

2 ELEKTRISCHE BEANSPRUCHUNGEN

Elektrische Beanspruchungen sind immer dann zu beachten, wenn elektrische Feldstärken im Bereich der elektrischen (Isolations-)Festigkeiten auftreten. D.h. der Ermittlung der elektrischen Feldstärken kommt eine grundlegende Bedeutung zu.

Kapitel 2.1 fasst deshalb die für die Hochspannungstechnik wichtigsten Beziehungen zur Beschreibung elektrischer Felder zusammen [2], [3]. Kapitel 2.2 stellt dar, wie sich unterschiedliche Beanspruchungen (z.B. durch Gleich-, Wechsel- und Stoßspannungen) in der Ausbildung unterschiedlicher Felder äußern. Einfachere Anordnungen können durch analytische Rechnung behandelt werden (Kapitel 2.3 und 2.4), für komplexe Isoliersysteme ist i.d.R. eine numerische Berechnung erforderlich [4] (Kapitel 2.5). Wanderwellenvorgänge erfordern aufgrund ihres Charakters als schnellveränderliche Vorgänge eine gesonderte Betrachtung [5] (Kapitel 2.6).

2.1 Grundlagen des elektrischen Feldes

Das elektrische Feld kann durch die Sinne des Menschen nicht unmittelbar wahrgenommen werden. Es ist nur indirekt durch seine physikalischen Wirkungen nachweisbar. *Das elektrische Feld beschreibt einen physikalischen Zustand des Raumes.* Die elektrische Feldstärke wird über die *Kraftwirkung* auf elektrische Ladungen (bzw. geladene Probekörper) definiert.

Es gibt zwei Ursachen elektrischer Felder:

- Positive und negative elektrische *Ladungen* sind Quellen und Senken des Feldes („*Quellenfeld*“), Bild 2.1-1.
- Außerdem werden elektrische Felder durch *zeitlich veränderliche magnetische Felder*

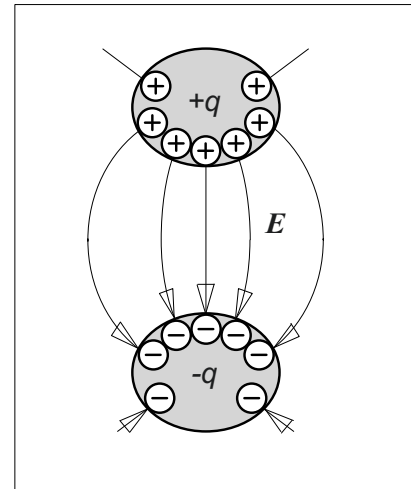


Bild 2.1-1:
Elektrisches
Quellenfeld.

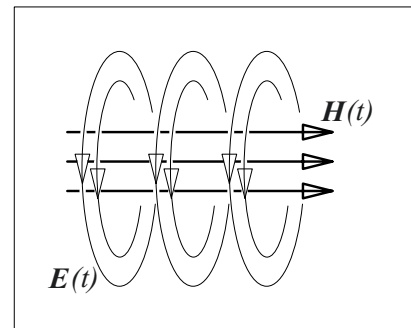


Bild 2.1-2:
Elektrisches
Wirbelfeld.

induziert. Die magnetischen Feldlinien werden dann als Wirbellinien der in sich geschlossenen elektrischen Feldlinien angesehen („*Wirbelfeld*“), Bild 2.1-2.

Elektrische Ladungen sind nicht beliebig teilbar. Als kleinste Ladungseinheit wird die *Elementarladung* $e = 1,6022 \cdot 10^{-19}$ As angesehen.

Ladungen können unterschiedlich verteilt sein,

- als *Einzelladung* (z.B. Elektron mit der Ladung $q = -e$ oder Proton mit $q = +e$),
- als *Linienladung* (z.B. auf einem Draht, dessen Durchmesser vernachlässigbar klein angenommen wird),
- als *Flächenladung* (z.B. auf der Oberfläche einer leitfähigen Elektrode, Bild 2.1-1) und
- als *Raumladung* (z.B. als „Raumladungswolke“ in einer Gasentladung).

Punktladungen und *Linienladungen* sind Idealisierungen, die bei der Durchführung von Feldberechnungen nützlich sind.

Die Größen *Potential*, *Spannung*, *Strom* und *Kapazität* sind integrale Größen, die aus den eigentlichen Feldgrößen abgeleitet werden müssen (Kapitel 2.1.2). Die häufige Verwendung dieser Größen darf nicht darüber hinwegtäuschen, dass sie jeweils nur einen Teilaspekt der Feldeigenschaften beschreiben. Für die Hochspannungstechnik ist deshalb die genaue Kenntnis bzw. Berechnung des elektrischen Feldes von großer Bedeutung.

2.1.1 Feldgrößen

Die **elektrische Feldstärke** E wird über die Kraftwirkung F auf eine positive Probeladung q^+ definiert, Bild 2.1-3:

$$E = F/q^+$$

bzw.

$$F = q^+ \cdot E \quad (2.1-1)$$

Feldstärke E und Kraft F sind *vektorielle Größen*, die im folgenden **fett und kursiv** dargestellt werden. Die Richtung der Feldstärke E entspricht der Richtung der Kraft F auf eine positive Probeladung, sie wird im Feldbild durch die Richtung der Feldlinien dargestellt. Bei negativer Probeladung sind Kraft- und Feldrichtung antiparallel.

Der Betrag E der Feldstärke E ergibt sich gemäß Gl. (2.1-1) aus dem Betrag F der Kraft F zu $E = F/q^+$. Die Dichte der Feldlinien kann als Maß für die Stärke des Feldes angesehen werden.

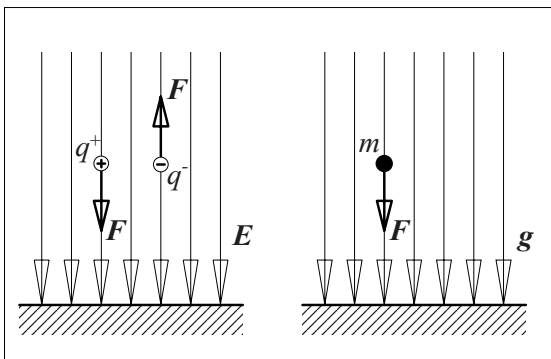


Bild 2.1-3: Kräfte auf Probekörper im elektrischen Feld (links) und im Gravitationsfeld (rechts).

Analogie zum Gravitationsfeld: Die Kraftwirkung auf Ladungen im elektrischen Feld ist der Kraftwirkung auf Massen im Gravitationsfeld analog. Im Feld der Erdbeschleunigung g wirkt auf einen Probekörper der Masse m die Kraft $F = m \cdot g$ in Richtung des Gravitationsfeldes.

Im Quellenfeld sind positive und negative Ladungen Ursache des elektrischen Feldes. Man definiert deshalb eine Feldgröße, die in direktem Zusammenhang mit den felderzeugenden Ladungen steht: Die **dielektrische Verschiebungsdichte** (*elektrische Flussdichte*) D ist der elektrischen Feldstärke proportional:

$$D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E \quad (2.1-2)$$

Der Betrag von D entspricht an der Oberfläche einer ideal leitenden Elektrode der Flächenladungsdichte σ , vgl. auch Bild 2.1-1:

$$D = \sigma = dq/dA \quad (2.1-3)$$

Die Dimension von D ist dementsprechend die Dimension einer Ladung bezogen auf die Fläche, d.h. $[D] = \text{As/m}^2 = \text{C/m}^2$.

Der Zusammenhang zwischen D und E nach Gl. (2.1-2) wird über eine Naturkonstante, die **elektrische Feldkonstante** bzw. die **absolute Dielektrizitätszahl**

$$\varepsilon_0 = 8,8542 \text{ pF/m}$$

gebildet. Gl. (2.1-2) enthält noch die dimensionslose **relative Dielektrizitätszahl** ε_r , die von den Eigenschaften des dielektrischen Mediums abhängt.

ε_r ist immer größer als 1, da das elektrische Feld innerhalb des Dielektrikums vorhandene Ladungen polarisiert und damit ein elektrisches Gegenfeld aufbaut. D.h. bei gegebener Ladungsdichte (bzw. gegebener Verschiebungsdichte D) ist die Feldstärke E kleiner als im Vakuum mit $\varepsilon_r = 1$. Dieser Effekt der *Polarisation* wird durch den Faktor $\varepsilon_r > 1$ beschrieben, Kap. 4.2.

Reale Isolierstoffe besitzen eine geringe (Rest-)Leitfähigkeit κ . Die Kräfte des elektrischen Feldes können deshalb bewegliche Ladungsträger beschleunigen, es entsteht ein feldstärkeproportionaler Stromfluss mit der *Stromdichte*

$$J = \kappa E \quad (2.1-4)$$

Das Feld der Stromdichte \mathbf{J} wird als **elektrisches Strömungsfeld** bezeichnet, es ist in der Hochspannungstechnik insbesondere für die Gleichspannungsbeanspruchungen von Bedeutung. Bei Stoßspannungs- und meist auch bei Wechselspannungsbeanspruchungen dominiert das Feld der Verschiebungsdichte \mathbf{D} , das sog. **dielektrische Verschiebungsfeld**. Bei relativ langsam veränderlichen, sog. quasistationären Vorgängen können oft die induzierten Feldanteile vernachlässigt werden. Schnell veränderliche Felder, wie z.B. bei der Stromverdrängung, den Wirbelströmen oder der Wellenausbreitung, müssen jedoch als **Wirbelfelder** beschrieben werden.

2.1.2 Äquipotentialfläche, Potential, Spannung und Kapazität

Eine Ladung q , die gegen die Kraft \mathbf{F} des elektrischen Feldes \mathbf{E} bewegt wurde, besitzt eine potentielle Energie W_{pot} , analog zur potentiellen Energie einer Masse m im Gravitationsfeld \mathbf{g} , Bild 2.1-4. Bezogen auf den Wert der Ladung spricht man vom Potential φ .

$$\varphi = W_{\text{pot}}/q \quad (2.1-5)$$

Ebenen gleichen Potentials bzw. gleicher potentieller Energie werden als **Äquipotentialflächen** (im Schnittbild auch als **Äquipotentiallinien**) bezeichnet. Sie stehen *senkrecht* auf den Feldlinien, da eine Verschiebung von La-

dungen senkrecht zur Feldrichtung ohne Energieaufwand möglich ist.

Feldbilder der Hochspannungstechnik werden vorwiegend durch die Darstellung von Äquipotentiallinien gebildet. Ihr Verlauf kann oft näherungsweise abgeschätzt werden. Numerische Lösungen liegen meist in Form von Potentialwerten vor.

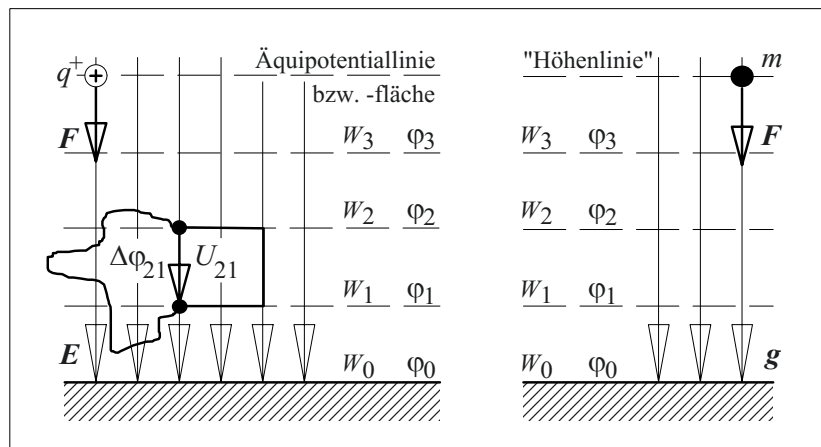
Potential und potentielle Energie müssen auf eine Ebene mit $W_{\text{pot}} = 0$ und $\varphi = 0$ bezogen werden. Diese *Bezugsebene* kann völlig frei gewählt werden. Man gibt deshalb oft Potentialdifferenzen $\Delta\varphi$ und Differenzen potentieller Energie ΔW_{pot} an. Eine Potentialdifferenz wird auch als elektrische **Spannung** bzw. Spannungsdifferenz bezeichnet:

$$\Delta\varphi_{21} = U_{21} = \Delta U_{21} \quad (2.1-6)$$

Bei gegebenem elektrischem Feld \mathbf{E} kann die Spannung bzw. die Potentialdifferenz zwischen den Punkten 2 und 1 durch Integration berechnet werden. Dabei wird die Differenz der potentiellen Energien als Integral über der Feldkraft längs des Weges ausgedrückt. \mathbf{F} wird gemäß Gl. (2.1-1) durch $q \cdot \mathbf{E}$ ersetzt:

$$\begin{aligned} U_{21} = \Delta\varphi_{21} = \varphi_2 - \varphi_1 &= \frac{1}{q} \Delta W_{21} \\ &= \frac{1}{q} \int_2^1 \mathbf{F} \, d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{q} \int_2^1 q \mathbf{E} \, d\mathbf{x} \end{aligned}$$

Bild 2.1-4: Potentielle Energie, Potential und Spannung im elektrischen Feld (links) und im Gravitationsfeld (rechts).



$$U_{21} = \Delta\varphi_{21} = \varphi_2 - \varphi_1 = \int_2^1 \mathbf{E} \, d\mathbf{x} \quad (2.1-7)$$

D.h. die Spannung bzw. die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten 2 und 1 ergibt sich aus dem Integral der elektrischen Feldstärke \mathbf{E} längs des Weges \mathbf{x} .

Im *Quellenfeld* ist das Ergebnis der Integration unabhängig von der Wahl des Integrationsweges, es ist nur von den Potentialen im Anfangs- und im Endpunkt abhängig, Bild 2.1-4. Man spricht deshalb auch vom sog. *Potentialfeld*.

Im *Wirbelfeld* wäre das Ergebnis der Integration nach Gl. (2.1-7) von der Wahl des Integrationsweges abhängig. Beispielsweise würde die Integration längs einer Feldlinie in Bild 2.1-2 selbst dann einen endlichen, von Null verschiedenen Wert liefern, wenn Anfangs- und Endpunkt der Integration zusammenfielen. Die Definition des skalaren Potentials φ , d.h. also auch von Spannungen und Potentialdifferenzen, ist im Wirbelfeld nicht mehr möglich. Die Definition eines *Vektorpotentials* soll hier nicht weiter betrachtet werden [2], [3].

Ist die räumliche Verteilung des elektrischen Feldes $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}(x,y,z)$ bekannt, so kann die Potentialverteilung $\varphi(x,y,z)$ nach Gl. (2.1-7) ermittelt werden. Umgekehrt kann bei gegebener Potentialverteilung auch die *elektrische Feldstärke* durch *Gradientenbildung*, d.h. durch Differentiation ermittelt werden.

Für *kartesische Koordinaten* x, y, z gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x,y,z) &= \{E_x, E_y, E_z\} \\ &= -\text{grad } \varphi \\ &= -\{\partial\varphi/\partial x, \partial\varphi/\partial y, \partial\varphi/\partial z\}. \end{aligned} \quad (2.1-8a)$$

Für *Zylinderkoordinaten* r, α, z ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(r,\alpha,z) &= \{E_r, E_\alpha, E_z\} \\ &= -\text{grad } \varphi \\ &= -\{\partial\varphi/\partial r, r^{-1} \cdot \partial\varphi/\partial \alpha, \partial\varphi/\partial z\}. \end{aligned} \quad (2.1-8b)$$

Für *Kugelkoordinaten* r, α, ϑ gilt entsprechend

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(r,\alpha,\vartheta) &= \{E_r, E_\alpha, E_\vartheta\} \\ &= -\text{grad } \varphi \\ &= -\{\partial\varphi/\partial r, (r \cdot \sin \vartheta)^{-1} \cdot \partial\varphi/\partial \alpha, \\ &\quad r^{-1} \cdot \partial\varphi/\partial \vartheta\}. \end{aligned} \quad (2.1-8c)$$

Durch Angabe einer Spannung bzw. einer Potentialdifferenz lässt sich unmittelbar angeben, wie viel Energie ein geladenes Teilchen bei *Beschleunigung im elektrischen Feld* aufnimmt. Dies ist bei der Beschreibung von Ionisations- und Entladungsvorgängen von Bedeutung. Die kinetische Energie ergibt sich aus der Differenz der potentiellen Energien nach Gl. (2.1-5) zu

$$\begin{aligned} W_{\text{kin}} &= W_{\text{pot2}} - W_{\text{pot1}} \\ &= q(\varphi_2 - \varphi_1) = q \Delta\varphi_{21} \\ &= q U_{21}. \end{aligned} \quad (2.1-9)$$

Das elektrische Quellenfeld wird gemäß Bild 2.1-1 durch Ladungen auf den Elektrodenoberflächen erzeugt, d.h. die Elektrodenanordnung speichert bei einer bestimmten Potentialdifferenz eine bestimmte Ladungsmenge. Der das Speichervermögen kennzeichnende Quotient aus Ladung bezogen auf die Spannung wird als „**Kapazität**“ C bezeichnet.

$$C = q / U = q / \Delta\varphi \quad (2.1-10)$$

Oft ersetzt man die ausgedehnte Feldanordnung durch ein konzentriertes Bauelement (Kapazität C), Bild 2.1-5.

Die Anwendung konzentrierter Kapazitäten als Ersatzdarstellung ausgedehnter Felder ermöglicht die Einbindung der Anordnung in Netzwerkberechnungen. In der Hochspannungstechnik ist dies insbesondere bei der Abschätzung von (parasitären) „*Streukapazitäten*“ in ausgedehnten Messkreisen oder in komplexen Isoliersystemen von Bedeutung.

Außerdem kann mit Hilfe der Kapazität C die gesamte im Feldraum *kapazitiv gespeicherte Energie* W als Funktion der Gesamtspannung angegeben werden:

$$W = \frac{1}{2} C U^2 \quad (2.1-11)$$

Dieser Zusammenhang lässt sich am *Beispiel des Plattenkondensators* veranschaulichen (vgl. Bild 2.1-5 rechts): Bei einer Plattenfläche A , einem Plattenabstand x und bei Annahme eines homogenen elektrischen Feldes $E = U/x$ ergibt sich für die Kapazität

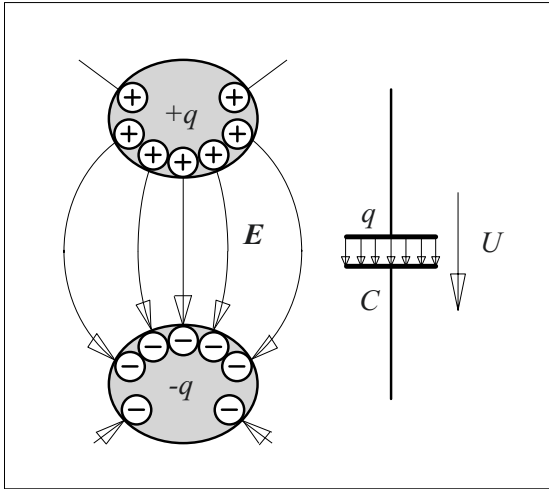


Bild 2.1-5: Zuordnung einer idealen Kapazität zu einem elektrischen Quellenfeld zwischen zwei Elektroden

$$\begin{aligned}
 C &= q / U \\
 &= (D \cdot A) / (E \cdot x) \\
 &= (\epsilon_0 \epsilon_r E \cdot A) / (E \cdot x) \\
 &= \epsilon_0 \epsilon_r \cdot A / x.
 \end{aligned}$$

D.h.:

$$C = \epsilon \cdot A / x \quad (2.1-12)$$

Die *gespeicherte Energie* ergibt sich, wenn man den Aufbau der Feldstärke E durch Transport von infinitesimalen Ladungsmengen dq gegen die Feldkraft $dF = E \, dq$ beschreibt. Die dafür notwendige Energie $dW = x \, dF = x \, E \, dq = U \, dq$ wird im elektrischen Feld (als potentielle Energie der Ladung dq) gespeichert. Die Integration über alle Ladungen ergibt die gesamte Energie:

$$\begin{aligned}
 W &= \int dW = \int U(q) \, dq \\
 &= \int_0^q (q/C) \, dq \\
 &= \frac{1}{2} q^2 / C \\
 &= \frac{1}{2} C U^2 \quad \text{q.e.d.}
 \end{aligned}$$

Die *Feldenergiedichte* im homogenen Feld des Plattenkondensators ergibt sich durch Division durch das Volumen $V = A \cdot x$. Sie ist im homogenen Feld eine ortsunabhängige Größe:

$$\begin{aligned}
 w &= W/V \\
 &= [\frac{1}{2} (E \cdot x)^2 \epsilon A/x] / (A \cdot x) \\
 &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2
 \end{aligned}$$

Auch in einer beliebigen Feldanordnung kann das Feld in einem infinitesimal kleinen Volumenelement ΔV als homogen angesehen werden. Für die **Feldenergiedichte** gilt dann auch allgemein

$$\begin{aligned}
 w &= \partial W / \partial V \\
 &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2 \\
 &= \frac{1}{2} E D. \quad (2.1-13)
 \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass man z.B. in *Energiespeicherkondensatoren* eine möglichst hohe elektrische Feldstärke anwenden muss, da diese quadratisch in die Energiedichte eingeht. D.h. die erreichbare Energiedichte wird wesentlich von der elektrischen Festigkeit des Dielektrikums bestimmt.

2.1.3 Die Maxwellschen Feldgleichungen

Die klassischen Probleme der Hochspannungstechnik bleiben meist auf die statischen, stationären und quasistationären elektrischen Felder beschränkt, wie z.B. bei der Beanspruchung durch netzfrequente Wechselspannung.

Hohe elektrische Beanspruchungen treten jedoch, wie in Kapitel 1 beschrieben, bei allen Arten von Feldern auf. D.h. die Hochspannungstechnik muss sich nicht nur mit Gleich- und Wechselfeldern sondern in vielen Fällen auch mit schnell veränderlichen Feldern auseinandersetzen.

Ausgangspunkt dieser Darstellung sind deshalb die allgemeinen **Maxwellschen Gleichungen** für *ruhende Körper*, aus denen die jeweils gültigen Vereinfachungen abgeleitet werden. Aus Gründen der Anschaulichkeit beschränkt sich diese Darstellung auf die *Integralform* der Feldgleichungen, Bild 2.1-6 bis Bild 2.1-8. Man unterscheidet

- die **Feldgleichungen** („Hauptgleichungen“), die den Zusammenhang zwischen

zeitveränderlichen elektrischen und magnetischen Feldgrößen beschreiben (Bild 2.1-6),

- die **Kontinuitätsgleichungen** („Nebengleichungen“), die etwas über die Quellen bzw. die Quellenfreiheit der Feldgrößen aussagen (Bild 2.1-7) und
- die **Stoffgleichungen**, die den Zusammenhang zwischen Feldgrößen unter dem Einfluss verschiedener Materialeigenschaften angeben (Bild 2.1-8).

Diese Gleichungen können für bestimmte Spezialfälle analytisch ausgewertet werden. Voraussetzung sind hierfür Vereinfachungen, die sich aufgrund von räumlichen Symmetrien (z.B. ebene, zylindersymmetrische und kugelsymmetrische Felder) und besonderen Zeitabhängigkeiten (z.B. Gleichfelder oder sinusförmig zeitabhängige Felder) ergeben.

2.1.3.1 Die Maxwellschen Hauptgleichungen (Feldgleichungen)

Der *physikalische Inhalt* der Hauptgleichungen (Feldgleichungen) besteht darin, dass ein zeitlich veränderlicher magnetischer Fluss $\iint \mathbf{B} \, d\mathbf{A}$ ein elektrisches Wirbelfeld \mathbf{E} induziert (**Induktionsgesetz**, Gl. (2.1-14)). Die Umlaufspannung längs des Flächenrandes entspricht der zeitlichen Ableitung des magnetischen Flusses durch die umschlossene Fläche. Außerdem verursacht ein elektrischer Strom (bzw. eine „Durchflutung“) ein magnetisches Wirbelfeld \mathbf{H} (**Durchflutungsgesetz**, Gl. (2.1-15)). Der Strom bzw. die „Durchflutung“ wird aus einer Leitungsstromdichte \mathbf{J} (bewegte Ladungsträger) und/oder aus einer Verschiebungsstromdichte $\partial \mathbf{D} / \partial t$ (zeitlich veränderliches elektrisches Feld) gebildet.

Die Hauptgleichungen beschreiben letztlich die Erzeugung eines elektrischen (bzw. magnetischen) Wirbelfeldes durch ein zeitlich veränderliches magnetisches (bzw. elektrisches) Feld. Diese gegenseitige Bedingung ist die Ursache für die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen, die in der Hochspannungstechnik z.B. als leitungsgebundene Wellen auftreten.

2.1.3.2 Die Maxwellschen Nebengleichungen (Kontinuitätsgleichungen)

Der *physikalische Inhalt* der Nebengleichungen (Kontinuitätsgleichungen) besteht in einer Aussage über die Kontinuität bzw. über die Quellen der magnetischen und der elektrischen Felder, Bild 2.1-7.

Das **magnetische Feld** ist quellenfrei. Wird eine geschlossene Hüllfläche A betrachtet, so kann es in dem eingeschlossenen Volumen weder Quellen noch Senken des magnetischen Feldes geben. D.h. der magnetische Fluss $\iint \mathbf{B} \, d\mathbf{A}$, der auf einer Seite durch die Hüllfläche eintritt, muss auf der anderen Seite wieder austreten, Bild 2.1-7 (li). Mathematisch wird die Quellenfreiheit des magnetischen Feldes dadurch beschrieben, dass das Hüllintegral über $\mathbf{B} \, d\mathbf{A}$ gleich Null ist, weil sich ein- und austretende Flüsse kompensieren, Gl. (2.1-16).

Die Kontinuitätsgleichung für das **Feld der Verschiebungsdichte** Gl. (2.1-17a) besagt, dass auch das Verschiebungsdichtefeld \mathbf{D} quellenfrei ist, sofern sich in einer geschlossenen Hüllfläche A keine elektrischen Ladungen befinden ($Q = 0$). Diese würden als Quellen und Senken des Feldes wirken und das Hüllintegral würde einen von Null verschiedenen Betrag ergeben. Bei der Bildung des dielektrischen Verschiebungsflusses $\iint \mathbf{D} \, d\mathbf{A}$ über einer geschlossenen Hüllfläche A (Hüllenfluss) muss deshalb die eingeschlossene Ladung Q als von Null verschiedener Term berücksichtigt werden.

Auch die **elektrische Stromdichte** ist quellenfrei, wenn die Summe aus Leitungsstromdichte \mathbf{J} und Verschiebungsstromdichte $\partial \mathbf{D} / \partial t$ betrachtet wird, Gl. (2.1-17b). Diese Bedingung kann direkt aus Gl. (2.1-15) abgeleitet werden.

Anmerkung: Ein Zusammenhang zwischen Gl. (2.1-17b) und (2.1-17a) kann mit folgender Überlegung hergestellt werden: Ein über einen Leiter auf eine Elektrode fließender Leitungsstrom $i(t) = \iint \mathbf{J} \, d\mathbf{A}$ setzt sich im nichtleitenden Dielektrikum als Verschiebungsstrom $\iint \partial \mathbf{D} / \partial t \, d\mathbf{A}$ fort, Bild 2.1-7 (rechts). Der Leitungsstrom ist mit einer Ladungsträgerverschiebung verbunden, die zu einer Ladungsträgeransammlung an der Grenzfläche zwischen leitendem und nichtleitendem Material führt.

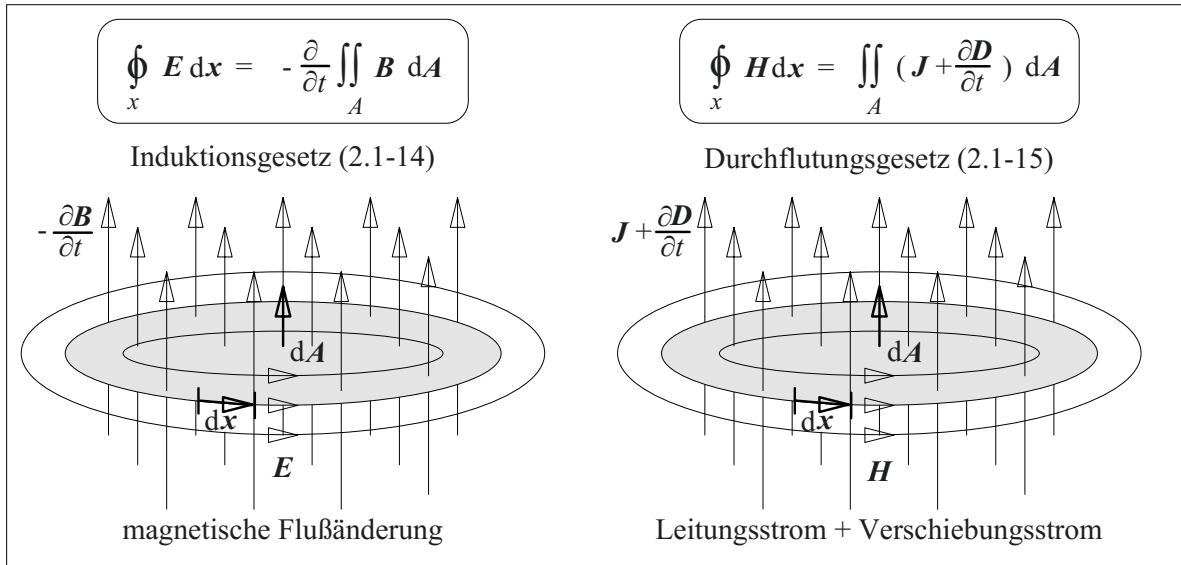


Bild 2.1-6: Integralform der Maxwellschen Hauptgleichungen (Feldgleichungen) für ruhende Körper. Verknüpfung elektrischer und magnetischer Feldgrößen durch das Induktionsgesetz (links) und das Durchflutungsgesetz (rechts).

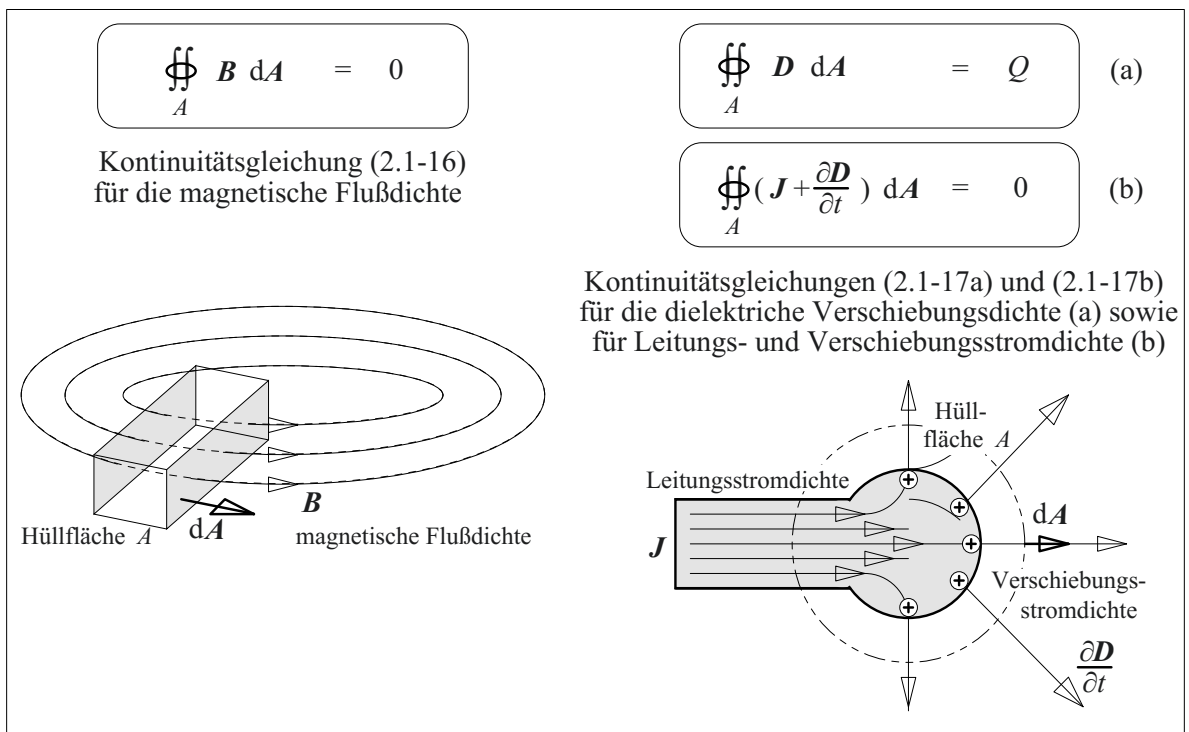


Bild 2.1-7: Integralform der Maxwellschen Nebengleichungen (Kontinuitätsgleichungen) für die magnetische Flußdichte (links, räumliches Bild), sowie für Leitungsstrom- und Verschiebungsstromdichte (rechts, Schnittbild).

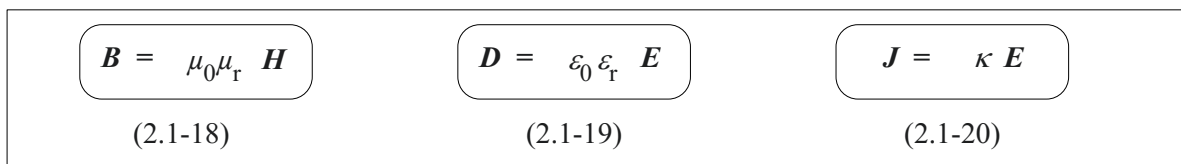


Bild 2.1-8: Stoffgleichungen für die magnetischen und elektrischen Feldgrößen.

Durch Integration von Gl. (2.1-17b) über der Zeit ergibt sich ein Zusammenhang zwischen der Verschiebungsdichte \mathbf{D} und der von der Hüllfläche A eingeschlossenen Ladung, sofern angenommen wird, dass zu Beginn der Integration sich noch keine Ladung auf der Elektrode befindet:

$$\oiint_A \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{A} = 0$$

$$\oiint_A \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\mathbf{A} = - \oiint_A \mathbf{J} d\mathbf{A} = i(t)$$

Die Integration über der Zeit ergibt

$$\oiint_A \mathbf{D} d\mathbf{A} = \int i(t) dt = Q.$$

Dies entspricht Gl. (2.1-17a). Dabei muss man jedoch beachten, dass für diese Ableitung zusätzliche Annahmen getroffen werden mussten, so dass beide Gleichungen nicht äquivalent sind.

Gl. (2.1-17a) nimmt in der Feldberechnung eine besondere Rolle ein:

$$\oiint_A \mathbf{D} d\mathbf{A} = Q \quad (2.1-21)$$

Die Ladung kann auch als Integral über der Raumladungsdichte η in dem von der Hüllfläche eingeschlossenen Volumen angesehen

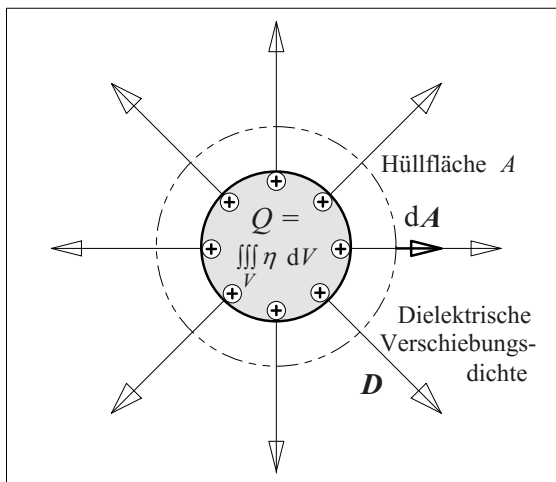


Bild 2.1-9: Ladungen als Quellen dielektrischen Verschiebungsdichtefeldes, bzw. als Ursache des elektrischen Quellenfeldes ("Gaußscher Satz").

werden:

$$\oiint_A \mathbf{D} d\mathbf{A} = \iiint_V \eta dV \quad (2.1-22)$$

Gl. (2.1-21) bzw. (2.1-22) wird als „**Satz vom Hüllenfluss**“ oder als „**Gaußscher Satz**“ bezeichnet. Er ermöglicht in einigen praktisch wichtigen Fällen die analytische Berechnung von Quellenfeldern, Bild 2.1-9.

2.1.3.3 Die Stoffgleichungen

Die Stoffgleichungen beschreiben das Zusammenwirken elektrischer und magnetischer Felder mit Materialien, Bild 2.1-8. Sie begründen den Zusammenhang zwischen \mathbf{E} und \mathbf{D} , \mathbf{B} und \mathbf{H} sowie \mathbf{E} und \mathbf{J} .

Ein magnetisches Feld \mathbf{B} kann die in einem Material vorhandenen magnetischen Dipole („Elementarmagnete“) ausrichten. Durch diese Polarisation entsteht ein zusätzliches Feld, das das resultierende Feld entweder schwächt oder verstärkt. Gl. (2.1-18) berücksichtigt die *magnetische Polarisation* durch den Faktor μ_r (relative Permeabilität).

Ein elektrisches Feld \mathbf{E} kann die in einem Material vorhandenen Ladungen verschieben bzw. elektrische Dipole ausrichten. Durch diese *elektrische Polarisation* entsteht ein zusätzliches Feld. Bei gegebener Ladung auf den Elektroden wird dadurch das resultierende Feld geschwächt. Ist die Stärke des resultierenden Feldes durch eine eingeprägte Spannung bzw. Feldstärke vorgegeben, so werden durch die elektrische Polarisation zusätzliche Ladungen auf den Elektroden gebunden. Gl. (2.1-19) berücksichtigt die Vergrößerung der der Ladung proportionalen elektrischen Verschiebungsdichte durch die elektrische Polarisation über den Faktor ϵ_r (relative Dielektrizitätszahl). ϵ_r ist immer größer als 1, da jede Materie mehr oder weniger stark polarisierbar ist, z.B. durch Verschieben von Gitterbausteinen, durch Ausrichten polarer Moleküle oder molekularer Gruppen und durch Verschieben von Atomkernen gegen die Elektronenhüllen.

Die elektrische Polarisation ist von großer Bedeutung für die Hochspannungstechnik, da sie die *Dielektrizitätszahlen und Kapazitäten* bestimmt. Außerdem entstehen auch *Polarisationsverluste* in Abhängigkeit von Temperatur und Frequenz.

Gl. (2.1-19) ist die Grundlage aller hochspannungstechnischen Feldberechnungen in Isoliersystemen, die aus mehr als einem Isolierstoff aufgebaut sind und die mit *zeitlich veränderlichen Feldern* beansprucht werden.

Ein elektrisches Feld E kann außerdem die in einem Material vorhandenen frei beweglichen Ladungsträger beschleunigen. Aufgrund von Stoßprozessen ergibt sich eine mittlere Driftgeschwindigkeit der Ladungsträger in Richtung des elektrischen Feldes, d.h. eine Stromdichte J , die der Feldstärke E proportional ist. Gl. (2.1-20) berücksichtigt die Entstehung einer *Leitungsstromdichte* durch den Faktor κ (Leitfähigkeit). Gl. (2.1-20) ist die Grundlage aller hochspannungstechnischen Feldberechnungen für Isoliersysteme, die mit *Gleichspannung* beansprucht werden.

2.1.4 Einteilung der Felder

Je nach Änderungsgeschwindigkeit der Feldgrößen können die Maxwell'schen Gleichungen vereinfacht werden. Dabei haben sich drei Kategorien bewährt [394]:

1. Statische und stationäre Felder (Kap. 2.1.4.1) Bei **ruhenden Feldern** gibt es keine Änderung der Feldgrößen E , H und J . D.h. die Ableitungen der Feldgrößen sind Null: $\partial \dots / \partial t = 0$. *Aus Sicht der zeitlichen Änderung* sind die Feldgrößen damit „**statisch**“, d.h. unveränderlich. Die Kopplung der magnetischen und elektrischen Feldgrößen über das Induktionsgesetz (2.1-14) und über die Verschiebungsstromdichte $\partial D / \partial t$ entfällt vollständig und es gibt keine räumliche Ausbreitung elektromagnetischer Wellen. *Aus Sicht der Wellenausbreitung* sind die Felder damit „**stationär**“, d.h. an einen Ort gebunden, bzw. ortsfest.

Anmerkung: Traditionell werden das unveränderliche E - und das unveränderliche H -Feld als **elektrostatisches** und als **magnetostatisches Feld** bezeichnet. Das unveränderliche Strömungsfeld wird jedoch meist als **stationäres Strömungsfeld** bezeichnet, weil über den Leitungsstrom Energie transportiert wird, so dass die *Leistung* als zeitliche Ableitung der Energie ungleich Null ist [395]. Das Strömungsfeld J wird durch *Bewegung* von Ladungen verursacht und ist deshalb nicht mehr *statisch* im Sinne von *unbeweglich*. Außerdem besteht über das Durchflutungsgesetz (2.1-15) eine Kopplung mit dem Magnetfeld H .

Aus Sicht der Feldgrößen sind aber alle drei Feldarten (E , H und J) sowohl unveränderlich (statisch) als auch ortsfest (stationär) [394]. Im englischsprachigen Schrifttum wird i.d.R. von „static fields“ gesprochen.

2. Quasistationäre Felder (Kap. 2.1.4.2 u. 3) Bei quasistationären Feldern gibt es zwar (langsam) zeitlich veränderliche Feldgrößen, ihre Kopplung ist jedoch so schwach, dass das *vom Magnetfeld des Verschiebungsstromes induzierte Feld* und damit der **Wellencharakter vernachlässigt** werden kann.

Anmerkung: Anschaulich bedeutet dies im **Zeitbereich**, dass in einem Feldraum mit der Abmessung x die *Laufzeit* τ einer Welle klein sein muss gegen die *Anstiegszeit* T_a des sich ändernden Feldes. Feldänderungen haben dadurch praktisch keinen Einfluss auf die Feldverteilung, die somit als „**quasi statisch**“ (näherungsweise unveränderlich) angesehen werden kann. Im **Frequenzbereich** muss die *Abmessung* x des betrachteten Feldraumes klein gegen eine *Viertel-Wellenlänge* $\lambda/4$ sein, vgl. Gl. (2.1-36) und (-37). In einem *begrenzten Bereich* mit der Abmessung x können Feldänderungen dann als quasi gleichzeitig und die Felder als „**quasi stationär**“ (näherungsweise ortsfest) angesehen werden.

Typische quasistationäre Felder sind **langsam veränderliche** (bzw. niederfrequente) **Felder in Leitern**, bei denen der Verschiebungsstrom gegen den Leitungsstrom vernachlässigbar ist (*induktives Feld*, Kap. 2.1.4.2), oder *in Isolierstoffen*, bei denen das induzierte elektrische Wirbelfeld gegen das elektrische Quellenfeld zu vernachlässigen ist (*kapazitives Feld*, Kap. 2.1.4.3). Auch sehr **schnell veränderliche**

Felder in Leitern, die (durch Überlagerung von eingepägtem Strömungs- und induziertem Wirbelfeld) zu Wirbelströmen und *Stromverdrängung* führen, sind quasistationäre Felder, weil der Verschiebungsstrom gegen den Leitungsstrom vernachlässigbar bleibt und somit keine bzw. nur eine extrem gedämpfte und räumlich begrenzte Wellenausbreitung senkrecht zur Leiteroberfläche stattfindet.

3. Nichtstationäre Felder (elektromagnetische Wellen, Kap. 2.1.4.4) Bei **schnellveränderlichen Feldern**, bei denen aufgrund der hohen *Änderungsgeschwindigkeit* und/oder der *räumlichen Ausdehnung* die wechselseitige Kopplung zwischen zeitveränderlichen elektrischen und magnetischen Feldern nicht mehr vernachlässigt werden können, tritt der Wellencharakter des elektromagnetischen Feldes in Erscheinung, so dass räumliche Ausdehnungen und Laufzeiterscheinungen zu berücksichtigen sind.

2.1.4.1 Statische und stationäre Felder

a) Elektro- und magnetostatische Felder

Bei statischen Feldern wird die rechte Seite in Gl. (2.1-14) und Gl. (2.1-15) jeweils Null, da es weder einen zeitveränderlichen magnetischen

Fluss, noch einen Verschiebungsstrom, noch einen Leitungsstrom gibt. Leitungsstrom wäre ja mit einem Energietransport und einer von Null verschiedenen Leistung verbunden. Somit gibt es auch keinen Zusammenhang zwischen elektrischen und magnetischen Feldgrößen.

Strenggenommen existieren statische Felder nur als Magnetfelder von Permanentmagneten. Statische elektrische Felder sind eine *theoretische Fiktion*, die voraussetzt, dass ein ideales Dielektrikum mit $\kappa = 0$ vorliegt, in dem das von unbeweglichen Ladungen erzeugte elektrische Quellenfeld keinerlei Leitungsstrom bzw. Ladungs- und Energietransport verursacht.

Trotzdem wird häufig zur *Vereinfachung von Feldberechnungen* näherungsweise ein **statisches elektrisches Feld** angenommen, dessen Ausbildung von den Dielektrizitätszahlen der Materialien bestimmt wird. Man muss aber betonen, dass die Ergebnisse nicht auf statische und stationäre Felder, für die die Leitfähigkeiten κ maßgeblich wären, sondern nur auf quasistationäre Fälle anwendbar sind, Kap. 2.1.4.3.

b) Stationäre Strömungsfelder

Bei stationären Strömungsfeldern wird im Vergleich zu elektro- und magnetostatischen Feldern eine zeitlich konstante Leitungsstromdichte \mathbf{J} und damit auch eine zeitlich konstante elektrische Feldstärke \mathbf{E} angenommen, Bild 2.1-10.

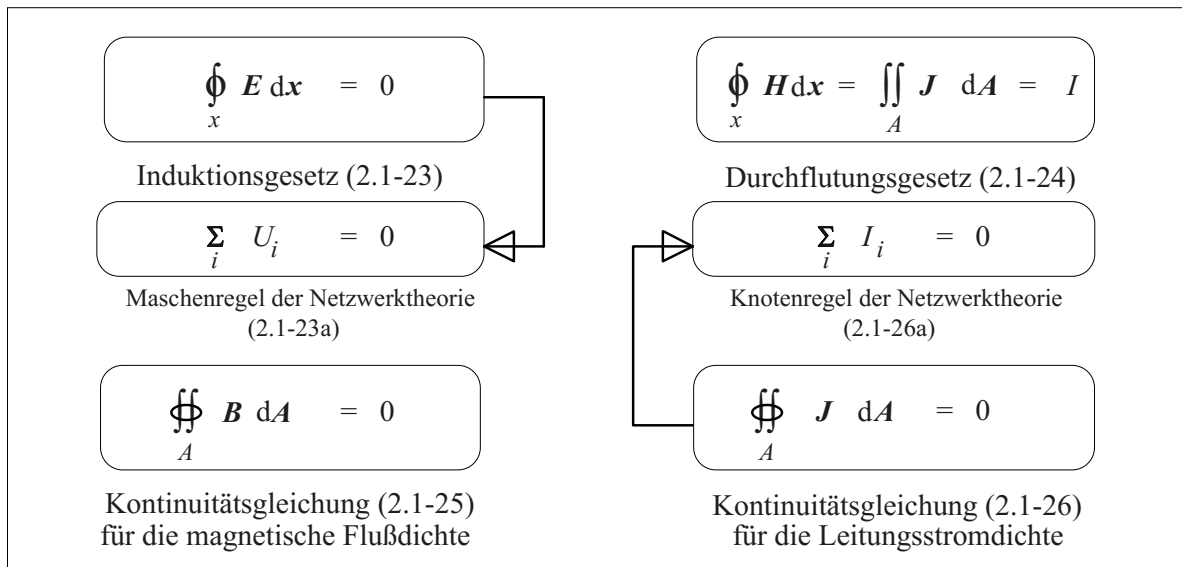
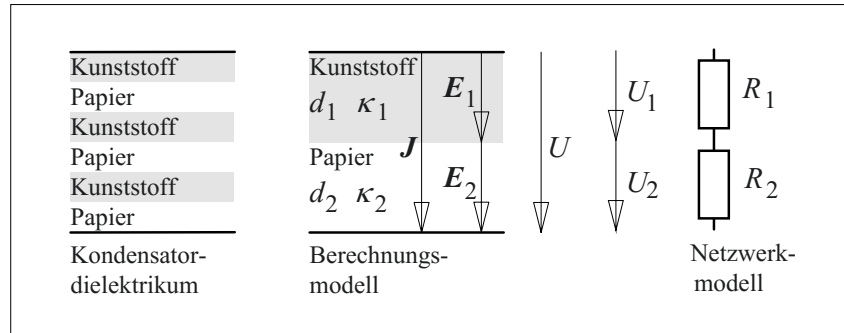


Bild 2.1-10: Vereinfachung der Maxwell'schen Gleichungen für stationäre Felder
(Alle zeitlichen Ableitungen der Feldgrößen werden gleich Null).

Bild 2.1-11:

Stationäres Strömungsfeld bei Gleichspannung an einem Kondensatordielektrikum.



Da nach Gl. (2.1-23) das Ringintegral über $\mathbf{E} \, d\mathbf{x}$ bzw. die Summe der Spannungen U_i in einer geschlossenen Masche gleich Null ist, handelt es sich um ein wirbelfreies Feld. D.h. bei der Bildung von Spannungen und Potentialdifferenzen zwischen zwei Punkten nach Gl. (2.1-7) ist das Ergebnis von der Wahl des Integrationsweges unabhängig, Bild 2.1-4. Es handelt sich um ein sog. „Potentialfeld“, in dem Potentiale und Spannungen eindeutig definiert sind.

