bereichen mit anomaler Dispersion gilt, wie oben erwähnt, $\frac{dc_{\text{ph}}}{d\omega} > 0$, was äquivalent zu $\frac{dn}{d\omega} < 0$ ist. Haben wir sogar

$$\omega \frac{dn}{d\omega} < 1 - n, \quad (2.12)$$

so wird der Nenner in (2.11) kleiner als eins und damit $c_{\text{gr}} > c$.

Beispiel 2.1: Überlichtschnelle Gruppengeschwindigkeit bei resonanter Absorption

Absorbiert ein Medium bei einer Kreisfrequenz ω_0 elektromagnetische Strahlung, wobei die Breite der Absorptionslinie durch γ beschrieben wird, so ergibt sich für den Brechungsindex (vgl. Aufgabe 2.7)

$$n = 1 + \frac{2\pi n_e e^2}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}.$$

Dafür ist, wie man schnell nachrechnet,

$$1 - n = -\frac{2\pi n_e e^2}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2},$$

$$\omega \frac{dn}{d\omega} = \frac{4\pi n_e e^2}{m} \omega^2 \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \gamma^2 \omega_0^2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2]^2}.$$

Die Bedingung (2.12) für eine überlichtschnelle Gruppengeschwindigkeit führt deshalb auf

$$2\omega^2 \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \gamma^2 \omega_0^2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2]^2} < -\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2},$$

was sich nach einigen Zwischenschritten auf

$$\omega^6 - (\omega_0^2 + \gamma^2) \omega^4 - \omega_0^2 (\omega_0^2 + \gamma^2) \omega^2 + \omega_0^6 < 0$$

reduziert. Mit den Abkürzungen $x := \omega^2/\omega_0^2 > 0$ und $a := 1 + \gamma^2/\omega_0^2 > 1$ bleibt die Ungleichung

$$x^3 - ax^2 - ax + 1 < 0$$

zu lösen.

Man überzeugt sich leicht davon (z.B. durch Einsetzen einiger Werte), dass die linke Seite für $x \leq 0$ zunächst positiv ist, bei $x = 1$ negativ und für größere x -Werte dann wieder positiv. (Die genaue Berechnung könnte mittels der sogenannten cardanischen Formeln erfolgen, das ist aber *sehr* umständlich!) Es gibt also ein Frequenzintervall, welches $\omega = \omega_0$ enthält, in dem die Ungleichung erfüllt ist – sprich: In der Umgebung der Frequenz, bei der Absorption auftritt, ist die Gruppengeschwindigkeit größer als die Lichtgeschwindigkeit.

Dass die Phasengeschwindigkeit größer als c sein kann, ist übrigens kein Widerspruch zur Relativitätstheorie: Laut dieser können nur Informationen nicht schneller als mit Lichtgeschwindigkeit übertragen werden – und die Phasengeschwindigkeit hat nichts mit Informationsübertragung zu tun. (Eine einzelne monochromatische Welle ist nicht dafür geeignet, Informationen zu übermitteln.) In manchen Texten liest man, die Gruppengeschwindigkeit sei die Geschwindigkeit der Informationsübertragung. Eben haben wir aber gesehen, dass auch $c_{\text{gr}} > c$ gelten kann – diese

Behauptung kann so also auch nicht stimmen. Um welche Geschwindigkeit geht es aber dann?

Bei der technischen Informationsübertragung hat man eigentlich immer Empfangsvorrichtungen, die erst ab einer gewissen Feldstärke ansprechen. Man muss sich also die Geschwindigkeit anschauen, mit der sich eine Feldstärke vom entsprechenden Betrag ausbreitet. (Das hat nichts mit der Gruppengeschwindigkeit zu tun, da die Amplitude und Breite eines Wellenpakets sich im Allgemeinen ja ändern!) Eine genauere Analyse (siehe z. B. Sexl (1992)) führt auf die sogenannte *Frontgeschwindigkeit*

$$c_{\text{fr}} := \lim_{k \rightarrow \infty} c_{\text{ph}}(k).$$

Diese ist nun tatsächlich immer $\leq c$.