Das elektrische Feld bei Beanspruchungen durch **Gleichspannung** ist immer ein *stationäres Strömungsfeld*. Die Feldverteilung ist zeitlich konstant, jedoch fließt aufgrund der (Rest-)Leitfähigkeiten κ nach Gl. (2.1-20) ein Leitungsstrom $\mathbf{J} = \kappa \cdot \mathbf{E}$, der die Feldverteilung bestimmt. Die *Dielektrizitätszahlen* bzw. Gl. (2.1-19) sind *völlig ohne Bedeutung* bei der Ausbildung eines stationären Strömungsfeldes.

Beispiel: Kondensatordielektrikum

Ein mit Gleichspannung ($U = 3 \text{ kV}$) beanspruchtes Kondensatordielektrikum besteht aus einer Schichtung von Kunststoff-Folien ($d_1 = 30 \text{ } \mu\text{m}$, $\kappa_1 = 10^{-16} \text{ S/m}$) und öl-impregniertem Papier ($d_2 = 30 \text{ } \mu\text{m}$, $\kappa_2 = 10^{-14} \text{ S/m}$). Es soll die Feldstärkebelastung der Materialien ermittelt werden, Bild 2.1-11.

Im Berechnungsmodell werden alle Papier und Folien zusammengefasst. Die Gesamtspannung ergibt sich nach Gl. (2.1-7) aus der Summe der beiden Teilspannungen an den Kunststoff-Folien und den imprägnierten Papieren

$$U = d_1 E_1 + d_2 E_2.$$

Außerdem ist die Leitungsstromdichte nach der Kontinuitätsgleichung (2.1-26) in beiden Materialien gleich:

$$J = \kappa_1 E_1 = \kappa_2 E_2$$

Für die Feldstärken ergibt sich daraus:

$$\begin{aligned} E_1 &= U / (d_1 + d_2 \cdot \kappa_1 / \kappa_2) = 99 \text{ kV/mm} \\ \text{und} \\ E_2 &= E_1 \cdot \kappa_1 / \kappa_2 = 1 \text{ kV/mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ergebnis:} \quad E_1 &= 99 \text{ kV/mm} \quad (\text{Kunststoff}) \\ E_2 &= 1 \text{ kV/mm} \quad (\text{Papier}) \end{aligned}$$

D.h. das Papier wird trotz gleicher Dicke nur mit $U_2 = E_2 \cdot d_2 = 0,03 \text{ kV}$, d.h. mit etwa 1 % der Gesamtspannung belastet. Die Kunststoff-Folie wird aufgrund ihrer geringen Leitfähigkeit (bzw. ihres hohen spezifischen Widerstandes $\rho = 1/\kappa$) mit 99 % der Gesamtspannung belastet.

Anmerkung: Die Verwendung von Papierlagen in Kondensatordielektrika dient vor allem der Imprägnierung der Zwischenräume mit Isolieröl, d.h. das Papier wirkt als „Imprägnierdocht“. Die Isolationsfestigkeit muss von den Kunststoff-Folien gewährleistet werden, die i.d.R. eine wesentlich höhere Durchschlagsfestigkeit aufweisen als ölprägniertes Papier.

2.1.4.2 Quasistationäre (induktive) Felder in Leitern

In **sehr gut leitfähigen Materialien** kann die Verschiebungsstromdichte $\partial \mathbf{D} / \partial t$ bis in den GHz-Bereich gegenüber der Leitungsstromdichte \mathbf{J} vernachlässigt werden, so dass die **quasistationäre Betrachtungsweise** und die Vernachlässigung des Wellencharakters zulässig ist, Gl. (2.1-29) und (-31), Bild 2.1-12. Als Bedingung muss für die Beträge gelten:

$$\partial \mathbf{D} / \partial t = \varepsilon_0 \varepsilon_r \partial \mathbf{E} / \partial t \ll \mathbf{J} = \kappa \cdot \mathbf{E} \quad (2.1-27)$$

Die nachfolgend mit Gl. (2.1-36) und (-37) erläuterten Bedingungen für die *räumliche und zeitliche Abgrenzung* des quasistationären Bereiches gelten auch hier.

Bei hoher elektrischer Leitfähigkeit κ verursachen schon geringe elektrische Feldstärken E große Leitungsstromdichten J . Deshalb ist i.d.R. selbst eine geringe induzierte elektrische Feldstärke gemäß Gl. (2.1-28) zu berücksichtigen. Es besteht also hier eine Kopplung zwischen elektrischem Strömungsfeld und magnetischem Feld über das Induktionsgesetz. Das elektrische Feld ist deshalb nicht mehr wirbelfrei. Wollte man ein skalares Potential nach Gl. (2.1-7) definieren, so würde das Integral über $E \cdot dx$ zwischen zwei Punkten von der Wahl des Integrationsweges abhängen. D.h. eine eindeutige *Definition von Potential- und Spannungsdifferenzen* ist nicht mehr möglich.

Beispiel: Stromverdrängung und Wirbelströme

Der Effekt der „Stromverdrängung“ und der „Wirbelströme“ in Leitern ist darauf zurückzuführen, dass die vom zeitveränderlichen Magnetfeld induzierte elektrische Feldstärke $E(t)$ im Leiter eine Wirbelstromdichte $J(t) = \kappa E(t)$ verursacht, die die Stromdichte an der Leiteroberfläche verstärken und im Inneren des Leiters schwächen („Skin-Effekt“). Schon bei Wechselströmen mit der Netzfrequenz von 50 Hz tritt dadurch in den gängigen Leiterwerkstoffen eine Widerstandserhöhung im Prozentbereich auf. In den magnetischen Kernen von elektrischen Maschinen und Transformatoren entstehen dadurch die sogenannten Wirbelstromverluste, die durch Kerne aus dünnen, gegeneinander isolierten Blechen reduziert werden. Da diese Zusammenhänge die Hoch-

spannungstechnik nicht direkt betreffen, sei auf das Schrifttum verwiesen [2]. Auch bei sehr **schnell veränderlichen Strömen in Leitern** bilden sich bei einer Betrachtung senkrecht zur Leiteroberfläche **quasistationäre Felder** aus, weil der Verschiebungsstrom gegen den Leitungsstrom vernachlässigbar bleibt und somit keine bzw. nur eine extrem gedämpfte und räumlich begrenzte Wellenausbreitung senkrecht zur Leiteroberfläche stattfindet.

Für die Hochspannungstechnik ist das quasistationäre induktive Feld nur in *gut leitfähigen Materialien* von Bedeutung, wie z.B. in leitenden Elektroden, leitenden Verbindungen und Transformatorwindungen. In den *schlecht leitenden Dielektrika* darf die Verschiebungsstromdichte i.d.R. selbst bei langsam veränderlichen elektrischen Feldern nicht gegen die sehr geringe Leitungsstromdichte vernachlässigt werden, Kap. 2.1.4.3.

Beispiel: Transformatorwindung

Die Feldverhältnisse in einer Transformatorwindung sind dadurch bestimmt, dass die vom zeitveränderlichen magnetischen Feld induzierte elektrische Feldstärke *innerhalb des Leiters* Ladungen bis an die Leiteroberflächen verschiebt, Bild 2.1-13. Der Leitungsstrom ist wesentlich größer als der Verschiebungsstrom, es handelt sich um das **induktive quasistationäre Feld**.

Außerhalb des Leiters setzt sich dieser Leitungsstrom im Dielektrikum (überwiegend) als Verschiebungsstrom fort, es entsteht ein von den Oberflächenladungen hervorgerufenen Quellenfeld. Im Dielektrikum überwiegt das Quellenfeld gegenüber dem (induzierten) Wirbel-feld, das i.d.R. vernachlässigt werden kann. Es handelt sich dann um das **kapazitive quasistationäre Feld**.

$$\oint_x E \, dx = - \frac{\partial}{\partial t} \iint_A B \, dA$$

Induktionsgesetz (2.1-28)

$$\oiint_A B \, dA = 0$$

Kontinuitätsgleichung (2.1-30)
für die magnetische Flußdichte

$$\oint_x H \, dx \cong \iint_A J \, dA = I$$

Durchflutungsgesetz (2.1-29)

$$\oiint_A J \, dA \cong 0$$

Kontinuitätsgleichung (2.1-31)
für die Leitungsstromdichte

Bild 2.1-12: Maxwellsche Gleichungen für quasistationäre induktive Felder in Leitern
(Vernachlässigung des Verschiebungsstromes in Leitern).

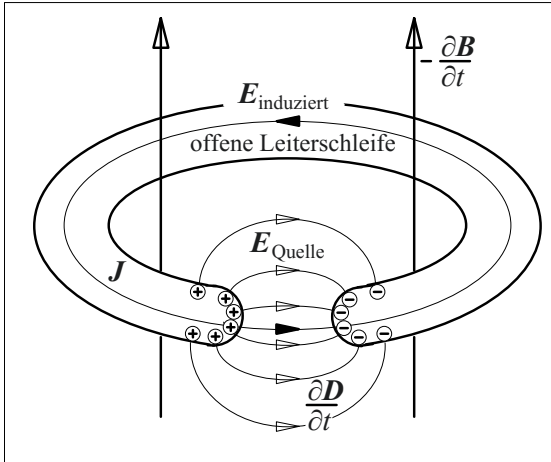


Bild 2.1-13: Quasistationäre Felder innerhalb und außerhalb des Leitersmaterials (induktive und kapazitive Felder).

2.1.4.3 Quasistationäre (kapazitive) Felder in Isolierstoffen

Die Hochspannungstechnik betrachtet vorwiegend die elektrischen Felder in Isolierstoffen (sogenannten „Nichtleitern“) mit einer vergleichsweise niedrigen (Rest-)Leitfähigkeit κ . Gl. (2.1-27) ist dabei nicht erfüllt, es überwiegt i.d.R. sogar der Verschiebungsstrom schon bei niedrigen Frequenzen gegenüber dem meist geringfügigen Leitungsstrom. Im Durchflutungsgesetz (2.1-33) und in der Kontinuitätsgleichung (2.1-35) müssen deshalb beide Anteile berücksichtigt werden, Bild 2.1-14.

Das elektrische Feld bildet sich als Quellenfeld aus und überwiegt gegenüber der induzierten elektrischen Feldstärke, wenn die Änderungsgeschwindigkeit des Magnetfeldes gering bleibt, vgl. z.B. Bild 2.1-13. D.h. es ist *näherungsweise* möglich, *Potential- und Spannungsdifferenzen* nach Gl. (2.1-7) zu definieren, weil das induzierte Wirbelfeld gegenüber dem Quellenfeld vernachlässigt wird, vgl. Gl. (2.1-32). Der Wellencharakter wird dabei vernachlässigt und es handelt sich um ein *quasistationäres Feld*.

Die wichtigsten in der Hochspannungstechnik vorkommenden Beanspruchungsarten von Isolierstoffen sind die netzfrequente **Wechselspannung**, sowie **Schalt-** und **Blitzstoßspannung**. Sie lassen sich in den meisten Fällen durch quasistationäre kapazitive Felder beschreiben.

Die quasistationäre Betrachtungsweise ist unter der Bedingung zulässig, dass alle Feldänderungen im betrachteten Raum *nahezu gleichzeitig*, d.h. ohne nennenswerte Zeitverzögerung stattfinden. D.h. Wellenausbreitungsvorgänge, wie sie bei (schnell) veränderlichen Feldern auftreten, werden vernachlässigt. Dadurch ergibt sich eine **räumliche und zeitliche Eingrenzung für die Gültigkeit der quasistationären Betrachtungsweise**, die sich folgendermaßen bestimmen lässt:

Die *Laufzeit* $\tau = x/v$ der elektromagnetischen Welle durch den betrachteten Raum (Länge x ,

| | |
|---|---|
| $\oint_x E \, dx \cong 0$ <p>Induktionsgesetz (2.1-32)</p> | $\oint_x H \, dx = \iint_A \left(J + \frac{\partial D}{\partial t} \right) dA$ <p>Durchflutungsgesetz (2.1-33)</p> |
| $\oiint_A B \, dA = 0$ <p>Kontinuitätsgleichung (2.1-34) für die magnetische Flußdichte</p> | $\oiint_A \left(J + \frac{\partial D}{\partial t} \right) dA = 0$ <p>Kontinuitätsgleichung (2.1-35) für die Leitungs- und Verschiebungsstromdichte</p> |

Bild 2.1-14: Maxwellsche Gleichungen für quasistationäre kapazitive Felder in Isolierstoffen (Vernachlässigung der induzierenden Wirkung des magnetischen Feldes).

Wellenausbreitungsgeschwindigkeit v) muss vernachlässigbar klein sein gegenüber der Zeit, in der sich die Feldstärken ändern.

Für sinusförmige Zeitabhängigkeit mit der Periodendauer T und der Frequenz f heißt dies

$$\tau = x/v \ll T/4 = (4f)^{-1} \quad (2.1-36a)$$

bzw. mit der Wellenlänge $\lambda = T \cdot v$

$$x \ll \lambda/4. \quad (2.1-36b)$$

Bei einem transienten Vorgang mit einer Anstiegszeit T_a gilt entsprechend

$$\tau = x/v \ll T_a \quad (2.1-37)$$

Als Richtwert für einen Spannungsfehler unter 0,5 % gilt bei langen Leitungen eine maximale Länge von

$$x < \lambda/60. \quad (2.1-38)$$

Bei Freileitungen mit Luftisolation bedeutet dies für $f = 50$ Hz, dass $x < 100$ km bleiben muss. Bei Kabeln mit einer geringeren Wellenausbreitungsgeschwindigkeit liegt diese Grenze noch niedriger. Bei Blitzstoßspannungen mit $T_a \cong 1 \mu\text{s}$ ergibt sich in Luft nur noch eine Länge $x < 22$ m, wenn der Anstieg mit T_a durch die Viertelperiode einer Wechselspan-

nung mit $T = 4 \mu\text{s}$ angenähert wird.

In den gängigen Isolierstoffen überwiegt bei Stoßspannung und bei netzfrequenter Wechselspannung i.d.R. der Verschiebungsstrom gegenüber dem Leitungsstrom, d.h. es gilt für die Beträge

$$\partial D / \partial t = \varepsilon_0 \varepsilon_r \partial E / \partial t \gg J = \kappa E. \quad (2.1-39)$$

Dies ist der Fall des (quasistationären) „**dielektrischen Verschiebungsfeldes**“, die Feldverteilung ergibt sich aufgrund der relativen Dielektrizitätszahlen ε_r für die einzelnen Materialien, Bild 2.1-15 (oben). In geometrisch einfachen Fällen kann man dafür ein Netzwerkmodell aus Kapazitäten aufstellen.

Bei überwiegendem Leitungsstrom bildet sich das Feld als (quasistationäres) **Strömungsfeld** aufgrund der Leitfähigkeiten κ aus, Bild 2.1-15 (unten). In geometrisch einfachen Fällen kann man dafür ein Netzwerkmodell aus Widerständen aufstellen.

Beispiel: Kondensatordielektrikum (Fortsetzung)

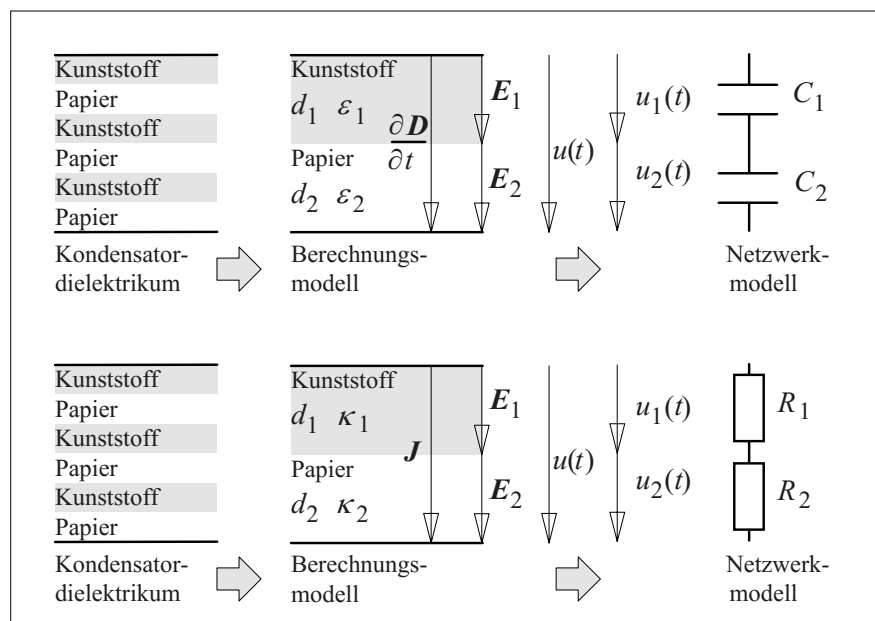
Das in Bild 2.1-11 betrachtete Kondensatordielektrikum ($d_1 = d_2 = 30 \mu\text{m}$, $\varepsilon_{r1} = 2,2$, $\varepsilon_{r2} = 4,4$) wird mit netzfrequenter Wechselspannung ($f = 50$ Hz, Effektivwert $U = 3$ kV) beansprucht. Es soll die Feldstärkebelastung in den Materialien bestimmt werden, Bild 2.1-15.

Bild 2.1-15:

Quasistationäres Feld in Isolierstoffen.

Oben: Verschiebungsstrom überwiegt ("Dielektrisches Verschiebungsfeld").

Unten: Leitungsstrom überwiegt ("Strömungsfeld").



Die Gesamtspannung ergibt sich nach Gl. (2.1-7) aus der Summe der beiden Teilspannungen an den Kunststoff-Folien und den imprägnierten Papieren:

$$u(t) = d_1 E_1(t) + d_2 E_2(t)$$

Daraus folgt für die Effektivwerte

$$U = d_1 E_1 + d_2 E_2.$$

Außerdem ist die Verschiebungsstromdichte nach der Kontinuitätsgleichung (2.1-35) in beiden Medien gleich:

$$\partial D / \partial t = \varepsilon_1 \cdot \partial E_1 / \partial t = \varepsilon_2 \cdot \partial E_2 / \partial t$$

Die Leitungsstromdichte J wird vernachlässigt. Nach Integration über der Zeit ergibt sich für die Effektivwerte

$$D = \varepsilon_1 \cdot E_1 = \varepsilon_2 \cdot E_2.$$

Für die Feldstärken folgt daraus mit der Gleichung für den Effektivwert der Spannung U

$$E_1 = U / (d_1 + d_2 \cdot \varepsilon_1 / \varepsilon_2) = 67 \text{ kV/mm}$$

und

$$E_2 = E_1 \cdot \varepsilon_1 / \varepsilon_2 = 33 \text{ kV/mm.}$$

Anmerkung: Offenbar wird das Kunststoff-Dielektrikum mit der niedrigeren Dielektrizitätszahl $\varepsilon_{r1} = 2,2$ mit $E_1 = 67 \text{ kV/mm}$ doppelt so stark belastet wie das öl-imprägnierte Papier. Das Feld wurde in das Medium mit der niedrigeren Dielektrizitätszahl verdrängt. Dieser als „**Feldverdrängung**“ bezeichnete Effekt ist von größter Bedeutung für die Hochspannungstechnik: Im vorliegenden Fall wird das Material mit der niedrigeren Durchschlagsfestigkeit (das Papier) auch weniger stark

belastet. Es gibt aber auch Fälle, in denen das elektrische Feld gerade in das schwächere Dielektrikum „verdrängt“ wird (z.B. in Luft einschlüsse mit $\varepsilon_r = 1$).

Die Frage, ob ein langsam veränderliches Feld als dielektrisches Verschiebungsfeld oder als Strömungsfeld zu betrachten ist, kann durch die Betrachtung des Übergangsvorgangs von anfänglichem Verschiebungsfeld zum stationären Strömungsfeld beantwortet werden, vgl. Bild 2.1-16 als Beispiel. Wenn die für die Feldänderungen maßgeblichen Zeiten wesentlich kleiner sind als eine Zeitkonstante τ , die das transiente Verhalten des Isoliersystems beschreibt, kann von einem **dielektrischen Verschiebungsfeld** ausgegangen werden:

$$\text{AC-Viertelperiode } T/4 \ll \tau \quad (2.1-40)$$

$$\text{bzw. Anstiegszeit } T_a \ll \tau$$

Felder, die sich im Vergleich zur Übergangszeitkonstanten τ des Isoliersystems sehr langsam verändern, können als **Strömungsfelder** betrachtet werden, für die die Leitfähigkeiten maßgeblich sind:

$$\text{AC-Viertelperiode } T/4 \gg \tau \quad (2.1-41)$$

$$\text{bzw. Anstiegszeit } T_a \gg \tau$$

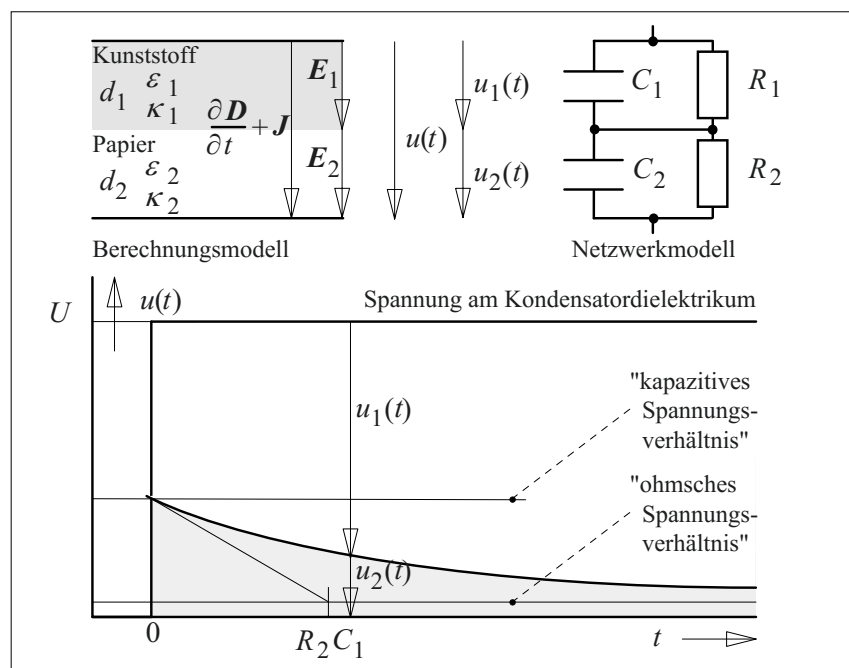


Bild 2.1-16:

Übergang vom dielektrischen Verschiebungsfeld zum (stationären) Strömungsfeld beim Anlegen einer sogenannten "Gleichspannung" $u(t)$.

Beispiel: Kondensatordielektrikum (Fortsetzung)

Nach dem Anlegen einer Gleichspannung werden für die Einstellung des stationären Zustandes viele Stunden benötigt, in denen die Kapazität C_1 der sehr hochohmigen Kunststoff-Folien über den Isolationswiderstand R_2 der leitfähigeren imprägnierten Papiere geladen wird. Maßgeblich ist hierfür näherungsweise die Zeitkonstante $R_2 C_1 \cong 0,5 \text{ h}$, Bild 2.1-16. Sie ist wesentlich größer als $T/4 = 5 \text{ ms}$ für eine Wechselspannung mit $f = 50 \text{ Hz}$, so dass die Annahme eines dielektrischen Verschiebungsfeldes im obigen Beispiel gerechtfertigt war. Das Anlegen der Spannung ist zunächst ein Übergangsvorgang, die Spannungsverteilung entspricht dem dielektrischen Verschiebungsfeld („kapazitive Spannungsverteilung“). Erst nach Abklingen des **Übergangsvorganges** ergibt sich ein Strömungsfeld („ohmsche Spannungsverteilung“).

Beispiel: Eigenentladung eines Dielektrikums

Auch die Eigenentladung eines Kondensators bzw. eines homogenen Dielektrikums ist ein exponentieller Übergangsvorgang. Die Zeitkonstante $\tau_e = R \cdot C = \epsilon/\kappa$ ergibt sich aus der Berechnung in einem Netzwerkmodell, wonach die geladene Kapazität C über den parallelen Isolationswiderstand R exponentiell entladen wird. Die geometrischen Größen kürzen sich heraus, so dass als Ergebnis die Zeitkonstante $\tau_e = \epsilon/\kappa$ folgt.

Eine feldtheoretische Überlegung führt zum gleichen Ergebnis: In einem sich selbst entladenden Dielektrikum wird der Leitungsstrom $J \cdot dA$ aus der Feldänderung gespeist, d.h. der „Stromkreis“ wird durch den antiparallelen Verschiebungsstrom $-\partial D/\partial t \cdot dA$ geschlossen. Mit den Materialgleichungen (2.1-19) und (-20) folgt daraus die Differentialgleichung für die Abnahme der elektrischen Feldstärke $E(t)$:

$$\kappa \cdot E(t) = -\epsilon \partial E / \partial t$$

Als Lösung ergibt sich eine exponentielle Feldabnahme mit der Zeitkonstanten $\tau_e = \epsilon/\kappa$, vgl. auch Gl. (2.4-3).

Im oben behandelten Beispiel eines Kondensatordielektrikums betragen die Eigenentladungs-Zeitkonstanten für die Kunststoff-Folien $\tau_{e1} = \epsilon_1/\kappa_1 = \epsilon_0 \epsilon_{r1}/\kappa_1 \cong 50 \text{ h}$ und für die ölprägnierten Papiere $\tau_{e2} = \epsilon_2/\kappa_2 = \epsilon_0 \epsilon_{r2}/\kappa_2 \cong 1 \text{ h}$.

Bei komplexen Isoliersystemen muss das Übergangsverhalten durch eine Netzwerkanalyse ermittelt werden. Insbesondere bei **Gleichspannungs- und Umpol-Beanspruchungen** muss man zunächst von der vorhandenen Feldverteilung (stationäres Strömungsfeld) ausgehen und entsprechend der Änderung (Anlegen oder Umpolen der „Gleichspan-

nung“) ein dielektrisches Verschiebungsfeld überlagern. In einem mehr oder weniger komplexen Übergangsvorgang stellt sich dann ein neuer stationärer Zustand in Form eines Strömungsfeldes ein. Dabei kann es vorkommen, dass die Isoliersysteme kurzfristig völlig anders belastet werden, als man es aufgrund einer reinen Wechsel- oder Gleichspannungsbetrachtung erwarten würde [7].

2.1.4.4 Nichtstationäre Felder (elektromagnetische Wellen)

Bei schnellveränderlichen Feldern, bei denen die Voraussetzungen der quasistationären Betrachtungsweise (Gl. (2.1-36) bis (-38)) nicht mehr vorliegen, müssen die Maxwell'schen Gleichungen in ihrer vollständigen Form (Gl. (2.1-14) bis (-17)) betrachtet werden. D.h. es ist insbesondere die gegenseitige Kopplung zwischen elektrischen und magnetischen Feldgrößen zu beachten. Es ergeben sich **elektromagnetische Wellen** mit endlicher Phasengeschwindigkeit v .

Werden die Maxwell'schen Hauptgleichungen in ihrer Differentialform durch Differentiation nach der Zeit und durch gegenseitiges Einsetzen ausgewertet, entstehen zwei unabhängige partielle Differentialgleichungen für die Feldgrößen $E(x,t)$ und $H(x,t)$. Es kann gezeigt werden, dass Lösungsansätze der Form

$$f(z - vt) \quad \text{und} \quad g(z + vt),$$

die Differentialgleichungen erfüllen. Sie können als Wellenvorgänge interpretiert werden, die sich in $+z$ - und $-z$ -Richtung ausbreiten. Die genaue Ausbildung des elektromagnetischen Wellenfeldes ergibt sich aus den Randbedingungen, sowie aus den Materialeigenschaften.

Beispiel: Ebene, homogene Welle

Als Beispiel wird die ebene homogene Welle in $+z$ -Richtung in einem nichtleitenden Medium ($\kappa = 0$) betrachtet: Aus den Maxwell'schen Hauptgleichungen folgt dann, dass die Feldvektoren E und H senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung, sowie senkrecht zueinander stehen. Man spricht vom *transversalen elektrischen und magnetischen Feld* bzw. von einer TEM-Welle, Bild

2.1-17. Die rechtwinklige Zuordnung der Vektoren \mathbf{E} und \mathbf{H} , die sich nach dem Induktions- und Durchflutungsgesetz gegenseitig bedingen, ergibt sich auch aus der Erläuterung zu den Maxwell'schen Hauptgleichungen nach Bild 2.1-6.

Die von \mathbf{E} und \mathbf{H} senkrecht zur Ausbreitungsrichtung aufgespannte Fläche wird als *Phasenfläche* bezeichnet, sie breitet sich mit der *Phasengeschwindigkeit* v in $+z$ -Richtung aus, Bild 2.1-17 mit Gl. (2.1-42). Die Beträge der zusammengehörenden Vektoren \mathbf{E} und \mathbf{H} stehen in einem festen Verhältnis $E/H = Z$, dem sogenannten *Wellenwiderstand*, Bild 2.1-17 mit Gl. (2.1-43).

Die *Phasengeschwindigkeit* in Vakuum und in Gasen entspricht der optischen Lichtgeschwindigkeit

$$v = v_0 = 300 \cdot 10^6 \text{ m/s}, \quad (2.1-44)$$

der *Wellenwiderstand* beträgt

$$Z = Z_0 = 377 \, \Omega. \quad (2.1-45)$$

In *Isolierstoffen* mit $\mu_r \cong 1$ sind diese Größen durch die Wurzel aus ε_r zu dividieren:

$$\begin{aligned} v &= v_0 / \sqrt{\varepsilon_r} \\ Z &= Z_0 / \sqrt{\varepsilon_r} \end{aligned} \quad (2.1-46)$$

In der Hochspannungstechnik ist der Wellencharakter der Felder immer dann zu berücksichtigen, wenn die quasistationäre Betrachtung zu einem beachtenswerten Fehler führt. Diese Grenze liegt nach Gl. (2.1-36) bis (-38) in Medien mit $\varepsilon_r = 1$ (z.B. Luft)

- für *Wechselspannung* ($f = 50 \text{ Hz}$) bei einer Länge von ca. 100 km ,
- bei *Schaltstoßspannung* ($T_{cr} = 250 \, \mu\text{s}$) bei einer Länge von ca. 5 km ,
- für *Blitzstoßspannung* ($T_S = 1,2 \, \mu\text{s}$) bei einer Länge von ca. 25 m und
- für schnelle transiente Vorgänge in gasisolierten Schaltanlagen (sogenannten „Fast Transients“, $T_a < 10 \text{ ns}$) bei einer Länge von weniger als $0,2 \text{ m}$.

D.h. bei Wechsel- und Schaltstoßspannungen liegen praktisch immer quasistationäre Ver-

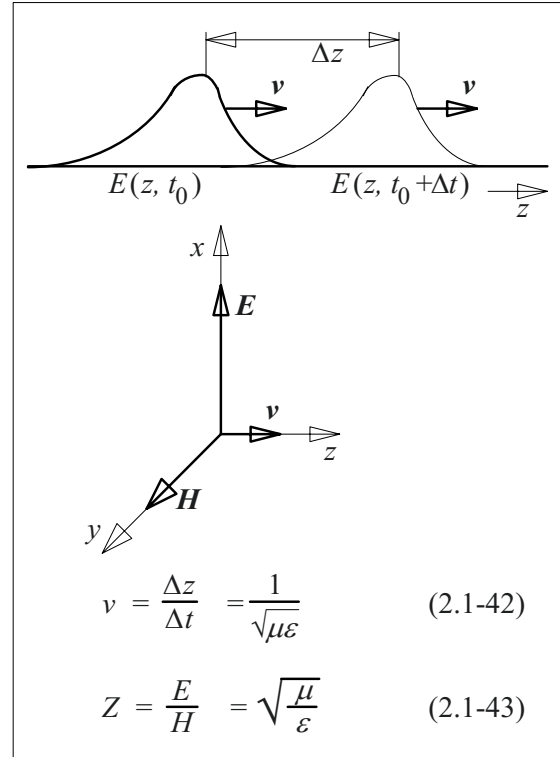


Bild 2.1-17: Ebene, homogene Welle mit transversalem E- und H-Feld.

hältnissen vor, bei Blitzstoßspannung meist noch näherungsweise, wenn die Stoßkreisabmessungen wenige 10 m nicht überschreiten. Überspannungsvorgänge mit Anstiegszeiten im μs -Bereich müssen in den ausgedehnten Systemen der Energie- und Datenübertragung *immer als Wanderwellen* betrachtet werden. Gleiches gilt für die noch steileren „Fast Transients“, bei denen schon in Anlagen von wenigen Metern Länge ausgeprägte Wanderwellenerscheinungen auftreten. Hieraus ergibt sich, dass in der Hochspannungstechnik insbesondere *leitungsgebundene Wanderwellen* bedeutsam sind, vgl. Kap. 2.6. Wichtige Beispiele aus der Praxis sind

- der Blitzeinschlag in eine Freileitung,
- „Fast Transients“ (FT) in druckgasisolierten Schaltanlagen (GIS),
- Impulsgeneratoren der sog. „Pulse Power“ Technologie, sowie
- Messsignale auf langen Messleitungen.

2.2 Technische Beanspruchungen

Die Isoliersysteme der Hochspannungstechnik werden aus Isolierstoffen aufgebaut, die sehr unterschiedlichen Anforderungen genügen müssen. Die elektrische Festigkeit spielt natürlich eine herausragende Rolle, sie ist aber dennoch nur eine unter vielen anderen Eigenschaften. Jeder Isolierstoff hat ein bestimmtes *Eigenschaftsprofil*, das ihn für einen bestimmten technischen Anwendungsfall geeignet oder nicht geeignet erscheinen lässt. Nachfolgend sind wichtige Bestandteile eines Eigenschaftsprofils zusammengestellt:

1. Elektrische Festigkeit,

als Kurzzeitfestigkeit und Lebensdauer kennlinie bei Gleich-, Wechsel- und Stoßspannungsbeanspruchung sowie unter der Wirkung von Verschmutzungen.

2. Dielektrische Eigenschaften,

wie z.B. Dielektrizitätszahl, Verlustfaktor, Leitfähigkeit und Oberflächenwiderstand.

3. Thermische Eigenschaften,

wie z.B. zulässige Maximal- und Dauertemperaturen, Wärmeleitfähigkeit, Wärmeausdehnungskoeffizienten, Wärmekapazität, Brennbarkeit, Kriechstromfestigkeit, Temperaturabhängigkeit von Materialparametern.

4. Mechanische Eigenschaften,

wie z.B. Zug- und Biegefestigkeiten, Elastizitätsmodul und Härte.

5. Beständigkeit gegen Umwelteinflüsse,

wie z.B. Witterungs- und UV-Beständigkeit und Beständigkeit gegen chemische Einwirkungen.

6. Verarbeitungsfähigkeit,

wie z.B. durch Gießen, Extrudieren, Schweißen, Kleben, mechanische Bearbeitung usw.

7. Kosten

für die Beschaffung und die Verarbeitung.

8. Recycling- und Entsorgungsfähigkeit.

Die Auslegung eines Isoliersystems muss sicherstellen, dass das Eigenschaftsprofil der verwendeten Dielektrika den auftretenden Be-

anspruchungen gerecht wird. Sie können elektrischer, thermischer, mechanischer und chemisch/physikalischer Art sein.

Nachfolgend werden ausschließlich die unterschiedlichen **elektrischen Beanspruchungen**, wie Gleichspannung (Kap. 2.2.1), Wechselspannung (Kap. 2.2.2), Schalt- und Blitzstoßspannung (Kap. 2.2.3 und 2.2.4), schnell ansteigende Impulse (z.B. Fast Transients, Kap. 2.2.5), sowie gemischte Beanspruchungen (Kap. 2.2.6) behandelt. Bei der Berechnung des elektrischen Feldes muss man die jeweils unterschiedliche Ausbildung des elektrischen Feldes berücksichtigen. Bild 2.2-4 gibt eine tabellarische Übersicht am Ende dieses Kapitels.

Das weite Spektrum der *nicht-elektrischen Beanspruchungen* in der Hochspannungstechnik wird bei der Behandlung der speziellen Isolierstoffeigenschaften (Kap. 5) und der unterschiedlichen technischen Anwendungen (Kap. 7) dargestellt.

2.2.1 Beanspruchung mit Gleichspannung

Zahlreiche technische Anwendungen sind mit Beanspruchungen durch hohe Gleichspannungen verbunden:

1.) In Geräten zur Gleichspannungsversorgung von Röntengeräten, Monitoren, Ladegeräten, Kopiergeräten, Impulsstromkreisen, Lackier- und Beschichtungseinrichtungen, sowie Prüfanlagen treten hohe elektrische Gleichfelder insbesondere in den Sperrschichten der Gleichrichterelemente und in den Dielektrika der Glättungs- und Energiespeicherkondensatoren auf, Bild 2.2-1.

Dabei handelt es sich *häufig nicht um reine Gleichspannungsbeanspruchungen*, sondern um Mischfeldbeanspruchungen: Die Steuerkondensatoren und die Gleichrichter werden zusätzlich durch eine überlagerte Wechselspannung belastet. Die Spannung von Glättungskondensatoren besitzt eine gewisse „Welligkeit“ und Energiespeicherkondensatoren („Stoßkondensatoren“) werden oft stoßartig

entladen. Außerdem stehen die Gleichspannungen häufig nicht so lange an, dass es zur Ausbildung eines stationären Strömungsfeldes kommt, vgl. Bild 2.1-16. Die genaue Art der Spannungsbelastung der einzelnen Bauelemente ergibt sich erst aus der Analyse der Spannungsverläufe in einer gegebenen Schaltung. Unterschiedliche Schaltungen zur Erzeugung hoher Gleichspannungen werden in Kapitel 6.2 genauer behandelt.

2.) In Anlagen zur Hochspannungsgleichstromübertragung (HGÜ) werden von Transformatoren gespeiste Wechselrichterschaltungen gleichspannungsseitig in Reihe geschaltet, Bild 2.2-2. Dadurch ergeben sich für die Isolationen gemischte Beanspruchungen aus Gleich- und Wechselspannungen.

Die Isolierungen müssen darüber hinaus auch die Übergangsvorgänge beherrschen, die beim Einschalten, Abschalten und Umpolen der Gleichspannungen auftreten. Für die Auslegung sind spezielle Gleichspannungsprüfzyklen mit Polaritätswechseln und Spannungsänderungen maßgeblich, vgl. Bild 2.2-4.

Bei der Berechnung elektrischer Feldstärken muss man ggf. dem vorliegenden *stationären Strömungsfeld* ein *dielektrisches Verschiebungsfeld* überlagern, das der Amplitude der Spannungsänderung entspricht, Kap. 2.1.4.4.

Im stationären Zustand ergeben sich bei hohen Leiter-Erd-Spannungen (ca. ab 500 kV) Probleme durch Verschmutzung und Benetzung von Isolatoroberflächen, weil die relativ hohe und ungleichmäßige Leitfähigkeit der feuchten Schmutzaufgabe eine undefinierte Verzerrung des elektrischen Feldes verursacht [7] ... [10].

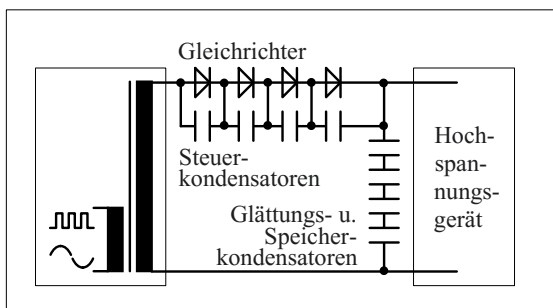


Bild 2.2-1: Einweg-Hochspannungsgleichrichterschaltung mit Steuer- und Glättungskondensatoren.

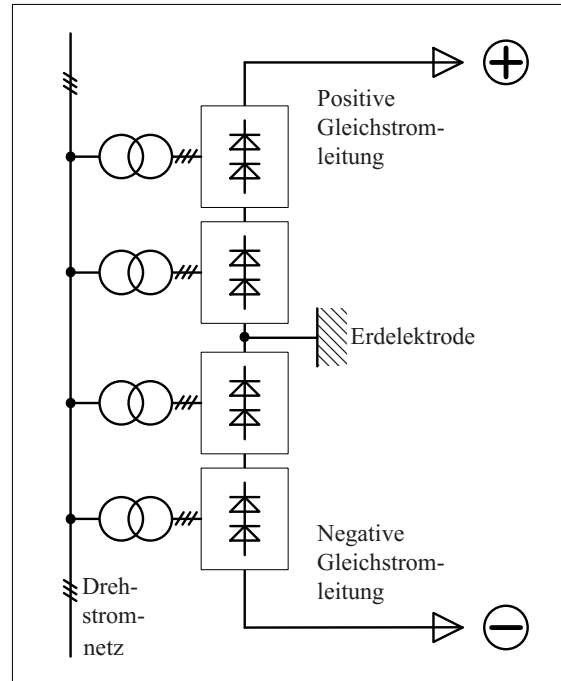


Bild 2.2-2: Wechselrichterstation einer HGÜ (Hochspannungsgleichstromübertragung).

2.2.2 Beanspruchung mit Wechselspannung

Die verlustarme Energieübertragung mit Drehstrom erfordert den Einsatz hoher Spannungen. Dadurch werden die Isoliersysteme mit hohen Wechselspannungen bei einer Frequenz $f = 50$ Hz bzw. $f = 60$ Hz belastet. Nach den Überlegungen in Kap. 2.1.4.3 und 2.1.4.4 kann in den Isolierungen der Betriebsmittel fast immer von einem *quasistationären* elektrischen Feld in Form eines *dielektrischen Verschiebungsfeldes* ausgegangen werden. D.h. in den gängigen Isolierstoffen mit geringer Leitfähigkeit ergibt sich die Feldverteilung aufgrund der *Dielektrizitätszahlen*.

Die Übertragungsspannung eines Drehstromsystems ist durch die „*höchste Spannung für Betriebsmittel*“ U_m definiert, die im Betrieb an keinem Ort des Netzes überschritten werden soll [11]. Es handelt sich dabei um den Effektivwert der verketteten Spannung, d.h. um die Spannung zwischen den Leitern des Drehstromsystems. Genormte Werte sind

im sog. „**Mittelspannungsbereich**“

(1 kV < U_m < 52 kV)

$U_m =$ 3,6 kV,
7,2 kV,
12 kV (in Deutschland üblich),
17,5 kV,
24 kV (in Deutschland üblich),
36 kV,

im sog. „**Hochspannungsbereich**“

(52 kV ≤ U_m < 300 kV)

$U_m =$ 52 kV,
72,5 kV,
123 kV (in Deutschland üblich),
145 kV,
170 kV,
245 kV (in Deutschland üblich)

und im sog. „**Höchstspannungsbereich**“

($U_m \geq 300$ kV)

$U_m =$ 300 kV,
362 kV,
420 kV (in Deutschland üblich),
525 kV,
765 kV.

Anmerkung: In einem sehr allgemeinen Sinn ist Hochspannung jede Spannung oberhalb der Niederspannung (1 kV). Die o.g. Grenzen für die verschiedenen Spannungsbereiche in der Energieversorgung können länderspezifisch variieren.

Anmerkung: Vielfach ist es noch üblich, für die Spannungsebenen mit $U_m = 12, 24, 123, 245$ und 420 kV die *alten Benennungen* („*Nennspannungen*“) 10, 20, 110, 220 und 380 kV zu verwenden.

Der Durchschlag einer Isolierung wird meist vom maximal auftretenden Wert, d.h. also vom Scheitelwert bestimmt. Bei sinusförmigen Spannungen erfolgt die Beanspruchung des Dielektrikums zwischen den Leitern (Index „LL“) unter normalen Betriebsbedingungen mit dem Scheitelwert

$$\hat{U}_{LL} = \sqrt{2} \cdot U_m \quad (2.2-1)$$

und zwischen einem Leiter und Erde (Index „LE“) mit dem Scheitelwert

$$\hat{U}_{LE} = \sqrt{2} \cdot U_m / \sqrt{3} \quad (2.2-2)$$

Die Betriebsmittel im Netz werden so bemessen, dass sie diesen *Dauerbeanspruchungen* über viele Jahrzehnte widerstehen.

Kurzfristig können im Netz betriebsfrequente *Überspannungen* auftreten, wie z.B. bei einem plötzlichen Lastabwurf. Bei Netzen bis $U_m = 123$ kV wird oft der Sternpunkt nicht starr geerdet, so dass sich im Erdschlussfall das Sternpunktpotential verlagert und die Isolierungen der nicht betroffenen Phasen gegen Erde mit der verketteten Spannung gemäß Gl. (2.2-1) beansprucht werden. Resonanzüberhöhungen bei Netzfrequenz sollten durch die Netzauslegung ausgeschlossen sein, sie treten jedoch u.U. bei Oberschwingungen auf.

Die Festigkeit einer Isolierung gegenüber Überspannungen ist durch eine Wechselspannungsprüfung mit einer Prüfdauer von einer Minute („*Nenn-Steh-Wechselspannungsprüfung*“) nachzuweisen. Der Effektivwert der Prüfspannung, mit dem die Isolation zu beanspruchen ist, wird in Bezug auf die höchste Spannung für Betriebsmittel U_m festgelegt [11]. Dieser Bezug auf die höchste Spannung für Betriebsmittel wird als „*Isolationskoordination*“ bezeichnet, Kap. 6.1.4.

Für die niedrigeren Spannungsebenen beträgt der Wert der Prüfwechselspannungen fast $3 \cdot U_m$, für die höheren Spannungsebenen liegt der Faktor bei ca. 2 bis 1,5. Diese kurzzeitige Prüfbeanspruchung ist eine wichtige Bemessungsgröße für die Auslegung der Isolation.

Je nach Betriebsmittel gelten bei Wechselspannungsprüfungen noch spezielle Vorschriften über die zulässige *Teilentladungsintensität* bei verschiedenen Spannungswerten als Nachweis einer bestimmten *Isolationsqualität* (vgl. Kap. 3.6 und 6.4.2).

Wechselspannungsprüfungen von Kabeln werden zur Reduktion der kapazitiven Blindleistung auch mit sehr niedriger Frequenz („*Very Low Frequency*“ VLF, $f = 0,1$ Hz) oder mit Resonanzprüfanlagen anstelle der weniger aussagefähigen Gleichspannungsprüfung durchgeführt, Bild 2.2-4, Kap. 6.2.1. Transformatorprüfungen müssen mit *erhöhter Frequenz* (z.B. $f = 100$ Hz) durchgeführt werden, damit der

magnetische Kern nach Überschreiten der Bemessungsspannung und beim Anfahren der Prüfspannungswerte nicht in die Sättigung gerät, Bild 2.2-4. D.h. durch Verdopplung der Frequenz wird die induzierte Spannung ohne Erhöhung der Flussdichte B verdoppelt.

Erheblich höhere Frequenzen treten auf, wenn der Netzspannung *Oberschwingungen* überlagert sind. Sie können dazu führen, dass die Scheitelwerte bei gleichem Effektivwert erheblich vom Scheitelwert der sinusförmigen Netzspannung abweichen. Außerdem können Oberschwingungen vergrößerte kapazitive Ladeströme und dielektrische *Verluste* verursachen und verlustbehaftete Isolierungen (z.B. alte ölpapierisolierte Kompensationskondensatoren) thermisch zusätzlich belasten.

2.2.3 Beanspruchung mit Schaltstoßspannung („Innere Überspannungen“)

Durch Schaltvorgänge im Netz, z.B. durch das Unterbrechen von Strömen in induktiven Stromkreisen des Netzes, können impulsförmige Überspannungen entstehen. Entsprechend der im Netz selbst liegenden Ursache spricht man von „*inneren Überspannungen*“.

Ihre Unschädlichkeit für Isoliersysteme wird in der Regel durch eine Typprüfung für Betriebsmittel mit $U_m > 300$ kV nachgewiesen. Der Scheitelwert des genormten Schaltstoßspannungsimpulses (Kap. 6.2.3.1) wird im Rahmen der Isolationskoordination in Bezug auf U_m festgelegt [11]. Die Scheitelzeit T_p (peak time) beträgt üblicherweise 250 μ s, die Rückenhalbwertszeit 2500 μ s.

Bei der Berechnung der elektrischen Feldstärken in gängigen Isolierstoffen kann gemäß Kap. 2.1.4.4 von *quasistationären* Verhältnissen in Form eines *dielektrischen Verschiebungsfeldes* ausgegangen werden, das von den *Dielektrizitätszahlen* bestimmt wird. Mit $T_p = 250$ μ s ergibt die quasistationäre Betrachtung bis zu Längen von etwa 5 km vernachlässigbar kleine Fehler, Gl. (2.1-37), Bild 2.2-4.

2.2.4 Beanspruchung mit Blitzstoßspannung („Äußere Überspannungen“)

Direkte Blitzeinschläge in Betriebsmittel der Energieversorgung verursachen in den ausgedehnten Leitungen und Kabeln Wanderwellen, die zu erheblichen kurzzeitigen Überspannungen führen. Auch Blitzeinschläge in Leitungsmasten, Erdseile oder andere, den Leitern benachbarte Strukturen können zur Einkopplung von schnellveränderlichen Feldern und Wanderwellenvorgängen führen. Entsprechend den durch atmosphärische, d.h. durch äußere Einflüsse verursachten Überspannungen spricht man von „*äußeren Überspannungen*“.

Amplituden und Zeitverläufe der äußeren Überspannungen sind sehr starken Schwankungen unterworfen. Charakteristisch sind jedoch ein schneller Spannungsanstieg im μ s-Bereich und ein langsamer Rückenabfall des Überspannungsimpulses (Kapitel 6.2.4). Für die Prüfung von elektrischen Betriebsmitteln wird deshalb eine genormte Blitzstoßspannung mit einer Stirnzeit $T_s = 1,2$ μ s und einer Rückenhalbwertszeit von 50 μ s festgelegt. Im Rahmen der Isolationskoordination werden den unterschiedlichen Spannungsebenen jeweils Scheitelwerte der „Bemessungs-Steh-Blitzstoßspannung“ U_{TB} zugeordnet [11]. Sie liegen mehr als doppelt so hoch, wie die Nenn-Steh-Wechselspannungen.

Die Berechnung der elektrischen Feldstärken kann bis zu Abmessungen von ca. 25 m, d.h. in relativ konzentrierten Geräten und Anlagen, unter Annahme *quasistationärer Verhältnisse* in Form eines dielektrischen Verschiebungsfeldes erfolgen, Bild 2.2-4. In ausgedehnten Systemen und Anlagen, wie z.B. bei Kabeln und Leitungen, muss der *Wellencharakter* der Beanspruchung berücksichtigt werden. Dies gilt besonders, wenn die Stoßspannung im Rücken abgeschnitten wird. Je nach Kreisinduktivität ergeben sich dabei u.U. Zusammenbruchzeiten weit unter 100 ns. In schwach gedämpften Kreisen (z.B. bei Verwendung eines nicht gedämpften Spannungsteilers) treten dabei „Wanderwellenschwingungen“ auf.

Ein weiteres Beispiel für stoßförmige elektrische Beanspruchungen ist die *Entladung von Energiespeicherkondensatoren*, die oft auch als *Stoßkondensatoren* bezeichnet werden, Bild 2.2-4. Typischerweise liegen die Periodendauern bzw. Zeitkonstanten der Entladevorgänge im μs -Bereich, so dass in räumlich konzentrierten Systemen i.d.R. mit quasistationären Feldern gerechnet werden darf.

(Stoß-)Entladekreise der Hochleistungsimpulstechnik (Pulsed Power) werden in vielen technischen Anwendungen eingesetzt, Kap. 7.4.2:

- In der *Medizintechnik* erfolgt die Erzeugung von akustischen Stoßwellen durch Zünden einer Funkenstrecke unter Wasser oder durch elektrodynamische Wandler. Die entstehende Welle wird z.B. in *Nieren- oder Gallensteinzertrümmerern* auf den zu zerstörenden Stein fokussiert.
- In der Fertigungstechnik kann durch fokussierte akustische Stoßwellen eine *Hochgeschwindigkeits-Materialumformung* durchgeführt werden.
- Stoßwellen werden zur *elektrodynamischen Fragmentierung*, z.B. beim *Recycling* zur Zerlegung und Zerkleinerung von

Verbundmaterialien eingesetzt [12].

- Durch *Elektroporation* werden biologische Zellen mit geringem Energieaufwand bei niedrigen Temperaturen aufgeschlossen.
- *Nanokristalline Werkstoffe* sind mit hoch-energetischen Impulsen durch Aufschmelzen und rasches Abkühlen herstellbar.
- Stoßentladekreise werden auch zur Energieversorgung von *Impulslasern* und anderen *Impuls-(Blitz-)Lichtquellen* benötigt.

2.2.5 Beanspruchung mit sehr schnell ansteigenden Impulsen („Fast Transients“)

Es gibt viele Beispiele für schnell veränderliche Impulse in unterschiedlichen technischen Anwendungen:

1.) Entladungsvorgänge in **gasisolierten Schaltanlagen (GIS)**, die z.B. durch Überschläge oder Trennerschaltungen hervorgerufen werden, sind wegen der geringen Isolationsabstände und der erhöhten Gasdrücke mit *sehr geringen Anstiegszeiten* im ns-Bereich verbunden. In den oft viele Meter langen ko-

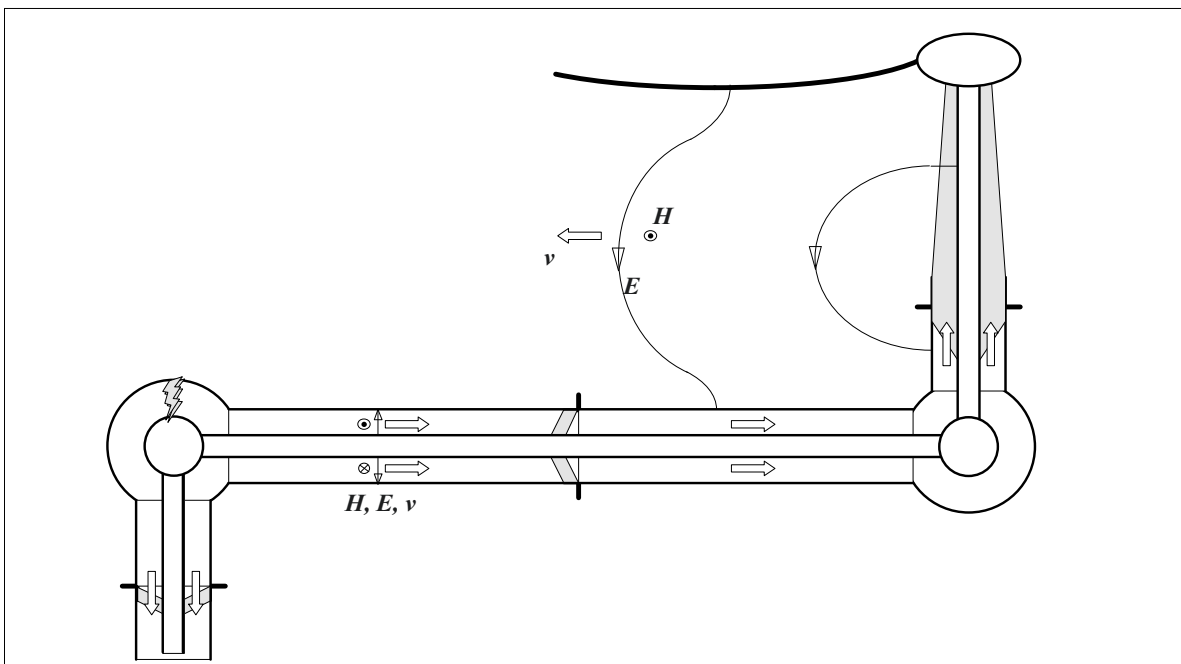
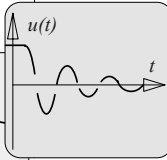
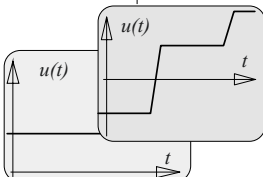
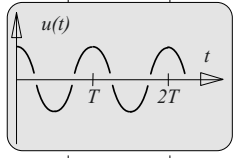
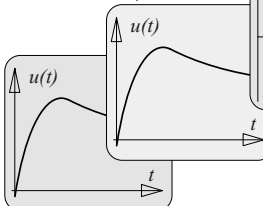
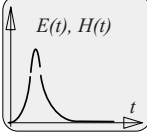
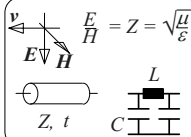




Bild 2.2-3: Ausbreitung von Wanderwellen innerhalb und außerhalb einer gasisolierten Schaltanlage (GIS) nach einem Überschlag (schematische Darstellung ohne Berücksichtigung von Reflexionen).

| Gleichspannung | | Wechselspannung | | | Stoßspannung | | | Schnell ansteigende Impulse |
|---|----------------------------------|---|-----------------|-----------------------------------|---|-----------------------------|--|---|
| Dauerbeanspruchung | Schaltvorgänge Umpolungen | VLF 0,1 Hz | AC 50/ 60 Hz | AC 100/ 120 Hz 10 .. 500 Hz | Schaltstoßspannung | Blitzstoßspannung | Stoßentladungen | |
| Tage ... Monate | Stunden Änderungen in Minuten | T = 10 s | T = 20 ms | T = 10 ms | 250/ 2500 µs | 1,2/ 50 µs |  | Anstiegszeiten im ns-Bereich |
|  | |  | | |  | | |  |
| stationär | | Strömungsfeld | | | | | |  |
| quasistationär | | | | | | | | |
| Widerstandsnetzwerk | | (quasistationäres) dielektrisches Verschiebungsfeld | | | | | | |
| $J = \kappa E$  | | $D = \epsilon E$  | | | Netzwerk aus Kapazitäten | | | |
| | | | | | elektromagnetische Welle | | | |
| | | | | | System mit verteilten Parametern | | | |
| Hochspannungsgleichstromübertragung (HGÜ) | | Drehstromübertragung | | | "Innere" (Schalt-) | "Äußere" (Blitz-) | Abgeschnittene Blitzstoßspanng. | Fast Transients |
| Röntgen Monitore Laser Ladeeinrichtungen Elektrofilter Beschichtung Beflockung | | 50(60) Hz Ober-schwing-ungen Kabel-prüfungen | | | Überspannungen | | Entladung von Stoßkondensatoren: Medizintechnik Biotechnologie Fertigung Impuls laser Recycling | Pulsed Power Nuklearer elektromagnet. Impuls (NEMP) |
| | | Transformatorprüfungen Resonanzprüfungen (vor Ort) | | | Schaltstoßspannungsprüfungen | Blitzstoßspannungsprüfungen | | Teilentladungsimpulse (TE) |

Bei der Berechnung von „Fast Transients“ ist grundsätzlich der schnellveränderliche Charakter der Vorgänge zu beachten. Meist kann man die Vorgänge als leitungsgebundene TEM-Wellen (*Wanderwellen*, Kapitel 2.6) behandeln. Innerhalb einer Phasenfläche zwischen Innen- und Außenleiter ist dann auch das Ringintegral über $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{x}$ gleich Null (\mathbf{H} und \mathbf{B} durchdringen die Phasenflächen nicht!), so dass Spannungen gemäß Gl. (2.1-7) definiert werden können. Die Definition von Spannungen in Längsrichtung der Leitung ist allerdings **nicht** mehr möglich.

3.) Weitere *Beispiele* für sehr schnell ansteigende Hochspannungsimpulse finden sich in der „**Pulsed-Power**“-Technologie, die extrem leistungsstarke und kurzzeitige Impulse für Teilchenbeschleuniger auf Wanderwellenleitungen erzeugt, um Materialien in extremen Zuständen zu untersuchen, und kontrollierte Kernfusionsreaktionen zu zünden. Die Halbwertsbreiten der Impulse liegen bei einigen 10 ns, die Anstiegszeiten bei mehreren ns, die Spitzenleistungen im TW-Bereich und die Spannungen im MV-Bereich, [14], [15].

4.) Im Falle einer nuklearen Explosion außerhalb der Erdatmosphäre wird erwartet, dass sich positive und negative Ladungsträger unter der Wirkung der entstehenden Strahlung in der Atmosphäre in vertikaler Richtung trennen. Trennung und Rekombination der Ladung erzeugen ein impulsförmiges elektromagnetisches Feld, das als **nuklearer elektromagnetischer Impuls** (NEMP) bezeichnet wird. Als Folgewirkung werden hohe Überspannungen in den räumlich ausgedehnten Systemen der Energieversorgung und der Telekommunikation erwartet.

5.) Auch **Teilentladungsimpulse**, die vorwiegend bei Wechselspannung in Fehlstellen von Isolationen auftreten, ohne dass es sofort zum Durchschlag kommt, haben sehr kurze Anstiegszeiten im ns-Bereich. Der Energie- und Ladungsumsatz einzelner Entladungen ist sehr klein, sie stellen aber dennoch wegen ihrer Erosionswirkung in empfindlichen, meist organischen Isolierstoffen eine gefährliche Begleiterscheinung bei Wechselspannungsbeanspruchungen dar.

Der schnellveränderliche Charakter der Impulse ist für die Teilentladungsmesstechnik von Bedeutung.

6.) In der **Hochspannungsmesstechnik** wird das Übertragungsverhalten von Stoßspannungsmesssystemen mit Hilfe von Sprunggeneratoren untersucht, die Rechteckimpulse mit Anstiegszeiten im ns-Bereich erzeugen. Wegen der großen räumlichen Ausdehnungen müssen dabei Wanderwellenerscheinungen auf Messkabeln und die direkte Einkopplung freier, leitungsungebundener elektromagnetischer Wellen berücksichtigt werden [18], [19].

2.2.6 Mischfeldbeanspruchungen

In vielen Fällen treten die elektrischen Beanspruchungen in einer Kombination der oben geschilderten Fälle auf. Dabei ist es dann oft schwierig, die elektrischen Feldstärken und die jeweils gültigen elektrischen Festigkeiten zu ermitteln. Wichtige Beispiele:

1. Überlagerung von Gleich- und Wechselspannungen in den Stromrichtertransformatoren von HGÜ-Anlagen.

2. Gleichspannungs- und Umpolprüfungen: Den stationären Feldverteilungen überlagert sich bei Änderungen der Amplitude oder der Polarität ein quasistationäres Feld. Je nach den Leitfähigkeiten bzw. den Eigenentladungszeitkonstanten ε/κ der Isoliermedien können sehr lange Zeiten bis zur Einstellung eines neuen stationären Zustandes vergehen. Bei geschichteten Isolationen kann es während des Übergangsvorganges zu starken elektrischen Belastungen an Materialien kommen, die im stationären Zustand wesentlich schwächer beansprucht werden.

3. Gleich- und Wechselrichterschaltungen: Viele Bauelemente werden mit einer Überlagerung aus Gleich-, Wechsel- und Impulsspannung beansprucht.

4. Energiespeicher- und Impulskondensatoren: Beim Laden erfolgt die Belastung mit einer ansteigenden Spannung. Je nach Speicherdauer geht das quasistationäre Feld nach der

Aufladung in ein stationäres Strömungsfeld über. Während der Entladung liegt eine impulsförmige Belastung, oft in Form einer gedämpften Schwingung vor.

5. Fast Transients: Die schnellveränderlichen Wanderwellen überlagern sich dem momentan vorliegenden Zustand aufgrund des netzfrequenten quasistationären Zustandes. Dadurch können erhebliche Überspannungen entstehen, für die die Betriebsmittel u.U. nicht ausreichend isoliert sind.

Bei *Feldberechnungen* zur Ermittlung der elektrischen Beanspruchungen werden die unterschiedlichen Beanspruchungsarten i.d.R. getrennt ermittelt und anschließend zur gemischten Beanspruchung *linear überlagert*. Im Gegensatz zu den magnetischen Werkstoffen mit nichtlinearen Magnetisierungskurven verhalten sich feste dielektrische Werkstoffe weitgehend linear, solange noch keine Entladungsvorgänge stattfinden. Flüssige Isolierstoffe können jedoch *nichtlineare Leitfähigkeiten* aufweisen, Kap. 4.2.2.2.

In Situationen mit gemischten Beanspruchungen ist es oft schwierig, die berechneten Feldstärkewerte zu *bewerten*. So ist z.B. bei Impulskondensatoren die stationäre Gleichspannungsbeanspruchung im Vergleich zur schnellveränderlichen Beanspruchung beim Entladungsvorgang meist völlig unkritisch, obwohl die Amplituden in beiden Fällen übereinstimmen.

In der Praxis sind deshalb oft *Durchschlags- und Lebensdauerversuche* unter möglichst *realitätsnahen Bedingungen* erforderlich.

2.3 Statische, stationäre und quasistationäre Felder in homogenen Dielektrika

Bei statischen, stationären und langsam veränderlichen Feldern in Isolierstoffen kann das elektrische Feld als Quellenfeld angesehen werden. D.h. ein induziertes elektrisches Wirbelfeld tritt nicht auf oder kann vernachlässigt werden. Die Definition von Potentialdifferenzen und Spannungen ist zulässig.

Besteht der gesamte zu betrachtende Feldraum **aus einem einzigen, homogenen Dielektrikum**, so wird die Feldverteilung nicht von den Materialeigenschaften (Dielektrizitätszahl ϵ , Leitfähigkeit κ) beeinflusst und die Berechnung der elektrischen Feldstärke erfolgt nach den gleichen Zusammenhängen. D.h. die nachfolgend beschriebenen Feldberechnungsverfahren sind i. d. R. auf Gleich-, Wechsel- und Stoßspannungsbeanspruchungen anwendbar.

Zunächst wird die *direkte analytische Auswertung der Feldgleichungen* betrachtet (Kapitel 2.3.1 und 2.3.2). Es lassen sich die Grundanordnungen mit homogenem, kugelsymmetrischem und zylindersymmetrischem Feld berechnen. Einige wichtige Felder der Hochspannungstechnik können daraus näherungsweise abgeschätzt werden.

Auf *graphischem Weg* kann mit Hilfe von Zeichenregeln ein qualitatives bzw. halb-quantitatives Feldbild ermittelt werden (Kap. 2.3.3). Dies ist häufig für eine qualitative Einschätzung der Feldverhältnisse von großem Wert.

Die *Methode der konformen Abbildung* (Kapitel 2.3.4) ermöglicht die Berechnung einiger Sonderfälle, wie z.B. des Randfeldes eines Plattenkondensators.

Mit Hilfe der Felder von *Ersatzladungen* (Kapitel 2.3.5) können ebenfalls wichtige Felder berechnet werden, wie z.B. Kugel gegen Kugel oder Zylinder gegen Ebene.

Oft ist nur die Maximalfeldstärke von Bedeutung, sie kann für viele Anordnungen über *Ähnlichkeitsbeziehungen und Geometriefaktoren* (Homogenitätsgrad, Schwaigerscher Ausnutzungsfaktor) aus bereits berechneten Anordnungen abgeleitet werden (Kap. 2.3.6).

Vor Einführung der numerischen Feldberechnung war die *Ausmessung* der Potentiale elektrischer Strömungsfelder in einer leitfähigen Flüssigkeit („Elektrolytischer Trog“) oder auf leitfähigem Papier („Field Plotter“) die einzige Möglichkeit zur Bestimmung elektrischer Felder in Anordnungen mit beliebig geformten Elektroden (Kap. 2.3.7).

2.3.1 Analytische Auswertung der Kontinuitätsgleichung

2.3.1.1 Grundsätzlicher Berechnungsweg

Die Kontinuitätsgleichung für Leitungs- und Verschiebungsstrom (Gl. (2.1-17)),

$$\oiint_A \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{A} = 0,$$

ergibt nach Integration über der Zeit den „Satz vom Hüllenfluss“ bzw. den „Gaußschen Satz“, Gl. (2.1-21) und (2.3-1). Er besagt, dass die von einer Hüllfläche A eingeschlossene Ladung Q gleich dem durch die gesamte Hüllfläche tretenden Verschiebungsfluss $\oiint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A}$ ist:

$$\oiint_A \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = Q \quad (2.3-1)$$

Mit Gl. (2.3-1) kann die Feldberechnung für einige grundlegende Anordnungen in vier Berechnungsschritten durchgeführt werden:

Schritt 1: Bei Anordnungen mit symmetrischen Feldern wird Gl. (2.3-1) nach dem Betrag von \mathbf{D} aufgelöst. Es ergibt sich der Zusammenhang zwischen felderzeugender Ladung Q und dem Betrag der elektrischen Feldstärke $E = D/\varepsilon$.

Beispiel: Kugelförmige Elektrode im freien Raum

Der Betrag der elektrischen Feldstärke E soll in der ku-

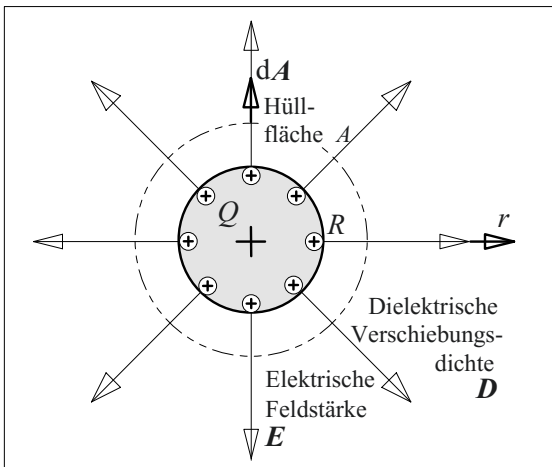


Bild 2.3-1: Kugelsymmetrische Elektrode im freien Raum (Satz vom Hüllenfluss).

gelsymmetrischen Anordnung nach Bild 2.3-1 als Funktion der Spannung U und des Radius r berechnet werden. Die Gegenelektrode mit den negativen Gegenladungen wird als unendlich weit entfernt angenommen.

Schritt 1: Als Hüllfläche wird eine Kugelfläche bei einem Radius r gewählt. Dadurch wird die Symmetrie der Anordnung ausgenutzt, denn die Verschiebungsdichte \mathbf{D} hat überall auf der gewählten Fläche den konstanten Betrag $D(r)$. Außerdem sind die Vektoren \mathbf{D} und $d\mathbf{A}$ überall auf der Hüllfläche parallel, so dass das Skalarprodukt $\mathbf{D} \cdot d\mathbf{A}$ gleich dem Produkt der Beträge $D \cdot dA$ ist. In Gl. (2.3-1) kann dann die konstante Verschiebungsdichte vor das Integral gezogen werden:

$$\oiint_A \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = D(r) \oiint_A dA = Q$$

Das Hüllintegral über die Fläche ergibt die Fläche $A(r) = 4\pi r^2$ selbst:

$$D(r) \cdot A(r) = D(r) \cdot 4\pi r^2 = Q$$

Hieraus folgt

$$D(r) = Q/(4\pi r^2) \quad \text{und} \quad E(r) = Q/(4\pi\varepsilon r^2). \quad (2.3-2)$$

Der Betrag der elektrischen Feldstärke nimmt also mit $1/r^2$, d.h. quadratisch mit dem Radius ab.

Schritt 2: In der Hochspannungstechnik muss die elektrische Feldstärke E als Funktion der anliegenden Spannung angegeben werden. Dies ist möglich, indem der aus dem Satz vom Hüllenfluss nach Gl. (2.3-1) abgeleitete Feldstärkeverlauf gemäß Gl. (2.1-7) integriert wird:

$$U_{21} = \Delta\varphi_{21} = \varphi_2 - \varphi_1 = \int_2^1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x} \quad (2.3-3)$$

Dadurch ergibt sich ein Zusammenhang zwischen Q und U , d.h. $Q = f(U)$.

Schritt 3: Das Verhältnis von Q zu U bestimmt nach Gl. (2.1-10) die Kapazität C der Anordnung:

$$C = Q / U \quad (2.3-4)$$

Schritt 4: Der gesuchte Zusammenhang zwischen Feldstärke E und Spannung U

$$E = f(U)$$

ergibt sich aus $E = f(Q)$ im ersten Schritt und $Q = f(U)$ im zweiten Schritt.

Schritt 5: In einem weiteren Schritt können Maximalwerte der Feldstärke bestimmt und Optimierungsaufgaben gelöst werden, wie z.B. die Minimierung der maximalen Feldstärke.

Beispiel: Kugelförmige Elektrode (Fortsetzung)

Schritt 2: In Fortsetzung des obigen Beispiels ist die Spannung zwischen der Elektrodenoberfläche mit dem Radius $r = R$ und der bei $r \rightarrow \infty$ angenommenen Gegenelektrode (mit den negativen Gegenladungen) durch

$$\begin{aligned} U_{R\infty} &= \int_R^{\infty} E(r) dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \int_R^{\infty} \frac{1}{r^2} dr \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left[-\frac{1}{r} \right]_R^{\infty} \\ &= Q / (4\pi\epsilon R) \end{aligned}$$

gegeben, wenn die Integration radial, d.h. parallel zum elektrischen Feld E erfolgt. D.h. es gilt

$$Q = 4\pi\epsilon R U. \quad (2.3-5)$$

Schritt 3: Die Kapazität ergibt sich hieraus zu

$$C = Q / U = 4\pi\epsilon R. \quad (2.3-6)$$

Schritt 4: Für die elektrische Feldstärke folgt aus den Schritten 1 und 2 nach Gl. (2.3-2) und (2.3-5)

$$E(r) = U R / r^2. \quad (2.3-7)$$

Schritt 5: Die maximale Feldstärke ergibt sich an der Elektrodenoberfläche bei $r = R$ zu

$$E_{\max} = E(R) = U / R. \quad (2.3-8)$$

2.3.1.2 Kugelsymmetrische Felder

Das elektrische Feld einer „*leitenden Kugel im Raum*“ wurde in obigem Beispiel berechnet, vgl. Bild 2.3-1, sowie Gl. (2.3-6), (-7) und (-8). Die maximale Feldstärke tritt an der Oberfläche auf.

Das Feld der leitenden Kugel im freien Raum geht für den Grenzfall eines verschwindend kleinen Radius $R \rightarrow 0$ in das Feld einer „*Punktladung*“ über. Dieser theoretische Grenzfall ist für Berechnungen nach dem Ersatzladungsverfahren (Kapitel 2.3.5) von Bedeutung.

Je kleiner der Krümmungsradius R der Elektrode ist, desto höher wird die elektrische Randfeldstärke, Gl. (2.3-8). **In der Hochspannungstechnik müssen deshalb scharfe Kan-**

ten (mit kleinen Radien) vermieden werden, um die Durchschlagsfeldstärke des isolierenden Mediums nicht zu überschreiten.

Beispiel: Scharfkantige Spitze

Das Feld in der Umgebung einer metallischen Spitze soll als kugelsymmetrisches Feld mit $R = 1$ mm abgeschätzt werden. Bei welcher Spannungsamplitude \hat{U} ist mit elektrischen Entladungen in Luft (Einsatzfeldstärke $\hat{E}_e = 5$ kV/mm) zu rechnen?

Aus Gl. (2.3-8) folgt $\hat{U} = \hat{E}_{\max} R = 5$ kV.

Anmerkung: Bei scharfkantigen Spitzen liegen die hohen Feldstärkewerte nur in einem sehr kleinen Volumen vor. Die Einsatzfeldstärke ist deshalb wesentlich höher als der für Luft im cm-Bereich bekannte Scheitelwert von 3 kV/mm, Bild 3.2-15. Der Entladungseinsatz kann durch Angabe einer konstanten Einsatzfeldstärke nicht korrekt beschrieben werden, vgl. Kap. 3.

Die Feldstärkeüberhöhung durch scharfe Kanten wird in der Hochspannungstechnik durch ausreichend große Krümmungsradien begrenzt. Vielfach müssen scharfkantige Teile durch *Abschirmhauben* abgeschirmt werden. Die Feldstärken an der Oberfläche können nach Gl. (2.3-8) abgeschätzt werden, wenn näherungsweise kugelsymmetrische Verhältnisse mit sehr weit entfernter Gegenelektrode vorliegen:

$$E_{\max} = U / R \quad (2.3-8)$$

Für die Kapazität in Luft gilt nach Gl. 2.3-6 näherungsweise die „Faustformel“

$$C / pF \approx R / cm. \quad (2.3-9)$$

Anmerkung: Befindet sich die Gegenelektrode (z.B. in Form geerdeter Wände, Decken oder Böden) in nicht vernachlässigbarer Entfernung, ergeben sich höhere Kapazitäts- und Feldstärkewerte. Numerische Feldberechnungsverfahren (Kapitel 2.3.5) ermöglicht eine wesentlich höhere Genauigkeit.

Beispiel: Abschirmhauben

Die *Durchmesser von Abschirmhauben* sollen für den Einsatz in Luft ($\hat{E}_D = 30$ kV/cm, $\epsilon_r = 1$) und in Isolieröl ($\hat{E}_D = 150$ kV/cm, $\epsilon_r = 2,2$) für die Spannungsamplituden $\hat{U} = 10$ kV, 100 kV und 1 MV so dimensioniert werden, dass die Feldstärken 2/3 der Durchschlagsfeldstärke nicht überschreiten.

Für die Durchmesser gilt nach Gl. (2.3-8)

$$D = 2 R = 2 \hat{U} / (0,67 \hat{E}_D).$$

| Spannung \hat{U} | | 10 kV | 100 kV | 1 MV |
|--------------------|-----|--------|--------|-------|
| Luft: | D | 1 cm | 10 cm | 1 m |
| | C | 0,5 pF | 5 pF | 50 pF |
| Isolieröl : | D | 2 mm | 2 cm | 20 cm |
| | C | 0,2 pF | 2 pF | 22 pF |

Anmerkung: Das Ergebnis lässt erkennen, dass in Hochspannungslaboratorien Abschirmhauben mit Durchmessern im Bereich von Metern notwendig sind.

Wesentlich kompaktere Hochspannungsgeräte können durch den Einsatz von elektrisch festeren Isolierstoffen (z.B. Isolieröl oder Schwefelhexafluoridgas SF_6) realisiert werden. Allerdings ist zu beachten, dass E_D für Isolieröl keine konstante Größe ist, sondern u.a. von der Ölsaltweite abhängt („Volumeneffekt“, „Abstandseffekt“ bzw. „Vergrößerungsgesetz“, vgl. Kap. 3 und 5).

Beim sogenannten „Kugelkondensator“ wird die Gegenelektrode von einer konzentrischen Kugel mit dem endlichen Radius R_2 gebildet, Bild 2.3-2a.

Die Berechnung der Feldstärke erfolgt wie bei der kugelförmigen Elektrode im freien Raum in fünf Schritten:

Die Anwendung des Satzes vom Hüllenfluss (Gl. (2.3-1), Schritt 1) auf die kugelsymmetrische Anordnung nach Bild 2.3-2a ergibt wegen der gleichartigen Feldverhältnisse wiederum Gl. (2.3-2). E fällt mit dem Radius proportional zu $1/r^2$ ab.

Die Integration der Feldstärke nach Gl. (2.3-3) (Schritt 2) darf nicht vom Radius R bis ins Unendliche erfolgen, sie ist jetzt zwischen innerer und äußerer Elektrode, d.h. zwischen den Radien R_1 und R_2 durchzuführen. Durch Einsetzen der neuen Grenzen folgt mit $U_{12} = U$

$$U = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \quad (2.3-10)$$

d.h.

$$Q = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} U. \quad (2.3-11)$$

Die Kapazität des Kugelkondensators ergibt sich aus $C = Q/U$ (Schritt 3):

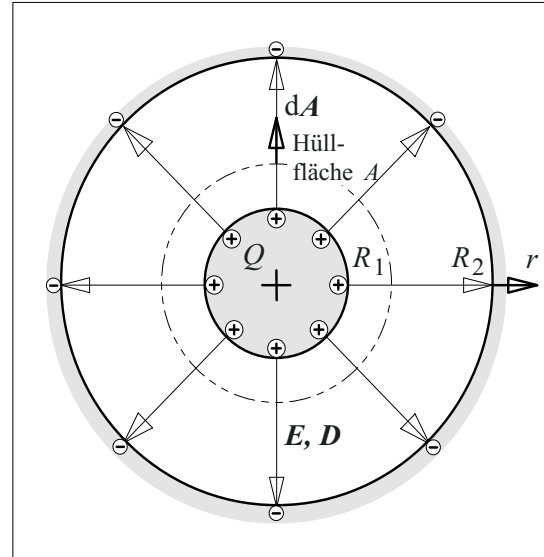


Bild 2.3-2a: Kugelkondensator (bzw. Zylinderkondensator).

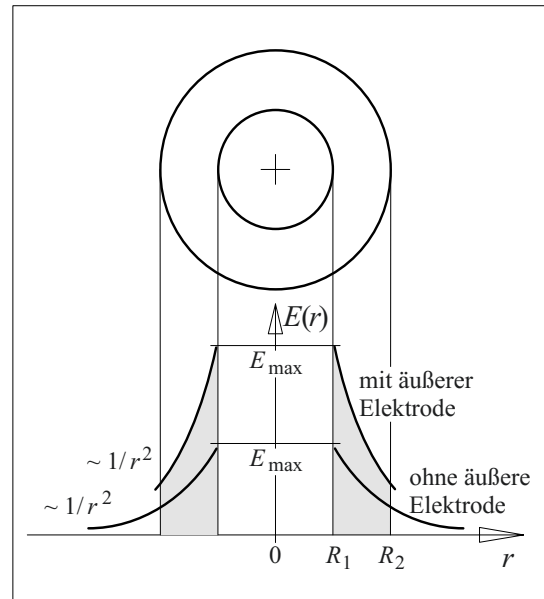


Bild 2.3-2b: Feldstärkeverlauf $E(r)$ beim Kugelkondensator.

$$C = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} \quad (2.3-12)$$

Der Feldstärkeverlauf zwischen innerer und äußerer Elektrode folgt aus den Gleichungen (2.3-2) und (2.3-11) (Schritt 4):

$$E(r) = \frac{1}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) r^2} U \quad (2.3-13)$$

Für den Grenzfall $R_2 \gg R_1$ gehen die Gleichungen (2.3-12) und (-13) in die Gleichungen (2.3-6) und (2.3-7) über.

Die Maximalfeldstärke an der inneren Kugel bei $r = R_1$ (*Schritt 5*) steigt gegenüber der freien Kugel an, Bild 2.3-2b. Die Flächen unter den Kurven entsprechen dem Integral über E , d.h. also der anliegenden Spannung.

Die *Maximalfeldstärke* ergibt sich aus Gl. (2.3-13) für den Radius $r = R_1$:

$$E_{\max} = E_1 = \frac{R_2}{R_1 R_2 - R_1^2} U \quad (2.3-14)$$

Mit Hilfe der berechneten Feldstärken können *Optimierungsaufgaben durch Extremwertbestimmung* gelöst werden:

Bei gegebenem Außenradius R_2 soll beispielsweise der Innenradius R_1 so gewählt werden, dass die *Randfeldstärke* E_1 *minimal* wird.

Die Grenzfälle $R_1 \rightarrow 0$ und $R_1 \rightarrow R_2$ ergeben jeweils unendlich große Randfeldstärken. Der *optimale Innenradius* R_1 für minimale Randfeldstärke wird ermittelt, indem die Ableitung von E_1 (Gl. (2.3-14)) nach der Variablen R_1 gleich Null gesetzt wird:

$$\frac{\partial E_1}{\partial R_1} = - \frac{R_2 - 2R_1}{(R_1 R_2 - R_1^2)^2} R_2 U \stackrel{!}{=} 0$$

Für R_1 und $E_{1\min}$ folgt mit Gl. (2.3-14):

$R_1 = R_2 / 2 \quad \text{und} \quad E_{1\min} = 4 U / R_2$

(2.3-15)

Eine andere Optimierungsaufgabe besteht darin, den Innenradius R_1 bei gegebenem Außenradius R_2 und maximal zulässiger Feldstärke E_D so zu wählen, dass die *kapazitiv gespeicherte Energie* $W = \frac{1}{2} C U^2$ *maximal* wird. Dies ist insbesondere für Kondensatoren wichtig,

in denen bei gegebenen Abmessungen eine möglichst große Energie gespeichert werden soll.

Für die gespeicherte Energie folgt mit Gl. (2.3-12) und (2.3-14)

$$W = \frac{1}{2} C U^2$$

$$W = \frac{1}{2} [4\pi\epsilon R_1 R_2 (R_2 - R_1)^{-1}] [E_D (R_2 - R_1) R_1 / R_2]^2$$

$$W = E_D^2 2\pi\epsilon (R_2 - R_1) R_1^3 / R_2$$

$$W = E_D^2 2\pi\epsilon (R_2 R_1^3 - R_1^4) / R_2$$

Für die Grenzfälle $R_1 \rightarrow 0$ und $R_1 \rightarrow R_2$ wird die Feldenergie minimal, d.h. $W \rightarrow 0$. Der Radius R_1 für *maximale Feldenergie* wird ermittelt, indem die Ableitung von W nach R_1 gleich Null gesetzt wird:

$$\partial W / \partial R_1 = E_D^2 2\pi\epsilon (R_2 3R_1^2 - 4R_1^3) / R_2 = 0$$

Für R_1 folgt daraus

$$R_1 = R_2 3/4. \quad (2.3-16)$$

In vielen hochspannungstechnischen *Anwendungen* kann das elektrische Feld näherungsweise oder bereichsweise als kugelsymmetrisch angesehen werden, Bild 2.3-3.

2.3.1.3 Zylindersymmetrische Felder

Der sogenannte „*Zylinderkondensator*“ besteht aus konzentrischen Zylindern mit den Radien R_1 und R_2 , Bild 2.3-4. Zunächst werden die Feldverzerrungen an den Enden der Zylinder vernachlässigt, d.h. man geht davon aus, dass es sich um ein ebenes Feld handelt, das sich in Richtung der Zylinderachse nicht verändert.

Die Berechnung der Feldstärke erfolgt, wie bei den kugelsymmetrischen Feldern, in fünf Schritten:

Für die Anwendung des Satzes vom Hüllfluss (Gl. (2.3-1), *Schritt 1*) wird eine Hüllfläche definiert, die den inneren Zylinder vollständig umschließt. Sie besteht aus einer Mantelfläche mit dem Radius r und der Zylinderlänge z , sowie aus zwei Stirnflächen, Bild 2.3-4.

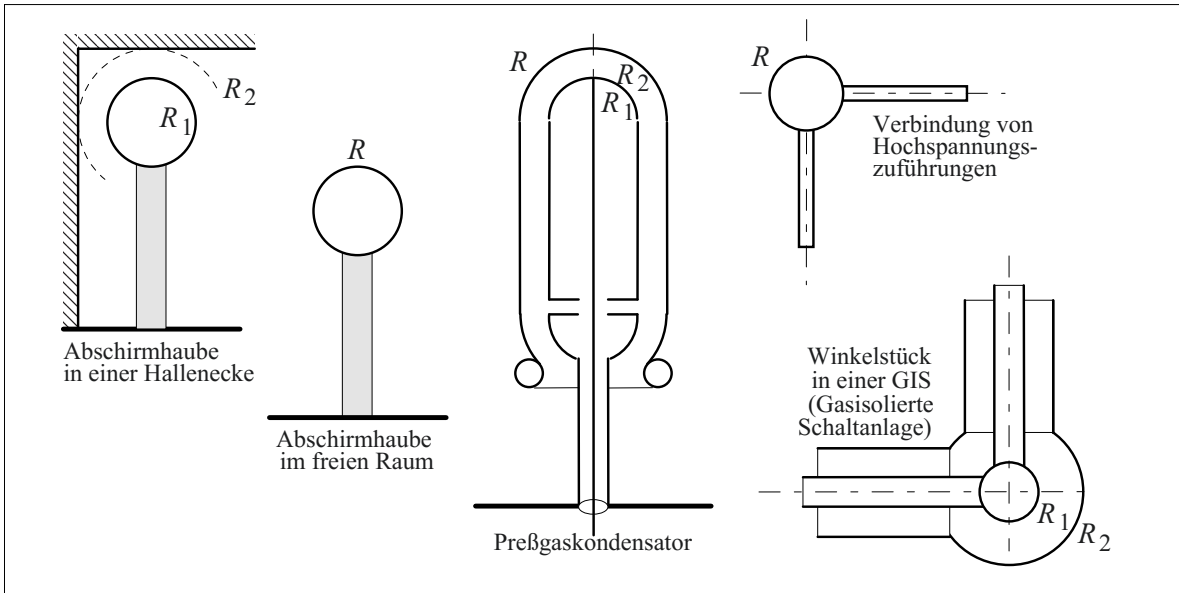


Bild 2.3-3: Beispiele für näherungsweise kugel- und zylindersymmetrische Felder in der Hochspannungstechnik.

Die Linien der elektrischen Verschiebungsichte \mathbf{D} verlaufen näherungsweise senkrecht zu den Flächenvektoren $d\mathbf{A}$ der Stirnflächen. Bei der Integration über der Hüllfläche wird deshalb der Beitrag der Stirnflächen vernachlässigt. Auf den Mantelflächen sind \mathbf{D} und $d\mathbf{A}$ parallel, so dass das Produkt der Vektoren durch das Produkt der Beträge ersetzt werden kann. Auf der Mantelfläche ist $D(r)$ nahezu konstant und wird vor das Integral gezogen.

Die verbleibende Integration von dA über der Mantelfläche ergibt den Wert der Mantelfläche $A = 2\pi r z$. D.h.

$$Q = D(r) \iint dA = D(r) A = \varepsilon E(r) 2\pi r z.$$

Für den Betrag der elektrischen Feldstärke ergibt sich eine Abnahme mit dem Radius r proportional zu $1/r$:

$$E(r) = Q / (2\pi \varepsilon z r) \quad (2.3-17)$$

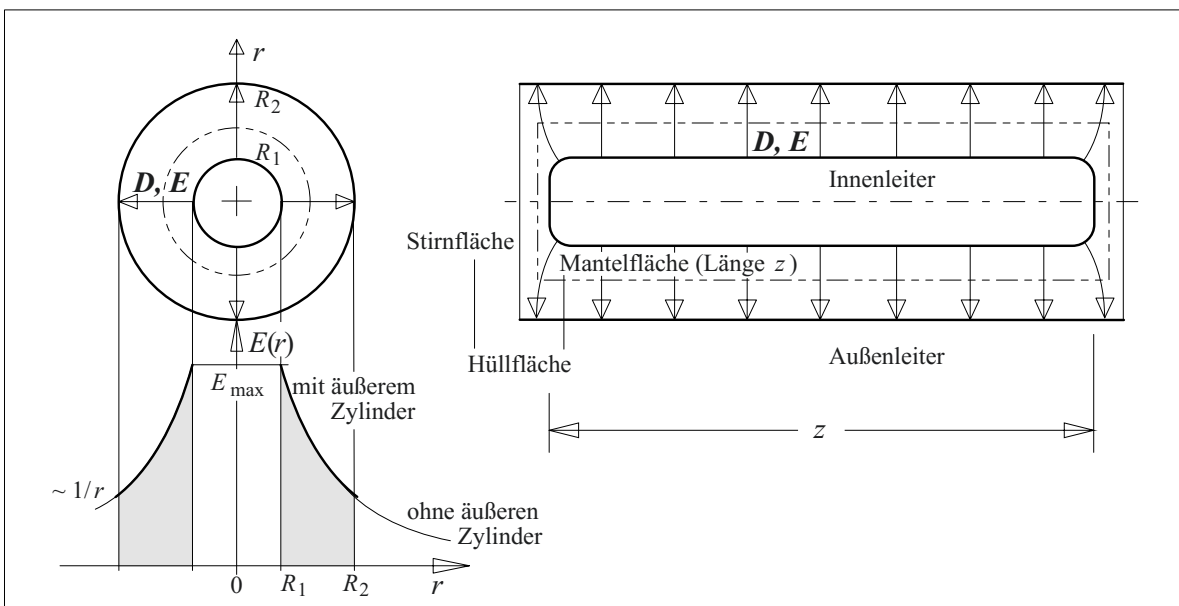


Bild 2.3-4: Zylindersymmetrische Elektrodenanordnung (oben) mit Feldstärkeverlauf (unten).

Durch Integration der Feldstärke $E(r)$ nach Gl. (2.3-3) (*Schritt 2*) vom inneren zum äußeren Zylinder ergibt sich mit $U_{12} = U$

$$U = \frac{Q}{2\pi\epsilon z} \ln \frac{R_2}{R_1}, \quad (2.3-18)$$

d.h.

$$Q = \frac{2\pi\epsilon z}{\ln \frac{R_2}{R_1}} U. \quad (2.3-19)$$

Die Kapazität des Zylinderkondensators folgt aus $C = Q/U$ (*Schritt 3*):

$$C = \frac{2\pi\epsilon z}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \quad (2.3-20)$$

Der *Feldstärkeverlauf* zwischen innerem und äußerem Zylinder ergibt sich aus den Gleichungen (2.3-17) und (2.3-19) (*Schritt 4*):

$$E(r) = \frac{U}{r \ln \frac{R_2}{R_1}} \quad (2.3-21)$$

Die Fläche unter der Feldstärkekurve entspricht der Spannung (Potentialdifferenz) zwischen den Zylindern bzw. dem Integral von $E(r)$ über r , Bild 2.3-4.

Die *Maximalfeldstärke* folgt aus Gl. (2.3-21) für den Radius $r = R_1$ (*Schritt 5*):

$$E_{\max} = E_1 = \frac{U}{R_1 \ln \frac{R_2}{R_1}} \quad (2.3-22)$$

Auch für zylindersymmetrische Felder gilt also: Je kleiner der Krümmungsradius R_1 des inneren Zylinders ist, desto höher wird die elektrische Randfeldstärke, Gl. (2.3-22). Der Anstieg der Feldstärke ist allerdings schwächer als im kugelsymmetrischen Feld. **Kleine Radien müssen auch im zylindersymmetrischen Feld vermieden werden**, um die Durchschlagsfeldstärke des isolierenden Mediums nicht zu überschreiten.

Gl. (2.3-22) gibt die Maximalfeldstärke des idealen zylindersymmetrischen Feldes an und nicht etwa die Feldstärke an den *Zylinderenden*. Dort können je nach Ausgestaltung und Verrundung erhebliche *Feldstärkeüberhöhungen* bzw. *Randfeldstärken* auftreten.

Anmerkung: Es liegt nahe, ähnlich wie die „Kugel im freien Raum“ auch den „zylindrischen Leiter im freien Raum“ zu betrachten, d.h. den Grenzfall des sehr weit entfernten äußeren Zylinders. Für den Grenzfall $R_2 \rightarrow \infty$ ergibt jedoch die Integration der Feldstärke nach Gl. (2.3-17) einen unendlich großen Spannungswert, wie man durch Einsetzen in Gl. (2.3-18) erkennen kann. Bei endlicher Potentialdifferenz geht die Feldstärke für $R_2 \rightarrow \infty$ gegen Null, vgl. Gl. (2.3-21).

D.h. im zylindersymmetrischen Feld muss man immer den *äußeren Zylinder mit einem endlichen Radius R_2* berücksichtigen.

Das Feld zwischen zwei Zylindern geht für den Grenzfall $R_1 \rightarrow 0$ und $R_2 \rightarrow \infty$ in das *Feld einer „Linienladung“* über. Dieser theoretische Grenzfall ist ebenso wie die „Punktladung“ für Berechnungen nach dem Ersatzladungsverfahren (Kapitel 2.3.5) von Bedeutung. Die Gegenladungen befinden sich allerdings nicht im Unendlichen, sondern ebenfalls als Linienladung in endlichem Abstand.

Mit Hilfe der berechneten Feldstärken können *Optimierungsaufgaben durch Extremwertbestimmung* gelöst werden:

Bei gegebenem Außenradius R_2 soll beispielsweise der Innenradius R_1 so gewählt werden, dass die *Randfeldstärke E_1 minimal* wird: Die Grenzfälle $R_1 \rightarrow 0$ und $R_1 \rightarrow R_2$ ergeben jeweils unendlich große Randfeldstärken. Der *optimale Innenradius R_1* für minimale Randfeldstärke wird ermittelt, indem die Ableitung von E_1 (Gl. (2.3-22)) nach der Variablen R_1 gleich Null gesetzt wird.

Bei der Differentiation ist zunächst die Quotientenregel auf den gesamten Bruch und die Produktregel auf die Ableitung des Nenners anzuwenden [6]:

$$\frac{\partial E_{\max}}{\partial R_1} = U \frac{0 - \left[\ln \frac{R_2}{R_1} + R_1 \frac{R_1}{R_2} \frac{-R_2}{R_1^2} \right]}{\left(R_1 \ln \frac{R_2}{R_1} \right)^2}$$

$$\frac{\partial E_{\max}}{\partial R_1} = U \frac{-\left[\ln \frac{R_2}{R_1} - 1\right]}{\left(R_1 \ln \frac{R_2}{R_1}\right)^2} \stackrel{!}{=} 0$$

Für R_1 und $E_{1\min}$ folgt mit Gl. (2.3-22):

$$R_1 = R_2 / e \quad \text{und} \quad E_{1\min} = e U / R_2 \quad (2.3-23)$$

Anmerkung: $e = 2,71828...$ (Eulersche Zahl, Basis des natürlichen Logarithmus).

Eine andere Optimierungsaufgabe besteht darin, den Innenradius R_1 bei gegebenem Außenradius R_2 und maximal zulässiger Feldstärke E_D so zu wählen, dass die *kapazitiv gespeicherte Energie* $W = \frac{1}{2} C U^2$ maximal wird. Dies ist insbesondere für Kondensatoren wichtig, in denen bei gegebenen Abmessungen eine möglichst große Energie gespeichert werden soll.

Für die maximale gespeicherte Energie folgt mit Gl. (2.3-20) und (2.3-22)

$$W = \frac{1}{2} C U^2$$

$$W = \frac{1}{2} [2\pi\epsilon z / \ln(R_2/R_1)] [E_D R_1 \ln(R_2/R_1)]^2$$

$$W = E_D^2 \pi\epsilon z R_1^2 \ln(R_2/R_1).$$

Für die Grenzfälle $R_1 \rightarrow 0$ und $R_1 \rightarrow R_2$ wird die Feldenergie minimal, d.h. $W \rightarrow 0$. Der Radius R_1 für *maximale Feldenergie* wird ermittelt, indem die Ableitung von W nach R_1 gleich Null gesetzt wird:

$$\begin{aligned} \partial W / \partial R_1 &= E_D^2 \pi\epsilon z \\ &\quad \cdot [2R_1 \ln(R_2/R_1) + R_1^2 (R_1/R_2)(-R_2/R_1^2)] \\ &= E_D^2 \pi\epsilon z R_1 [2 \ln(R_2/R_1) - 1] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Für R_1 folgt daraus:

$$R_1 = R_2 / e^{1/2} \quad (2.3-24)$$

In vielen hochspannungstechnischen *Anwendungen* kann das elektrische Feld näherungsweise oder bereichsweise als zylindersymmetrisch angesehen werden. Einige Beispiele sind bereits in Bild 2.3-3 enthalten. Zylindersymmetrische Felder treten außerdem in Hochspannungskabeln, gekapselten gasisolierten Schaltanlagen, Durchführungen und in der Umgebung zylindrischer Leiter auf.