2.2 Reflexion und Brechung

Wir betrachten nun eine Situation, wie sie bereits aus der Elektrostatik in Band 1 (Kap. 5) bekannt ist: Statt eines einzelnen Mediums haben wir zwei, die an einer Grenzfläche zusammenstoßen – also letztlich ein Randwertproblem. Bereits aus der Schule weiß man, dass an solchen Grenzflächen die Wellen (bzw. Lichtstrahlen) teilweise reflektiert, teilweise gebrochen werden. Und auch das kam schon bei den Randwertproblemen in der Elektrostatik vor: Das elektrische Feld einer Punktladung vor einer solchen Grenzfläche erhielt man dort, indem man eine „Spiegelladung“ hinter der Grenzfläche ansetzte (das entspricht hier der gebrochenen Welle hinter der Grenzfläche) und eine zusätzliche „Bildladung“ vor der Grenzfläche (das entspricht hier der reflektierten Welle). Wie in der dortigen Rechnung werden wir auch hier wieder die Stetigkeitsbedingungen der Felder an Grenzflächen benötigen.

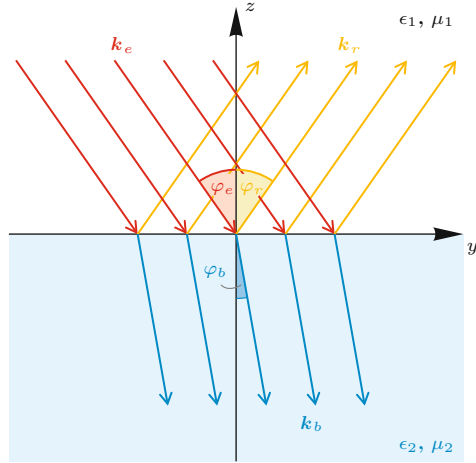
2.2.1 Drei Wellen – und ihre Richtungen

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachten wir im Folgenden eine Grenzfläche in der x - y -Ebene; auf bzw. in dieser gebe es keine Oberflächenladungen bzw. -ströme. Der obere Halbraum $z > 0$ sei mit einem Medium der Permittivität ϵ_1 und Permeabilität μ_1 ausgefüllt, der untere Halbraum mit ϵ_2 und μ_2 . Auf die Grenzfläche falle von oben eine ebene, monochromatische Welle ein, deren Wellenvektor (wieder ohne Beschränkung der Allgemeinheit) in der y - z -Ebene liege, d. h., man kann ihn schreiben als

$$\kappa_e = \kappa_e \cdot (0, \sin \varphi_e, -\cos \varphi_e)^\top,$$

wobei φ_e (wie bei der Brechung allgemein üblich) der Winkel zum Lot ist. Außerdem setzen wir noch eine reflektierte und eine gebrochene Welle an, mit Wellenvektoren κ_r und κ_b ; deren Richtungen lassen wir zunächst frei, bis auf die offensichtlichen Bedingungen $\kappa_{r,z} > 0$ und $\kappa_{b,z} < 0$. Die Geometrie der Anordnung ist

Abb. 2.1 Auf die Grenzfläche zweier Medien mit Brechungsindizes n_1 bzw. n_2 fällt eine ebene Welle mit Wellenvektor κ_e ein, welcher mit dem Lot zur Ebene den Winkel φ_e einschließt. Es ergibt sich dann eine reflektierte und eine gebrochene ebene Welle (Indizes r bzw. b)



in Abb. 2.1 dargestellt. Für die Feldstärken gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_e(\mathbf{r}, t) &= \hat{\mathbf{E}}_e e^{i(\kappa_e \circ \mathbf{r} - \omega_e t)}, & z > 0, \\ \mathbf{E}_r(\mathbf{r}, t) &= \hat{\mathbf{E}}_r e^{i(\kappa_r \circ \mathbf{r} - \omega_r t)}, & z > 0, \\ \mathbf{E}_b(\mathbf{r}, t) &= \hat{\mathbf{E}}_b e^{i(\kappa_b \circ \mathbf{r} - \omega_b t)}, & z < 0 \end{aligned}$$

und entsprechend für \mathbf{B} .