Beispiel: Dünner Draht

Das Feld in der Umgebung eines dünnen Drahtes soll näherungsweise als zylindersymmetrisches Feld mit $R_1 = 1 \text{ mm}$ und $R_2 = 1 \text{ m}$ abgeschätzt werden. Bei welcher Spannungsamplitude ist mit elektrischen Entladungen in Luft (Einsatzfeldstärke $\hat{E}_e = 4 \text{ kV/mm}$) zu rechnen?

Aus Gl. (2.3-22) folgt $\hat{E}_{\max} R_1 \ln(R_2/R_1) = 27,6 \text{ kV}$

Anmerkung: Bei sehr kleinen Radien liegen die hohen Feldstärkewerte nur in einem sehr kleinen Volumen vor. Die Einsatzfeldstärke ist deshalb wesentlich höher als der für Luft im cm-Bereich bekannte Scheitelwert von 3 kV/mm, Bild 3.2-15. Der Entladungseinsatz kann durch Angabe einer konstanten Einsatzfeldstärke nicht korrekt beschrieben werden, vgl. Kap. 3.

Beispiel: Rohrleiter und Kabel

Die *Durchmesser von Hochspannung führenden Leitern mit konzentrischen Außenleitern* sollen für den Einsatz in luftisolierten Rohrleitern ($\hat{E}_D = 30 \text{ kV/cm}$, $\epsilon_r = 1$), in ölisierten Rohrleitern ($\hat{E}_D = 150 \text{ kV/cm}$, $\epsilon_r = 2,2$) und in Polyäthylen-Kunststoffkabeln ($\hat{E}_D = 450 \text{ kV/cm}$, $\epsilon_r = 2,2$) für die Spannungsamplituden $\hat{U} = 10 \text{ kV}$, 100 kV und 1 MV so dimensioniert werden, dass die Feldstärken $2/3$ der Durchschlagsfeldstärke nicht überschreiten und die Außendurchmesser möglichst klein bleiben.

Die kleinsten Außendurchmesser ergeben sich, wenn das Radienverhältnis nach Gl. (2.3-23) mit $R_2/R_1 = e$ so gewählt wird, dass die maximale Feldstärke E_1 minimal wird. Mit $\hat{E}_{1\min} = 0,67 \hat{E}_D$ folgt

$$D_2 = 2 R_2 = 2 e \hat{U} / (0,67 \hat{E}_D) \quad \text{und}$$

$$D_1 = 2 R_1 = 2 \hat{U} / (0,67 \hat{E}_D).$$

Anmerkung: Das gleiche Ergebnis ergibt sich auch durch eine Extremwertbestimmung, wenn Gl. (2.3-22) nach R_2 aufgelöst und die Ableitung von R_2 nach R_1 zur Bestimmung des Minimums gleich Null gesetzt wird.

| Spannung | \hat{U} | 10 kV | 100 kV | 1 MV |
|----------------------|-----------|---------------|---------------|--------------|
| Luft: | D_2 | 2,7 cm | 27 cm | 2,7 m |
| | D_1 | 1 cm | 10 cm | 1 m |
| | C' | 56 pF/m | 56 pF/m | 56 pF/m |
| Isolieröl: | D_2 | 5,4 mm | 5,4 cm | 54 cm |
| | D_1 | 2 mm | 2 cm | 20 cm |
| | C' | 122 pF/m | 122 pF/m | 122 pF/m |
| Poly-äthylen: | D_2 | 1,8 mm | 1,8 cm | 18 cm |
| | D_1 | 0,7 mm | 0,7 cm | 7 cm |
| | C' | 122 pF/m | 122 pF/m | 122 pF/m |

Anmerkung: Das Ergebnis lässt erkennen, dass durch den Einsatz elektrisch fester Isolierstoffe (Isolieröl, SF₆, Polyäthylen) wesentlich *kompaktere Konstruktionen* im

Vergleich mit Luft möglich sind. Bei Annahme eines konstanten Wertes für \hat{E}_D wurde vernachlässigt, dass die elektrische Festigkeit von Isolieröl und Polyäthylen mit zunehmender Isolierstoffdicke abnimmt („*Volumeneffekt*“ bzw. „*Vergrößerungsgesetz*“). Die angegebenen Spannungs- und Feldstärkewerte sind Kurzzeitfestigkeiten, wie sie u.U. für Prüfungen zugrundegelegt werden könnten. Die zulässigen *Betriebsspannungen und -feldstärken* liegen insbesondere bei Polyäthylen weitaus niedriger (vgl. Kap. 2.2.2 bis 2.2.4). Die auf die Leitungslänge bezogene *Kapazität* C' hängt nur von der Dielektrizitätszahl ϵ_r ab, da das Radienverhältnis in allen Fällen gleich ist.

2.3.1.4 Homogene Felder

Zwischen zwei ebenen parallelen Elektroden im Abstand d besteht ein homogenes elektrisches Feld mit der konstanten elektrischen Feldstärke $E = U/d$ („*Plattenkondensator*“). Die Feldverzerrungen an den Elektrodenrändern sollen zunächst vernachlässigt werden. Die Berechnung der Feldstärke soll auch in

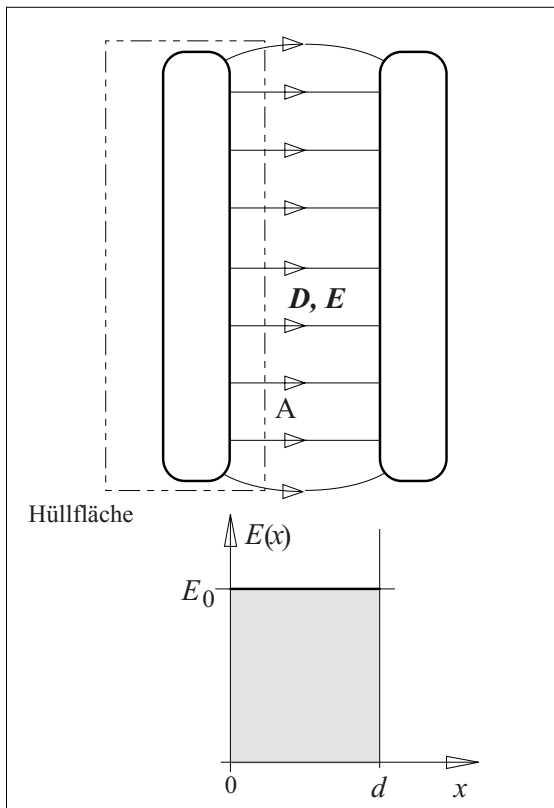


Bild 2.3-5: Homogenes elektrisches Feld im Plattenkondensator (Näherung ohne Berücksichtigung der Randverzerrungen).

diesem einfachen Fall in den oben beschriebenen fünf Schritten erfolgen, um das Prinzip des Berechnungsweges deutlich zu machen:

Für die Anwendung des Satzes vom Hüllfluss (Gl. (2.3-1), *Schritt 1*) wird eine Hüllfläche definiert, die eine der Elektroden vollständig umschließt. Sie besteht aus einer Fläche A zwischen den Platten und aus Flächen im äußeren Feldbereich, die die Fläche A zu einer Hüllfläche ergänzen, Bild 2.3-5.

Die äußeren Flächen werden nur von einem geringen Verschiebungsfluss $\iint \mathbf{D} d\mathbf{A}$ durchsetzt; ihr Beitrag zum gesamten Hüllfluss wird deshalb vernachlässigt.

Zwischen den Elektroden sind \mathbf{D} und $d\mathbf{A}$ parallel, so dass das Produkt der Vektoren durch das Produkt der Beträge ersetzt werden kann. Auf der Fläche A ist D nahezu konstant und wird vor das Integral gezogen. Die verbleibende Integration von dA über der Fläche A ergibt den Wert der Fläche A :

$$Q = D \iint dA = D A = \epsilon E A$$

D.h. der Betrag der elektrischen Feldstärke E ist konstant für alle Werte von x zwischen den Elektroden:

$$E(x) = Q/(\epsilon A) = E_0 = \text{const.} \quad (2.3-25)$$

Durch Integration der Feldstärke $E(x)$ nach Gl. (2.3-3) (*Schritt 2*) von der einen zur anderen Elektrode ergibt sich

$$U = E_0 d = Q d/(\epsilon A).$$

D.h.

$$Q = \epsilon A U/d. \quad (2.3-26)$$

Die *Kapazität* des Plattenkondensators folgt aus $C = Q/U$ (*Schritt 3*):

$$C = \epsilon A/d \quad (2.3-27)$$

Der *Feldstärkeverlauf* zwischen den Elektroden ergibt sich aus den Gleichungen (2.3-25) und (2.3-26) (*Schritt 4*):

$$E(x) = E_0 = U/d = \text{const.} \quad (2.3-28)$$

Die Fläche unter der Feldstärkekurve entspricht der Spannung (Potentialdifferenz) zwischen den Elektroden bzw. dem Integral von $E(x)$ über x , Bild 2.3-5.

Die Angabe einer *Maximalfeldstärke* (Schritt 5) erübrigt sich für das homogene Feld. Bei stark gekrümmtem Rand entsteht allerdings eine Feldüberhöhung (vgl. auch Bild 2.3-8 und 2.3-9).

2.3.1.5 Feldverzerrungen durch Raumladungen

In gasförmigen Isoliermedien bilden sich durch elektrische Entladungen „Raumladungswolken“, die das elektrische Feld sehr stark verändern („verzerren“). Auch in flüssigen und festen Isolierstoffen können unter der Wirkung elektrischer Beanspruchungen Raumladungen entstehen.

Beispiel: Raumladung im Plattenkondensator

Der Einfluss von Raumladungen, sowie der grundsätzliche Berechnungsweg, soll am Beispiel des homogenen Feldes mit konstanter und positiver Raumladungsdichte η erläutert werden. Die Gegenladungen werden auf der negativen Elektrode angenommen, Bild 2.3-6:

Bei der Anwendung des Satzes vom Hüllfluss (Gl. (2.3-1), Schritt 1) ist zu beachten, dass die von der Hüllfläche umschlossene Gesamtladung von der Lage der Hüllfläche zwischen den Elektroden abhängt. Sie setzt sich aus der Ladung auf der umschlossenen Elektrode und aus der Ladung im umschlossenen Isolierstoffvolumen zusammen:

$$\begin{aligned} Q(x) &= Q + \iiint \eta \, dV \\ &= Q + \eta A x \\ &! \\ &= D \iint dA \\ &= D A \\ &= \varepsilon E A. \end{aligned}$$

D.h. der Betrag der *elektrischen Feldstärke* E zwischen den Elektroden ist *nicht mehr konstant*, er nimmt linear mit x zu und wird an der Gegenelektrode bei $x = d$ maximal, Bild 2.3-6:

$$\begin{aligned} E(x) &= Q(x)/(\varepsilon A) \\ &= Q/(\varepsilon A) + x \eta/\varepsilon \end{aligned} \quad (2.3-29)$$

Die weitere Berechnung kann analog zu den oben beschriebenen Schritten durchgeführt werden. Dabei ist

jedoch zu beachten, dass sich die gesamte gespeicherte Ladung Q_{ges} aus der positiven Ladung Q auf der Elektrode und der im Dielektrikum gespeicherten positiven Ladung $\iiint \eta \, dV = d A \eta$ zusammensetzt:

$$Q_{\text{ges}} = Q + d \cdot A \cdot \eta$$

Dadurch ergibt sich eine vergrößerte *Kapazität* $C = Q_{\text{ges}}/U$. Das *Potential* nimmt nicht mehr linear mit x ab, sondern folgt einem Polynom zweiten Grades, das sich durch Integration von Gl. (2.3-29) ergibt, Bild 2.3-6.

In **inhomogenen Feldern**, wie z.B. bei Kugel- oder Zylindersymmetrie, können Raumladungen je nach Polarität die (geometrische) *Inhomogenität des Feldes verringern oder ver-*

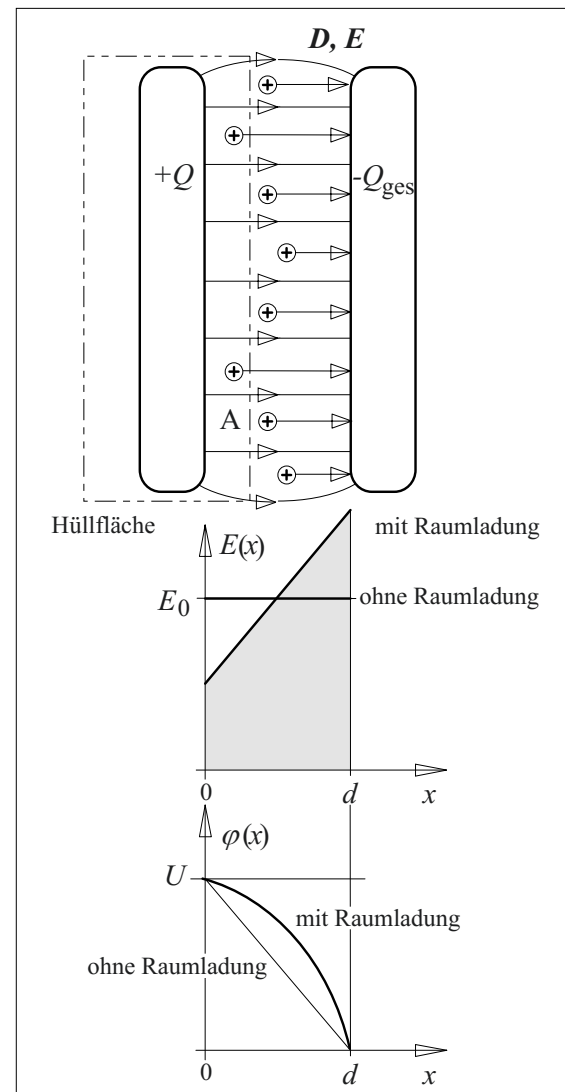


Bild 2.3-6: Raumladungen im Dielektrikum eines Plattenkondensators (vgl. auch Bild 2.3-5).

größern. Dadurch wird das Entladungsverhalten sehr stark beeinflusst (*Polaritätseffekt*, Kap. 3.2.5.2).

Anmerkung: Insbesondere in geschichteten Kondensatordielektrika (Kap. 2.4) kann die im Material und an den Grenzflächen gespeicherte Raumladung auch nach einem vorübergehenden Kurzschluss der Elektroden zu einem gefährlichen „Nachladen“ der Elektroden führen („wiederkehrende Spannung“). Kondensatoren müssen deshalb **permanent kurzgeschlossen** bleiben.

2.3.2 Analytische Auswertung der Potentialgleichung

Die Kontinuitätsgleichung (2.3-1) lautet in differentieller Form

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \eta. \quad (2.3-30)$$

Nach Gl. (2.1-8) ist

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$$

und es folgt die *Poisson-/ Potentialgleichung*

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi = -\eta/\varepsilon.$$

(2.3-31)

Für die Differentialoperatoren div (Divergenz), grad (Gradient), ∇ (Nabla) und Δ (Delta) gelten je nach Koordinatensystem (kartesisches Koordinaten, Zylinderkoordinaten oder Kugelkoordinaten) unterschiedliche Ausdrücke [2], [3], [6]. Für die Potentialgleichung ergibt sich

in kartesischen Koordinaten (x, y, z)

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\eta/\varepsilon \quad (2.3-32)$$

in Zylinderkoordinaten (r, α, z)

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \\ &= -\eta/\varepsilon \end{aligned} \quad (2.3-33)$$

und in Kugelkoordinaten (r, α, ϑ)

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right) \\ &\quad + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} \\ &= -\eta/\varepsilon \end{aligned} \quad (2.3-34)$$

Auf Ableitung der Gleichungen (2.3-32) bis (-34) wird verzichtet und auf die Literatur verwiesen [2], [3], [6]. Für $\eta = 0$ wird aus der *Poissonschen Potentialgleichung* die sog. *Laplacesche Potentialgleichung* $\Delta \varphi = 0$.

Die *Auswertung der Potentialgleichung* soll beispielhaft für das homogene Feld des raumladungsfreien Plattenkondensators nach Bild 2.3-5 erläutert werden. Es können aber auch alle anderen in Kapitel 2.3.1 behandelten Felder berechnet werden.

Beispiel: Raumladungsfreies homogenes Feld

Schritt 1: Zunächst erfolgt mit $\eta = 0$ eine *Vereinfachung* der Poissonschen Potentialgleichung zu $\Delta \varphi = 0$ (Laplacesche Potentialgleichung), die nur noch von der Variablen x abhängt. Mit $\varphi(x, y, z) = \varphi(x)$ folgt aus Gl. (2.3-32)

$$\Delta \varphi = \partial^2 \varphi / \partial x^2 = -\eta/\varepsilon = 0.$$

Schritt 2: Die vereinfachte *Differentialgleichung* wird in *allgemeiner Form* gelöst. In diesem Fall ergibt sich durch zweifache Integration

$$\partial \varphi / \partial x = k_1 \quad \text{und} \quad \varphi(x) = k_1 x + k_2.$$

Schritt 3: Die Integrationskonstanten k_1 und k_2 werden aus den *Randbedingungen* bestimmt. Aus

$$\varphi(x=0) = U \quad \text{folgt} \quad U = 0 + k_2 \quad \text{und aus}$$

$$\varphi(x=d) = 0 \quad \text{folgt} \quad 0 = k_1 d + k_2.$$

Mit den Lösungen $k_2 = U$ und $k_1 = -U/d$ ist

$$\varphi(x) = U(1 - x/d)$$

Schritt 4: Durch die Angabe der Potentialverteilung, ist das elektrische Feld eindeutig bestimmt. Der Vektor der elektrischen Feldstärke \mathbf{E} kann gemäß Gl. (2.1-8) durch *Gradientenbildung* ermittelt werden.

Für das homogene Feld folgt in (x, y, z) -Koordinaten

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi = \{-\partial \varphi / \partial x, 0, 0\} = \{U/d, 0, 0\}.$$

D.h. es ergibt sich ein konstanter Feldstärkebetrag

$$E = U/d = E_0 = \text{const.} \quad \text{q.e.d.}$$

Anmerkung: Bei Auswertung der Potentialgleichung in Kugel- oder Zylinderkoordinaten muss auch die Gradientenbildung zur Berechnung der Feldstärkevektoren in Kugel- oder Zylinderkoordinaten nach Gl. (2.1-8) erfolgen, [2], [3], [6]. Entsprechend den o.g. Schritten werden zunächst die Symmetrien der jeweiligen Anordnung zur Vereinfachung der Potentialgleichung ausgenutzt. Nach der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung sind die Integrationskonstanten durch Einsetzen der Randbedingungen zu bestimmen. Die elektrische Feldstärke ergibt sich aus der Lösung für die Potentialverteilung durch Gradientenbildung.

2.3.3 Graphische Feldermittlung (für ebene Felder)

Praktische Feldanordnungen der Hochspannungstechnik weichen meist mehr oder weniger stark von den zuvor berechneten Grundanordnungen ab. Es ist deshalb hilfreich, den qualitativen Verlauf von *Feld- und Äquipotentiallinien* näherungsweise und ohne aufwändige Rechnung zu skizzieren.

Unter Beachtung einiger *Zeichenregeln* kann ein Feldbild für *ebene bzw. zweidimensionale Anordnungen* erstellt werden, das einen qualitativen Eindruck der elektrischen Beanspruchung vermittelt. Bei entsprechender Sorgfalt sind oft auch grobe quantitative Angaben zu Feldstärken und Kapazitäten möglich.

Die graphische Erstellung von Feldbildern vermittelt ein gutes Gefühl für den Verlauf von Feld- und Äquipotentiallinien. Dadurch ist selbst bei numerisch erstellten Feldbildern komplexer Anordnungen eine Plausibilitätsprüfung möglich; grobe Berechnungsfehler können ausgeschlossen werden.

Der **Wert des graphischen Verfahrens** liegt in der *raschen Erstellung eines qualitativen Übersichtsbildes*, das eine genauere quantitative Rechnung nicht ersetzen, aber vorbereiten und ergänzen kann. Außerdem zwingt die Anwendung des graphischen Verfahrens zu einer intensiven Auseinandersetzung mit der Feldgeometrie. Dadurch entsteht ein *wertvolles tiefgehendes physikalisches Verständnis* für den qualitativen Charakter der elektrischen Beanspruchung.

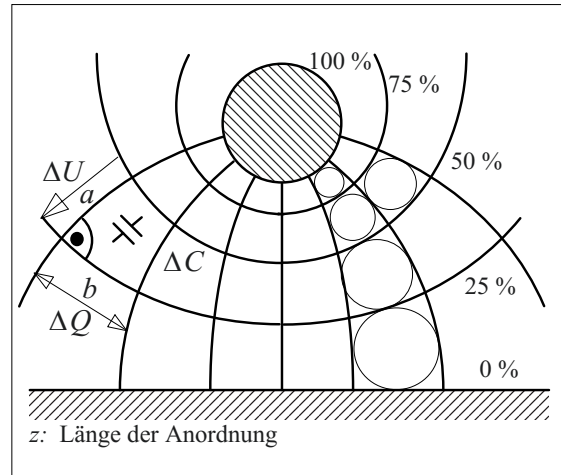


Bild 2.3-7: Graphische Ermittlung von Feld- und Potentiallinienbildern für ebene Felder.

Die **Zeichenregeln** ergeben sich aus den Eigenschaften von Feld- und Äquipotentiallinien (oft auch nur als „Potentiallinien“ bezeichnet). Zunächst wird ein *ebenes, zweidimensionales Feld* betrachtet, das in der Zeichenebene dargestellt werden kann und sich in der dritten Raumrichtung nicht ändert, Bild 2.3-7:

- 1.) Feld- und Äquipotentiallinien stehen **senkrecht aufeinander**.
- 2.) **Elektrodenoberflächen** sind Äquipotentialflächen (meist wird das Bezugspotential mit 0 % und das Hochspannungspotential mit 100 % bezeichnet).
- 3.) Feldlinien stehen senkrecht auf den Elektrodenoberflächen (dies ergibt sich aus den Punkten 1 und 2).
- 4.) Dem Abstand a zwischen zwei Potentiallinien entspricht immer die gleiche Potentialdifferenz ΔU , dem Abstand b zwischen zwei Feldlinien (bzw. Verschiebungsdichtelinien) entspricht immer die gleiche Ladung ΔQ auf den Elektroden. Daraus folgt, dass die Teilkapazität $\Delta C = \Delta Q / \Delta U$, die jedem „Kästchen“ mit der Länge z zugeordnet werden kann, für alle „Kästchen“ des Feldbildes gleich ist:

$$\Delta C = \Delta Q / \Delta U = \varepsilon z b / a = \text{const.} \quad (2.3-35)$$

D.h. das **Seitenverhältnis** b/a ist für alle Kästchen gleich:

$$b/a = \text{const.}$$

(2.3-36)

Am besten lässt sich das Feldbild für *quadratische Kästchen* zeichnen, wenn $b/a = 1$ gewählt wird. Das Seitenverhältnis ist dann korrekt, wenn die vier Seiten des Kästchens einen *einbeschriebenen Kreis* berühren, Bild 2.3-7.

Klassische Hilfsmittel der graphischen Feldermittlung sind *weißes Papier, Bleistift und Radiergummi*. Sehr gut geeignet sind hierfür aber auch einfache *Zeichenprogramme*, die insbesondere die iterative Verbesserung des Feldbildes sehr erleichtern.

Die Zeichnung des Feld- und Potentiallinienbildes wird zweckmäßigerweise in einem Bereich begonnen, in dem die *Potentialaufteilung bekannt* ist. Als Orientierung für den weiteren Verlauf der Potentiallinien dient der *Verlauf der Elektrodenkonturen*.

In dieser ersten Näherung des Potentiallinienbildes werden *Feldlinien* senkrecht zu den Potentiallinien und den Elektrodenkonturen ergänzt. Die Seitenverhältnisse der entstehenden Kästchen müssen dabei gemäß Gl. (2.3-36) konstant sein. Die sich ergebenden *Abweichungen von den Zeichenregeln* 1.) bis 4.) zeigen an, wie das vorliegende Bild durch Verändern von Feld- und Potentiallinien weiter zu *verbessern* ist.

In der Praxis wird oft eine größere Anzahl von Iterationsschritten erforderlich sein, um ein zufriedenstellendes Ergebnis zu erhalten.

Die graphische Erstellung eines Feldbildes soll am praktisch wichtigen Beispiel des Randfeldes eines Plattenkondensators erläutert werden, Bild 2.3-8 und 2.3-9:

Beispiel: Randfeld eines Plattenkondensators

1. Schritt (Bild 2.3-8a):

Zunächst wird die bekannte *Potentialaufteilung* im homogenen bzw. bekannten Teil des Feldes gezeichnet (1). Der weitere Verlauf der Potentiallinien wird näherungsweise am gegebenen der Elektroden orientiert (2).

Anmerkung: Es empfiehlt sich, nur mit einer geringen Zahl von Äquipotentiallinien zu beginnen (z.B. mit den Linien für 0 %, 25 %, 50 %, 75 % und 100 %). Das fertige Feldbild kann dann nach Bedarf durch Interpolation weiter verfeinert werden.

2. Schritt Bild (2.3-8a):

Rechtwinklig zu den Potentiallinien werden *Feldlinien* im Verhältnis $b/a = 1$ ergänzt. Dabei ist es zweckmäßig, entlang einer Elektrode (z.B. auf der Hochspannungsseite) vorzugehen.

Das *Einschreiben von Kreisen* zeigt, dass die Seitenverhältnisse z.T. erheblich vom Sollwert 1 abweichen (3).

3. Schritt (Bild 2.3-8b):

Die *Korrektur* des ersten Bildes erfolgt, indem der Abstand der 25 %-Linie zur unteren Elektrode nach außen hin vergrößert wird (4). Die 75 %-Linie wird näher an den Rand der oberen Elektrode geführt, ihr Abstand zur Oberseite wird erheblich vergrößert (5). Dabei ist zu beachten, dass die Feldstärke im Bereich des Elektrodenrandes von der oberen zur unteren Elektrode abnehmen muss. D.h. der Abstand der Potentiallinien muss zunehmen.

Die *Kontrolle* der Seiten- und Winkelverhältnisse zeigt, dass das Feldbild weiter verbesserungsbedürftig ist.

4. Schritt (Bild 2.3-8c):

Durch *iteratives Verbessern* des Feldbildes, unter Beachtung der Zeichenregeln, wird das fertige Bild erstellt.

Im vorliegenden Beispiel ist es empfehlenswert, mit dem *Einschreiben von Kreisen* im homogenen Teil des Feldes zu beginnen und dann in den inhomogenen Teil fortzuschreiten (6). Dabei sind die Verläufe der Potential- und Feldlinien, sowie die Kreisdurchmesser *stückweise* und iterativ zu korrigieren.

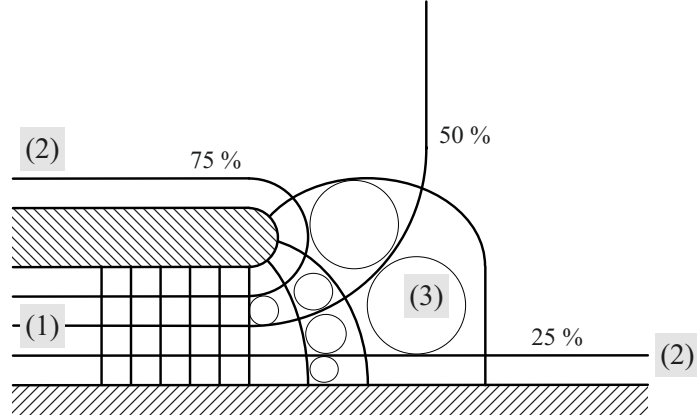
Die *Auswertung* des fertigen Feldbildes ermöglicht näherungsweise Angaben über den *Ort der höchsten Feldstärke*, ihren *ungefähren Betrag*, den *Verlauf* der Feldstärke entlang von Konturen und über die dem elektrischen Feld zuzuordnenden *Kapazitäten*.

Für die Feldstärke gilt für ein beliebiges Element des Feldbildes

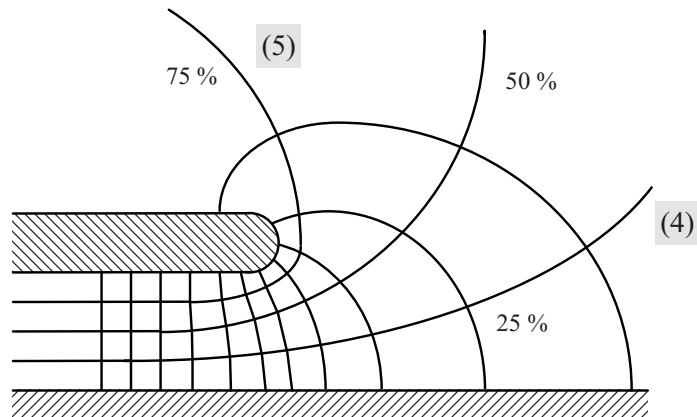
$$E \approx \Delta U/a. \quad (2.3-37)$$

Dabei handelt es sich um eine mittlere Feldstärke im betrachteten Element („Kästchen“), die je nach Genauigkeit der Zeichnung mehr oder weniger genau bestimmbar ist.

a) Grobe Näherung
des Feld- und Potentiallinienbildes



b) Verbessertes Feld- und Potentiallinienbild



c) Weiter verbessertes Feld- und Potentiallinienbild

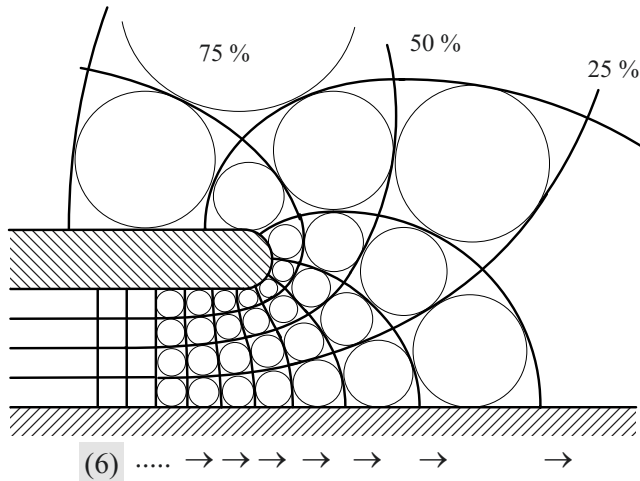


Bild 2.3-8:

Graphische Ermittlung
eines Feldlinien- und
Potentiallinienbildes
für das ebene Randfeld
eines Plattenkondensators
in verschiedenen
Iterationsstufen:

a) Erste grobe Näherung,
die an vielen Stellen den
Zeichenregeln nicht
entspricht.

b) Entsprechend den
Abweichungen
verbessertes Bild.

c) Weiter verbessertes Bild
das den Zeichenregeln
weitgehend entspricht.

Für qualitative Aussagen
ist Iterationszustand c) oft
ausreichend.

D.h. Feldstärkewerte dürfen aus graphisch ermittelten Feldbildern nur mit sehr großer Vorsicht abgeleitet werden! In der Regel ist für eine quantitative Aussage eine numerische, oder falls möglich, eine analytische Rechnung erforderlich.

Der gesamte Feldraum kann als Reihen- und Parallelschaltung gleicher Teilkapazitäten ΔC angesehen werden, Bild 2.3-7. Aus dem Feldbild ergibt sich die Anzahl der parallelen Zweige n_p und die Anzahl der Reihenschaltungen n_r . Für die Gesamtkapazität folgt mit Gl. (2.3-35) und $b/a = 1$:

$$C_{\text{ges}} = \Delta C n_p / n_r = \varepsilon z n_p / n_r \quad (2.3-38)$$

Die Bestimmung der Kapazität ist mit geringerer Ungenauigkeit möglich, da sich Zeichnungenungenauigkeiten durch die integrale Betrachtung des gesamten Feldraumes gegenseitig kompensieren.

Beispiel: Randfeld eines Plattenkondensators (Fortsetzung)

5. Schritt (Bild 2.3-8c und 2.3-9):

Als Ort der höchsten Feldstärke ergibt sich ein Punkt an der unteren Seite der Elektrodenkrümmung. Für den Betrag der maximalen Feldstärke folgt

$$E_{\text{max}} \approx \Delta U / a_{\text{min}} = 0,25 U / a_{\text{min}}.$$

Da der minimale Abstand a_{min} zwischen der 100 % und der 75 %-Äquipotentiallinie etwa halb so groß ist, wie im Bereich des homogenen Feldes, ergibt sich eine etwa um den Faktor 2 erhöhte Randfeldstärke. Die wirkliche Maximalfeldstärke wird noch etwas größer sein, da die Feldstärke in dem betrachteten kleinsten „Kästchen“ nicht konstant ist und die Ausmessung nur einen *mittleren Feldstärkewert* ergibt. Der Verlauf der Feldstärke längs der 100 %-Elektrodenkontur kann aus dem Feldbild gemäß Gl. (2.3-37) bestimmt werden, Bild 2.3-9.

Die Kapazität des idealen Plattenkondensators $C_0 = \varepsilon A/d$ ist um die Randfeldkapazität zu erhöhen: $C_{\text{ges}} = C_0 + C_{\text{Rand}}$. Nach Gl. (2.3-38) gilt für den in Bild 2.3-8c dargestellten Randbereich mit $z = 1$ m in Luft (nur für die Rundung und an die mit Kreisen dargestellte Oberseite):

$$C_{\text{Rand}} \approx \Delta C n_p / n_r = \varepsilon z n_p / n_r = \varepsilon z 5/4 \approx 11 \text{ pF}.$$

Das oben beschriebene graphische Verfahren ist auf ebene zweidimensionale Felder an-

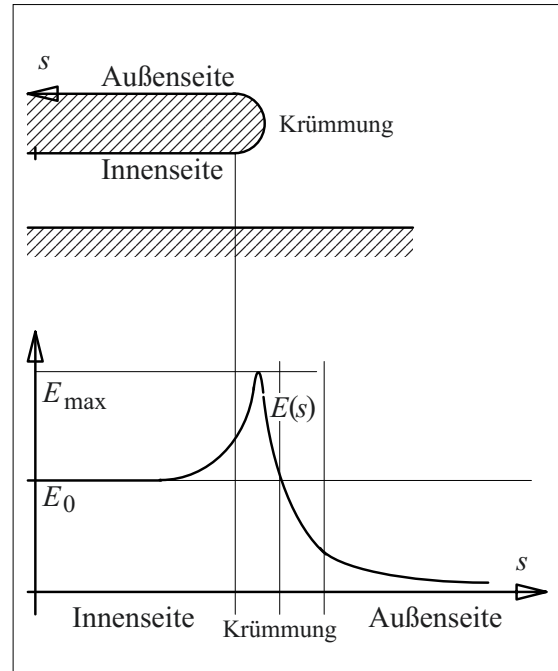


Bild 2.3-9: Qualitativer Verlauf des Betrages der elektrischen Feldstärke entlang der abgewinkelten 100 %-Elektrodenkontur (Koordinate s).

wendbar. Es kann auch auf **rotationssymmetrische Felder** übertragen werden, die ja ebenfalls nur zwei Dimensionen besitzen. Nimmt man in Bild 2.3-7 am unteren Bildrand eine horizontale Rotationsachse an, so werden aus den stabförmigen Elementen ΔC jetzt ringförmige Elemente ΔC mit dem Umfang $2\pi r$:

$$\Delta C = \varepsilon 2\pi r b/a$$

Wegen $\Delta C = \Delta Q / \Delta U = \text{const.}$ folgt daraus

$$b/a = \text{const.} / r. \quad (2.3-39)$$

D.h. das Seitenverhältnis b/a ist in *Abhängigkeit vom Radius r zu verändern*. Dadurch wird die Zeichnung eines genauen Feldbildes erheblich erschwert.

Das graphische Verfahren ist auch auf **Anordnungen mit mehreren Dielektrika** anwendbar (Kapitel 2.4). Zusätzlich zu den o.g. Zeichenregeln müssen dann die „Brechungsgesetze“ für Feld- und Potentiallinien an Isolierstoffgrenzflächen beachtet werden, Bild 2.4-10 und 2.4-25.

Für **dreidimensionale Felder** sind nur grobe qualitative Skizzen ohne quantitative Aussage möglich. Im allgemeinen liegen die dreidimensionalen Feldlinien nicht in der betrachteten Zeichenebene, sondern durchdringen sie. Die Feldlinien können also auch nicht in einer Zeichenebene liegend dargestellt werden. Eine zweidimensionale Darstellung muss sich dann auf die Potentiallinien als Schnittlinien zwischen den Äquipotentialflächen und der Zeichenebene beschränken. Aussagekräftige Feldbilder sind i.d.R. nur mit numerischer Feldberechnung zu erhalten (vgl. Kap. 2.5).

Trotzdem sind *grobe Skizzen* ein wertvolles Hilfsmittel zur Unterstützung des physikalischen Verständnisses und der Vorstellungskraft des Ingenieurs, sie dürfen aber nicht überinterpretiert werden.

2.3.4 Methode der konformen Abbildung Abbildung (für ebene Felder)

Die Methode der konformen Abbildung ermöglicht die analytische Berechnung einiger hochspannungstechnisch wichtiger *ebener Feldanordnungen*.

Anmerkung: Die Methode der konformen Abbildung war von besonderer Bedeutung, bevor die numerische Feldberechnung allgemein verbreitet war. Heute ist sie v.a. von historischem Interesse: Es gibt nur noch einige wenige bedeutende Feldanordnungen, die auf der Methode der konformen Abbildung beruhen.

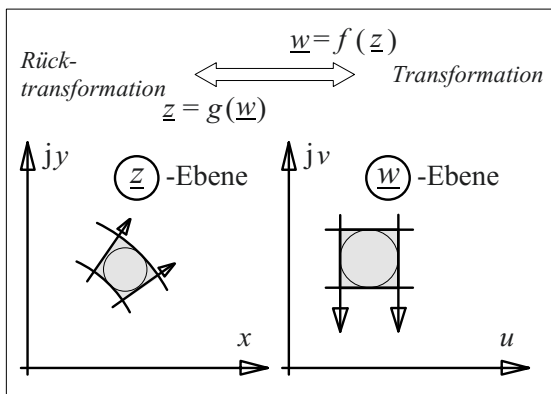


Bild 2.3-10: Konforme Abbildung von Feld- und Potentiallinien aus der komplexen z - in die w -Ebene.

Der Grundgedanke dieser Methode besteht darin, die x,y -Ebene, in der eine komplizierte Elektrodenanordnung gegeben ist, durch eine *Transformation* in eine u,v -Ebene zu überführen, in der sich eine einfachere und *berechenbare Elektrodenanordnung* ergibt. Durch Rücktransformation wird die berechnete Lösung wieder in die x,y -Ebene überführt, Bild 2.3-10.

Hierfür wird die geometrische x,y -Ebene als komplexe z -Ebene ($z = x + jy$) und die geometrische u,v -Ebene als komplexe w -Ebene ($w = u + jv$) interpretiert. D.h. die beiden geometrischen Achsen werden durch die reelle und die imaginäre Achse ersetzt. Die sogenannte **konforme Abbildung**

$$w = f(z)$$

bzw.

$$u + jv = f(x + jy)$$

bildet die Punkte der z -Ebene auf die w -Ebene ab. Sie hat zwei wichtige Eigenschaften [2], [3], [6], Bild 2.3-10:

- Bilder von *endlicher Größe* können durch eine konforme Abbildung deformiert werden, aber die **Winkel** zwischen Kurven und damit auch die rechtwinklige Zuordnung von Feld- und Potentiallinien bleibt bei der Transformation erhalten, die Abbildung ist **winkeltreu**.
- Außerdem ist die konforme Abbildung **im kleinen verhältnistreu**, die Seitenverhältnisse von infinitesimalen Rechtecken aus Feld- und Potentiallinien bleiben bei der Transformation erhalten.

Anmerkung: Diese Feststellungen gelten nicht für den *Ursprung*, der eine *Singularität* (bzw. eine *Polstelle*) bildet.

D.h. *Potentialfelder*, die in der z -Ebene berechnet wurden, besitzen auch *nach der Transformation* in die w -Ebene noch alle Eigenschaften von Potentialfeldern. Dies gilt auch umgekehrt für die Rücktransformation aus der w -Ebene in die z -Ebene, Bild 2.3-10. Trotzdem können die makroskopischen Feldbilder dabei verformt werden.

Anmerkung: Mathematisch betrachtet erfüllt jede reguläre Funktion einer komplexen Größe $f(\underline{z}) = f(x+jy)$ die Potentialgleichung (2.3-32) für den raumladungsfreien und zweidimensionalen Fall:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \\ f''(\underline{z}) \left(\frac{\partial \underline{z}}{\partial x}\right)^2 + f''(\underline{z}) \left(\frac{\partial \underline{z}}{\partial y}\right)^2 &= \\ f''(\underline{z}) 1^2 + f''(\underline{z}) j^2 &= \\ f''(\underline{z}) - f''(\underline{z}) &= 0\end{aligned}$$

q.e.d.

Mit

$$f(x+jy) = \underline{w} = u(x,y) + j v(x,y)$$

gilt außerdem

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \\ (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + j \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}) + (\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + j \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}) &= \\ (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) + j (\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}) &= 0.\end{aligned}$$

Diese Gleichung kann nur erfüllt werden, wenn Real- und Imaginärteil jeweils für sich zu Null werden. Dies heißt aber, dass die Funktionen $u(x,y)$ und $v(x,y)$ jeweils für sich *Lösungen der Potentialgleichung* sind.

Werden in der \underline{w} -Ebene die Linien $v = \text{const.} \sim \varphi$ als *Potentiallinien* angesehen (Bild 2.3-10 rechts), so gibt die Funktion $\varphi(x,y) \sim v(x,y) = \text{const.}$ die Potentialverteilung in der x,y -Ebene an. Die hierzu senkrechten Linien $u = \text{const.}$ können dann als *Feldlinien* angesehen werden, Bild 2.3-10.

Beispiel: Die Funktion $\underline{w} = \underline{z}^2$

Die Funktion $\underline{w} = \underline{z}^2 = (z \cdot e^{j\alpha})^2 = z^2 \cdot e^{j2\alpha}$ verdoppelt die Winkel aller vom Nullpunkt ausgehenden komplexen

Zeiger \underline{z} . Sie ist deshalb geeignet, eine **Elektrode mit einer rechtwinkligen Ecke** in der x,y -Ebene ($\alpha = 90^\circ$) in eine gestreckte Elektrode in der u,v -Ebene ($\alpha = 180^\circ$) zu transformieren, Bild 2.3-11.

In der u,v -Ebene ist das Feld über einer ebenen Elektrode ein *homogenes Feld*, und das Potential nimmt linear mit der Spannung U und dem Abstand v zu, k ist eine Konstante:

$$\varphi = v U k$$

Der Zusammenhang zwischen \underline{w} - und \underline{z} -Ebene ist durch

$$\begin{aligned}\underline{w} &= \underline{z}^2 = (x + j y)^2 \\ \text{bzw.} \quad u + j v &= (x^2 - y^2) + j x y\end{aligned}$$

gegeben. Linien konstanten Potentials sind deshalb *Hyperbeln* in der x,y -Ebene und symmetrisch zur Winkelhalbierenden zwischen der x - und der y -Achse:

$$\varphi \sim v = x y = \text{const.}$$

Für die Feldlinien ($u = \text{const.}$) ergeben sich Hyperbeln symmetrisch zur x - bzw. zur y -Achse:

$$x^2 - y^2 = \text{const.}$$

Für den Potentialverlauf in der x,y -Ebene gilt

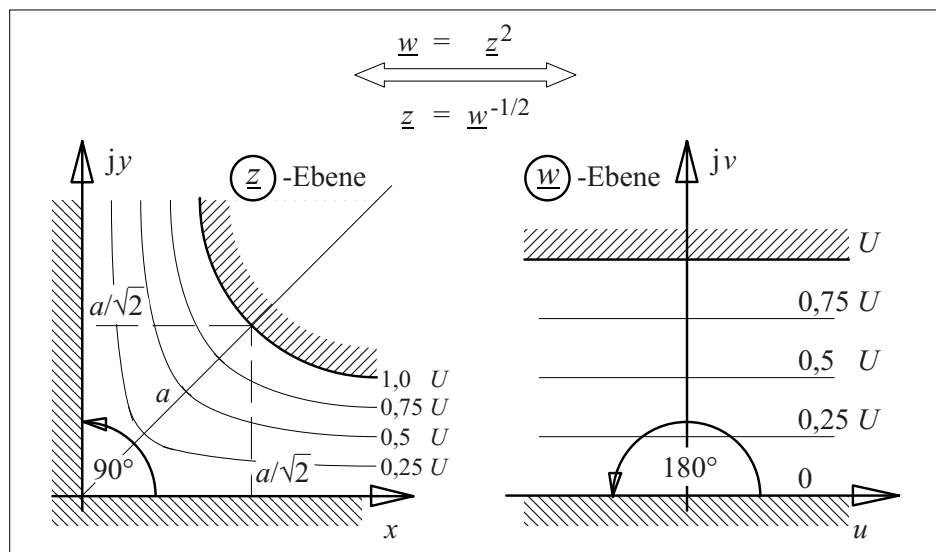
$$\varphi = v U k = x y U k$$

Das Potential der rechtwinkligen Elektrode wird auf Null gesetzt (*Bezugselektrode*). Die Äquipotentiallinie mit dem diagonalen Abstand a zum Ursprung wird als *Gegenelektrode* mit dem Potential $\varphi = U$ gewählt.

Die Konstante k ist mit der Randbedingung $\varphi = U$ für $x = y = a/2^{1/2}$ zu $k = 2/a^2$ bestimmt:

Bild 2.3-11:

Konforme Abbildung von Feld- und Potentiallinien für eine rechtwinklige Elektrode: $\underline{w} = \underline{z}^2$



$$\varphi = x y U 2/a^2$$

Die elektrische Feldstärke E wird durch Gradientenbildung ermittelt:

$$E = -\text{grad } \varphi = -\{\partial\varphi/\partial x, \partial\varphi/\partial y, \partial\varphi/\partial z\}$$

$$E = -U 2/a^2 \{y, x, 0\}$$

Als Betrag ergibt sich

$$E = U 2/a^2 \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Für die *innere Ecke* der Bezugselektrode ($x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$) gilt $E \rightarrow 0$; sie ist elektrisch entlastet, d.h. elektrisch nicht beansprucht.

Auf der Symmetrieachse an der *hyperbelförmig gekrümmten Hochspannungselektrode* ($x = y = a/2^{1/2}$) ist $E = 2 U/a$, d.h. also doppelt so groß wie in einem homogenen Feld mit dem Elektrodenabstand a . Allerdings steigen die Feldstärken außerhalb der Symmetrieachse noch weiter an.

Die Situation ist in der Nähe der Symmetrieachse mit einem gekrümmten Leiter (z.B. Rohrleiter) vergleichbar, der in einer Gebäudeecke geführt wird.

Im allgemeinen ist es schwierig, eine Funktion zu finden, die eine *gegebene Anordnung* in eine elementar berechenbare Anordnung transformiert. Man geht deshalb den umgekehrten Weg, d.h. dass man ausgehend von *gegebenen Funktionen* $w = f(z)$ untersucht, welche Feldanordnungen sich in der x,y -Ebene ergeben.

Auf diese Weise konnte eine große Zahl von Anordnungen, die auch praktische Bedeutung haben, der analytischen Berechnung zugänglich gemacht werden. Inzwischen können jedoch beliebige Feldanordnungen direkt numerisch berechnet werden (Kapitel 2.5). Es wird deshalb darauf verzichtet, die vielen Sonderfälle von mehr oder weniger gut geeigneten konformen Abbildungen zu behandeln, sie können der weiterführenden Literatur entnommen werden [2], [3], [4], [16], [17].

Bild 2.3-12 zeigt einige berechenbare Anordnungen und die zugehörigen Transformationen, die nachfolgend erläutert werden.

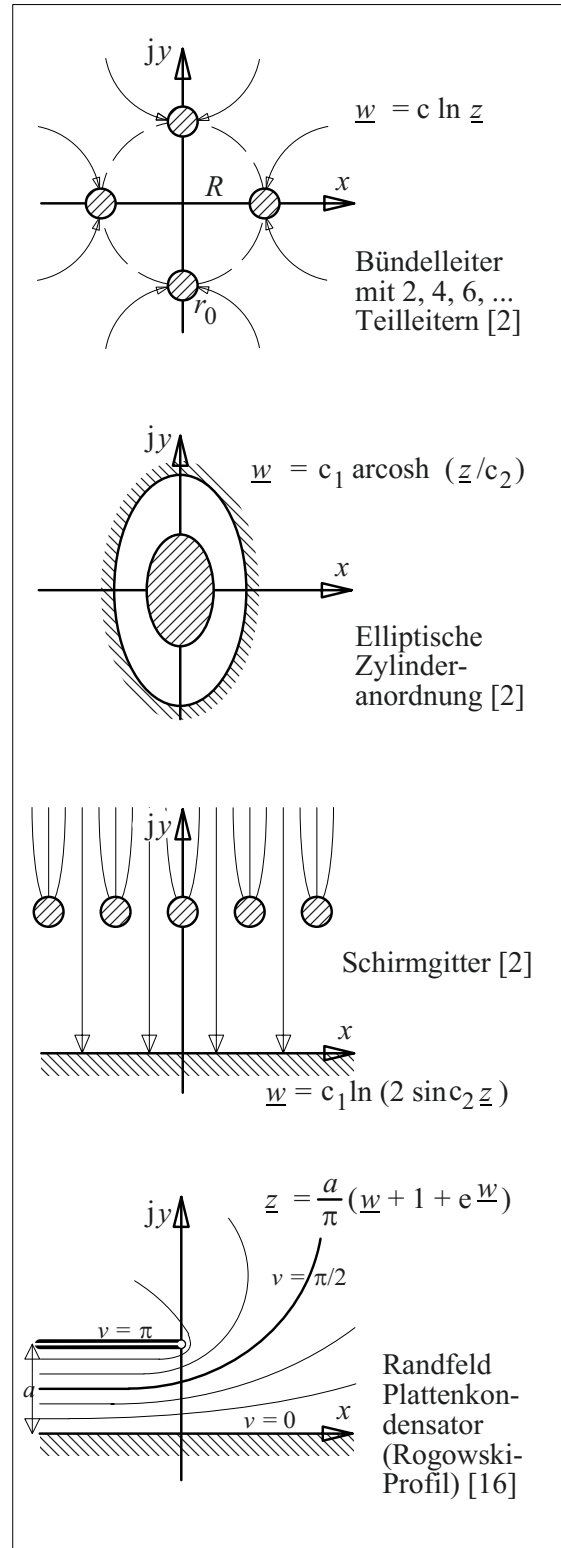


Bild 2.3-12: Beispiele für ebene Felder, die mit Hilfe von konformen Abbildungen berechnet werden können (vgl. weiterführende Literatur).

Beispiel: Bündelleiter

Bei Hochspannungsfreileitungen werden i.d.R. für die Spannungsebenen ab $U_m = 245 \text{ kV}$ anstelle eines einzelnen Leiters Bündelleiter verwendet, weil dadurch die Feldstärke an der Leiteroberfläche herabgesetzt werden kann.

Ein Leiterbündel besteht aus n parallelen Leitern mit dem Teilleiterradius r_0 , die gleichmäßig auf einem Kreis mit dem Radius R verteilt sind. Sie befinden sich auf gleichem Potential, Bild 2.3-12 oben. Mit Hilfe der Funktion $\underline{w} = \ln \underline{z}$ ergibt sich der *Ersatzradius* R' für einen zylindrischen Einzelleiter mit *gleicher Kapazität* gegen eine weit entfernte Gegenelektrode für kleine Teilleiterradien $r_0 \ll R$ nach [2]:

$$R' = R (n r_0 / R)^{1/n} \quad (2.3-40)$$

Werden zwei gleichartige Bündelleiter im Abstand a parallel geführt, so kann aus der Kapazitätsberechnung nach Kap. 2.3.5.3 die Ladung bestimmt werden. Daraus ergibt sich die maximale Feldstärke am Leiter [2]:

$$E = U / \{2 r_0 n \ln(a/R')\} \quad (2.3-41)$$

Für das Verhältnis der Feldstärke E zur Feldstärke E_0 an der Oberfläche eines einzelnen Leiters mit dem Radius r_0 folgt

$$E/E_0 = \ln(a/r_0) / \{n \ln(a/R')\}. \quad (2.3-42)$$

Diese Gleichungen gelten auch für Bündelleiter, die in der Höhe h über einer leitenden Ebene geführt werden, wenn $a = 2h$ und $U = 2 \Delta U_{L/E}$ gesetzt werden. Diese Ebene wird dann als Symmetrieebene in einer Anordnung mit zwei parallelen Bündelleitern angesehen, vgl. auch Kap. 2.3.5.3.

Beispiel: Randfeld des Plattenkondensators

Von besonderer Bedeutung für die Hochspannungstechnik ist das *Randfeld des Plattenkondensators*, Bild 2.3-12 unten. Bei der Transformation in die \underline{w} -Ebene entsteht ein homogenes Feld, indem die Oberseite der scharfkantigen Elektrode um die Randlinie um 180° im Uhrzeigersinn gedreht wird. Die Äquipotentiallinien im homogenen Feld der \underline{w} -Ebene sind dann durch die Bedingung $v = \text{const.}$ gegeben.

In der \underline{z} -Ebene ergeben sich Äquipotentiallinien, die um die Kante der oberen Elektrode gekrümmt werden. In der Nähe der Kante wird die Feldstärke sehr stark erhöht, sie strebt mit Annäherung an die Randlinie gegen einen unendlich großen Wert. An der unteren Elektrode nimmt die Feldstärke nach außen hin ab.

Das Volumen zwischen den Elektroden wird durch die Äquipotentiallinie (bzw. -fläche) $v = \pi/2$, dem sog. „**Rogowski-Profil**“ in zwei Teile geteilt: Im oberen Volumen krümmen sich die Äquipotentiallinien um die obere Elektrode und die Feldstärken entlang dieser Linien (bzw. -flächen) erreichen lokale Maxima $E > E_0 = U/a$. Im unteren Volumen überschreitet die Feldstärke niemals den Wert des homogenen Feldes $E \leq E_0 = U/a$. Elektroden, die dem Rogowski-Profil entsprechend geformt sind (Rogowski-Elektroden) sind von großer Bedeutung für die Hochspannungstechnik, weil mit ihnen die Feldstärkeüberhöhung an den Elektrodenrändern vermieden werden kann. Eine wichtige Anwendung ist z.B. die Prüfung der *Durchschlagsfestigkeit* von Materialien.

Entlang des „Rogowski-Profiles“ nimmt die Feldstärke nach außen hin stetig ab. Die Krümmung der Elektrode könnte also noch verstärkt werden, um eine kompaktere Bauweise zu ermöglichen. Dies ist bei hohen Spannungen mit sehr großvolumigen Elektroden erforderlich. Die kleinsten Abmessungen ergeben sich bei konstanter Feldstärke $E=E_0$ entlang der gekrümmten Elektrode. Die entsprechende Kontur wird als „**Borda-Profil**“ bezeichnet, sie kann ebenfalls durch konforme Abbildung oder durch iterative numerische Optimierung ermittelt werden. Das Borda-Profil ist eine spiralförmige Kontur mit stetig abnehmendem Krümmungsradius. Eine wichtige Anwendung ist die *Feldsteuerung in Kabelendverschlüssen und Kabelmuffen*, Bild 2.4-36, 7.1.1-4 und -5.

Anmerkung: Elektroden mit einer nach dem Borda-Profil geformten Kontur werden häufig *unpräziserweise* auch als Rogowski-Elektroden bezeichnet.

Für die Praxis ist es häufig ausreichend, den *Elektrodenrand mit einem Radius R zu verrunden*; der größer ist als der Plattenabstand d :

$$R > d \quad (2.3-43)$$

Der Abstand d bezieht sich dabei auf zwei gleichartige verrundete Plattenelektroden wie in Bild 2.3-5. Der Abstand in den Bildern 2.3-8 und -9 wäre dementsprechend $d/2$.

Anmerkung: Unter Annahme eines zylindersymmetrischen Feldes mit $R_1 = R$, $R_2 = R + d/2$ und $R = d$ ergibt sich für die Feldstärkeüberhöhung nach Gl. (2.3-22), (-28) das Verhältnis $E_1/E_0 = 2,47$. Dies ist jedoch eine Abschätzung nach oben, die tatsächlichen Maximalfeldstärken liegen wesentlich niedriger. Wird der „effektive Außenradius“ entsprechend dem Feldlinienverlauf an der Stelle der größten Randfeldstärke mit $R_2 = 2R + d/2$ abgeschätzt (vgl. Bild 2.3-8c), ergibt sich $E_1/E_0 = 1,1$. Dies entspricht etwa der tatsächlichen Feldüberhöhung, wie man sie auch über den Homogenitätsgrad nach Kap. 2.3-6 ermitteln kann [22].

Diese Abschätzung zeigt, dass das Ergebnis sehr stark von den vereinfachenden Annahmen abhängt. *Abschätzungen* können deshalb eine genaue analytische oder numerische Feldberechnung meist nicht ersetzen. Sie sind jedoch, ähnlich wie die graphischen Verfahren (Kap. 2.3.3), ein gutes Mittel, ein Gefühl für die Größenordnung der elektrischen Feldstärken zu entwickeln.

2.3.5 Ersatzladungsverfahren

Das Ersatzladungsverfahren ist ein weiteres klassisches Verfahren zur analytischen Berechnung besonderer Feldanordnungen der Hochspannungstechnik. Es lässt sich auch für die numerische Berechnung beliebiger Quellenfelder einsetzen (Kap. 2.5).

Das Ersatzladungsverfahren greift die physikalische Vorstellung auf, dass Quellenfelder durch **Überlagerung der Felder vieler Einzelladungen** entstehen. Allerdings werden die „Ersatzladungen“ nicht, wie es der physikalischen Vorstellung entsprechen würde, auf den Elektrodenoberflächen positioniert. Man geht vielmehr von einfachen Ladungsverteilungen (Punkt-, Linienladungen) aus und wählt die *Elektrodenkonturen* aus den sich ergebenden Äquipotentialflächen nachträglich aus. Des-

halb wird diese Methode gelegentlich auch als **„indirekte Methode“** bezeichnet [67]. Die Ladungen stellen nur eine begrenzte Zahl von Ersatzladungen dar, die zwischen den gewählten Elektrodenkonturen das gleiche Quellenfeld erzeugen, wie eine unbegrenzte Zahl realer Ladungen. Im englischen Sprachgebrauch ist die Bezeichnung **„charge simulation method“** (CSM) üblich.

Nachfolgend werden die hochspannungstechnisch wichtigen Felder in der Umgebung zweier Punktladungen (Kap. 2.3.5.1), zwischen zwei leitenden Kugeln (Kap. 2.3.5.2), in der Umgebung von zwei parallelen Linienladungen (Kap. 2.3.5.3) und zwischen leitenden Zylindern (Kap. 2.3.5.4) behandelt. Aufgrund von Symmetrieüberlegungen ergeben sich daraus auch die Felder zwischen Kugeln bzw. Zylindern und leitenden Ebenen [2].

Damit lassen sich einige wichtige Feldanordnungen der Hochspannungstechnik analytisch berechnen, wie z.B. kugelförmige Abschirmhauben gegen ebene Wände, Kugelfunkentrecken (Messfunkentrecken), zylindrische Leiter gegen ebene Wände und Freileitungen.

2.3.5.1 Leitende Kugeln (Punktladungen)

Die Felder in der Umgebung leitender Kugeln ergeben sich durch *Überlagerung der Potentiale* von Punktladungen.

Das Potential in der Umgebung einer Punktladung ergibt sich aus der Integration der elektrischen Feldstärke nach Gl. (2.3-2) von r bis ∞ :

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{r} \quad (2.3-44)$$

Dabei wurde $\varphi(\infty)$ als Bezugspotential gleich Null gesetzt. Die Gegenladung $-Q$ wird bei $r = \infty$ angenommen. Das Feld zweier Punktladungen Q_1 und Q_2 ergibt sich aus der Überlagerung der Potentiale:

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2} \right) \quad (2.3-45)$$

r_1 und r_2 sind die Abstände von den Punktladungen Q_1 und Q_2 zum Aufpunkt P, in dem das Potential φ durch Überlagerung der Potentiale $\varphi_1 + \varphi_2$ gebildet wird, Bild 2.3-13.

Beispiel: Gleich große Ladungen entgegengesetzter Polarität ("Spiegelladungen")

Sind die Ladungen $Q_1 = Q$ und $Q_2 = -Q_1 = -Q$ gleich groß und von entgegengesetzter Polarität, ergibt sich als Bedingung für die Potentialflächen

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \text{const.} \quad (2.3-46)$$

Die im Unendlichen angenommenen Gegenladungen $-Q$ und $+Q$ kompensieren sich in diesem Fall. Aufgrund der spiegelsymmetrischen Anordnung der Ladungen $+Q$ und $-Q$ zur ebenen Äquipotentialfläche $\varphi = 0$ spricht man von „*Spiegelladungen*“ und „*Spiegelfläche*“.

Das Potential $\varphi = 0$ ergibt sich nach Gl. (2.3-46) für unendlich große Radien r_1 und r_2 . $\varphi = 0$ gilt außerdem für

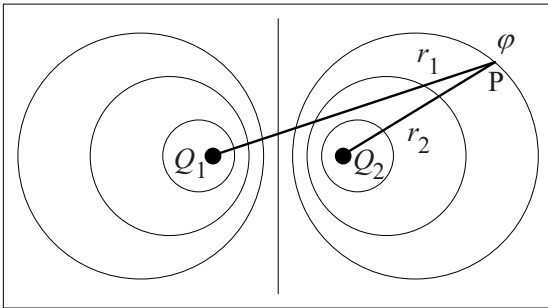


Bild 2.3-13: Überlagerung von Quellenfeldern, die von zwei Punktladungen erzeugt werden.

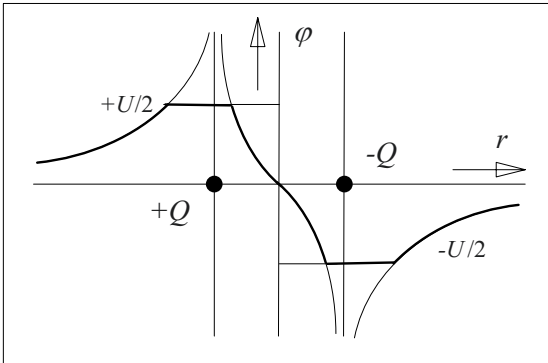


Bild 2.3-14: Potentialverlauf auf der Verbindungslinie zwischen zwei Punktladungen $+Q$ und $-Q$ (vgl. auch Bild 2.3-13). $+U/2$ und $-U/2$ sind die Potentiale zweier Potentialflächen, die als Elektrodenkonturen ausgewählt wurden (Potentialdifferenz U).

$r_1 = r_2$, d.h. für die Symmetrieebene senkrecht zur Verbindungslinie zwischen beiden Ladungen, Bild 2.3-14.

Am Ort der beiden Ladungen nimmt das Potential unendlich hohe positive bzw. negative Werte an ($r_1 = 0$ bzw. $r_2 = 0$). Es handelt sich hierbei um den theoretischen Grenzfall der sogenannten Punktladungen.

Für die Berechnung praktischer Elektrodenanordnungen sind nun zwei Äquipotentialflächen (z.B. mit $\varphi = +U/2$ und $\varphi = -U/2$) als Elektrodenoberflächen auszuwählen. Im vorliegenden Beispiel handelt es sich dabei allerdings *nicht* um Kugelflächen.

Für zwei Ladungen Q_1 und Q_2 mit entgegengesetzter Polarität und *ungleichen* Ladungsbeiträgen soll nun diejenige Äquipotentialfläche gesucht werden, für die $\varphi = 0$ gilt. Es handelt sich dabei offensichtlich nicht (wie in vorstehendem Beispiel) um die geometrische Symmetrieebene. Trotzdem spricht man in einem erweiterten Sinne auch hier von den „*Spiegelladungen*“ Q_1 und Q_2 und der „*Spiegelfläche*“ mit $\varphi = 0$.

Für die „*Spiegelfläche*“ folgt mit $\varphi = 0$ aus Gl. (2.3-45) die Bedingung

$$Q_1/r_1 + Q_2/r_2 = 0$$

bzw.

$$r_1/r_2 = Q_1/(-Q_2) = k. \quad (2.3-47)$$

Für entgegengesetzte Polarität ist das Verhältnis der Ladungen $k = Q_1/(-Q_2)$ eine positive Größe und Gl. (2.3-47) beschreibt, wie nachfolgend gezeigt wird, eine *Kreisgleichung*, Bild 2.3-15. Der Mittelpunkt M des Kreises wird als Ursprung eines x,y -Koordinatensystems gewählt.

Aus Gl. (2.3-47) und Bild 2.3-15 folgt

$$k^2 = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{(a+b+x)^2 + y^2}{(b+x)^2 + y^2}$$

Diese Bedingung wird so umgeformt, dass sich eine Kreisgleichung im x,y -Koordinatensystem ergibt:

$$k^2(b+x)^2 + k^2y^2 = a^2 + 2a(b+x) + (b+x)^2 + y^2$$

$$\begin{aligned}
 (k^2-1) [(b+x)^2 + y^2] &= a^2 + 2ab + 2ax \\
 (k^2-1) [x^2 + y^2] &= a^2 + 2ab + 2ax \\
 &\quad - (k^2-1) [b^2 + 2bx] \\
 x^2 + y^2 &= \frac{a^2 + 2ab}{k^2 - 1} - b^2 + \frac{2a \cdot x}{k^2 - 1} - 2b \cdot x
 \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck beschreibt nur dann einen Kreis um den Koordinatenursprung M, wenn auf der rechten Gleichungsseite der zweite, x enthaltende Term gleich Null ist. Der von x und y unabhängige erste Term ist dann gleich dem Quadrat des Radius r_0 :

$$x^2 + y^2 = r_0^2 + 0$$

Hieraus ergeben sich zwei Beziehungen für die Position b der Ersatzladung Q_2 und für den Radius r_0 der Äquipotentialfläche. Für b folgt durch Nullsetzen des zweiten Terms

$$b = \frac{a}{k^2 - 1} \quad (2.3-48)$$

Der erste Term ergibt r_0 durch Einsetzen von b nach Gl. (2.3-48):

$$r_0^2 = \frac{a^2 + 2ab}{k^2 - 1} - b^2$$

Nach Einsetzen von b folgt

$$\begin{aligned}
 r_0^2 &= \frac{a^2(k^2 - 1) + 2a \cdot a}{(k^2 - 1)^2} - \frac{a^2}{(k^2 - 1)^2} \\
 &= \frac{a^2 k^2}{(k^2 - 1)^2}
 \end{aligned}$$

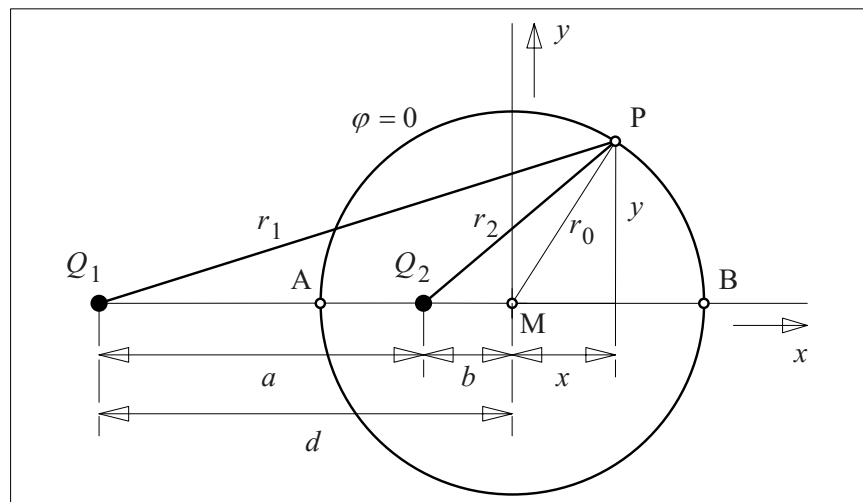
D.h. für den Radius der Äquipotentialfläche gilt mit $k > 1$

$$r_0 = \frac{a k}{k^2 - 1} \quad (2.3-49)$$

Anmerkung: Damit wurde gezeigt, dass die Bedingung $\varphi = 0$ in der x, y -Zeichenebene nach Bild 2.3-15 einer Kreisgleichung entspricht. Die obigen Ableitungen gelten jedoch für jede beliebige Ebene, die die Verbindungslinie der Ladungen Q_1 und Q_2 enthält. Solche Ebenen entstehen durch Drehung der betrachteten Zeichenebene um die Verbindungslinie. Aus der kreisförmigen Potentiallinie $\varphi = 0$ entsteht dabei eine kugelförmige Äquipotentialfläche, die betrachtete Anordnung ist kugelsymmetrisch.

Die Kugeloberfläche bleibt Äquipotentialfläche, wenn in ihrem Mittelpunkt M eine weitere Ladung Q_3 eingebracht wird, Bild 2.3-16. Das Potential in einem beliebigen Punkt P ergibt sich durch Überlagerung der Potentiale, die den drei „Ersatzladungen“ Q_1 , Q_2 und Q_3 zugeordnet werden:

Bild 2.3-15:
Geometrische Beschreibung
der Äquipotentialfläche
 $\varphi = 0$ als Kugel­fläche bzw.
als Kreisgleichung.



$$\varphi_P = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \quad (2.3-50)$$

Für alle Punkte der Kugeloberfläche gilt wegen $\varphi_1 + \varphi_2 = 0$ und mit Gl. (2.3-44)

$$\varphi_K = \varphi_3 = \frac{Q_3}{4\pi\epsilon r_0} \quad (2.3-51)$$

Beispiel: Ungeladene metallische Kugel

Eine ungeladene metallische Kugel (Radius r_0) wird in das Feld einer Punktladung Q_1 gebracht. Der Abstand d zwischen Q_1 und Kugelmittelpunkt M sei gegeben. Es sollen folgende Größen bestimmt werden:

- (1) Größe und Position der Ersatzladungen,
- (2) Potential der Kugeloberfläche,
- (3) Potential im Feldraum und
- (4) Maximalfeldstärke.

Anmerkung: Die ungeladene metallische Kugel in einem elektrischen Feld kann beispielsweise als Modell eines leitfähigen Partikels oder als eine Elektrode auf freiem Potential angesehen werden.

Zu (1): Ersatzladungen

Eine Anordnung mit kugelförmiger Äquipotentialfläche kann durch drei Ersatzladungen Q_1 , Q_2 und Q_3 gemäß Bild 2.3-16 beschrieben werden. Die Vorgabe einer ungeladenen Kugel bedeutet, dass die Ladungen Q_2 und Q_3 entge-

gegengesetzt gleich sein müssen:

$$Q_3 = -Q_2 \quad (2.3-52)$$

Q_2 kann mit Hilfe der Gl. (2.3-48), (-49) und (-47) aus den gegebenen Größen Q_1 , r_0 und d bestimmt werden:

$$d = a + b$$

$$\stackrel{(48)}{=} a + a / (k^2 - 1)$$

$$= a k^2 / (k^2 - 1)$$

$$\stackrel{(49)}{=} r_0 k$$

$$\stackrel{(47)}{=} r_0 (-Q_1/Q_2)$$

Für die Größe der Ersatzladung Q_2 folgt

$$Q_2 = -Q_1 r_0 / d \quad (2.3-53)$$

Die Division von Gl. (2.3-48) durch Gl. (2.3-49) ergibt

$$b/r_0 = 1/k = -Q_2/Q_1 \quad (2.3-54)$$

Mit Gl. (2.3-53) folgt für die Position b der Ersatzladung Q_2 :

$$b = r_0^2 / d \quad (2.3-55)$$

Damit sind Größe Q_2 und Position b der Ersatzladung durch die gegebenen Größen Q_1 , r_0

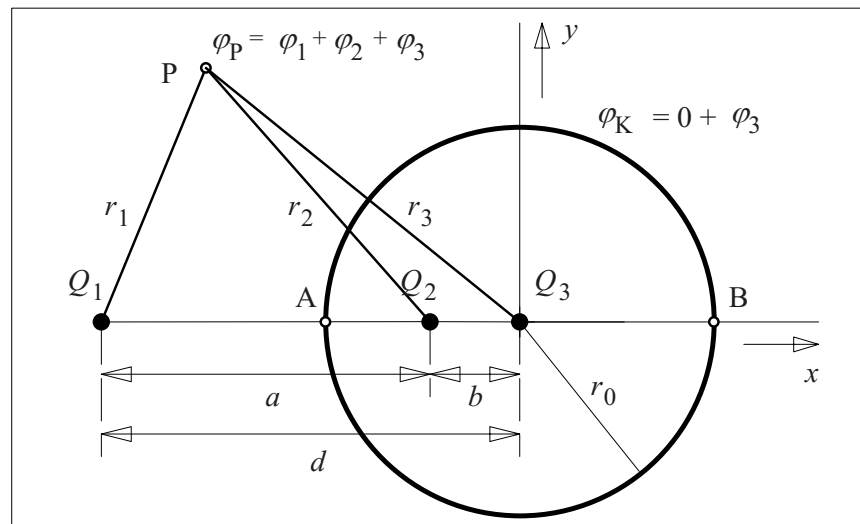


Bild 2.3-16:
Leitfähige Kugel mit dem Potential φ_K , beschrieben durch drei Ersatzladungen.

und d ausgedrückt worden. Man bezeichnet Q_2 als „Spiegelladung“ bzw. als „elektrisches Bild“ zu Q_1 , wobei man sich in diesem Fall eine „Spiegelung“ an der Kugeloberfläche vorstellen muss. Die Größe der Ersatzladung Q_3 ergibt sich gemäß Gl. (2.3-52) als entgegengesetzt gleich zu Q_2 .

Anmerkung: Die betrachteten Ladungen Q_1 , Q_2 und Q_3 werden als **Ersatzladungen** bezeichnet, da sie zwar die *richtige Feldverteilung* außerhalb der leitenden Kugel ergeben, nicht aber der tatsächlichen *physikalischen Ladungsverteilung* entsprechen. Auf einer leitenden Elektrode werden sich die Ladungsträger aufgrund der Feldkräfte an der Oberfläche kontinuierlich verteilen. Die Flächenladungsdichte entspricht der örtlichen dielektrischen Verschiebungsdichte, vgl. Gl. (2.1-3) und Bild 2.3-17. Lediglich die Ladungssummen entsprechen den Ersatzladungen.

Zu (2): Potential der Kugeloberfläche

Vor Einbringen der Ladung Q_3 hat die Kugeloberfläche aufgrund der Spiegelladungen Q_1 und Q_2 das Potential $\varphi = 0$, vgl. Bild 2.3-15. Mit Q_3 ergibt sich mit Gl. (2.3-51), (-52) und (-53) für das Potential

$$\begin{aligned}\varphi_K &= Q_3 / (4\pi\epsilon r_0) \\ &\stackrel{(52)}{=} -Q_2 / (4\pi\epsilon r_0) \\ &\stackrel{(53)}{=} (Q_1 r_0/d) / (4\pi\epsilon r_0) \\ \varphi_K &= Q_1 / (4\pi\epsilon d). \quad (2.3-56)\end{aligned}$$

D.h. die Kugeloberfläche nimmt *genau das Potential* an, das der Kugelmittelpunkt M im Feld der Punktladung Q_1 vor Einbringen der Kugel hatte. Dies gilt auch für beliebige Felder, die aus der Überlagerung von Feldern einzelner Ersatzladungen gebildet werden können, Bild 2.3-17.

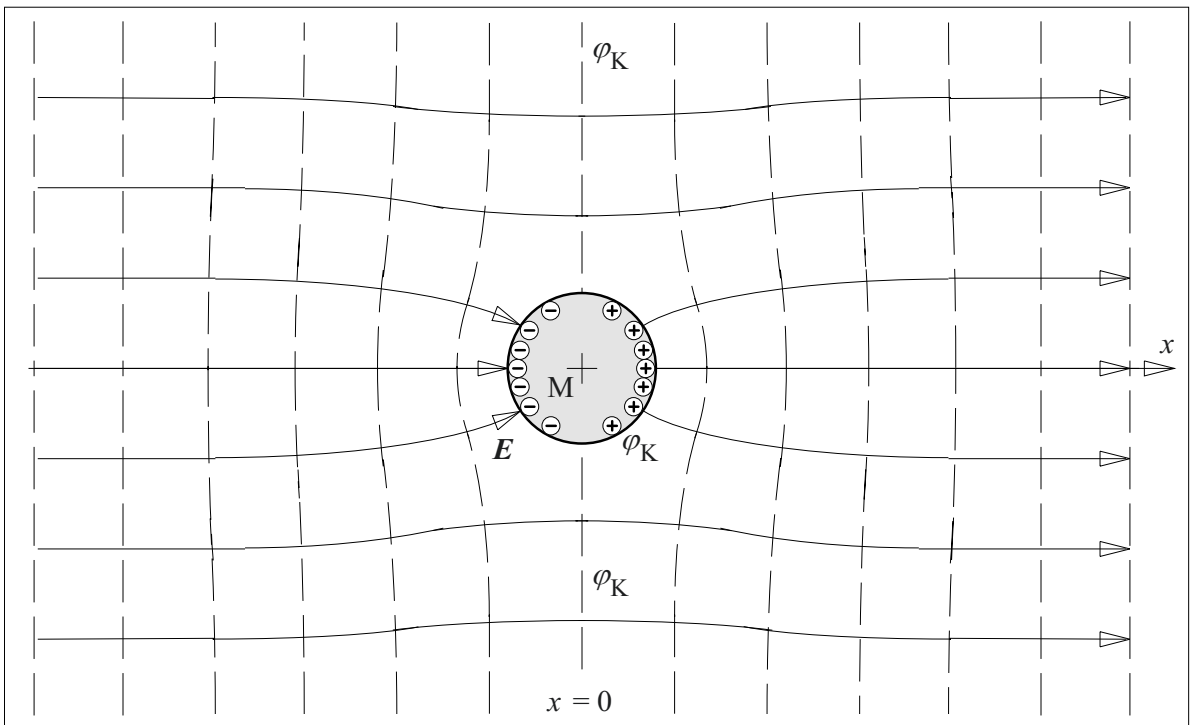


Bild 2.3-17: "Verzerrung" eines homogenen elektrischen Feldes durch eine ungeladene leitende Kugel. Das Potential der Kugel entspricht dem Potential am Ort des Kugelmittelpunktes M vor Einbringen der Kugel. Die gezeichnete Ladungsverteilung bezieht sich auf die physikalische Vorstellung von Ladungsträgern, die an der Oberfläche der Kugel verteilt sind. Im Gegensatz dazu werden die für die Berechnung herangezogenen "Ersatzladungen" auf der x -Achse angeordnet, vgl. Bild 2.3-16.

Zu (3): Potential im Feldraum

Im Feldraum außerhalb der leitenden Kugel ergibt sich das Potential durch Überlagerung der Potentiale, die den drei Ladungen zugeordnet werden:

$$\varphi_P = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$$

Mit Gl. (2.3-44) und Bild 2.3-16 folgt

$$\varphi_P = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2} + \frac{Q_3}{r_3} \right)$$

Q_2 und Q_3 können mit Gl. (2.3-53) und (-52) durch Q_1 ersetzt werden:

$$\varphi_P = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{r_0}{dr_2} + \frac{r_0}{dr_3} \right) \quad (2.3-57)$$

In dieser Gleichung müssen die Abstände r_1 , r_2 und r_3 zu den Ersatzladungen noch durch die Koordinaten des betrachteten Punktes P ersetzt werden, Bild 2.3-16. Feldstärken ergeben sich dann durch die Bildung des Gradienten nach Gl. (2.1-8).

Zu (4): Maximale Feldstärken

Die maximale Feldstärke tritt auf der x -Achse für $x = -r_0$ im Punkt A an der Kugeloberfläche auf. Das elektrische Feld hat auf der x -Achse nur eine x -Komponente, sie kann deshalb nach Gl. (2.1-8a) durch Ableitung von φ nach x ermittelt werden.

$\varphi(x)$ ergibt sich längs der x -Achse aus Gl. (2.3-57) mit $r_1 = d + x$, $r_2 = -(b + x)$ und $r_3 = -x$.

Die Abstände r_1 , r_2 und r_3 zu den Ersatzladungen sind positive Größen (Beträge) und müssen deshalb im betrachteten Abschnitt $-d < x \leq -r_0$ auf der negativen x -Achse entsprechend der vorstehenden Definition eingesetzt werden. Dabei gibt x die Lage des betrachteten Punktes P auf der x -Achse an, Bild 2.3-16:

$$\varphi(x) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{d+x} + \frac{r_0}{d} \cdot \frac{1}{b+x} - \frac{r_0}{d} \cdot \frac{1}{x} \right)$$

für $-d < x \leq -r_0$

Durch Gradientenbildung ergibt sich die x -Komponente der elektrischen Feldstärke E_x :

$$\begin{aligned} E_x &= -\partial\varphi/\partial x \\ &= \frac{-Q_1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{-1}{(d+x)^2} - \frac{r_0}{d(b+x)^2} + \frac{r_0}{d x^2} \right) \end{aligned} \quad (2.3-58)$$

für $-d < x \leq -r_0$

Der maximale Feldstärkebetrag E ergibt sich bei $x = -r_0$ im Punkt A. Er ist in diesem Punkt gleich der x -Komponente der elektrischen Feldstärke E_x :

$$\begin{aligned} E &= E_x = \dots \\ &= \frac{-Q_1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{-1}{(d-r_0)^2} - \frac{r_0}{d(r_0^2/d-r_0)^2} + \frac{r_0}{d r_0^2} \right) \\ &= \frac{-Q_1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{-1}{(d-r_0)^2} - \frac{d}{r_0(r_0-d)^2} + \frac{1}{d r_0} \right) \\ &= \frac{-Q_1}{4\pi\epsilon} \frac{-d r_0 - d^2 + (d^2 - 2d r_0 + r_0^2)}{d r_0 (d-r_0)^2} \\ &= \frac{Q_1}{4\pi\epsilon} \frac{3d r_0 - r_0^2}{d r_0 (d-r_0)^2} \end{aligned}$$

Nach Kürzen von r_0 folgt für den maximalen Feldstärkebetrag im Punkt A bei $x = -r_0$

$$E = E_x = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon} \frac{3d - r_0}{d(d-r_0)^2} \cdot \quad (2.3-59)$$

Hieraus kann die durch die Kugel hervorgerufene *Feldstärkeüberhöhung* ermittelt werden. Vor Einbringen der Kugel bewirkt die Ladung Q_1 im Punkt A nach Gl. (2.3-2) die elektrische Feldstärke

$$E_1 = E_{1x} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon} \frac{1}{(d-r_0)^2} \cdot \quad (2.3-60)$$

Für das Verhältnis der überhöhten zur ursprünglichen Feldstärke folgt aus Gl. (2.3-59) und (-60)

$$\frac{E}{E_1} = 3 - \frac{r_0}{d} \quad (2.3-61)$$

Für ein nahezu *homogenes Feld* E_0 gilt $d \gg r_0$ und die Feldstärke wird um den **Faktor 3** überhöht:

$$E = 3 E_0 \quad (2.3-62)$$

Anmerkung: Damit wird deutlich, dass *leitfähige Partikel* in einer Isolierung zu gefährlichen Feldstärkeüberhöhungen führen können.

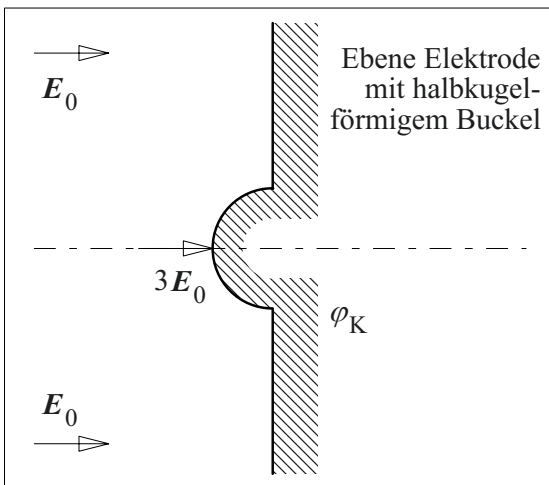
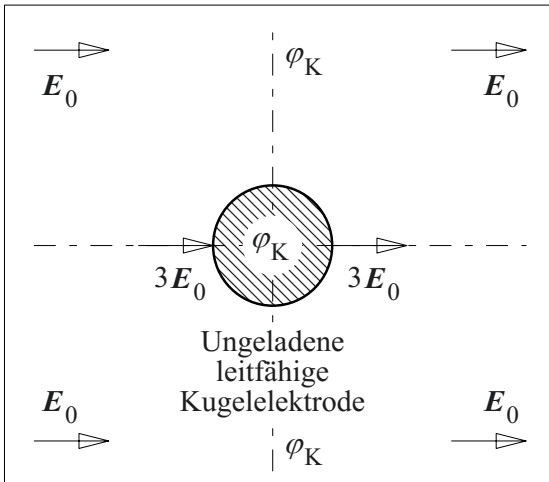


Bild 2.3-18: Feldüberhöhung durch eine ungeladene leitfähige Kugel (oben) und durch eine halbkugelförmige Erhebung auf einer ebenen Elektrode (unten) im ursprünglich homogenen Feld.

I.d.R. weichen solche Partikel mehr oder weniger stark von der idealen Kugelform ab, so dass es in der Praxis noch zu *erheblich höheren Feldstärkeüberhöhungen* kommen kann. Eine saubere Verarbeitung der Isolierstoffe zur *Vermeidung leitfähiger Verunreinigungen* ist deshalb eine Grundvoraussetzung der hochspannungstechnischen Fertigung!

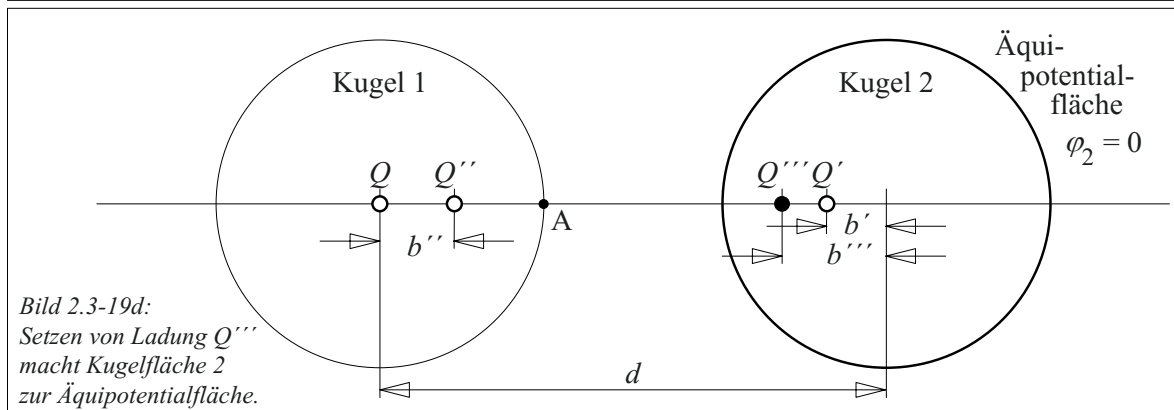
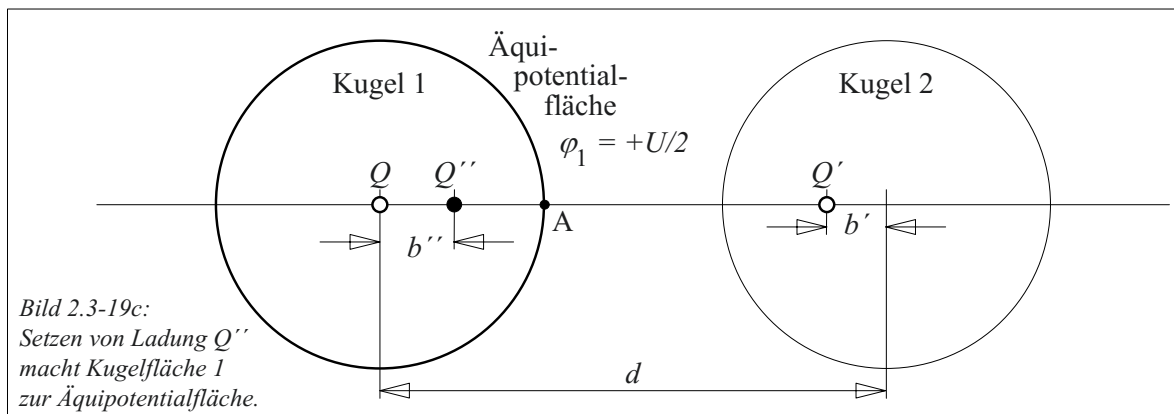
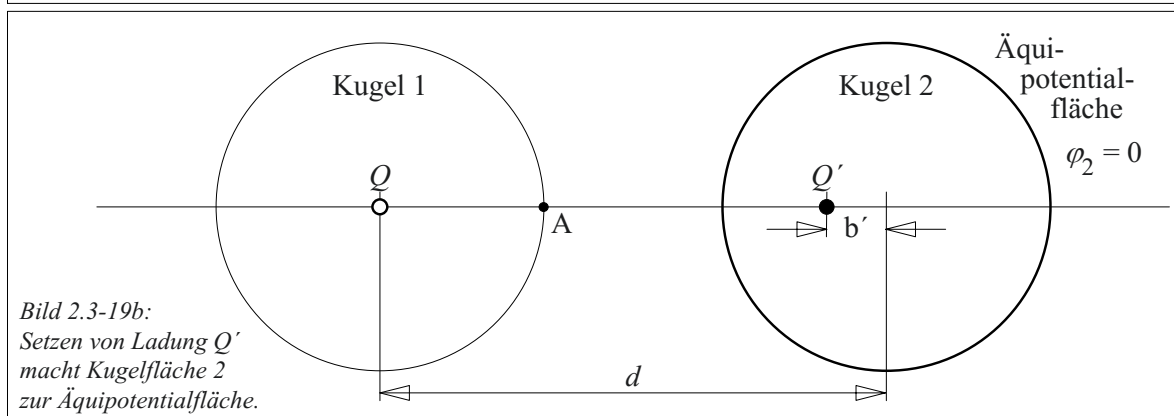
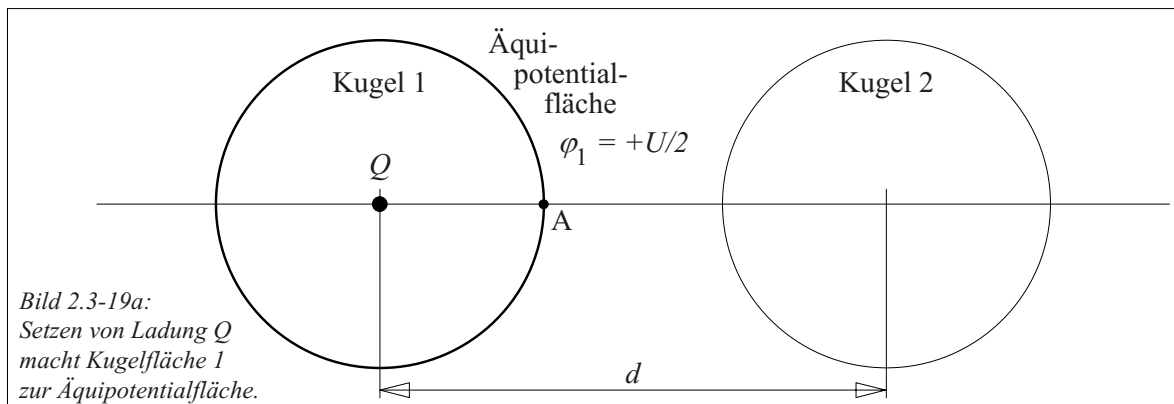
Im Sonderfall des homogenen Feldes ($d \gg r_0$) ist die Anordnung symmetrisch bzgl. der Äquipotentialfläche ϕ_K , Bild 2.3-17. Diese kann dann als ebene Elektrode interpretiert werden, aus der sich ein *halbkugelförmiger Elektrodenaufsatz* erhebt, Bild 2.3-18. Die maximale Feldstärke ist dreimal so hoch wie im ungestörten homogenen Feld.

Die Feldstärkeüberhöhung durch eine leitfähige Halbkugel auf einer *ebenen* Elektrode kann auch als Modell für die Feldstärkeüberhöhung auf einer *nicht vollständig ebenen Elektrodenoberfläche* angesehen werden. Unebenheiten führen in der Praxis dazu, dass z.B. Abschirmelektroden einen Entladungseinsatz bereits bei Spannungen aufweisen, bei denen die makroskopische Feldstärke noch keinen Entladungseinsatz erwarten lässt (in Luft ist \hat{E}_D etwa 30 kV/cm).

2.3.5.2 Feld zwischen zwei leitenden Kugeln (Kugelfunkenstrecke)

Das Ersatzladungsverfahren erlaubt auch die Berechnung des Feldes zwischen zwei kugelförmigen Elektroden, sowie zwischen einer kugelförmigen Elektrode und einer (Symmetrie-)Ebene. In der Praxis kommen solche Anordnungen als *Kugelfunkenstrecken* und als *Abschirmelektroden gegen ebene Wände* vor. Deshalb soll hier die vergleichsweise aufwändige iterative Berechnung erläutert werden, Bild 2.3-19:

Gegeben sind zwei leitfähige Kugeln mit dem Radius r_0 , dem Mittelpunktsabstand d und der Potentialdifferenz $\Delta\phi = U$. Die Berechnung erfolgt in zwei Schritten:



- (1) Durch Setzen von Ersatzladungen sollen die vorgegebenen Kugeloberflächen durch die berechneten Äquipotentialflächen angenähert werden.
- (2) *Feldstärken* ergeben sich nach dem Setzen der Ladungen aus der Überlagerung der Ersatzladungsfelder.

Zu (1): Ersatzladungen

(a) Zunächst wird im Mittelpunkt der Kugel 1 eine Ersatzladung Q gesetzt. Aufgrund des radialsymmetrischen Feldes ist Kugeloberfläche 1 auch Äquipotentialfläche. Q wird so bestimmt, dass sich das Potential $\varphi_1 = U/2$ ergibt. Kugeloberfläche 2 ist natürlich aufgrund des radialsymmetrischen Feldes der Ladung Q *keine* Äquipotentialfläche, Bild 2.3-19a.

(b) Kugeloberfläche 2 kann zu einer Äquipotentialfläche mit dem Potential $\varphi_2 = 0$ durch Setzen einer *Spiegelladung* Q' im Abstand b' vom Mittelpunkt gemacht werden, Bild 2.3-19b. Die Ladungen Q und Q' entsprechen dabei den Ladungen Q_1 und Q_2 in Bild 2.3-15. Nach dem Setzen von Q' ist Kugeloberfläche 1 *keine* Äquipotentialfläche mehr.

(c) Durch Setzen der Ersatzladung Q'' als Spiegelladung zu Q' wird Kugeloberfläche 1 wieder zur Äquipotentialfläche, da die Ladung Q im Mittelpunkt 1 ein radialsymmetrisches Feld mit konzentrischen Potentialflächen erzeugt, Bild 2.3-19c. Das Potential ist die Summe der Potentiale, die der Ladung Q , sowie dem Ladungspaar (Q', Q'') zugeordnet werden:

$$\varphi_1 = \varphi_1(Q) + \varphi_1(Q', Q'') = U/2 + 0 = U/2$$

Jetzt ist Kugeloberfläche 2 keine Äquipotentialfläche mehr.

(d) Kugeloberfläche 2 wird wieder zur Äquipotentialfläche, wenn Q''' als Spiegelladung zu Q'' gesetzt wird. Das Potential der Kugeloberfläche 2 ergibt sich dann wieder zu Null:

$$\varphi_2 = \varphi_2(Q, Q') + \varphi_2(Q'', Q''') = 0 + 0 = 0$$

Jetzt ist Kugeloberfläche 1 *keine* Äquipotentialfläche mehr.

(e) Durch weiteres abwechselndes Setzen von Spiegelladungen kann man sich dem Zustand zweier kugelförmiger Äquipotentialflächen mit den Potentialen $\varphi_1 = U/2$ und $\varphi_2 = 0$ *iterativ* immer weiter nähern.

Durch Aufbau einer zweiten gleichartigen Ladungsreihe, die mit der Ersatzladung $-Q$ im Mittelpunkt von Kugel 2 beginnt, werden die Potentiale $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_2 = -U/2$ erzeugt. Nach Überlagerung beider Ladungsreihen ergibt sich die gewünschte Potentialdifferenz $\Delta\varphi = U/2 - (-U/2) = U$ zwischen den beiden Kugeln.

Nachfolgend werden die zur Berechnung von Größe und Position der Ersatzladungen nötigen Gleichungen zusammengestellt. Die Auflistung bezieht sich auf die o.g. Schritte (a) bis (e):

(a) Q erzeugt die Äquipotentialfläche 1 ($\varphi_1 = U/2$) nach Gl. (2.3-44):

$$b = 0 \quad (2.3-63a)$$

$$Q = 0,5 U 4\pi\epsilon r_0$$

(b) Q' erzeugt mit Q die Äquipotentialfläche 2 ($\varphi_2 = 0$) nach Gl. (2.3-55) und (-53):

$$b' = r_0^2/d \quad (2.3-63b)$$

$$Q' = -Q r_0/d$$

(c) Q'' erzeugt mit Q' , sowie mit Q , die Äquipotentialfläche 1 ($\varphi_1 = 0 + U/2 = U/2$). Dabei ist der Abstand d zur Gegenladung um b' zu verkürzen:

$$b'' = r_0^2/(d - b') \quad (2.3-63c)$$

$$Q'' = -Q' r_0/(d - b')$$

(d) Q''' erzeugt mit Q'' , sowie Q' mit Q , die Äquipotentialfläche 2 ($\varphi_2 = 0 + 0 = 0$). Dabei ist der Abstand d zur Gegenladung um b'' zu verkürzen:

$$b''' = r_0^2/(d - b'') \quad (2.3-63d)$$

$$Q''' = -Q'' r_0/(d - b'')$$

(e) usw.

Anmerkung: Aufgrund des rekursiven Charakters eignen sich diese Gleichungen gut für die Erstellung eines einfachen numerischen Iterationsprogrammes. Man erkennt an diesem Beispiel bereits den Grundgedanken der *numerischen Feldberechnung* nach dem Ersatzladungsverfahren, bei dem die gegebenen Elektrodenkonturen durch Setzen von Ersatzladungen iterativ angenähert werden.