Nun verwenden wir eine der Stetigkeitsbedingungen aus Band 1 (Kap. 4): Für die Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes gilt

$$\mathbf{E}_{1,\parallel} = \mathbf{E}_{2,\parallel},$$

wobei die Indizes das jeweilige Medium bezeichnen. Aus unserem Ansatz mit den drei Wellen folgt dann

$$\mathbf{E}_{e,\parallel}(x, y, 0, t) + \mathbf{E}_{r,\parallel}(x, y, 0, t) = \mathbf{E}_{b,\parallel}(x, y, 0, t)$$

bzw. ausführlich

$$\hat{\mathbf{E}}_{e,\parallel} e^{i(\kappa \sin \varphi_e y - \omega_e t)} + \hat{\mathbf{E}}_{r,\parallel} e^{i(\kappa_{r,x} x + \kappa_{r,y} y - \omega_r t)} = \hat{\mathbf{E}}_{b,\parallel} e^{i(\kappa_{b,x} x + \kappa_{b,y} y - \omega_b t)}.$$

Diese Bedingung kann offensichtlich nur dann für alle Zeiten erfüllt sein, wenn die Zeitabhängigkeit aller Exponentialfaktoren gleich ist, d. h., wir haben

$$\omega_e = \omega_r = \omega_b.$$

Ebenso leicht können wir folgern, dass

$$\kappa_{r,x} = \kappa_{b,x} = 0$$

sein muss, da ja $\kappa_{e,x} = 0$ vorausgesetzt wurde und die Stetigkeit für alle Werte von x gelten muss. Also gilt:

Alle drei Wellenvektoren (und damit Lichtstrahlen) liegen in einer Ebene.

Wegen der Stetigkeit für alle y folgt schließlich noch

$$\kappa_{r,y} = \kappa_{b,y} = \kappa_{e,y} = \kappa_e \sin \varphi_e,$$

es gilt also $\kappa_{r,y} > 0$ und $\kappa_{b,y} > 0$, d. h., sowohl die reflektierte als auch die gebrochene Welle läuft nach rechts.

Andererseits muss mit den Winkeln aus Abb. 2.1 gelten:

$$\kappa_{r,y} = \kappa_r \sin \varphi_r \quad \text{und} \quad \kappa_{b,y} = \kappa_b \sin \varphi_b.$$

Es folgt

$$\frac{\sin \varphi_r}{\sin \varphi_e} = \frac{\kappa_e}{\kappa_r} \quad \text{und} \quad \frac{\sin \varphi_b}{\sin \varphi_e} = \frac{\kappa_e}{\kappa_b};$$

der Zusammenhang zwischen den Winkeln der reflektierten und der einfallenden bzw. der gebrochenen und der einfallenden Welle ist also durch das Verhältnis der Wellenzahlen bestimmt.

Dieses Verhältnis kann man noch etwas umschreiben. Dazu erinnern wir uns kurz zurück: Was wissen wir denn noch über monochromatische Wellen? Natürlich die Dispersionsrelation! Für die drei Wellen gilt

$$\omega_e = \kappa_e c_1, \quad \omega_r = \kappa_r c_1, \quad \omega_b = \kappa_b c_2,$$

mit den Licht(phasen)geschwindigkeiten

$$c_i = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_i \mu_i}}$$

in den beiden Medien $i \in \{1; 2\}$. Da aber, wie oben argumentiert, die Kreisfrequenzen alle gleich sein müssen, folgt

$$\kappa_e = \kappa_r \quad \text{und} \quad \kappa_e c_1 = \kappa_b c_2$$

Tutorium Elektrodynamik und Relativitätstheorie
Ein anschaulicher Zugang für Studierende der Physik
im Haupt- und Nebenfach
Feuerbacher, B.
2017, XIV, 405 S. 30 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-662-54554-6