Beispiel: Kugelfunkenstrecke für $r_0 = 0,2 d$

Eine Kugelfunkenstrecke soll für den Spezialfall $r_0 = 0,2 d$ berechnet werden. Hierfür werden die Gleichungen (2.3-63a) ff. ausgewertet, Bild 2.3-20. Die erste (weiß hinterlegte) Ladungsreihe erzeugt das Potential $\varphi_1 = U/2$ auf Kugel 1, die zweite (grau hinterlegte) Ladungsreihe das Potential $\varphi_2 = -U/2$ auf Kugel 2. Ladungsreihe Nr. 1 beginnt mit der Ersatzladung $+Q$ im Mittelpunkt von Kugel 1, Ladungsreihe Nr. 2 mit der Ersatzladung $-Q$ im Mittelpunkt von Kugel 2. Dabei ist zu bemerken, dass zu jeder Ladungsreihe immer abwechselnd Ladungen auf beiden Kugeln gehören. Alle positiven Ersatzladungen befinden sich innerhalb der

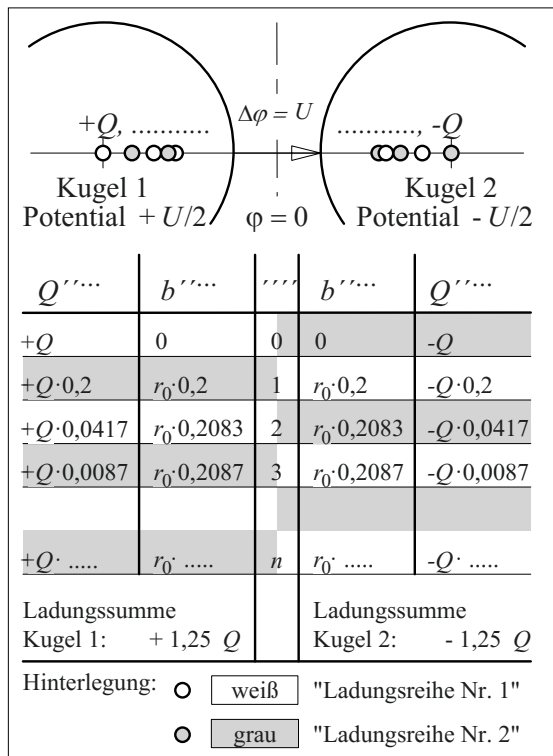


Bild 2.3-20: Position und Größe der Ersatzladungen für die Berechnung einer Kugelfunkenstrecke mit $r_0 = 0,2 d$.

Kugelfläche 1, alle negativen Ersatzladungen innerhalb der Kugelfläche 2. Mit zunehmender Anzahl der Iterationsschritte nimmt der Betrag der Ladungen und die Entfernung zur benachbarten Ersatzladung stark ab.

Aus den Ladungssummen für beide Kugeln kann mit Gl. (2.1-10) und (2.3-63a) die *Kapazität der Kugelfunkenstrecke* berechnet werden:

$$C = Q_{\text{ges}}/U = 1,25 Q/U = 2,5 \pi \varepsilon r_0 \quad (2.3-64)$$

Überraschenderweise ist diese Kapazität niedriger als die Kapazität einer gleich großen Kugel gegen eine unendlich weit entfernte konzentrische Gegenelektrode, Gl. (2.3-6):

$$C = 4 \pi \varepsilon r_0$$

Die Symmetrieebene zwischen den beiden Kugeln ist Äquipotentialfläche mit dem Potential $\varphi = 0$. Die berechnete Anordnung enthält also auch den Fall einer *Kugelelektrode gegen eine ebene Elektrode*. Gegenüber Gl. (2.3-74) verdoppelt sich die Kapazität:

$$C = 5 \pi \varepsilon r_0 \quad (2.3-65)$$

Zu (2): Maximalfeldstärken

Wie im vorigen Kapitel 2.3.5.1 können die den einzelnen Ersatzladungen zuzuordnenden Potentiale überlagert werden. Durch Gradientenbildung ergibt sich dann die Feldverteilung aus der Potentialverteilung.

Für die Ermittlung der Maximalfeldstärke auf der Verbindungslinie der Kugelmittelpunkte an der Kugeloberfläche (Punkt A, Bild 2.3-19) können auch die einzelnen *Feldstärkebeiträge* direkt summiert werden, da in diesem Punkt alle von den Ersatzladungen ausgehenden Feldvektoren parallel gerichtet sind.

Nach Gl. (2.3-2) gilt für einen einzelnen Feldstärkebeitrag

$$E_i = Q_i / (4 \pi \varepsilon r_i^2).$$

Der Index „i“ steht für die einzelnen Ersatzladungen, r_i ist der Abstand von der Ersatzladung Q_i zum betrachteten Feldpunkt A, Bild 2.3-19.

Die Summation über alle Feldstärkebeiträge E_i muss immer mit gleichem positivem Vorzeichen erfolgen, da sowohl die positiven Ladungen in Kugel 1, als auch die negativen Ladungen in Kugel 2 in dem dazwischen liegenden

Punkt A Feldstärkevektoren in die gleiche Richtung hervorrufen. Entsprechend der unterschiedlichen Ladungspolaritäten alterniert deshalb das Vorzeichen in Gl. (2.3-66):

$$E_{\max} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\frac{+Q}{r_0^2} + \frac{-Q'}{(r_0 - b')^2} + \frac{+Q''}{(r_0 - b'')^2} + \dots \right. \\ \left. - \frac{-Q}{(d - r_0)^2} - \frac{+Q'}{(d - r_0 - b')^2} - \frac{-Q''}{(d - r_0 - b'')^2} - \dots \right] \quad (2.3-66)$$

Anmerkung: Der richtige Feldstärkebetrag im Punkt A ergibt sich auch, wenn alle *Ladungen als Beträge* eingesetzt und alle *Summanden mit positivem Vorzeichen* überlagert werden.

Die Ladungen gehören abwechselnd zur ersten Ladungsreihe (Start in Kugel 1 mit $+Q$) bzw. zur zweiten Reihe (Start in Kugel 2 mit $-Q$).

Dabei enthält die *erste Gleichungszeile* die Summation aller Beiträge der positiven Ladungen aus Kugel 1. Der Abstand von $+Q$ zum Punkt A ist gleich dem Kugelradius r_0 , die weiteren Abstände sind jeweils um b' , b'' , b''' , ... verkürzt.

Die *zweite Gleichungszeile* enthält die Summation aller Beiträge der negativen Ladungen aus Kugel 2. Der Abstand von $-Q$ zum Punkt A ist jetzt gleich $(d - r_0)$, die weiteren Abstände sind ebenfalls um b' , b'' , b''' , ... verkürzt.

Es ist nicht mehr sinnvoll Gl. (2.3-66) durch Einsetzen der Gl. (2.3-63) weiter auszuwerten. Vielmehr sollten die Zahlenwerte für die Ersatzladungen und ihre Positionen eingesetzt werden.

Beispiel: Kugelfunkenstrecke (Fortsetzung)

Für eine Kugelfunkenstrecke mit $r_0 = 0,2 d$ wurden im vorherigen Beispiel die Ersatzladungen Q , Q' , Q'' , Q''' und ihre Positionen b , b' , b'' , b''' bestimmt. Durch Einsetzen der Zahlenwerte in Gl. (2.3-66) folgt mit

$$Q = 0,5 U 4\pi\epsilon r_0$$

nach Gl. (2.3-63a):

$$E_{\max} = 0,736 U/r_0 = 3,68 U/d = 2,21 U/s$$

Dabei ist $r_0 = 0,2 d$ der Kugelradius, d der Abstand der Kugelmittelpunkte und $s = 0,6 d$ die „Schlagweite“ zwischen den Kugeln. Diese Werte können verglichen werden mit der Feldstärke im *Plattenkondensator*

$$E = 1 \cdot U/s,$$

der Feldstärke an der Oberfläche einer *einzelnen Kugel*

$$E = 1 \cdot U/r_0$$

und der Feldstärke bei einer Kugelfunkenstrecke mit *sehr großem Abstand* ($d \gg r_0$)

$$E = 0,5 \cdot U/r_0.$$

2.3.5.3 Parallele Linienladungen

Einige wichtige Anordnungen der Hochspannungstechnik lassen sich mit Hilfe von *Linienladungen* berechnen, bei denen die Ladung Q gleichmäßig über die Linienlänge L verteilt ist. Nachfolgend soll das elektrische Feld in der Umgebung von zwei parallelen, gleich großen Linienladungen entgegengesetzter Polarität betrachtet werden, Bild 2.3-21.

Die Potentialverteilung im Feldraum wird durch Überlagerung der den beiden Linienladungen zuzuordnenden Potentiale bestimmt. Es handelt sich um ein ebenes Feld, so dass die Betrachtung einer Ebene senkrecht zu den Linienladungen ausreicht, Bild 2.3-22. Die Gegenladungen und das Bezugspotential $\varphi_B = 0$ können nicht, wie im kugelsymmetrischen Feld, als unendlich weit entfernt angenommen werden, da sich sonst unendlich große Potentialdifferenzen ergeben würden, vgl. Kap. 2.3.1.3. In der Rechnung werden deshalb zunächst die endlichen Radien r_{B1} und r_{B2} zur Angabe der Gegenladungen eingeführt. Sie lassen sich später unter der Voraussetzung sehr weit entfernter Gegenladungen wieder eliminieren, Bild 2.3-22. Die Berechnung wird unter der Annahme durchgeführt, dass sich um die beiden Linienladungen jeweils zylindersymmetrische Feeder bilden, die überlagert werden können

Für die Überlagerung der Potentiale φ_1 und φ_2 , die den Ladungen $+Q$ und $-Q$ zugeordnet werden, gilt im Punkt P mit Gl. (2.3-18)

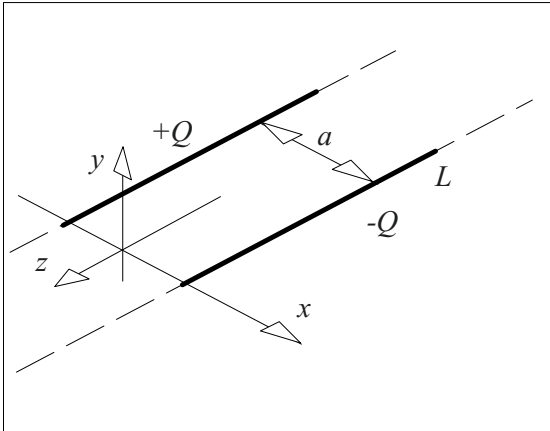


Bild 2.3-21: Unendlich ausgedehnte parallele Linienladungen.

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi_1 + \varphi_2 \\ &= \frac{Q/L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_{B1}}{r_1} - \frac{Q/L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_{B2}}{r_2} \\ &= \frac{Q/L}{2\pi\epsilon} \ln \left(\frac{r_{B1}}{r_1} \cdot \frac{r_2}{r_{B2}} \right)\end{aligned}$$

Unter der Annahme eines sehr weit entfernten Bezugspotentials, d.h. unter der Annahme

$$r_1, r_2, a \ll r_{B1} \approx r_{B2}$$

kann mit $r_{B1}/r_{B2} \approx 1$ der Abstand zum Bezugspotential gekürzt werden:

$$\varphi = \frac{Q/L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (2.3-67)$$

Äquipotentialflächen $\varphi = \text{const.}$ werden nach Gl. (2.3-67) durch die Bedingung

$$r_2/r_1 = k = \text{const.} \quad (2.3-68)$$

beschrieben. Bei der Betrachtung von Punktladungen wurde in Kap. 2.3.5.1 bereits gezeigt, dass eine solche Bedingung eine *Kreisgleichung* für die betrachtete Zeichenebene ist, vgl. Gl. (2.3-47) ff. D.h. alle Äquipotentialflächen sind in dem betrachteten ebenen Feld *Zylinderflächen*.

Es lässt sich zeigen, dass auch die *Feldlinien Kreise* sind, die durch die Schnittpunkte der

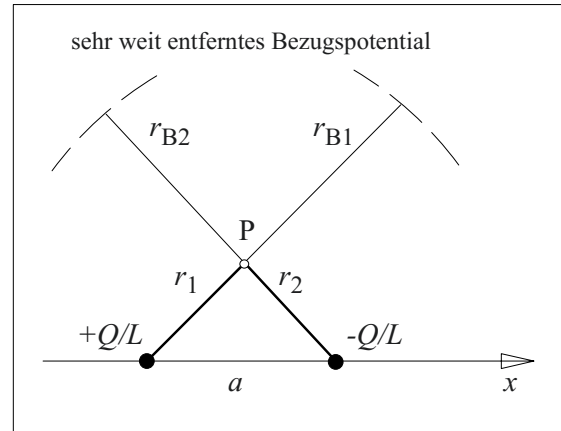


Bild 2.3-22: Unendlich ausgedehnte parallele Linienladungen (Schnittbild).

Linienladungen $+Q$ und $-Q$ mit der Zeichenebene verlaufen [2]. Dadurch ergibt sich ein *graphisches Konstruktionsverfahren* für ein Feld- und Äquipotentiallinienbild, Bild 2.3-23:

- Zunächst wird ein Kreis mit dem Radius $r = a/2$ durch die Ladungsspurpunkte $+Q$ und $-Q$ gezeichnet. Die beiden Halbkreise beschreiben zwei Feldlinien.
- In beliebigen Punkten P_1, P_2, \dots wird der „Feldlinienkreis“ von den „Potentiallinienkreisen“ senkrecht geschnitten.
- Die Mittelpunkte M_1, M_2, \dots der Potentiallinienkreise liegen aus Symmetriegründen auf der x -Achse. Außerdem berühren die Radien M_1P_1, M_2P_2, \dots den Feldlinienkreis tangential. D.h. die Mittelpunkte ergeben sich aus den Schnittpunkten der Tangenten in P_1, P_2, \dots mit der x -Achse.
- Weitere Feldlinien werden durch Kreise ergänzt, deren Mittelpunkte auf der y -Achse liegen.

Das Potential der Punkte P_1, P_2, \dots und der durch sie verlaufenden Äquipotentialflächen ergibt sich aus Gl. (2.3-67). Die Symmetrieebene zwischen den Ladungen $+Q$ und $-Q$ ist Äquipotentialfläche mit dem Bezugspotential $\varphi = 0$. Feldlinien und Äquipotentialflächen auf der anderen Seite der Symmetrieebene ergeben sich durch Spiegelung, Potentialwerte durch Umkehrung des Vorzeichens, Bild 2.3-23.

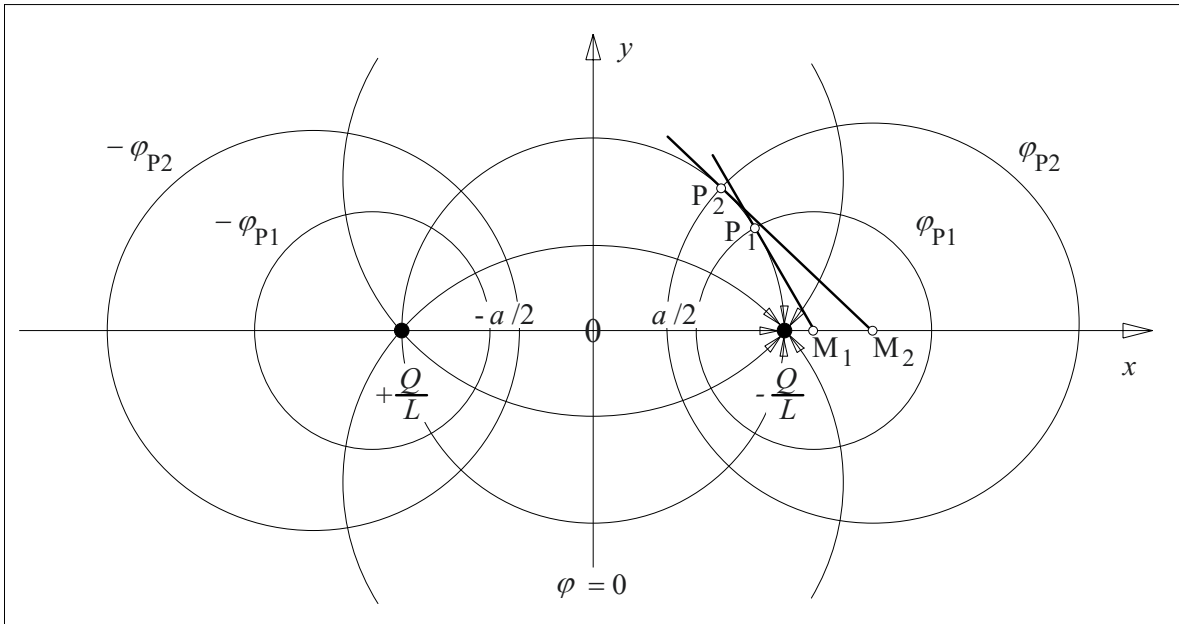


Bild 2.3-23: Graphische Konstruktion eines Feld- und Äquipotentiallinienbildes für parallele Linienladungen

Für Feldberechnungen nach dem Ersatzladungsverfahren können nun die von den Ersatzladungen hervorgerufenen Äquipotentialflächen als leitende Elektroden interpretiert werden. Das Feld der Linienladungen enthält einige wichtige hochspannungstechnische Elektrodenanordnungen, die in Kap. 2.3.5.4 als *Beispiele* betrachtet werden. Hierzu gehören parallele Zylinder, zylindrische Leiter gegen ebene Elektroden, Rohrleiter mit exzentrischen Innenleitern und die Leiter von Drehstromfreileitungen, vgl. Bild 2.3-23.

2.3.5.4 Felder in der Umgebung zylindrischer Leiter

Beispiel 1: Parallele zylindrische Leiter („Zweidrahtleitung“)

Sind zwei zylindrische Leiter mit dem Radius r_0 und dem Mittellinienabstand d gegeben, so ist der Abstand a der Ersatzladungen unbekannt, d.h. die Position b der Ersatzladungen ist zu bestimmen, Bild 2.3-24.

Die hierfür notwendigen geometrischen Überlegungen wurden im Zusammenhang mit dem Feld zwischen Punktladungen bereits ange stellt. In beiden Fällen beschreibt die Bezie-

hung $r_2/r_1 = k = \text{const.}$ (Gl. (2.3-47) bzw. (-68)) einen Kreis mit dem Radius r_0 und dem Abstand b zwischen Kreismittelpunkt und Position der Ersatzladung.

Anmerkung: Im Falle der Punktladungen hat der Faktor k außer der geometrischen Bedeutung noch die Bedeutung eines Ladungsverhältnisses. D.h. bei gegebenen Ladungen gibt es nur eine einzige kreisförmige Äquipotentiallinie (bzw. kugelförmige Äquipotentialfläche). Im Falle der parallelen Linienladungen gibt es dagegen *keinen* Zusammenhang zwischen k und den Ladungen, so dass es auch beliebig viele kreisförmige Äquipotentiallinien (bzw. zylinderförmige Äquipotentialflächen) gibt.

Aus Kap. 2.3.5.1 können somit die geometrischen Beziehungen Gl. (2.3-48) und (2.3-49) übernommen werden:

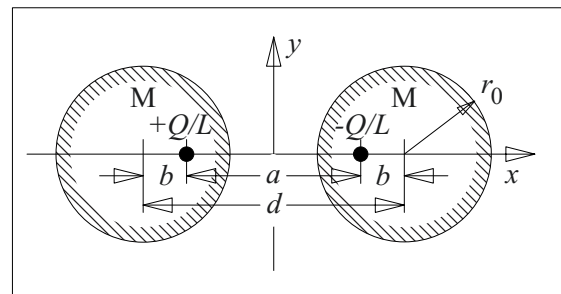


Bild 2.3-24: Parallele zylindrische Leiter, Berechnung mit (Linien-)Ersatzladungen.

$$b = a / (k^2 - 1) \quad (2.3-69)$$

$$r_0 = a k / (k^2 - 1)$$

Die unbekannte *Position der Ersatzladungen* b (bzw. a) soll nun durch die gegebenen Größen r_0 und d ausgedrückt werden. Der Faktor k ist dabei zu eliminieren. Mit

$$\begin{aligned} d &= a + 2b \\ &= a + 2a / (k^2 - 1) \\ &= a (k^2 + 1) / (k^2 - 1) \end{aligned}$$

bildet man

$$\begin{aligned} (d/2)^2 - r_0^2 &= \frac{a^2}{4} \cdot \frac{k^4 + 2k^2 + 1}{(k^2 - 1)^2} - \frac{a^2}{4} \cdot \frac{4k^2}{(k^2 - 1)^2} \\ &= \frac{a^2}{4} \cdot \frac{k^4 - 2k^2 + 1}{k^4 - 2k^2 + 1} = \frac{a^2}{4} \end{aligned}$$

Für den Abstand der Ersatzladungen folgt

$$a = 2 \sqrt{(d/2)^2 - r_0^2} \quad .$$

Wird der Leiterradius r_0 durch den Leiterdurchmesser $d_0 = 2r_0$ ersetzt, ergibt sich

$$a = \sqrt{d^2 - d_0^2} \quad (2.3-70)$$

Damit ist gemäß Bild 2.3-24 auch der gesuchte Abstand $b = (d - a)/2$ zwischen Leiterachse und Linienladung bestimmt.

Der *Potentialverlauf* auf der x -Achse, auf der die höchsten elektrischen Feldstärken auftreten, ergibt sich aus Gl. (2.3-67):

$$\varphi(x) = \frac{Q/L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_2(x)}{r_1(x)}$$

Die Abstände $r_1(x)$ und $r_2(x)$ müssen bereichsweise so definiert werden, dass sich positive Abstandswerte ergeben. In dem interessieren-

den Bereich $-a/2 < x < +a/2$ (zwischen den Linienladungen) gilt

$$\varphi(x) = \frac{Q/L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{a/2 - x}{a/2 + x} \quad (2.3-71)$$

Für den *Feldstärkeverlauf* $E(x) = E_x(x)$ entlang der x -Achse folgt aus Gl. (2.3-71):

$$\begin{aligned} E(x) &= -\partial\varphi/\partial x \\ &= -\frac{Q/L}{2\pi\epsilon} \cdot \frac{\partial}{\partial x} [\ln(a/2 - x) - \ln(a/2 + x)] \\ &= -\frac{Q/L}{2\pi\epsilon} \left[\frac{-1}{(a/2 - x)} - \frac{1}{(a/2 + x)} \right] \\ &= \frac{Q/L}{2\pi\epsilon} \left[\frac{1}{(a/2 - x)} + \frac{1}{(a/2 + x)} \right] \end{aligned} \quad (2.3-72)$$

Zum gleichen Ergebnis kommt man auch durch direkte *Überlagerung der einzelnen Feldstärken* gemäß Gl. (2.3-17).

Bild 2.3-25 stellt den Potential- und Feldstärkeverlauf nach Gl. (2.3-71) und (-72) entlang der x -Achse zwischen den Leitern dar.

Innerhalb der Leiter ergeben die auf der Ersatzladungsvorstellung beruhenden Gleichungen falsche Ergebnisse: Das Potential innerhalb eines idealen Leiters ist konstant, die elektrische Feldstärke geht gegen Null.

An der Außenseite der Leiter für $x > d/2 + r_0$ bzw. für $x < -d/2 - r_0$ nehmen die Potential- und Feldstärkebeträge nach außen hin ab. Die Feldstärkebeträge an der Leiternaußenseite sind wesentlich geringer als an der dem anderen Leiter zugewandten Seite.

Zur Berechnung der *Kapazität* C wird die Potentialdifferenz U mit Gl. (2.3-71) als Funktion der Ersatzladung Q ermittelt:

$$\begin{aligned} U &= \varphi(x = -d/2 + r_0) - \varphi(x = d/2 - r_0) \\ &= \frac{Q/L}{2\pi\epsilon} \ln \left[\frac{a/2 + d/2 - r_0}{a/2 - d/2 + r_0} \cdot \frac{a/2 + d/2 - r_0}{a/2 - d/2 + r_0} \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{Q/L}{\pi \varepsilon} \ln \frac{a/2 + d/2 - r_0}{a/2 - d/2 + r_0}$$

Die Kapazität ergibt sich hieraus durch Bildung des Verhältnisses $C = Q/U$:

$$C = \frac{\pi \varepsilon L}{\ln \frac{a/2 + (d/2 - r_0)}{a/2 - (d/2 - r_0)}} \quad (2.3-73)$$

Wird der Ladungsabstand a nach Gl. (2.3-70) eingesetzt, kann die Kapazität als Funktion der geometrischen Größen d und r_0 angegeben werden:

$$C = \frac{\pi \varepsilon L}{\ln \left[\frac{d}{2r_0} + \sqrt{\left(\frac{d}{2r_0} \right)^2 - 1} \right]} \quad (2.3-74)$$

Anmerkung: Die Ableitung von Gl. (2.3-74) aus Gl. (2.3-73) erfordert Umrechnungen in mehreren Zwischenschritten. Dabei ist es sinnvoll, im Argument des Logarithmus den Ausdruck $(d/2 - r_0)^{-1/2}$ herauszukürzen und den Nenner durch Erweiterung rational zu machen.

Für große Abstände $d \gg r_0$ bzw. für kleine Leiterradien vereinfacht sich Gl. (2.3-74):

$$C \approx \frac{\pi \varepsilon L}{\ln \frac{d}{r_0}} \quad (2.3-75)$$

Anmerkung: Diese Näherungsgleichung ergibt sich auch unmittelbar aus Gl. (2.3-73), wenn man berücksichtigt, dass bei großen Leiterabständen d der Ladungsabstand a etwa gleich d zu setzen ist (vgl. Gl. (2.3-70)). D.h. für den Zähler im Argument des Logarithmus gilt

$$a/2 + d/2 - r_0 \approx d - r_0 \approx d.$$

Für den Nenner gilt

$$a/2 - d/2 + r_0 = -b + r_0 \approx r_0,$$

weil der Abstand b zwischen Linienladung und Leiterachse klein gegen den Leiterradius r_0 wird.

Die Gültigkeitsgrenzen der Näherung (2.3-75) ergeben sich aus einer *Fehlerbetrachtung* für unterschiedliche Verhältnisse d/r_0 :

| | | | | |
|-------------------------|-------|-------|-------|--------|
| d/r_0 | 2,5 | 5 | 10 | 20 |
| $C_{\text{Näherung}}/C$ | 0,757 | 0,973 | 0,996 | 0,9992 |
| Fehler in % | 24,3 | 2,7 | 0,4 | 0,08 |

D.h. bei sehr vielen Anordnungen der Hochspannungstechnik kann die vereinfachte Gl. (2.3-75) verwendet werden, weil der Leiterabstand d wesentlich größer ist als der Leiterradius r_0 .

Die *maximale Feldstärke* ergibt sich aus Gl. (2.3-72) an der Leiteroberfläche bei $x = d/2 - r_0$. Für Q wird $Q = C \cdot U$ mit C nach Gl. (2.3-74) eingesetzt, um eine exakte Lösung zu erhalten:

$$E_{\text{max}} = \frac{U \cdot \sqrt{\left(\frac{d}{2r_0} \right)^2 - 1}}{(d - 2r_0) \cdot \ln \left[\frac{d}{2r_0} + \sqrt{\left(\frac{d}{2r_0} \right)^2 - 1} \right]} \quad (2.3-76)$$

Für $d \gg r_0$, d.h. für große Abstände bzw. kleine Leiterradien vereinfacht sich Gl. (2.3-76):

$$E_{\text{max}} \approx \frac{U}{2r_0 \cdot \ln \frac{d}{r_0}} \quad (2.3-77)$$

Für dünne Drähte lässt sich daraus die *Einsatzspannung von Koronaentladungen* berechnen, wenn die Einsatzfeldstärke E_E der Entladungen bekannt ist:

$$U_E \approx E_E \cdot 2r_0 \cdot \ln(d/r_0) \quad (2.3-78)$$

Die Gültigkeitsgrenzen der Näherungsgleichungen (2.3-77) und (-78) ergeben sich aus einer *Fehlerbetrachtung* für unterschiedliche Verhältnisse d/r_0 :

| | | | | |
|-------------------------|-------|-------|-------|-------|
| d/r_0 | 5 | 10 | 20 | 40 |
| $E_{\text{Näherung}}/E$ | 0,637 | 0,813 | 0,904 | 0,951 |
| Fehler in % | 36,3 | 18,7 | 9,6 | 4,9 |

D.h. die Näherungsgleichungen (2.3-77) und (-78) für die maximale Feldstärke und die Koronaansatzspannung liefern erst bei sehr großen Verhältnissen d/r_0 befriedigende Genauigkeiten. Man muss deshalb i.d.R. die exakte Lösung nach Gl. (2.3-76) berechnen.

Beispiel 2: Zylinder über Ebene

Eine häufige Anordnung besteht aus einem zylindrischen Leiter, der in der Höhe h über oder

neben einer leitenden Ebene geführt wird. Dieser Fall lässt sich auf das vorige Beispiel paralleler Zylinder zurückführen, wenn man die leitende Ebene als Symmetrieebene bzw. Äquipotentialfläche mit dem Potential $\varphi = 0$ auffasst und einen zweiten zylindrischen Leiter als Spiegelbild ergänzt, Bild 2.3-26. Die Kapazität C der Anordnung ist doppelt so groß wie die der entsprechenden parallelen Zylinder C' . Mit Gl. (2.3-75) gilt für $d' = 2h \gg r_0$

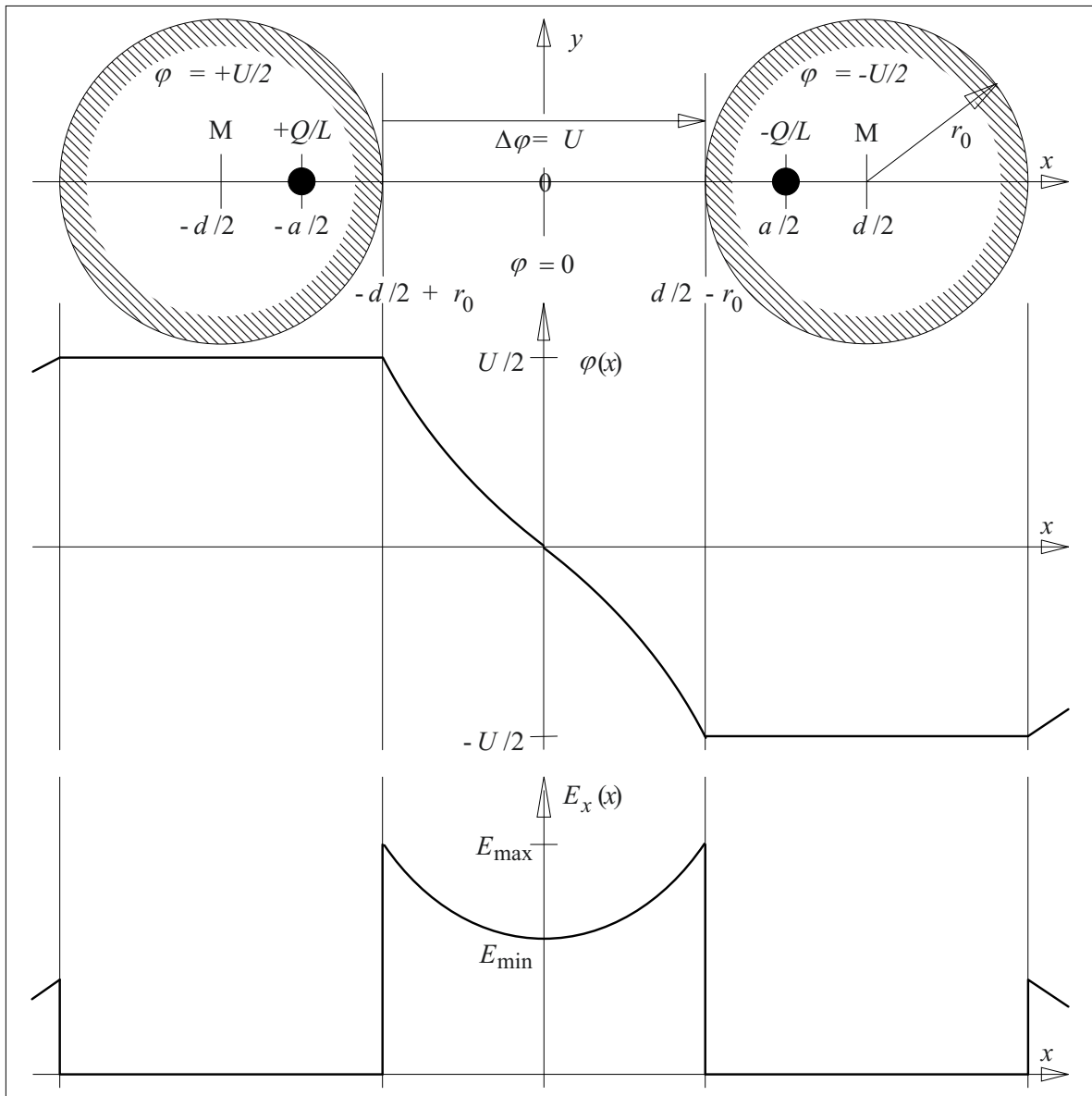


Bild 2.3-25: Parallele zylindrische Leiter, Potential- und Feldstärkeverlauf auf der Verbindungslinie der Leitermittelpunkte (x -Achse) in der x,y -Ebene. Die Verläufe innerhalb der Leiter können nicht aus den gesetzten Ersatzladungen bestimmt werden.

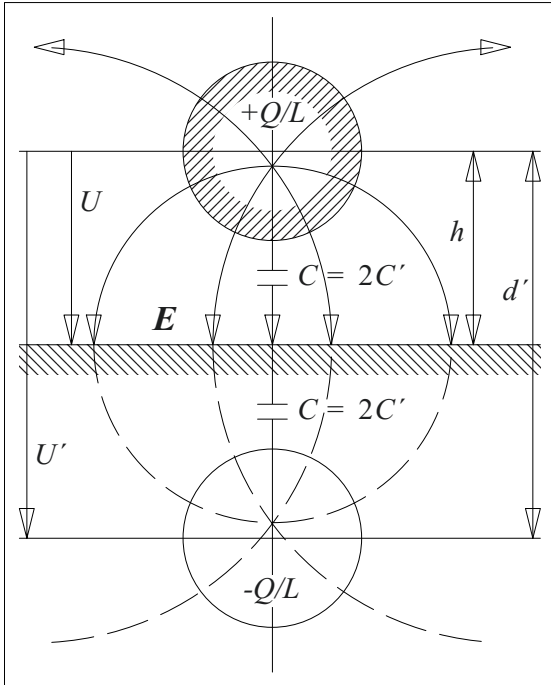


Bild 2.3-26: Zylindrischer Leiter über leitender Ebene. Berechnung mit Hilfe einer spiegelsymmetrischen Ladungsanordnung.

$$C \approx \frac{2\pi\epsilon L}{\ln \frac{2h}{r_0}} \quad (2.3-79)$$

Die *maximale Feldstärke* ergibt sich, wenn in Gl. (2.3-76) bzw. (-77) die Spannung U durch $U' = 2U$ und der Achsenabstand d durch $d' = 2h$ ersetzt werden. Für $d' = 2h \gg r_0$ gilt dann

$$E_{\max} \approx \frac{U}{r_0 \cdot \ln \frac{2h}{r_0}} \quad (2.3-80)$$

Für die *Koroneinsatzspannung* eines dünnen Drahtes über einer leitenden Ebene folgt

$$U_E \approx E_E \cdot r_0 \cdot \ln(2h/r_0) \quad (2.3-81)$$

Zu Beispiel 2: Zylinder über Ebene (Zahlenbeispiel)

Die Durchmesser und Abstände von zylindrischen Leitern über leitenden Ebenen sollen für den Einsatz in Luft ($\hat{E} = 30 \text{ kV/cm}$, $\epsilon_r = 1$) und Isolieröl ($\hat{E} = 150 \text{ kV/cm}$, $\epsilon_r = 2,2$) für die Spannungsamplituden $\hat{U} = 10 \text{ kV}$, 100 kV und 1 MV so dimensioniert werden, dass die Feldstärken $2/3$ der Durchschlagsfeldstärke nicht

überschreiten. Außerdem ist der Kapazitätsbelag der Anordnungen zu berechnen. In allen Fällen soll dabei das Verhältnis $h/r_0 = 10$ gleich angenommen werden.

Lösung: Wegen des Verhältnisses $d/r_0 = 20$ ist bei Anwendung der Näherungsgleichung (2.3-80) für die *maximale Feldstärke* mit einem Fehler von ca. 10 % zu rechnen (vgl. obige Abschätzung). Deshalb wird Gl. (2.3-76) ausgewertet. Durch Ausklammern von $2r_0$ im Nenner kann nach r_0 aufgelöst werden. Für d ist $2h$ und für U ist $U' = 2U$ einzusetzen:

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{\frac{2\hat{U}}{0,67\hat{E}_D} \sqrt{10^2 - 1}}{2(10 - 1) \ln \left[10 + \sqrt{10^2 - 1} \right]} \\ &= 0,5540 \cdot \hat{U} / \hat{E}_D \end{aligned}$$

Die Kapazität kann mit geringem Fehler nach Gl. (2.3-79) abgeschätzt werden.

Spannung \hat{U} : **10 kV** **100 kV** **1 MV**

Luft:

| | | | |
|-------|-------------|---------------|----------------|
| r_0 | 2 mm | 1,9 cm | 18,5 cm |
| h | 2 cm | 19 cm | 1,85 m |
| C/L | 18,5 pF/m | 18,5 pF/m | 18,5 pF/m |

Isolieröl:

| | | | |
|-------|---------------|---------------|---------------|
| r_0 | 0,4 mm | 3,7 mm | 3,7 cm |
| h | 3,7 mm | 3,7 cm | 37 cm |
| C/L | 40,8 pF/m | 40,8 pF/m | 40,8 pF/m |

Anmerkung: Wie schon in den Beispielen der kugelförmigen Abschirmhauben (Kap. 2.3.1.2) und der zylindersymmetrischen Rohrleiter (Kap. 2.3.1.3) zeigt sich auch hier, dass luftisolierte Geräte im MV-Bereich Isolierabstände und Krümmungsradien in der Größenordnung von Metern aufweisen müssen.

Wesentlich kompaktere *Abmessungen* sind durch den Einsatz elektrisch fester Isolierstoffe (z.B. Isolieröl, Schwefelhexafluoridgas SF_6) möglich.

Die in den Beispielen genannten *elektrischen Festigkeiten* sind nicht, wie hier vereinfachend unterstellt werden könnte, konstante Größen. Sie hängen z.B. von der Art und Dauer der Beanspruchung, der Isolierstoffdicke, dem Isolierstoffvolumen, der Elektrodenoberfläche, der Inhomogenität des Feldes oder Umgebungseinflüssen (Druck, Temperatur, Feuchtigkeit, ...) ab.

Der *Kapazitätsbelag* verändert sich nicht mit den Abmessungen, da das kapazitätsbestimmende Verhältnis h/r_0 in diesem Beispiel als konstant angenommen wurde.

Beispiel 3: Erdseil

(Schirmwirkung und Feldüberhöhung)

Die über Hochspannungsfreileitungen gespannten Erdseile dienen dem Schutz der Leiter gegen einen direkten Blitzeinschlag. Es soll untersucht werden, inwieweit das senkrecht gerichtete elektrische Feld in der Atmosphäre („Luftfeld“) durch ein geerdetes Seil (Radius r_0 , Höhe h über dem Erdboden) verändert wird, Bild 2.3-27.

Das ursprüngliche *Luftfeld* E_0 wird als homogen angenommen, es ist in negative x -Richtung gerichtet.

Das Potential ergibt sich zu

$$\varphi_1 = E_0 \cdot x.$$

Im Erdseil wird die Ladung Q influenziert, deren Feld E_S sich dem ursprünglichen Feld E_0 überlagert. Das *zusätzliche Feld der Seilladung* gegen die geerdete Ebene ergibt sich aus der Überlagerung der Felder von Q und einer Spiegelladung $-Q$ auf der x -Achse bei $x = -h$. Nach Gl. (2.3-67) gilt für das Potential

$$\varphi_2 = \frac{Q}{2\pi\epsilon L} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Auf der *Oberfläche des geerdeten Seiles* (und in der Symmetrieebene auf dem Erdboden) muss die Summe der Potentiale Null ergeben. Aus dieser Bedingung kann die Größe der influenzierten Ladung Q berechnet werden:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = 0$$

$$\varphi = E_0 \cdot x + \frac{Q}{2\pi\epsilon L} \ln \frac{r_2}{r_1} = 0$$

Für alle Punkte auf der Seiloberfläche gilt wegen der großen Höhe $h \gg r_0$ näherungsweise $r_2 \approx 2h$ und $r_1 \approx r_0$, da sich die Ersatzladung Q sehr nahe an der Leiterachse befindet. Für Q folgt daraus mit $x \approx h$

$$Q = -2\pi\epsilon L \frac{E_0 \cdot h}{\ln \frac{2h}{r_0}}. \quad (2.3-82)$$

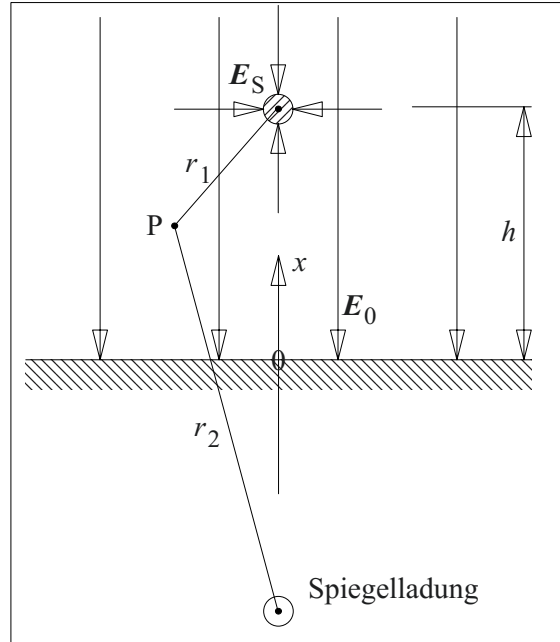


Bild 2.3-27: Verzerrung des elektrischen "Luftfeldes" durch ein geerdetes Leiterseil (Erdseil).

Die *Feldstärke* auf der x -Achse ergibt sich durch Ableitung des Potentials analog zu Gl. (2.3-72) oder durch Überlagerung der Feldstärkebeiträge nach Gl. (2.3-17). Für Q wird Gl. (2.3-82) eingesetzt:

$$\begin{aligned} E_x(x) &= E_0 + E_{+Q} + E_{-Q} \\ &\stackrel{(17)}{=} E_0 + \frac{Q}{2\pi\epsilon L} \left(\frac{1}{h-x} + \frac{1}{h+x} \right) \\ &\stackrel{(82)}{=} E_0 - \frac{E_0 \cdot h}{\ln \frac{2h}{r_0}} \left(\frac{1}{h-x} + \frac{1}{h+x} \right) \end{aligned} \quad (2.3-83)$$

Anmerkung: Die Überprüfung der *Vorzeichen* ergibt, dass unter dem Erdseil ($0 < x < h$) das Luftfeld E_0 und das Zusatzfeld der Ladungen entgegengesetzt gerichtet sind. Die Beiträge der Ersatzladungen $+Q$ und $-Q$ überlagern sich mit gleichem Vorzeichen. Über dem Erdseil ($x > h$) überlagern sich das Luftfeld E_0 und der Beitrag der oberen Ersatzladung $+Q$ mit gleichem Vorzeichen, der Beitrag der Spiegelladung $-Q$ ist entgegengesetzt gerichtet, vgl. auch Bild 2.3-27.

An der *Erdoberfläche* gilt für die Feldstärke mit der Bedingung $x = 0$

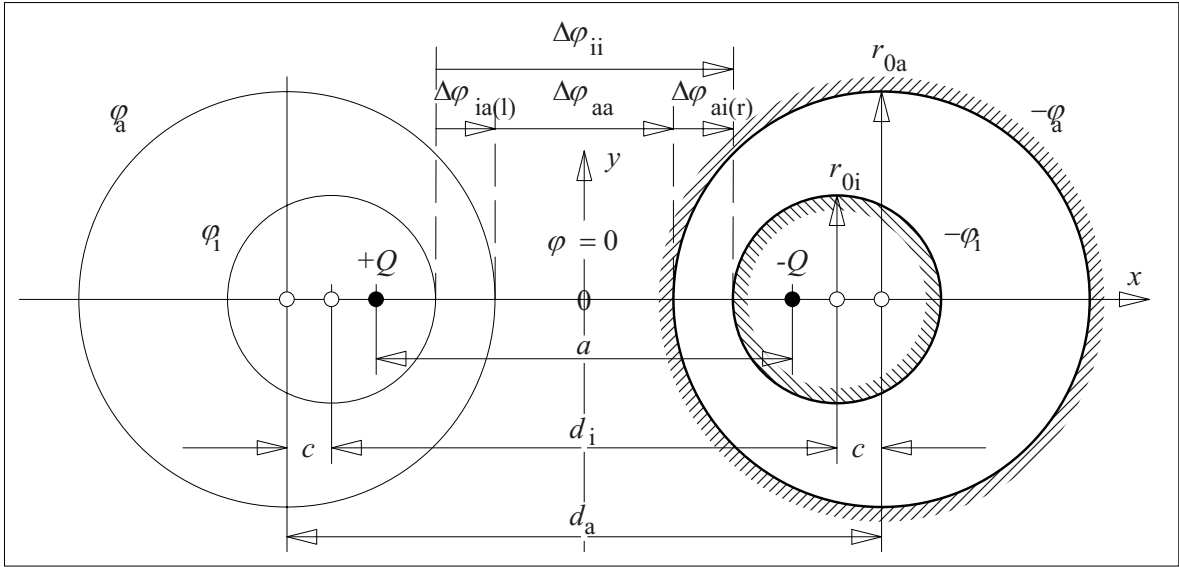


Bild 2.3-28: Berechnung exzentrischer zylindrischer Leiter mit parallelen Linien-Ersatzladungen.

$$E_x(0) = E_0 \left(1 - \frac{2}{\ln \frac{2h}{r_0}} \right). \quad (2.3-84)$$

Anmerkung: Für ein Verhältnis $h/r_0 = 1000$ ist die Feldstärke $E_x(0) = 0,74 E_0$. D.h. an der Erdoberfläche wird das ursprüngliche Feld *nur wenig abgeschirmt*. Eine bessere Schirmwirkung lässt sich durch ein *Schirmgitter*, d.h. durch parallele Anordnung geerdeter Leiterseile in engem Abstand erreichen.

An der *Oberseite des Seiles* überwiegt der Beitrag der oberen Ersatzladung Q gemäß Gl. (2.3-82). Der Beitrag der weit entfernten Spiegelladung $-Q$ und das Luftfeld E_0 können dagegen vernachlässigt werden. Mit den Bedingungen $x = h + r_0$ und $2h/r_0 \gg 1$ folgt aus Gl. (2.3-83)

$$E_x(h + r_0) \approx E_0 \frac{h/r_0}{\ln \frac{2h}{r_0}}. \quad (2.3-85)$$

Anmerkung: Für ein Verhältnis $h/r_0 = 1000$ ergibt sich hieraus eine *Feldstärkeüberhöhung* von $E/E_0 = 132$. Bei sehr hohen Luftfeldstärken kann es deshalb an scharfkantigen geerdeten Leitern zu *Entladungserscheinungen* kommen. Insbesondere kann bei einer Blitzen-

tlung der aus der Wolke zur Erde vorwachsende Entladungskanal in einem begrenzten Bereich zu einem starken Feldstärkeanstieg führen. Durch die oben beschriebene Feldüberhöhung wird dann an Leiterseilen, Blitzableitern oder anderen geerdeten Strukturen eine „*Fangentladung*“ ausgelöst, die der eigentlichen Blitzenentladung entgegenwächst und innerhalb eines begrenzten „*Fangbereiches*“ die Verbindung zum Erdpotential herstellt.

Beispiel 4: Exzentrischer Rohrleiter

Das elektrische Feld zwischen exzentrischen Rohrleitern kann mit parallelen Linienladungen berechnet werden, wenn Außen- und Innenleiter als zylindrische Äquipotentialflächen im Feld zweier spiegelsymmetrischer Linienladungen interpretiert werden, Bild 2.3-23 und Bild 2.3-28.

Gegeben sind die Zylinderradien r_{0i} und r_{0a} , sowie der Versatz der Zylinderachsen c (Exzentrizität). Unbekannt sind der Ersatzladungsabstand a und die Mittelpunktsabstände d_i und d_a . D.h. die Gleichungen (2.3-70) ff. sind nicht direkt anwendbar.

Man kann davon Gebrauch machen, dass der Ladungsabstand a sowohl für die Anordnung der großen Zylinder (r_{0a} , d_a), als auch für die

Anordnung der kleinen Zylinder (r_{0i} , d_i) gleich ist. Aus Gl. (2.3-70) und Bild 2.3-28 folgt

$$\begin{aligned} a^2 &= d_i^2 - 4r_{0i}^2 = d_a^2 - 4r_{0a}^2 \\ d_a^2 - d_i^2 &= 4r_{0a}^2 - 4r_{0i}^2 \quad \text{D.h.:} \\ (d_i + 2c)^2 - d_i^2 &= 4r_{0a}^2 - 4r_{0i}^2 \\ d_i &= (r_{0a}^2 - r_{0i}^2 - c^2)/c \quad (2.3-86) \end{aligned}$$

Damit sind alle unbekannten geometrischen Größen in Bild 2.3-28 bestimmt. Der Ladungsabstand a ergibt sich aus Gl. (2.3-70), für d_a gilt $d_a = d_i + 2c$.

Anstelle einer aufwändigen allgemeinen Rechnung empfiehlt sich hier die *numerische Auswertung* mit konkreten Zahlenwerten.

Zahlenbeispiel:

Für eine Anordnung aus exzentrischen Rohrleitern mit $r_{0i} = 5$ cm, $r_{0a} = e \cdot r_{0i} = 13,59$ cm und $c = 1$ cm soll untersucht werden, wie weit sich maximale Feldstärke und Kapazität im Vergleich zur koaxialen Anordnung ändern.

Aus Gl. (2.3-86) folgt $d_i = 158,73$ cm. Damit ergibt sich $d_a = 160,73$ cm und $a = 158,41$ cm. Für die *maximale Feldstärke* an der Oberfläche des inneren Zylinders kann Gl. (2.3-76) mit $d = d_i$ und $r_0 = r_{0i}$ herangezogen werden, wenn die Spannung U als Potentialdifferenz $\Delta\varphi_{ii}$ zwischen den beiden inneren Zylindern aufgefasst wird:

$$E_{\max} = \Delta\varphi_{ii} / 32,45 \text{ cm} \quad (*)$$

Die Potentialdifferenz $\Delta\varphi_{ii}$ ist in Beziehung zu setzen mit der Potentialdifferenz $\Delta\varphi_{ai(r)}$ zwischen äußerem und innerem Zylinder auf der rechten Seite: Die x -Achse schneidet die inneren Zylinder bei $x_i = \pm(d_i/2 - r_{0i}) = \pm 74,37$ cm und die äußeren Zylinder bei $x_a = \pm(d_a/2 - r_{0a}) = \pm 66,78$ cm. Für die Punkte x_i und x_a auf der negativen x -Achse können die Potentiale nach Gl. (2.3-71) berechnet werden:

$$\varphi_i = 3,458 \cdot Q / (2\pi\epsilon L)$$

$$\varphi_a = 2,464 \cdot Q / (2\pi\epsilon L)$$

Hieraus ergeben sich die Potentialdifferenzen

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_{ii} &= (3,458 + 3,458) \cdot Q / (2\pi\epsilon L) \\ &= 6,916 \cdot Q / (2\pi\epsilon L) \\ \Delta\varphi_{ai(r)} &= (-2,464 + 3,458) \cdot Q / (2\pi\epsilon L) \\ &= 0,994 \cdot Q / (2\pi\epsilon L) \end{aligned}$$

D.h. für die Potentialdifferenzen

$$\Delta\varphi_{ii} / \Delta\varphi_{ai} = 6,958$$

Die Maximalfeldstärke nach Gl. (*) ist damit

$$\begin{aligned} E_{\max} &= \Delta\varphi_{ai} \cdot 6,958 / 32,45 \text{ cm} \\ &= \Delta\varphi_{ai} / 4,664 \text{ cm} \end{aligned}$$

Im zylindersymmetrischen Feld ergibt sich für die maximale Feldstärke nach Gl. (2.3-22)

$$E_{(zyl)\max} = \Delta\varphi_{ai} / 5 \text{ cm}$$

D.h. die *Feldstärkeüberhöhung* durch die Exzentrizität $c = 1$ cm beträgt 7,2 %:

$$E_{\max} / E_{(zyl)\max} = 1,072$$

Ohne weitere Rechnung sei bemerkt, dass sich die *Kapazität* C_{ai} zwischen äußerem und innerem Zylinder ergibt, wenn man die Kapazitäten C_{ii} und C_{aa} zwischen den jeweils gleichartigen Zylindern nach Gl. (2.3-74) berechnet. C_{ii} kann dann als Reihenschaltung von C_{ia} , C_{aa} und C_{ai} aufgefasst werden, Bild 2.3-28.

Damit ist auch die *Größe der Ersatzladung* $Q = C_{ai} \cdot \Delta\varphi_{ai}$ bestimmt. Gl. (2.3-71) und (-72) erlauben dann die Berechnung des *Potential- und Feldstärkeverlaufes* entlang der x -Achse.

Beispiel 5: Drehstromfreileitung („Betriebskapazität“)

Bei einer Drehstromfreileitung handelt es sich um ein sogenanntes *Mehrleitersystem*, bei dem sich mehrere parallele, voneinander isolierte zylindrische Leiter auf verschieden hohem Potential befinden. Die Berechnung von Mehrleitersystemen ist mit Hilfe von Ersatz-Linieladungen und ihren Spiegelladungen möglich. Für eine detaillierte Behandlung sei auf die grundlegende Literatur verwiesen [2], [4].

Hier soll als Beispiel eine *dreiphasige Drehstromfreileitung* an einem Drehspannungssystem (komplexe Effektivwerte der Phasenspannungen: \underline{U}_{10} , \underline{U}_{20} , \underline{U}_{30}) betrachtet werden. Es wird vollständige *Symmetrie* für die Spannungen, die Leitereigenschaften (Leitungsbeläge) und die Ströme (I_1 , I_2 , I_3) angenommen.

Bei der Berechnung von Drehstromsystemen werden Leitungen und Kabel durch Leitungsimpedanzen beschrieben, die sich aus Leitungswiderständen, Längsinduktivitäten, Querkapazitäten und Querleitwerten ergeben.

Das Ersatzladungsverfahren erlaubt hierbei die Berechnung der sogenannten „*Betriebskapazität*“ einer Drehstromfreileitung. Es handelt sich dabei *nicht* um die Kapazität zwischen zwei entgegengesetzt gleich geladenen Leitern, eine solche Anordnung liegt beim Drehstromsystem *nicht* vor.

Die Betriebskapazität C_b ist über den kapazitiven Ladestrom I_{C1} einer leerlaufenden Freileitung definiert. Im einphasigen Ersatzschaltbild wird folgender formaler Zusammenhang definiert:

$$I_{C1} = j\omega C_b \cdot \underline{U}_{10} \quad (2.3-87)$$

Physikalisch gesehen wird allerdings der Ladestrom I_{C1} nicht nur von dem Verschiebungsfeld gespeist, das der Phasenspannung \underline{U}_{10} zugeordnet ist. Auch die Felder zwischen der betrachteten Phase L1 und L2, sowie zwischen L1 und L3 führen zur Einkopplung von Verschiebungsstrom. D.h. es besteht auch ein Einfluss der verketteten Spannungen \underline{U}_{12} und \underline{U}_{31} , Bild 2.3-29. Um trotzdem mit der einfachen Gl. (2.3-87) rechnen zu können, muss der *Einfluss aller Einkopplungen in der Größe der Betriebskapazität C_b berücksichtigt werden.*

Anmerkung: Die einfache Vorstellung eines einphasigen Ersatzschaltbildes, bei dem nur das sog. „Mitsystem“ betrachtet wird und bei dem die kapazitiven Kopplungen durch die Größe der Betriebskapazität berücksichtigt werden, ist nur im Falle *vollständiger Symmetrie* zulässig. D.h. die Drehstromleitung muss symmetrisch aufgebaut sein und symmetrisch betrieben werden.

Physikalisch gesehen ist das einphasige Ersatznetzwerk (das sog. Mitsystem) *nicht* mit der Phase L1 allein gleichzusetzen. Kapazitive und magnetische Kopplungen zu den Nachbarphasen werden durch die Größe der Betriebskapazitäten und –induktivitäten berücksichtigt.

Bei *unsymmetrisch* betriebenen Drehstromsystemen werden die drei gekoppelten Netzwerke L1, L2 und L3 durch eine Transformation in drei entkoppelte Netzwerke (Mitsystem, Gegensystem und Nullsystem) überführt, die eine einfachere und übersichtlichere Berechnung erlauben (*Methode der symmetrischen Komponenten* [20]). Die Angabe einer Betriebskapazität ist nicht mehr möglich, da die Voraussetzung symmetrischer Spannungen bzw. Felder nicht mehr erfüllt ist.

Im Sonderfall der vollständigen Symmetrie entspricht das einphasige Ersatzschaltbild dem Mitsystem. Nach Gl. (2.3-87) ist $1/(j\omega C_b) = \underline{U}_{10}/I_{C1}$ die „Mitimpedanz“ der leerlaufenden Leitung (bei Vernachlässigung der ohmschen und induktiven Anteile).

Die Betriebskapazität C_b soll aus dem Verhältnis der Ladung q_1 auf dem Leiter L1 zur Phasenspannung u_{10} berechnet werden. Dabei sind q_1 und u_{10} die Momentanwerte der zeitlich veränderlichen Größen. Der Ladestrom $i_{C1}(t)$ bzw. I_{C1} muss die Ladung q_1 dem Leiter zu- bzw. vom Leiter abführen. Der Einfluss des leitfähigen Erdbodens wird durch Spiegelladungen berücksichtigt, Bild 2.3-29.

Die Spannung u_{10} entspricht dem Potential φ_1 , das sich aus der Überlagerung der Beiträge aller Ersatzladungspaare ergibt:

$$\varphi_1 = \varphi_1(q_1, -q_1) + \varphi_1(q_2, -q_2) + \varphi_1(q_3, -q_3)$$

Bei Freileitungen sind die Ladungsabstände a_{12} , a_{13} , D_{12} , D_{13} und $D_{11} \approx 2h$ sehr groß im Vergleich zum Leiterradius r_{01} . Mit Gl. (2.3-67) folgt das Potential an der Oberfläche des Leiters L1:

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{2\pi\epsilon L} \ln \frac{2h_1}{r_{01}} + \frac{q_2}{2\pi\epsilon L} \ln \frac{D_{12}}{a_{12}} + \frac{q_3}{2\pi\epsilon L} \ln \frac{D_{13}}{a_{13}}$$

Für die Abstände von der jeweiligen Ladung zur Oberfläche des Leiters L1 wurden dabei (außer bei q_1) näherungsweise die Ladungsabstände zur Ladung q_1 eingesetzt. Der Abstand von q_1 zur Leiteroberfläche ist etwa gleich r_{01} .

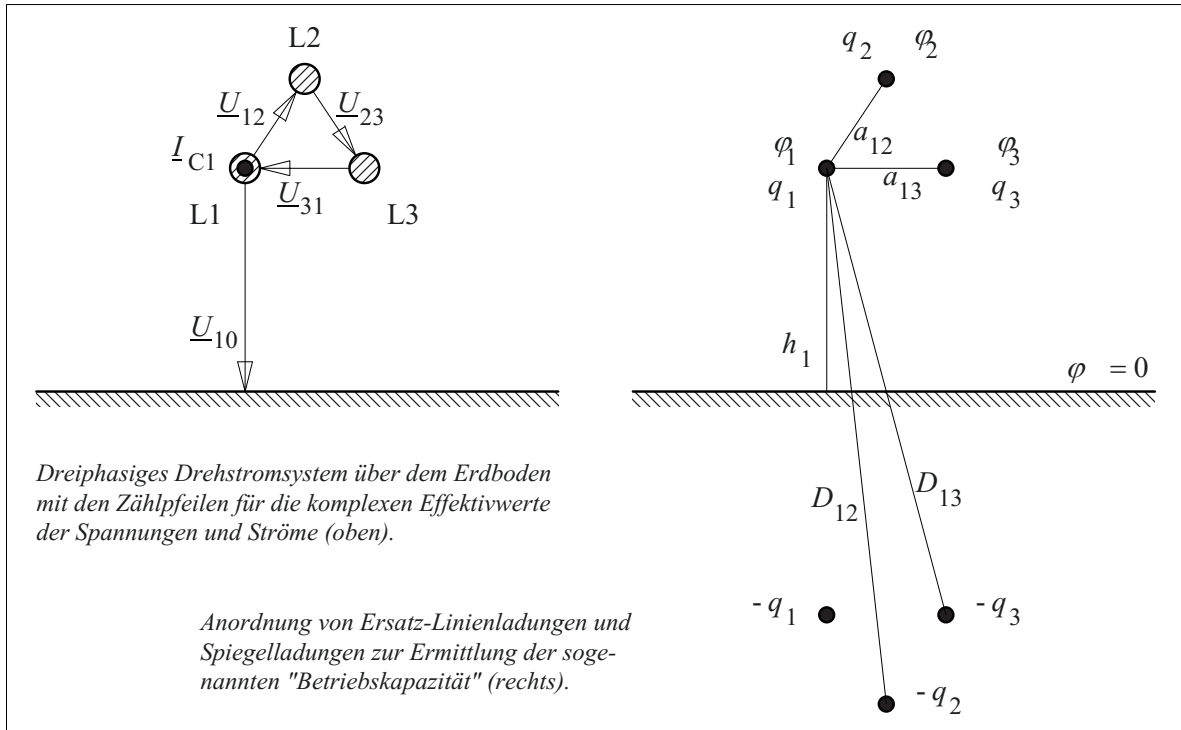


Bild 2.3-29: Berechnung der Betriebskapazität für ein symmetrisches Drehspannungssystem nach dem Ersatzladungsverfahren. Der Einfluß der Erde wird durch Spiegelladungen berücksichtigt.

In einem geometrisch vollständig symmetrischen System sind die jeweiligen Abstände untereinander gleich. In der Praxis werden Unsymmetrien durch zyklisches Vertauschen der Leiter herausgemittelt:

$$\begin{aligned} h_1 &= h_2 = h_3 = h \\ r_{01} &= r_{02} = r_{03} = r_0 \\ D_{12} &= D_{23} = D_{31} = D = 2h \\ a_{12} &= a_{23} = a_{31} = a \end{aligned}$$

Damit vereinfacht sich der Ausdruck für das Potential des Leiters L1:

$$\varphi_1 = \frac{1}{2\pi\epsilon L} \left[q_1 \ln \frac{D}{r_0} + (q_2 + q_3) \ln \frac{D}{a} \right]$$

Im symmetrischen Drehspannungssystem ist die Summe der Ladungen gleich Null:

$$q_1 + q_2 + q_3 = 0$$

D.h. es gilt

$$q_2 + q_3 = -q_1$$

Für das Potential φ_1 folgt daraus

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{q_1}{2\pi\epsilon L} \left[\ln \frac{D}{r_0} - \ln \frac{D}{a} \right] \\ \varphi_1 &= \frac{q_1}{2\pi\epsilon L} \ln \frac{a}{r_0} \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich die Betriebskapazität:

$$C_b = \frac{q_1}{\varphi_1} = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln \frac{a}{r_0}} \quad (2.3-88)$$

Es ist bemerkenswert, dass die Betriebskapazität, die man sich u.U. (fälschlicherweise) als Kapazität des Leiters L1 gegen den Erdboden vorstellen könnte, *nicht* vom Abstand h der Leiter gegen den Erdboden abhängt. Die Betriebskapazität ist ausschließlich vom Abstand a der Leiter untereinander und vom Leiter-radius r_0 abhängig.

Bei Freileitungen mit Bündelleitern ist der Radius r_0 eines einzelnen Leiters durch den

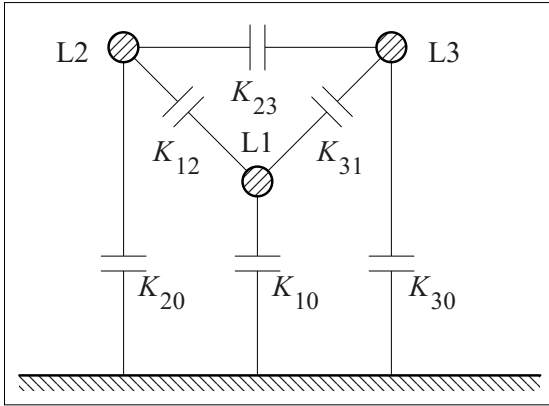


Bild 2.3-30: Koppel- und Erdkapazitäten (Kapazitätskoeffizienten) eines Drehstromsystems.

wesentlich größeren Ersatzradius R' nach Gl. (2.3-40) zu ersetzen, d.h. es ergibt sich eine größere Betriebskapazität als bei Einzeleleitern.

Werden *mehrere Drehstromsysteme* in enger Nachbarschaft, z.B. auf gemeinsamen Masten betrieben, so wird die Betriebskapazität dadurch beeinflusst. Die obige Rechnung für φ_1 ist dann noch um die den weiteren Drehstromsystemen zuzuordnenden Terme zu ergänzen. Sie fallen aber wegen der i.d.R. relativ großen Abstände nur noch geringfügig ins Gewicht.

Grundsätzlich kann mit dem Ersatzladungsverfahren auch die Betriebskapazität eines *Dreileiterkabels* oder einer *dreiphasigen gasisolierten Leitung* berechnet werden, bei dem die Leiterabstände nicht als groß gegen die Leiteradien angenommen werden dürfen [2]. In der Praxis werden jedoch meist messtechnisch von den Herstellern ermittelte Werte verwendet, die aber nur für ein bestimmtes Produkt gelten. *Hoch- und Höchstspannungskabel* werden einphasig mit koaxialsymmetrischem Feld ausgeführt, so dass die Betriebskapazität der Leiter-Erd-Kapazität nach Gl. (2.3-20) entspricht.

Die *Größenordnung* der Betriebskapazität beträgt bei Freileitungen etwa $C_b/L \approx 10$ nF/km, bei einphasigen Kunststoffkabeln etwa $C_b/L \approx 120$ nF/km (nach Gl. (2.3-20) für $\varepsilon_r = 2,2$ und $R_a/R_i = e$). Für Öl-Papier-Kabel, sowie für Kabel mit kleinerem Radienverhältnis R_a/R_i (z.B. Mittelspannungskabel mit großem Leiterquer-

schnitt) können sich noch wesentlich höhere Werte ergeben.

Anmerkung: Wegen der hohen kapazitiven Ladeblindleistung ist eine *wirtschaftliche Drehstromübertragung mit Kabeln* i.d.R. nur über Entfernungen von einigen 10 km möglich.

Die *Messung der Betriebskapazität* C_b erfolgt über die Teilkapazitäten, Bild 2.3-30. Der Ladestrom I_{C1} ergibt sich aus der Überlagerung aller in L1 eingekoppelten Verschiebungsströme, die aus den Kapazitätskoeffizienten K_{ij} und den entsprechenden Potentialdifferenzen \underline{U}_{ij} ermittelt werden:

$$I_{C1} = j\omega[K_{10}\underline{U}_{10} + K_{12}\underline{U}_{12} + K_{31}(-\underline{U}_{31})]$$

Wegen der Leitungssymmetrie gilt $K_{12} = K_{31}$:

$$I_{C1} = j\omega[K_{10}\underline{U}_{10} + K_{12}(\underline{U}_{12} - \underline{U}_{31})]$$

Mit Hilfe eines Zeigerdiagramms kann man zeigen, dass im symmetrischen Drehstromsystem $\underline{U}_{12} - \underline{U}_{31} = 3 \underline{U}_{10}$ ist. Damit folgt

$$I_{C1} = j\omega [K_{10} + 3 \cdot K_{12}] \underline{U}_{10}.$$

Durch Vergleich mit Gl. (2.3-87) ergibt sich die Betriebskapazität:

$$C_b = K_{10} + 3 \cdot K_{12} \quad (2.3-89)$$

Die Erdkapazität K_{10} und die Koppelkapazität K_{12} werden aus zwei Messungen ermittelt:

Bei der *ersten Messung* werden L2 und L3 geerdet, d.h. K_{20} und K_{30} sind kurzgeschlossen. Die zwischen L1 und dem Erdboden gemessene Kapazität C^* ist

$$C^* = K_{10} + K_{12} + K_{31} = K_{10} + 2 \cdot K_{12}.$$

Bei der *zweiten Messung* werden die Leiter L1, L2 und L3 untereinander verbunden. Die zwischen L1 und dem Erdboden gemessene Kapazität C^{**} ist jetzt

$$C^{**} = K_{10} + K_{20} + K_{30} = 3 \cdot K_{10}.$$

Für die Teilkapazitäten ergibt sich

$$K_{10} = C^{**}/3 \quad \text{und} \quad K_{12} = C^*/2 - C^{**}/6.$$

Damit lässt sich die Betriebskapazität als Funktion der Messwerte C^* und C^{**} angeben:

$$C_b = 3 \cdot C^*/2 - C^{**}/6 \quad (2.3-90)$$

Für die Berechnung von Feldstärken kann mit Hilfe von Gl. (2.3-88) die Größe der Ersatzladungen bestimmt werden. Dabei muss für die Feldberechnung ein Zeitpunkt ausgewählt werden, für den sich bestimmte Momentanwerte der Potentiale (bzw. Phasenspannungen) φ_1 , φ_2 und φ_3 und somit auch bestimmte Momentanwerte der Ersatzladungen q_1 , q_2 und q_3 ergeben. Die analytische Ermittlung der Feldstärken durch Bildung des Gradienten für das resultierende Potential oder durch vektorielle Überlagerung der verschiedenen Feldstärkekomponenten ist allerdings sehr aufwändig. Das Ergebnis ist nur für den betrachteten Zeitpunkt gültig. Für andere Zeitpunkte ergeben sich andere Feldverteilungen, d.h. auch andere Orte, Richtungen und Beträge der maximalen Feldstärke.

Anmerkung: Die maximale Spannungsdifferenz zwischen den Phasen L1 und L2 tritt bei Annahme einer sinusförmigen Spannung $u_{10}(t) = \sin \omega t$ im Zeitpunkt $\omega t = 60^\circ$ auf und beträgt $\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot U_{ph}$. Das Potential der Phase L3 ist in diesem Zeitpunkt Null. Bei Anordnung

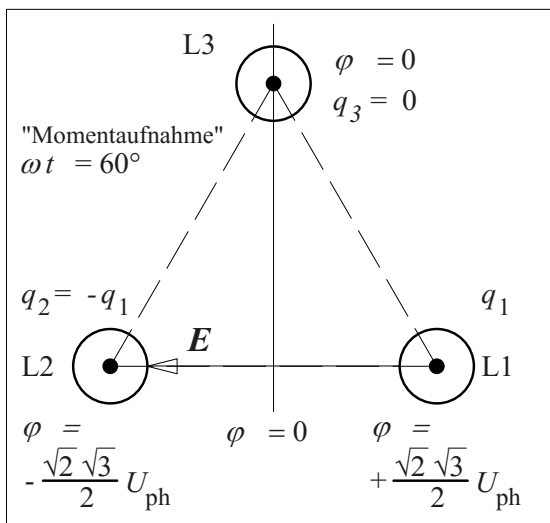


Bild 2.3-31: "Momentaufnahme" für einen Zeitpunkt maximaler Feldstärke an den Oberflächen von L1 und L2 (Einfluss des Erdbodens wird vernachlässigt).

der Leiter in Form eines gleichseitigen Dreiecks und bei Vernachlässigung des Erdeinflusses, liegt das Feldstärkemaximum an der Leiteroberfläche von L1 bzw. L2 etwa auf der Verbindungslinie zwischen L1 und L2, Bild 2.3-31. Wegen

$$q_3(60^\circ) = 0$$

und

$$q_1(60^\circ) = -q_2(60^\circ) = C_b \cdot \Delta \varphi / 2$$

können L1 und L2 näherungsweise als parallele zylindrische Leiter behandelt werden, Bild 2.3-25.

2.3.6 Ähnlichkeitsbeziehungen, Homogenitätsgrad („Schwaigerscher Ausnutzungsfaktor“)

In den vorigen Kapiteln wurden die gängigen analytischen Methoden zur Berechnung elektrischer Quellenfelder beschrieben. Die dabei behandelten hochspannungstechnischen Probleme und Beispiele sind natürlich nicht vollständig, sie haben eher exemplarischen Charakter, um in die Methoden und die Denkweisen einzuführen.

Dabei wird deutlich, dass es kein Standardverfahren gibt, das immer zum gewünschten Ergebnis führt. Vielfach ist ein gutes Maß an Intuition, Übung und Erfahrung erforderlich, um die besten Rechenwege und die angemessenen Vereinfachungen zu finden.

Für die schnelle praktische Lösung ist es deshalb eine wesentliche Erleichterung, wenn man eine eigene aufwändige Rechnung vermeiden und auf vorhandene Berechnungsergebnisse zurückgreifen kann.

Solche Berechnungsergebnisse sind z.B. für die Kapazitäten der unterschiedlichsten Elektrodenanordnungen in der elektrotechnischen Grundlagenliteratur verfügbar, z.B. [2].

In der Hochspannungstechnik ist darüber hinaus die zentrale Frage zu beantworten:

„Wie groß ist die maximale Feldstärke in der gegebenen Anordnung?“

Das Ergebnis wird unabhängig von der angelegten Spannung angegeben, indem die höch-

ste Feldstärke E_{\max} als Vielfaches der homogenen Feldstärke E_0 in einem Plattenkondensator mit dem gleichen Elektrodenabstand s beschrieben wird:

$$E_{\max} = \frac{1}{\eta} E_0 \quad (2.3-91)$$

E_0 kann auch als mittlere Feldstärke zwischen den Elektroden angesehen werden:

$$E_{\text{mittel}} = \frac{1}{s} \int_{p1}^{p2} E \, dx = \frac{U}{s} = E_0$$

Für eine gegebene Spannung U bestimmt man die maximale Feldstärke, indem in Gl. (2.3-91) $E_0 = U/s$ gesetzt wird.

Der Faktor $\eta = E_0/E_{\max}$ wird als *Homogenitätsgrad* oder als *Ausnutzungsfaktor* (nach Schwaiger [21]), der Kehrwert $1/\eta$ als *Inhomogenitätsgrad* bezeichnet. Im homogenen Feld ist $E_{\max} = E_0$ und der Homogenitätsgrad η ist $\eta = 1$. In einem sehr stark inhomogenen Feld gilt $E_{\max} \gg E_0$ und für den Homogenitäts- bzw. Ausnutzungsfaktor gilt $\eta \ll 1$.

Beispiel: Halbkugelförmige Elektrode

In Kap. 2.3.5.1 wurde die Maximalfeldstärke an der Oberfläche einer halbkugelförmigen Elektrode auf einer leitenden Ebene berechnet, Bild 2.3-18. Für die maximale Feldstärke ergab sich $E_{\max} = 3 E_0$. D.h. der Homogenitätsgrad bzw. der Ausnutzungsfaktor des Feldes beträgt $\eta = 0,333 = 33,3 \%$.

Ausnutzungsfaktoren sind für eine *sehr große Zahl von Elektrodenanordnungen* in katalogartigen Tabellen aus der Literatur verfügbar [4], [22], [23]. Die Bestimmung von η erfolgt in drei Schritten:

1. Zunächst sucht man aus den Tabellen den passenden *Elektrodentyp* heraus, beispielsweise Zylinder-Ebene, Kugel-Kugel, Toroid-Ebene, Kreisscheibe-Kreisscheibe, ...
2. Zu jedem Elektrodentyp wird ein spezieller *Geometriefaktor* p als Funktion der geometrischen Daten der Elektrodenanordnung angegeben. Er ist meist aus dem Elektro-

denabstand s und dem maßgeblichen Krümmungsradius r zu bestimmen.

$$p = f(\text{Geometrie}) = f(s, r) \quad (2.3-92)$$

Sind weitere Radien R , Höhen h , oder Längen d erforderlich, um die Elektrodenanordnung zu beschreiben, so werden noch *Parameter* bestimmt. Es handelt sich dabei meist um die auf r bezogene zusätzliche Größe R/r , h/r oder d/r .

3. Zu jedem Elektrodentyp wird eine *Kurve* angegeben, die den Homogenitätsgrad bzw. den Ausnutzungsfaktor η als Funktion des Geometriefaktors p darstellt.

$$\eta = f(p) \quad (2.3-93)$$

Ist die Definition eines weiteren Parameters erforderlich, reicht eine Kurve nicht aus, man benötigt vielmehr eine *Kurvenschar* für unterschiedliche Werte des zusätzlichen Parameters.

Beispiel: Zylinder- und Kugelkondensator

Zylinder- und Kugelkondensator werden in den Geometrikatalogen wegen ihres gleichartigen Schnittbildes als gleichartiger Elektrodentyp mit gleichartigem Geometriefaktor $p = (r + s)/r$ geführt, Bild 2.3-32. Es wird dann allerdings zwischen ebenen Feldern (koaxiale Zylinder) und rotationssymmetrischen Feldern (konzentrische Kugeln) unterschieden.

Werden in den Gleichungen (2.3-22) und (-14) für die maximalen Feldstärken die Radien R_1 und R_2 durch r und $(r + s)$ und die Spannungen U durch $E_0 \cdot s$ ersetzt, ergeben sich unter Verwendung von $p = (r + s)/r$ analytische Ausdrücke für die Homogenitätsgrade, die in Bild 2.3-33 graphisch dargestellt sind:

$$\eta_{\text{Zyl.}} = \frac{1}{p-1} \ln p \quad \text{und} \quad \eta_{\text{Kug.}} = \frac{1}{p} \quad (2.3-94)$$

Für die praktische Anwendung sind solche Zusammenhänge meist als *graphische Darstellung* oder als *Wertetabelle* gegeben. Man bestimmt dann p aus der gegebenen Geometrie

und liest η aus dem zugehörigen Diagramm ab, Bild 2.3-33.

Zahlenbeispiel: Für einen coaxialen, luftisolierten Rohrleiter mit $D_a = 30$ cm und $D_i = 10$ cm soll die maximal mögliche Spannung \hat{U} ermittelt werden, wenn $\hat{E}_{\max} = 15$ kV/cm zugelassen werden.

Aus den Durchmessern folgt $r = 5$ cm, $s = 10$ cm und $p = 3$. Aus Bild 2.3-33 ergibt sich ein Homogenitätsgrad $\eta \approx 0,55$. Nach Gl. (2.3-91) gilt dann

$$\hat{E}_0 = \eta \cdot \hat{E}_{\max} = 8,25 \text{ kV/cm} \quad \text{und}$$

$$\hat{U} = \hat{E}_0 \cdot s = 82,5 \text{ kV.}$$

Anmerkung: Die Bestimmung von Homogenitätsgraden ist sehr vorteilhaft für die *rasche überschlägige Bestimmung* einzelner Zahlenwerte, insbesondere bei Anordnungen, die einer analytischen Berechnung nicht oder nur schwer zugänglich sind. Voraussetzung ist natürlich, dass die betrachtete Feldanordnung auch auf eine bereits katalogisierte und ausgewertete Elektrodenanordnung übertragen werden kann.

Nachteilig ist insbesondere die *beschränkte Genauigkeit* des Verfahrens. Bei sehr inhomogenen Feldern ergeben sich auch sehr kleine Werte des Homogenitätsgrades η , die aus einem Diagramm (wie z.B. aus Bild 2.3-33) nur mit sehr geringer Genauigkeit abgelesen werden können. Eine geschlossene Lösung ist somit sicher oft vorzuziehen, sie ermöglicht darüber hinaus noch die Durchführung von *Optimierungen* (vgl. z.B. Kap. 2.3.1.2 und 2.3.1.3).

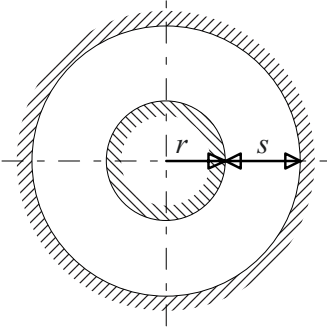
| | |
|--------------------------------------|---|
| Elektrodentyp (Schnittbild) |  |
| Geometriefaktor | $p = \frac{r+s}{r}$ |
| Ebene Feldanordnung | Koaxiale Zylinder Bild 2.3-33, Kurve (1) |
| Rotations-symmetrische Feldanordnung | Konzentrische Kugeln Bild 2.3-33, Kurve (2) |

Bild 2.3-32: Elektrodenanordnungen und Geometriefaktoren mit Verweis auf die Kurven zur Bestimmung der Homogenitätsgrade (Beispiel).

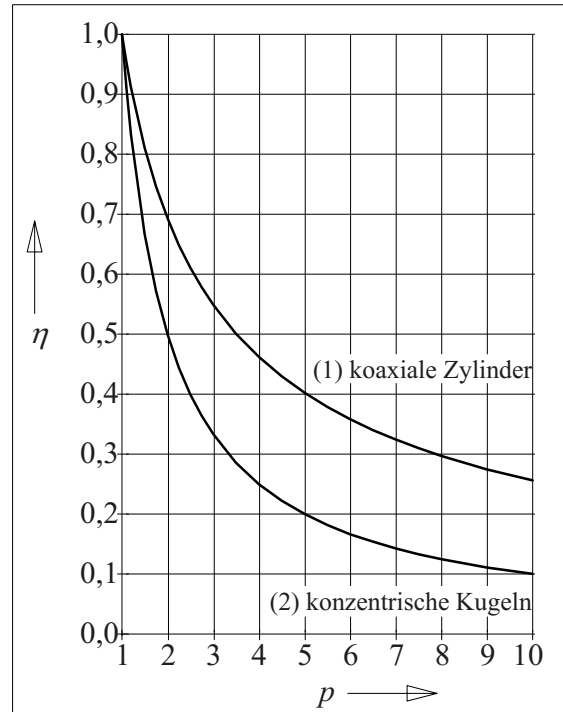


Bild 2.3-33: Homogenitätsgrad als Funktion des Geometriefaktors für koaxiale Zylinder- und konzentrische Kugelkondensatoranordnungen.

genen Feldern ergeben sich auch sehr kleine Werte des Homogenitätsgrades η , die aus einem Diagramm (wie z.B. aus Bild 2.3-33) nur mit sehr geringer Genauigkeit abgelesen werden können. Eine geschlossene Lösung ist somit sicher oft vorzuziehen, sie ermöglicht darüber hinaus noch die Durchführung von *Optimierungen* (vgl. z.B. Kap. 2.3.1.2 und 2.3.1.3).

Bild 2.3-33 zeigt einen interessanten *Zusammenhang* zwischen *ebenen und rotationssymmetrischen Anordnungen* mit gleichem Schnittbild: Durch die zusätzliche Krümmung der nehmen die Homogenitätsgrade kugelsymmetrischen Anordnung im Vergleich zur zylindersymmetrischen Anordnung stark ab. Aus den analytischen Ausdrücken für η kann durch Elimination von p der Zusammenhang

$$\eta_{\text{Zyl.}} = - \frac{\eta_{\text{Kug.}}}{1 - \eta_{\text{Kug.}}} \ln \eta_{\text{Kug.}} \quad (2.3-95)$$

abgeleitet werden, der in Bild 2.3-34 graphisch dargestellt ist.

Bild 2.3-34 ist nach [22] auch eine brauchbare Näherung für den *allgemeinen Zusammenhang* zwischen den Homogenitätsgraden von ebenen Feldanordnungen und den entsprechenden rotationssymmetrischen Feldanordnungen für $\eta_{\text{eben}} > 0,6$ (bzw. $\eta_{\text{Zyl.}} > 0,6$). Für stärker inhomogene Felder ist Bild 2.3-34 nur noch zur Abschätzung anwendbar.

Beispiel: Kugelfunkenstrecke

Die maximale Feldstärke einer *Kugelfunkenstrecke* mit $r_0 = 0,2 d$ soll abgeschätzt werden (vgl. auch Kapitel 2.3.5.2, Beispiel Kugelfunkenstrecke).

Zunächst soll der Homogenitätsgrad der *entsprechenden ebenen Anordnung* mit gleichem Schnittbild bestimmt werden. Es handelt sich dabei um zwei parallele zylindrische Leiter mit $r = r_0$ und mit dem Elektrodenabstand (Schlagweite) $s = 0,6 d = 3 r$.

Aus der Ersatzladungsberechnung folgt mit Gl. (2.3-76)

$$\begin{aligned} E_{\text{max(eben)}} &= 1,462 U/(d - 2r_0) \\ &= 1,462 E_0 s/(3 r_0) \\ &= 1,462 E_0. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\eta_{\text{eben}} = 1/1,462 = 0,684$$

Aus Bild 2.3-34 wird für die entsprechende rotationssymmetrische Anordnung

$$\eta_{\text{rot}} \approx 0,48$$

entnommen, sie ist erwartungsgemäß wesentlich inhomogener. Als Ergebnis folgt

$$E_{\text{max(rot)}} \approx U/(s \cdot 0,48) = 2,1 \cdot U/s,$$

in guter Übereinstimmung mit $E_{\text{max}} = 2,21 \cdot U/s$ aus der Ersatzladungsberechnung in Kap. 2.3.5.2 (Beispiel Kugelfunkenstrecke).

Aus vorstehendem Zahlenbeispiel wird deutlich, dass Bild 2.3-34 und Gl. (2.3-95) nützliche Hilfen bei der Berechnung rotationssymmetrischer Anordnungen sein können, wenn der Homogenitätsgrad für die entsprechende ebene Anordnung einfacher zu ermitteln ist. Allerdings ist auch dieses Verfahren lediglich ein Näherungsverfahren.

2.3.7 Ausmessung stationärer Strömungsfelder

Meist sind die zu bestimmenden elektrischen Felder einer direkten Messung nicht zugänglich oder es mangelt an geeigneten Messverfahren (vgl. Kap. 6). Man ist also auf die indirekte Bestimmung der elektrischen Beanspruchungen durch Berechnungen angewiesen.

Neben den behandelten analytischen Verfahren hatte sich die punktweise *Ausmessung stationärer Strömungsfelder* etabliert, um kompliziertere Potentialverteilungen zu ermitteln. Diese Methoden sind in der industriellen Anwendung heute weitgehend durch die flexiblere und genauere *numerische Feldberechnung* abgelöst worden. Allerdings ist die Analogie zwischen langsam veränderlichem dielektrischem Verschiebungsfeld (bei Wechselspannungsbeanspruchung) und stationärem Strömungsfeld (bei Gleichspannungsbeanspruchung) von grundsätzlicher Bedeutung und von großem didaktischen Wert.

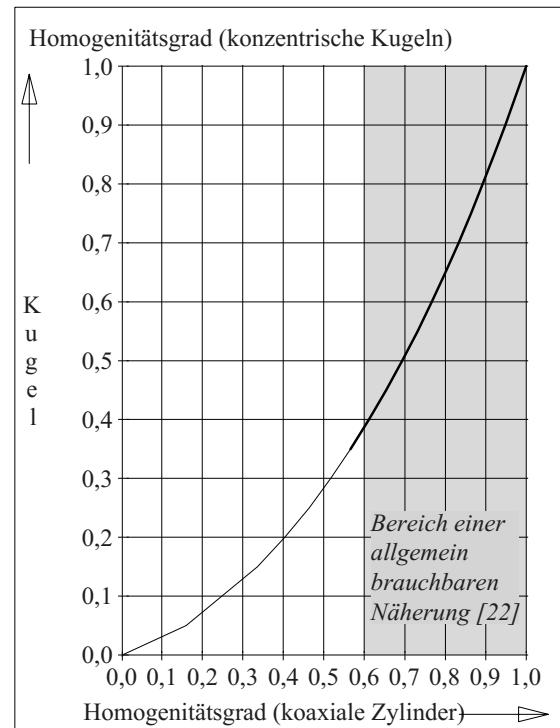


Bild 2.3-34: Vergleich der Homogenitätsgrade ebener und rotationssymmetrischer Elektrodenanordnungen am Beispiel Zylinder-/Kugelkondensator.

2.3.7.1 Analogie zwischen dielektrischem Verschiebungsfeld und stationärem Strömungsfeld

Die Bestimmung von *Potentialfeldern* durch Ausmessung stationärer elektrischer Strömungsfelder beruht auf der Analogie zu den langsam veränderlichen dielektrischen Verschiebungsfeldern, vgl. auch Kap. 2.1.4. D.h. die Dielektrizitätszahl ε und die Verschiebungsdichte \mathbf{D} sind durch die Leitfähigkeit κ und die Leitungsstromdichte \mathbf{J} zu ersetzen, Gl. (2.1-19) und (-20):

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad \text{entspricht} \quad \mathbf{J} = \kappa \mathbf{E} \quad (2.3-96)$$

Die elektrische Feldstärke \mathbf{E} wird in beiden Feldarten nach formal gleichartigen Gleichungen bestimmt. Anstelle der Ladung Q als Quelle des elektrischen Feldes tritt der in die Anordnung eingespeiste Strom I :

$$Q = \iint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} \quad \text{entspricht} \quad I = \iint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} \quad (2.3-97)$$

Die elektrischen Feldstärken \mathbf{E} und die aus ihnen abgeleiteten Größen, Potential φ und Spannung U , entsprechen einander für die beiden unterschiedlichen Feldarten. Insbesondere ist auch die Potentialgleichung (2.3-31)ff.

$$\Delta \varphi = 0 \quad (2.3-98)$$

in dieser Form (für das raumladungsfreie bzw. stromquellenfreie Isolierstoffvolumen) für beide Feldarten gleichermaßen gültig.

D.h. die vorstehenden Feldberechnungen für die von Ladungen erzeugten Quellenfelder sind auch auf stationäre Strömungsfelder übertragbar. Umgekehrt können Potentialverteilungen, die in stationären Strömungsfeldern gemessen wurden, auch auf die von Ladungen erzeugten quasistationären Verschiebungsfelder (Quellenfelder) übertragen werden.

Anmerkung: Häufig werden die mit festen (statischen) Ladungsverteilungen berechneten Quellenfelder auch als „statische elektrische Felder“ bezeichnet. Dabei

handelt es sich jedoch um eine theoretische *Hilfsvorstellung*, da der statische Fall aufgrund der immer vorhandenen (Rest-)Leitfähigkeit des Isolierstoffes nicht existieren kann, es kommt zwangsläufig zur Ausbildung eines *stationären Strömungsfeldes*. Das von Ladungen erzeugte Quellenfeld ist jedoch eine gute Näherung für *langsam veränderliche Felder* in Isolierstoffen mit sehr geringer (Rest-)Leitfähigkeit, wenn die Leitungsstromdichte \mathbf{J} gegenüber der Verschiebungsstromdichte $\partial \mathbf{D} / \partial t$ vernachlässigt werden kann, vgl. auch Kap. 2.1.4.4.

Für die Ausmessung von Strömungsfeldern sind vor allem zwei Verfahren von Interesse, die zweidimensionale Messung auf halbleitendem Papier und die dreidimensionale Messung in halbleitenden Flüssigkeiten.

2.3.7.2 Messungen auf halbleitendem Papier („Widerstandspapier“)

Ebene Strömungsfelder können mit Hilfe von halbleitendem Papier („Widerstandspapier“) erzeugt werden, auf dem gut leitfähige Elektrodenkonturen aufgemalt oder ganzflächig angedruckt werden. Der Rand des Papiers muss dabei einen großen Abstand zum interessierenden Feldbereich haben, um Feldverzerrungen durch die künstlichen Begrenzungen zu vermeiden.

Nach Anlegen einer Gleichspannung an die Elektroden erfolgt die Messung des Potentials für beliebige Punkte mit Hilfe einer metallischen Sonde, die auf das Papier aufgesetzt wird. I.d.R. wird für die Messung eine *Brückenschaltung* mit Nullindikator eingesetzt, um rückwirkungsfrei messen zu können.

Für die Durchführung der Messung ist es sinnvoll, die Brücke auf einen festen Potentialwert einzustellen um dann mit der Sonde die zugehörige Äquipotentiallinie auf dem Widerstandspapier verfolgen zu können. Durch entsprechendes Markieren entsteht unmittelbar ein Potentiallinienbild.

Die Messungen an Widerstandspapier erlauben auch die Nachbildung unterschiedlicher Leitwerte (bzw. Dielektrizitätszahlen ε) durch Stapeln von Papieren in unterschiedlicher Anzahl. Dabei ist jedoch unbedingt auf ganzflächigen Kontakt der Blätter untereinander zu achten.

2.3.7.3 Messungen in halbleitenden Flüssigkeiten („Elektrolytischer Trog“)

Durch Versenken der Elektrodenanordnung in einer halbleitenden Flüssigkeit (z.B. in einem wässrigen Elektrolyten) kann auch eine beliebige *dreidimensionale* Feldanordnung punktweise vermessen werden (*Field Plotter*). Prinzipiell kann auf diese Weise auch die originale Elektrodenanordnung untersucht werden, falls ein ausreichend großer elektrolytischer Trog zur Verfügung steht.

Die Feldbegrenzung an den Behälterwänden darf keinen Einfluss auf das Feld im interessierenden Bereich nehmen, so dass sich häufig sehr große Behälterabmessungen ergeben.

Die Nachbildung unterschiedlicher Dielektrizitätszahlen durch Flüssigkeiten unterschiedlicher Leitfähigkeiten, die sich an definierten Grenzflächen berühren müssen, sich aber nicht durchmischen dürfen, ist nicht ohne weiteres realisierbar.

Für ein räumliches Potentialflächenbild ist eine große Anzahl von Daten aufzunehmen, so dass sich ein automatisierter Messablauf mit Positionierung der Messsonde empfiehlt.

Die in die Flüssigkeit getauchte Messsonde muss natürlich (bis auf die eigentliche Messspitze) gegen die Flüssigkeit isoliert sein.

2.4 Statische, stationäre und quasistationäre Felder in inhomogenen Dielektrika

Materie im elektrischen Feld hat einen wesentlichen Einfluss auf die Ausbildung der Feld- und Potentialverteilung:

- Durch Polarisierung, d.h. durch Verschiebung geladener Atome und Moleküle oder durch Orientierung von Dipolen im elektrischen Feld, entstehen zusätzliche Felder. Man berücksichtigt dies durch die sog. „*Dielektrizitätszahl*“ ε des Isolierstoffes.

- Durch Bewegung von Ladungsträgern im elektrischen Feld entsteht ein sogenanntes Strömungsfeld. Man berücksichtigt dies durch die sogenannte (*Rest-*)*Leitfähigkeit* κ des Isolierstoffes.

In Kap. 2.3 wurden die Felder in *homogenen Dielektrika* mit konstanten Dielektrizitätszahlen ε und Leitfähigkeiten κ behandelt. D.h. es bestand die Voraussetzung, dass sich im Feldraum keine Materie (ideales Vakuum) oder ein völlig homogener Stoff befindet. Eine Abhängigkeit von Umgebungsparametern (z.B. Temperatur), eine Feldabhängigkeit (Nichtlinearität) oder eine Richtungsabhängigkeit (Isotropie) wurden nicht berücksichtigt.

Unter diesen Voraussetzungen ergibt sich keinerlei Einfluss der Materialgrößen ε und κ auf die Potentialverteilung und auf Größe und Richtung der elektrischen Feldstärke E .

Allerdings sind die Feldgrößen D und J materialabhängig. Damit ist auch die Kapazität C der Elektrodenanordnung

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\oiint D \, dA}{U} = \varepsilon \frac{\oiint E \, dA}{U} \quad (2.4-1)$$

eine von der Dielektrizitätszahl ε abhängige Größe. Auch der (Durchgangs-)Widerstand R bzw. der Leitwert G der Elektrodenanordnung ist von der Leitfähigkeit κ abhängig:

$$G = \frac{1}{R} = \frac{I}{U} = \frac{\oiint J \, dA}{U} = \kappa \frac{\oiint E \, dA}{U} \quad (2.4-2)$$

Anmerkung: Aus diesen Gleichungen folgt für die „Eigenentladungszeitkonstante“ des Isolierstoffes

$$\tau_e = RC = \varepsilon/\kappa \quad (2.4-3)$$

(vgl. auch Kap. 2.1.4.4, Beispiel Eigenentladung eines Dielektrikums). D.h. bei gegebener Kapazität C kann unmittelbar auch der Widerstand R errechnet werden.

In der Hochspannungstechnik treten homogene Isolierstoffe immer nur bereichsweise auf, z.B. als Luftisolation bei Freileitungen, als Druckgasisolation in gekapselten Schaltanlagen oder

als Kabeldielektrikum. Zu einem funktionsfähigen **Isoliersystem** gehören immer noch *weitere Isolierstoffe*, z.B. in Form von Hängeisolatoren (bei Freileitungen), von Stützisolatoren (bei gekapselten Schaltanlagen) oder von Endverschlüssen (bei Kabeln).

Man muss also grundsätzlich über die Betrachtung der Feldbereiche mit homogenem Isolierstoff hinaus auch die Bereiche mit *verschiedenen Isolierstoffen* betrachten. Komplexe Isoliersysteme (wie z.B. in Transformatoren, Durchführungen, Kabelendverschlüssen usw.) bestehen immer aus einer großen Zahl von Bauelementen mit verschiedenen Isolierstoffen (wie z.B. Öl, imprägniertes Papier, imprägnierter Pressspan, Kunststoff-Folien, Porzellan, Epoxidharz, Silikone oder Luft).

Die Feld- und Potentialverteilungen in Anordnungen mit mehreren Isolierstoffen können sich sehr stark von den Feld- und Potentialverteilungen in homogenen Anordnungen unterscheiden. Insbesondere treten an Grenzflächen Brechungen der Feldvektoren und Äquipotentiallinien sowie Sprünge der Feldgrößen auf.

Nachfolgend werden zunächst die physikalische Ursache und die mathematische Beschreibung von *Polarisation und Leitfähigkeit* in Isolierstoffen dargestellt (Kap. 2.4.1).

Damit ist die Behandlung der *grundlegenden Isolierstoffschichtungen* quer, längs und schräg zur Feldrichtung möglich (Kap. 2.4.2).

Die Anwendung der *analytischen Feldberechnungsmethoden* auf Isolierstoffsysteme (Kap. 2.4.3) erlaubt die Berechnung wichtiger *Sonderfälle*, wie z.B. geschichtete Kondensator-dielektrika, beschichtete Elektrodenoberflächen, Barriersysteme, Risse und Spalte, Blasen und Lunker, sowie Tripelpunkte und Zwickel an der Oberfläche von Elektroden.

Die Darstellung bezieht sich zunächst auf das *dielektrische Verschiebungsfeld* (bei Wechselspannung) und Medien mit unterschiedlichen Dielektrizitätszahlen ε . Wegen der in Kap. 2.3.7.1 beschriebenen Analogien können die Ergebnisse auch auf das *stationäre Strömungs-*

feld (bei Gleichspannung) und Medien mit unterschiedlichen Leitfähigkeiten übertragen werden (Kap. 2.4.4).

2.4.1 Leitfähigkeit und Polarisation

Der Aufbau der Materie aus geladenen Protonen und Elektronen ist i.d.R. nicht unmittelbar feststellbar, weil die Ladungen statistisch gesehen gleichmäßig verteilt sind. Sie sind entweder beweglich oder ortsfest gebunden.

2.4.1.1 Leitfähigkeit

Unter der Kraftwirkung elektrischer Felder werden *bewegliche Ladungsträger* beschleunigt und durch Stöße wieder abgebremst. Im statistischen Mittel stellen sich eine konstante *Driftgeschwindigkeit* \mathbf{v} und eine konstante *Stromdichte* \mathbf{J} ein, die der Feldstärke \mathbf{E} proportional sind [24], [25]. Die Materialgleichung (2.1-20) beschreibt diesen Zusammenhang mit dem Proportionalitätsfaktor κ (*Leitfähigkeit*):

$$\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E} \quad (2.4-4)$$

Anmerkung: In Gasen ist dieser lineare Zusammenhang bei hohen Feldstärken nicht mehr gültig. Zunächst kommt es zur Sättigung des Stromes und dann zu einer Ladungsträgervermehrung durch Stoßprozesse und zu einem erneuten Stromanstieg (vgl. Kap. 3).

In flüssigen und festen Isolierstoffen kann man meist in guter Näherung von Gl. (2.4-4) ausgehen. Je nach Art der stromtragenden Ladungsträger unterscheidet man *Ionenleitung* und *Elektronenleitung*.

Leitfähigkeiten von Isolierstoffen hängen sehr stark von den verwendeten Materialien, Verunreinigungen, Fertigungsbedingungen und den Einsatzbedingungen (z.B. Temperatur, z.T. auch Beanspruchungszeit und Feldstärke) ab. Beispielsweise steigt die Leitfähigkeit oft exponentiell mit der Temperatur an. Die Unterschiede zwischen verschiedenen Isolierstoffen können mehrere Größenordnungen betragen. Eine genauere Betrachtung erfolgt in Kap. 4.

Die Verlässlichkeit einer Feldberechnung für ein stationäres Strömungsfeld (d.h. bei Gleichspannung) hängt sehr stark von der Verlässlichkeit der verwendeten Leitfähigkeitswerte ab. In der Praxis muss der Ermittlung von anwendungsgerechten Leitfähigkeitswerten besondere Aufmerksamkeit gewidmet werden.

2.4.1.2 Polarisation

Ortsfest gebundene positive und negative Ladungsträger können unter der Kraftwirkung des elektrischen Feldes gegeneinander verschoben werden, es entsteht eine *Polarisation* des Isolierstoffs, Bild 2.4-1. Dabei gibt es mehrere Polarisationsmechanismen [24], [25]:

- Durch Verschieben der negativen Elektronenhülle gegen den positiven Kern wird das Atom deformiert. Man spricht von *Elektronenpolarisation* (bzw. Deformationspolarisation).
- Durch Verschieben von Atomen, die unterschiedliche Ladung tragen können, werden Moleküle deformiert. Man spricht von *Atompolarisation* (bzw. ebenfalls von Deformationspolarisation).
- Durch Verschieben unterschiedlich geladener Gitterbausteine eines Kristallgitters entsteht die *Gitterpolarisation*.
- Die Ausrichtung von polaren Molekülgruppen, Molekülen oder Partikeln (d.h. von sogenannten elektrischen Dipolen) wird als *Orientierungspolarisation* bzw. *molekulare Polarisation* bezeichnet.
- Auch der Stau von Ladungsträgern an makroskopischen oder mikroskopischen Grenzflächen zwischen Medien unterschiedlicher Leitfähigkeit führt zur Polarisation des Dielektrikum, d.h. zur sog. *Grenzflächenpolarisation*.

Die Wirkung der unterschiedlichen Polarisationsmechanismen ist immer gleich: Es entsteht ein zusätzliches elektrisches Feld E_{Dip} aus der Überlagerung vieler Dipolfelder, das sich dem ursprünglichen Feld E_0 einer gleich-

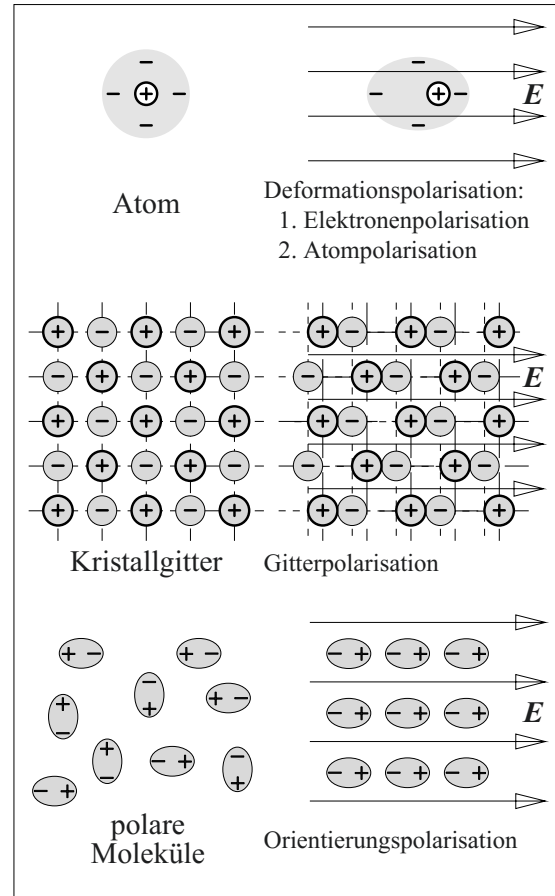


Bild 2.4-1: Polarisation von Isolierstoffen durch ein elektrisches Feld (rechts).

artigen Anordnung ohne Isolierstoff („Vakuumfeld“) überlagert, Bild 2.4-2b:

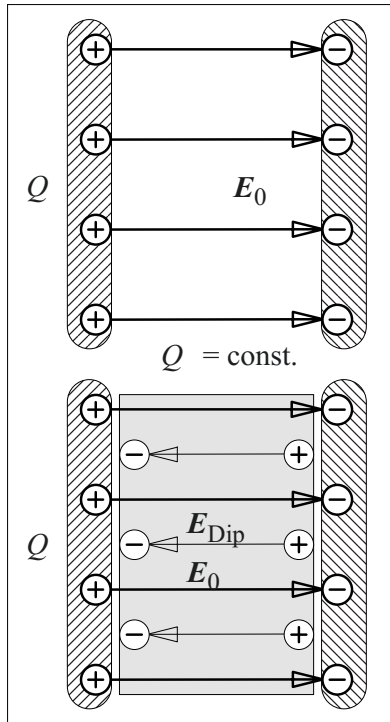
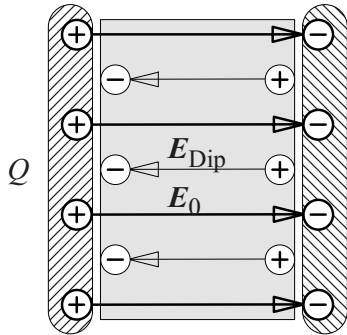
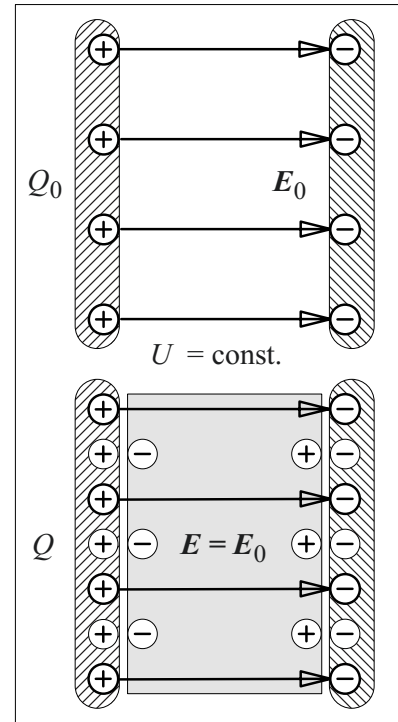
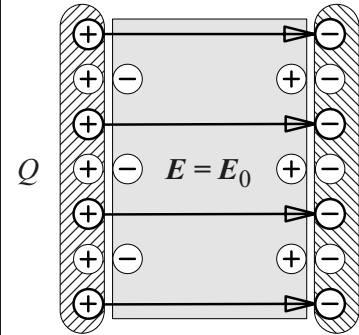
$$E = E_0 + E_{\text{Dip}} \quad (2.4-5)$$

Das von den verschobenen Ladungen erzeugte Dipolfeld ist dem ursprünglichen Vakuumfeld entgegengerichtet. Deshalb gilt für den Betrag des resultierenden Feldes

$$E = E_0 - E_{\text{Dip}} \quad (2.4-6)$$

Die Zusammenhänge sollen mit Hilfe eines Gedankenexperiments erläutert werden:

In einen Kondensator mit der Ladung Q wird ein Isolierstoff eingebracht, Bild 2.4-2a und -b. Dadurch ändert sich die Plattenladung Q nicht, wenn der Kondensator nicht mit einer äußeren Quelle verbunden ist. D.h. man geht von *kon-*

Bild 2.4-2a:
Elektrisches
Quellenfeld
in Vakuum.Bild 2.4-2b:
Elektrisches
Zusatzfeld
durch die
Polarisation
eines Isolier-
stoffs bei
konstanter
Ladung.Bild 2.4-3a:
Elektrisches
Quellenfeld
in Vakuum.Bild 2.4-3b:
Bindung
zusätzlicher
Ladungen
durch die
Polarisation
eines Isolier-
stoffs bei
konstanter
Spannung.

stanter Ladung $Q = D \cdot A$ und damit auch von konstanter dielektrischer Verschiebungsdichte

$$D = \varepsilon_0 \cdot E_0 = \text{const.}$$

aus. Mit Gl. (2.4-6) gilt

$$\begin{aligned} D &= \varepsilon_0 \cdot (E + E_{\text{Dip}}) \\ &= \varepsilon_0 \cdot E + P. \end{aligned}$$

Der Term $P = \varepsilon_0 \cdot E_{\text{Dip}}$ wird als *elektrische Polarisation* bezeichnet. Er hat die gleiche Dimension wie die elektrische Verschiebungsdichte D . Der Vektor $\mathbf{P} = -\varepsilon_0 \cdot \mathbf{E}_{\text{Dip}}$ kann als derjenige Anteil der Verschiebungsdichte \mathbf{D} interpretiert werden, für den das elektrische Feld durch die polarisierten Ladungen kompensiert wird. Allgemein gilt

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \cdot \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (2.4-7)$$

Der Anteil $\varepsilon_0 \cdot \mathbf{E}$ ist denjenigen Ladungen auf der Elektrode zuzuordnen, die *nicht* von den polarisierten Ladungen im Isolierstoff kompensiert werden. Sie erzeugen dementsprechend ein gegenüber \mathbf{E}_0 reduziertes elektrisches Feld \mathbf{E} , vgl. auch Gl. (2.4-5) und (-6).

Es ist üblich, den Einfluss der Polarisation, d.h. den Einfluss des Isolierstoffs durch einen Faktor ε_r , die sogenannte *relative Dielektrizitätszahl*, zu beschreiben. Man erhält dann die schon erwähnte *zentrale Materialgleichung* (2.1-2) und (-19):

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \mathbf{E} \quad (2.4-8)$$

Absolute und relative Dielektrizitätszahl werden oft zur Dielektrizitätszahl oder Permittivität ε zusammengefasst:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \quad (2.4-9)$$

Aus der Gleichheit der Gleichungen (2.4-7) und (-8) folgt für die Polarisation

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \cdot (\varepsilon_r - 1) \cdot \mathbf{E}. \quad (2.4-10)$$

Im Vakuum verschwindet die Polarisation, d.h. es gilt $\varepsilon_r = 1$. Bei Anwesenheit von Materie gilt grundsätzlich $\varepsilon_r > 1$.

Nach Gl. (2.4-1) führt das Einbringen eines Dielektrikums zur *Erhöhung der Kapazität*:

$$C = \varepsilon_r \cdot C_0 \quad (2.4-11)$$

Anmerkung: Bisher wurde angenommen, dass ein Kondensator ohne und mit Dielektrikum eine bestimmte *konstante Ladung* Q trägt. In diesem Fall führt das Einbringen des Dielektrikums zu einer Polarisierung, die die Feldstärke $E = E_0/\epsilon_r$ und die Kondensatorspannung U verringert, Bild 2.4-2.

Eine entsprechende Überlegung kann auch für einen Kondensator durchgeführt werden, bei dem durch eine äußere Quelle eine *konstante Spannung* U und damit auch eine konstante Feldstärke E aufrechterhalten wird. In diesem Fall bewirkt das Einbringen des Dielektrikums durch Polarisierung, dass zusätzlich zur vorhandenen Elektrodenladung Q_0 weitere Ladungen auf den Elektroden gebunden werden, Bild 2.4-3. Sie müssen in Form eines Stromes aus der angeschlossenen Quelle geliefert werden. Dem Anstieg der Elektrodenladung auf Q entspricht ein Anstieg der Verschiebungsdichte D auf

$$D = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot E = \epsilon_r \cdot D_0. \quad (2.4-12)$$

Die Polarisierung P in Gl. (2.4-7) kann dann als die Verschiebungsdichte interpretiert werden, die den zusätzlich auf den Elektroden gebundenen Ladungen entspricht.

Die Werte der relativen Dielektrizitätszahl hängen stark von den jeweiligen *Polarisationsmechanismen* ab, Bild 2.4-4. Nachfolgend sind typische Werte (für Raumtemperatur und Netzfrequenz $f = 50/60$ Hz) erläutert:

- Im idealen *Vakuum* befindet sich keine polarisierbare Masse. Deshalb gilt $\epsilon_r = 1$.
- In Gasen befindet sich im Vergleich zu flüssigen und festen Medien sehr wenig Masse, die Atome oder Moleküle besitzen keinen polaren Charakter. Durch Elektronenpolarisation entsteht eine geringe, oft vernachlässigte Erhöhung der relativen Dielektrizitätszahl. Für atmosphärische *Luft* gilt $\epsilon_r = 1,0006$.
- Stoffe mit *symmetrischen, unpolaren Molekülen* haben vergleichsweise niedrige Dielektrizitätszahlen, aufgrund von Elektronen-, Atom- und ggf. Gitterpolarisation. Für *Mineralöl* und für *Polyäthylen (PE)* gilt etwa $\epsilon_r = 2,2$ bis $2,3$.
- *Unsymmetrisch aufgebaute und komplexere Moleküle* besitzen oft ein hohes Dipolmoment. Durch Orientierungspolarisation

ergeben sich höhere Dielektrizitätszahlen. Für *Polyvinylchlorid (PVC)* gilt etwa $\epsilon_r = 3,5$, für *Epoxidharze* etwa $\epsilon_r = 3,5$ bis 4 , für *Rizinusöl* etwa $\epsilon_r = 5$ und für *Zellulosefasern* bis zu $\epsilon_r = 7$.

- Flüssigkeiten aus *polaren Molekülen hoher Beweglichkeit* haben sehr hohe Dielektrizitätszahlen aufgrund von Orientierungspolarisation. Für *Glyzerin* gilt etwa $\epsilon_r = 40$, für *Wasser* $\epsilon_r = 81$.

Anmerkung: Sowohl Wasser als auch Glyzerin zeigen eine vergleichsweise hohe Ionenleitfähigkeit und sind deshalb als Dielektrika nur für sehr kurze impulsförmige Beanspruchungen geeignet.

- Extreme Dielektrizitätszahlen $\epsilon_r > 1000$ werden in sog. *Ferroelektrika* beobachtet. In der Nähe von Umwandlungstemperaturen der Kristallstruktur können sich die Bindungsverhältnisse so verändern, dass es unter der Wirkung eines elektrischen Feldes zur sog. "Polarisationskatastrophe", d.h. zum extremen Anstieg der Dielektrizitätszahl kommt [25]. Dieser Effekt ist stark von der Temperatur und auch von der Feldstärke abhängig; er tritt nur in Richtung bestimmter Kristallachsen auf. Für *Bariumtitanat* gilt etwa $\epsilon_r = 3000 \dots 7000$.

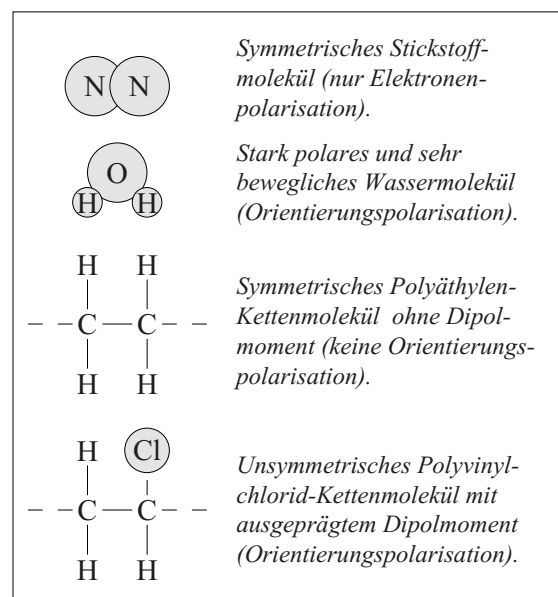


Bild 2.4-4: Beispiele für Polarisationsmechanismen in Isolierstoffen.

Dielektrizitätszahlen sind keine konstanten Größen, sie verändern sich vor allem mit der *Temperatur* T und der *Frequenz* f des elektrischen Feldes, Bild 2.4-5, vgl. Kap. 4.2.

Bei Erhöhung der *Temperatur* erhöht sich einerseits die Beweglichkeit vorhandener Dipole, andererseits führt die Wärmebewegung zu einer zunehmenden Zerstörung der Dipolausrichtung durch Stöße. Dadurch kann es bei Temperaturerhöhung zunächst zu einer Erhöhung von ϵ_r kommen, wenn die bei niedrigeren Temperaturen "eingefrorenen" Dipole beweglicher werden. Dies geht oft einher mit einer strukturellen Veränderung des Isolierstoffes. Weitere Temperatursteigerung führt dann zum Absinken der Dielektrizitätszahl, Bild 2.4-5 (oben) und 4.2-13.

Bei zunehmender *Frequenz* ist zu beachten, dass die Polarisation einer mechanischen Trägheit und einer Wechselwirkung der Dipole unterliegt, die für die Ausrichtung großer Dipole am größten und für die Elektronenpolarisation am kleinsten ist. D.h. mit zunehmender Frequenz können die Dipole aufgrund ihrer Massenträgheit der Feldänderung nicht mehr folgen. Dadurch entsteht eine starke Frequenzabhängigkeit (Dispersion) der Dielektrizitätszahl: Grundsätzlich nimmt ϵ_r mit zunehmender Frequenz in Stufen ab, die dem stufenweisen Aussetzen verschiedener Polarisationsmechanismen zugeordnet werden können, Bild 2.4-5 (unten), 4.2-3 und 4.2-13.

Anmerkung: Die Polarisation ist ein Vorgang, der ähnlich wie die Stromleitung, mit Verlusten, den sogenannten *Polarisationsverlusten*, verbunden ist. Sie entstehen durch Stöße und Energieübertragung bei der ständigen Umorientierung der Dipole mit der Frequenz des anliegenden Feldes. Bei niedrigen und hohen Frequenzen sind die Polarisationsverluste gering, weil die Dipole dem Feld unverzögert bzw. überhaupt nicht mehr folgen können. Im Übergangsbereich werden die Polarisationsverluste maximal, vgl. Kap. 4.

Für sinusförmige Wechselfelder können der dielektrische Verschiebungsstrom und ein fiktiver Verluststrom (der die Verluste durch Leitungsstrom und durch Polarisation angibt) im Frequenzbereich durch eine *komplexe Dielektrizitätszahl* beschrieben werden. Der Realteil entspricht dabei ϵ_r , der Imaginärteil ist ein verlustbeschreibender Term, vgl. Kap. 4.2.4.

2.4.2 Geschichtete Dielektrika

Ausgehend von den Maxwell'schen Gleichungen für langsam veränderliche Felder in Isolierstoffen, ergeben sich in geschichteten Dielektrika an Grenzflächen bestimmte Randbedingungen für die Feldgrößen (Kap. 2.4.2.1). Für das dielektrische Verschiebungsfeld (i.d.R. bei Wechselfeldern in Isolierstoffen) werden das quer, längs und schräg zum elektrischen Feld geschichtete Dielektrikum behandelt (Kap. 2.4.2.2 bis 2.4.2.4). Analoge Betrachtungen ergeben sich für das stationäre Strömungsfeld bei Gleichspannung in Kap. 2.4.4.

2.4.2.1 Randbedingungen an Grenzflächen

Betrachtet wird die Grenzfläche zwischen zwei unterschiedlichen Dielektrika, Bild 2.4-6.

Aus der Integration über der elektrischen Feldstärke E längs eines sehr kleinen geschlossenen Weges P_1 - P_2 - P_3 - P_4 - P_1 beiderseits der Grenzfläche folgt aus dem Induktionsgesetz nach Gl. (2.1-32)

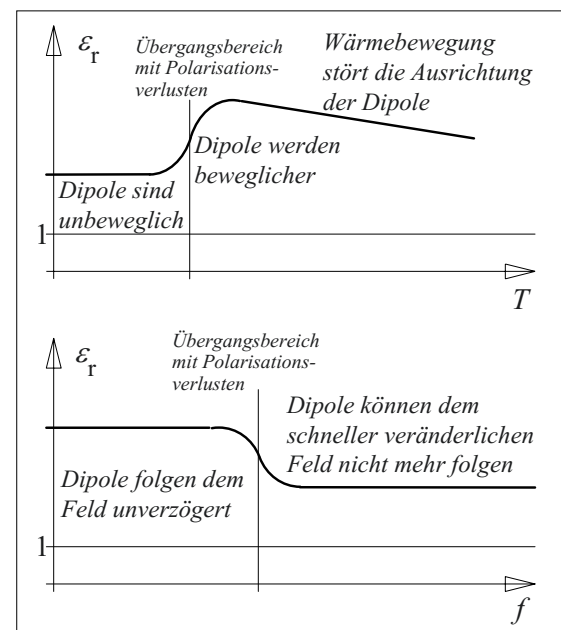


Bild 2.4-5: Grundsätzliche Abhängigkeit der relativen Dielektrizitätszahl von den Parametern Temperatur und Frequenz für ein Dielektrikum mit Orientierungspolarisation (schematisch), vgl. Bild 4.2-13.

$$\oint \mathbf{E} \, d\mathbf{s} = E_{1t} \cdot s + (-E_{2t}) \cdot s = 0.$$

D.h. die *Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärke* sind auf beiden Seiten der Grenzfläche gleich groß:

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (2.4-13)$$

Wird die Linie P_1 - P_2 - P_3 - P_4 - P_1 als Kontur einer geschlossenen Hüllfläche angesehen, so folgt aus der Kontinuitätsgleichung (2.1-35), dass der (auf der einen Seite der Grenzfläche) in die Hülle hineinfließende Strom auf der anderen Seite wieder aus der Hülle herausfließen muss. Diese Bedingung ist gleichbedeutend mit der Kontinuität der *Normalkomponenten der Stromdichten* (Leitungs- und Verschiebungsstromdichte):

$$J_{1n} + \partial D_{1n} / \partial t = J_{2n} + \partial D_{2n} / \partial t \quad (2.4-14)$$

Oft kann man sich auf die *Sonderfälle* des stationären Strömungsfeldes (ohne Verschiebungsstrom) und des dielektrischen Verschiebungsfeldes (ohne Leitungsstrom) beschränken.

D.h. im **stationären Strömungsfeld** (bei Gleichspannung) gehen die *Normalkomponenten der Leitungsstromdichte \mathbf{J}* stetig über:

$$J_{1n} = J_{2n} \quad (2.4-15)$$

Im **dielektrischen Verschiebungsfeld** (bei Wechselspannung, sofern der Leitungsstrom vernachlässigt werden kann) gehen die *Normalkomponenten der Verschiebungsdichte \mathbf{D}* stetig über:

$$D_{1n} = D_{2n} \quad (2.4-16)$$

Nachfolgend wird stets das *dielektrische Verschiebungsfeld* betrachtet, das i.d.R. für die Wechselfelder bei Netzfrequenz (und darüber) in Isolierstoffen angenommen werden darf.

Wegen der Analogie der Gleichungen (2.4-15) und (-16) können die Ergebnisse auch auf das

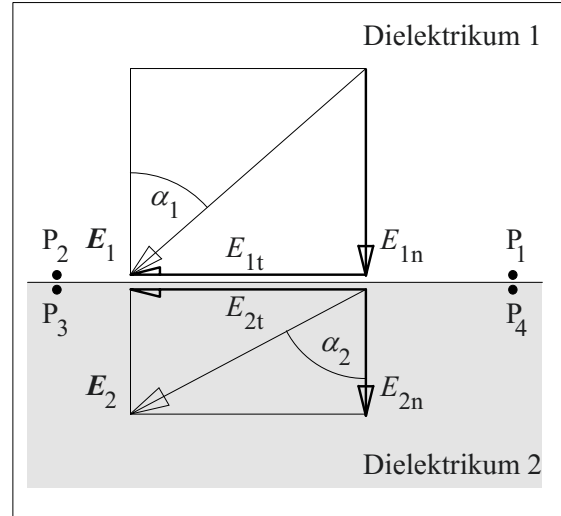


Bild 2.4-6: Vektoren der elektrischen Feldstärke an einer Grenzfläche zwischen zwei Isolierstoffen.

stationäre Strömungsfeld bei Gleichfeldern übertragen werden (Kap. 2.4.4). Hierzu sind vor allem die Verhältnisse der Dielektrizitätszahlen $\varepsilon_1/\varepsilon_2$ durch die Verhältnisse der Leitfähigkeiten κ_1/κ_2 zu ersetzen.

2.4.2.2 Quer geschichtetes Dielektrikum („Feldverdrängung“)

Verläuft die Grenzfläche zwischen zwei Dielektrika (mit den Dielektrizitätszahlen $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r1}$ und $\varepsilon_2 = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r2}$) quer zum elektrischen Feld, geht die Verschiebungsdichte stetig über, Bild 2.4-7. Die Beträge der Feldgrößen D und E entsprechen den Beträgen der Normalkomponenten. Nach Gl. (2.4-16) gilt $D_1 = D_2$ bzw.

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \quad (2.4-17)$$

Die Feldstärkebeträge stehen im umgekehrten Verhältnis wie die Dielektrizitätszahlen.

Das Dielektrikum mit der *niedrigeren Dielektrizitätszahl* wird mit einer *höheren Feldstärke* belastet als das Medium mit der höheren Dielektrizitätszahl. Man bezeichnet dies als „*Feldverdrängung*“ in das Medium mit der niedrigeren Dielektrizitätszahl.

Anmerkung: Die Feldverdrängung ist von zentraler Bedeutung für die Hochspannungstechnik. Beispielsweise werden luft- bzw. gasgefüllte Isolierschichten, die ohnehin eine relativ schlechte elektrische Festigkeit aufweisen, durch den Effekt der Feldverdrängung mit stark erhöhten Feldstärken beansprucht. Gasgefüllte Spalte, Risse, Hohlräume, Lunker und Blasen sind deshalb eine der häufigsten Ursachen für fehlerhafte Isolationen und Teilentladungen, Bild 2.4-8. Teilentladungen führen meist zu einer langsam voranschreitenden Erosion des Isolierstoffes und schließlich zum Durchschlag.

In inhomogenen Feldern kann der Effekt der Feldverdrängung genutzt werden, um Bereiche mit hoher Feldstärke zu entlasten und das Feld teilweise in feldschwächere Bereiche zu verdrängen.

Für das bereichsweise homogene Feld des Plattenkondensators nach Bild 2.4-7 gilt

$$U = U_1 + U_2 = E_1 \cdot d_1 + E_2 \cdot d_2.$$

Mit Gl. (2.4-17) folgt daraus

$$E_1 = \frac{U}{d_1 + d_2 \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}} \quad (2.4-18)$$

und

$$E_2 = \frac{U}{d_1 \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} + d_2}. \quad (2.4-19)$$

Beispiel: Epoxidharzplatte in ölisiertem Plattenkondensator

In einen ölisierten Plattenkondensator ($d = 20$ mm, $\varepsilon_{r1} = 2,2$) wird eine Epoxidharzplatte ($d_2 = 12$ mm, $\varepsilon_{r2} = 4,4$) eingebracht. Es soll die Veränderung der Feldstärken für $\hat{U} = 80$ kV untersucht werden.

Vor Einbringen der Platte ist die Feldstärke $\hat{E}_0 = \hat{U}/d = 4$ kV/mm. Nach Einbringen der Platte ergibt sich mit $d_1 = 8$ mm aus Gl. (2.4-18) und (-19) für den Ölspace $\hat{E}_1 = 5,71$ kV/mm = $1,43 \cdot \hat{E}_0$ und für die Epoxidharzplatte $\hat{E}_2 = 2,86$

kV/mm = $0,71 \hat{E}_0$. Die Feldstärke im Öl steigt also durch das Einbringen der Platte um 43 %.

Anmerkung: Die *maximale* Feldverdrängung ergibt sich bei sehr dünnem Ölspace. Mit $d_1 \ll d_2 \cong d$ gilt dann $\hat{E}_1 \cong \hat{U}/(0 + d \varepsilon_{r1}/\varepsilon_{r2}) = \hat{E}_0 \cdot \varepsilon_{r2}/\varepsilon_{r1} = 2 \cdot \hat{E}_0$.

Beispiel: Isolierstoffbarriere in luftisoliertem Plattenkondensator

In einen luftisolierten Plattenkondensator ($d = 5$ cm) soll eine Isolierstoffbarriere ($d_2 = 4$ cm,

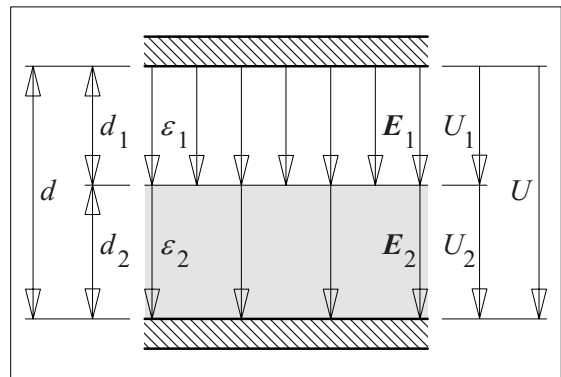


Bild 2.4-7: Quer geschichtetes Dielektrikum in einem Plattenkondensator ("Feldverdrängung").

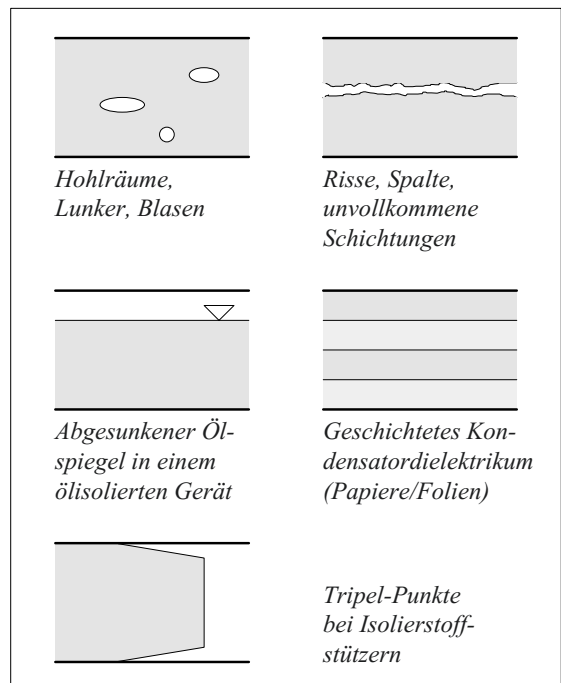


Bild 2.4-8: Beispiele für Feldverdrängung in der Hochspannungstechnik.

$\epsilon_{r2} = 5$) eingebracht werden. Die (makroskopische) Teilentladungseinsatzfeldstärke E_{TEE} beträgt 15 kV/cm. Es soll durch Berechnung der Teilentladungseinsatzspannungen U_{TEE} untersucht werden, ob sich die elektrische Festigkeit durch Einbringen der Barriere erhöhen lässt.

Ohne Barriere ergibt sich $U_{TEE} = 75$ kV. Im homogenen Feld kommt es beim Einsetzen von Entladungen unmittelbar zum Durchschlag. Mit Barriere folgt aus Gl. (2.4-18) $U_{TEE} = 27$ kV. Bei dieser Spannung wird die Luftschicht durchschlagen (Teil-Entladung), die Barriere verhindert zunächst den vollständigen Durchschlag. Mit der Zeit wird permanente Entladungstätigkeit im Luftspalt aber die meisten Isolierstoffbarrieren (aus organischen Materialien) erodieren. D.h. die Isolierstoffbarriere *verschlechtert* die Qualität der Isolation!

Anmerkung: In Hochspannungsisolierungen wirkt man dem Effekt der Festigkeitsminderung infolge Feldverdrängung durch vollständige *Imprägnierung* aller Hohlräume und Spalte mit einem elektrisch festeren Isolieröl entgegen.

2.4.2.3 Längs geschichtetes Dielektrikum (Tangentiale Grenzfläche, „Interface“)

Verläuft die Grenzfläche zwischen zwei Dielektrika parallel zum elektrischen Feld, ist die

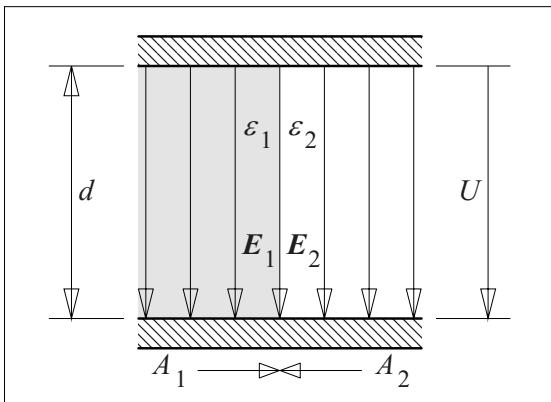


Bild 2.4-9: Längs geschichtetes Dielektrikum im Plattenkondensator ("Tangentiale Grenzfläche").

Feldstärke auf beiden Seiten gleich groß. E ist nämlich tangential gerichtet und geht deshalb nach Gl. (2.3-13) stetig über, Bild 2.4-9.

$$E_1 = E_2 = E_0 = U/d \quad (2.4-20a)$$

Für die Verschiebungsdichten beiderseits der Grenzfläche folgt mit der Materialgl. (2.4-8)

$$D_1/\epsilon_1 = D_2/\epsilon_2. \quad (2.4-20b)$$

D.h. die Verschiebungsdichten sind unterschiedlich. Im Medium mit der höheren Dielektrizitätszahl wird durch die Polarisation des Mediums auf der Plattenfläche mehr Ladung je Flächeneinheit gebunden als im Medium mit der niedrigeren Dielektrizitätszahl.

Wegen der Gleichheit der elektrischen Feldstärken in beiden Medien könnte man vermuten, dass das längsgeschichtete Dielektrikum eine gute Isolieranordnung wäre. Tatsächlich stellt man in der Praxis aber häufig fest, dass die **Festigkeit** der längsgeschichteten Anordnung *schlechter* ist, als die Festigkeit der beiden angrenzenden Medien.

Dieses paradox erscheinende *Grenzflächenproblem* kann je nach Art der Trennfläche verschiedene Ursachen haben:

- An der Oberfläche von Isolierstoffen sind die Materialeigenschaften gegenüber dem eigentlichen Isolierstoff oft verändert. In Störstellen sind Elektronen dann *nur schwach gebunden*, so dass dadurch zusätzliche Ladungsträger für die Ausbildung einer *Oberflächenentladung* zur Verfügung stehen.
- Die Ablagerung von leitenden oder halbleitenden *Fremdschichten* kann zusätzlich zu einer Potentialverschiebung und einer Feldstärkeüberhöhung an der Oberfläche führen. Der dadurch ausgelöste Überschlag wird als „*Fremdschichtüberschlag*“ bezeichnet.

Anmerkung: Besonders kritisch sind *Gleichspannungsbeanspruchungen*, da die Fremdschichten eine im Vergleich zum Isoliermaterial sehr hohe Leitfähigkeit aufweisen können.

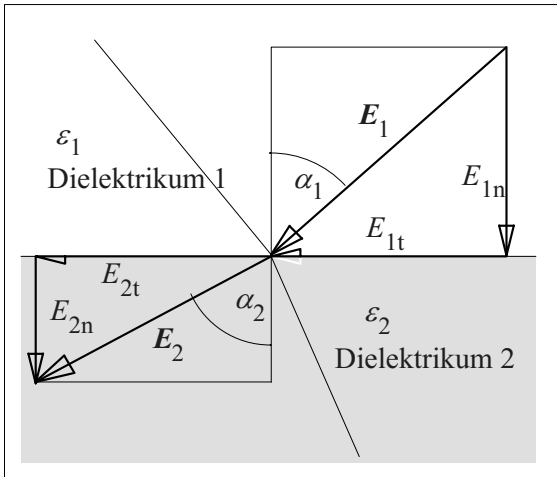


Bild 2.4-10: Vektoren der elektrischen Feldstärke an der Grenzfläche eines schräg geschichteten Dielektrikums: "Brechung" der elektrischen Feldlinien.

Aber auch bei Wechselspannungsbeanspruchungen können starke Verschmutzungen von Freiluftisolatoroberflächen in Verbindung mit Feuchtigkeit zu Feldverzerrungen und Überschlügen führen. Isolatoren werden deshalb mit einem *Schirmprofil* versehen, das relativ saubere und trockene Zonen sicherstellt, vgl. auch Bild 1-1. In Extremfällen werden *wasserabweisende (hydrophobe) Materialien*, z.B. Silikonelastomere, eingesetzt.

- Isolatoroberflächen sind niemals völlig glatt und parallel zum Feld. Durch mikroskopische *Oberflächenrauigkeiten* gibt es auch mikroskopisch kleine Bereiche mit Trennflächen quer zum elektrischen Feld, so dass durch Feldverdrängung lokale *Feldüberhöhungen* entstehen können.

2.4.2.4 Schräg geschichtetes Dielektrikum („Brechungsgesetze“)

Schließt der Vektor der elektrischen Feldstärke E mit dem Flächenvektor A (senkrecht zur Grenzfläche) einen Winkel α zwischen 0° und 90° ein, spricht man vom „*schräg geschichtetes Dielektrikum*“, Bild 2.4-10. Beiderseits der Trennfläche ergeben sich unterschiedliche Winkel α_1 und α_2 . D.h. die Feldlinien und damit auch die Potentiallinien erfahren an der Grenzfläche eine *Brechung*.

Die sog. „*Brechungsgesetze*“ ergeben sich für das dielektrische Verschiebungsfeld nach Gl.

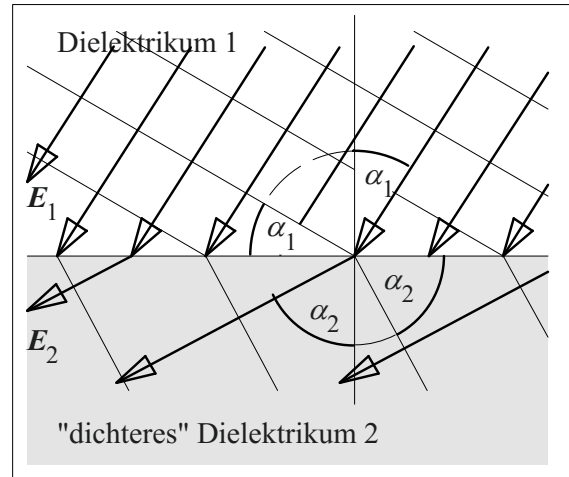


Bild 2.4-11: "Brechung" von Feld- und Potentiallinien an einer Grenzfläche zwischen zwei Dielektrika.

(2.4-13) und (-16). Da die Normalkomponenten der Verschiebungsdichte stetig an der Grenzfläche übergehen, gilt

$$D_{1n} = D_{2n}$$

bzw.

$$\epsilon_{r1} \cdot E_{1n} = \epsilon_{r2} \cdot E_{2n}.$$

Außerdem gilt die Stetigkeit der Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärke, d.h.

$$E_{1t} = E_{2t}.$$

Die Division der beiden Stetigkeitsbedingungen ergibt

$$E_{1t}/(E_{1n} \cdot \epsilon_{r1}) = E_{2t}/(E_{2n} \cdot \epsilon_{r2}).$$

Der Quotient aus Tangential- und Normalkomponente ist gleich dem Tangens des Winkels α_1 bzw. α_2 , Bild 2.4-10:

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} \quad (2.4-21)$$

Gl. (2.4-21) wird als „*Brechungsgesetz*“ für die elektrischen Feldlinien und für die dazu senkrechten Äquipotentiallinien bezeichnet.

Das Brechungsgesetz besagt, dass der Winkel α zwischen Feldvektor E und der Flächennormalen dA mit der Dielektrizitätszahl zu- oder abnimmt. D.h. im dielektrisch dichteren Me-

dium (mit der höheren Dielektrizitätszahl) werden die Feldlinien vom Lot weggebrochen, im Medium mit der kleineren Dielektrizitätszahl werden die Feldlinien zum Lot hingebrochen. Bei *sehr unterschiedlichen Dielektrizitätszahlen* würden die Feldlinien fast senkrecht aus dem Medium mit der sehr viel höheren Dielektrizitätszahl austreten.

Die senkrecht auf den Feldlinien stehenden *Potentiallinien* werden im dichteren Medium zum Lot hin- und im dünneren Medium vom Lot weggebrochen, Bild 2.4-11. Dabei können die Winkel α_1 und α_2 auch als Winkel zwischen den Äquipotentiallinien und der Grenzflächenkontur angesehen werden. Die Winkel in Bild 2.4-11 entsprechen etwa einem Verhältnis $\varepsilon_{r1}/\varepsilon_{r2} = 1/3$.

Für ebene Felder sind auch die Zeichenregeln für die **graphische Feldermittlung** anwendbar. Nach Gl. (2.3-35) würde sich aus dem Gedanken *gleicher Teilkapazitäten* für die aus Feld- und Potentiallinien gebildeten Rechtecke

$$\varepsilon_r \cdot b/a = \text{const.} \quad (2.4-22a)$$

ergeben. D.h. das Seitenverhältnis der Rechtecke würde sich im Verhältnis der Dielektrizitätszahlen ändern.

Für die praktische Zeichnung ist es jedoch einfacher, überall im gesamten Feldraum von *gleichen Rechtecken* (z.B. quadratischen Kästchen) auszugehen:

$$b/a = \text{const.} \quad (2.4-22b)$$

Damit ist der Abstand der Feldlinien dem Abstand der Potentiallinien proportional und vermittelt einen anschaulichen Eindruck vom Betrag der *elektrischen Feldstärke*, Bild 2.4-11.

Für die *Kapazitätsabschätzung* müssen dann nach Gl. (2.3-35) bereichsweise unterschiedliche Teilkapazitäten berechnet werden, die in einem geeigneten Ersatznetzwerk zu verschalten sind. Man kann aber auch im Feld- und Potentiallinienbild Bereiche abgrenzen, die gleiche Teilkapazitäten aufweisen, Bild 2.4-12 (fett ausgezogene Feld- und Potentiallinien).

2.4.3 Analytische Berechnung geschichteter Dielektrika

Grundsätzlich werden auch geschichtete Dielektrika mit den in Kap. 2.3 erläuterten Verfahren berechnet. Zusätzlich sind noch die Grenzbedingungen nach Gl. (2.4-13) und (-16) zu erfüllen.

Nachfolgend werden einige wichtige geschichtete Isolieranordnungen behandelt:

Kap. 2.4.3.1 betrachtet ebene, zylindersymmetrische und kugelsymmetrische Schichtungen. Die Trennflächen sollen senkrecht zum elektrischen Feld stehen (quer geschichtete Dielektrika).

Schwachstellen in Isolierungen treten oft in Form von Schichtungen auf, wie z.B. Spalte und Risse (Kap. 2.4.3.2), Zwickel und Tripelpunkte (Kap. 2.4.3.3) oder Hohlräume und Einschlüsse (Kap. 2.4.3.4). Dabei sind Grenzflächen auch elektrischen Feldkräften ausgesetzt (Kap. 2.4.3.5).

2.4.3.1 Ebene, zylindersymmetrische und kugelsymmetrische Schichtungen

Häufig sind Isolierungen aus der Schichtung mehrerer Isolierstoffe aufgebaut, die möglichst

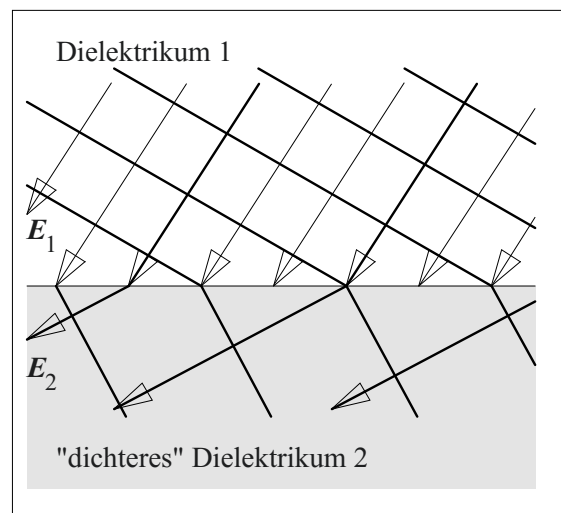


Bild 2.4-12: Bildung von Bereichen mit gleichen Teilkapazitäten für die Kapazitätsabschätzung in einer ebenen Anordnung.

senkrecht zu den Trennflächen elektrisch beansprucht werden (quer geschichtetes Dielektrikum), um die Festigkeitsminderung bei tangentialer Beanspruchung (längs geschichtetes Dielektrikum) zu vermeiden.

Beispiele:

1. Kondensatordielektrika bestehen oft aus mehreren Lagen von dünnen Papieren oder Kunststoff-Folien. Die Hohlräume und Spalte werden von einer Imprägnierflüssigkeit ausgefüllt. Das Dielektrikum kann meist als ebene Schichtung angesehen werden.

2. Hochspannung führende Leiter von den Windungen eines Transformators zu den Durchführungen werden im Isolieröl geführt und zur Verbesserung der Isolation mit einer Papierschicht umhüllt. Bei sehr hohen Spannungen ist u.U. noch eine Unterteilung des Ölspaltes durch zylindrische Pressspanbarrieren erforderlich, um eine ausreichende elektrische Festigkeit zu erreichen.

3. Auch Hochspannungsdurchführungen sind weitgehend zylindersymmetrisch geschichtete Anordnungen aus Hauptisolationskörper, Nebenisolationsspalt, Gehäuseisolator und Umgebungsmedium, vgl. Bild 1-1. Die Richtung der elektrischen Feldstärke kann allerdings nur näherungsweise und in bestimmten Bereichen (zwischen den Steuerbelägen) als radial angenommen werden.

Nachfolgend soll die analytische Berechnung *grundlegender Schichtungen* in ebener, zylindersymmetrischer und kugelsymmetrischer Anordnung behandelt werden, Bild 2.4-13. Es handelt sich dabei immer um *quer* zum elektrischen Feld *geschichtete Dielektrika*, d.h. **D** und **E** sind immer normal (senkrecht) zur Grenzfläche (bzw. parallel zum Flächenvektor **A**) gerichtet. Die Grenzflächen werden zugleich als Äquipotentialflächen angesehen.

Wegen der Stetigkeit der Verschiebungsdichte gilt für eine beliebige Grenzfläche bei $x = x_k$ (bzw. bei $r = r_k$)

$$D_k(x_k) = D_{k+1}(x_k). \quad (2.4-23)$$

D.h. die elektrische Feldstärke ändert sich an der *Grenzfläche* sprungförmig im umgekehrten Verhältnis der Dielektrizitätszahlen:

$$E_{k+1}/E_k = \varepsilon_k/\varepsilon_{k+1} \quad (2.4-24)$$

Für die Darstellung in Bild 2.4-13 wurde eine Abstufung der relativen Dielektrizitätszahlen

im Verhältnis 6 : 4 : 2 : 1 in x - bzw. in r -Richtung angenommen. Dies bedeutet, dass die elektrische Feldstärke in allen drei Anordnungen an der ersten Grenzfläche (bei x_1 bzw. r_1) um 50 % und an den beiden folgenden Grenzflächen jeweils um 100 % steigt, Bild 2.4-13 (Mitte).

Innerhalb der Dielektrika liegt bei der *ebenen Anordnung* ein homogenes Feld vor, d.h. **E** ist bereichsweise konstant. Aufgrund der Feldverdrängung beträgt die Feldstärke E_N im Medium N 600 % der Feldstärke E_1 in Medium 1.

In den Dielektrika der *zylindersymmetrischen Anordnung* mit der Länge z gilt nach Gl. (2.3-17) allgemein

$$E_k(r) = \frac{Q/z}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{rk}} \cdot \frac{1}{r}. \quad (2.4-25)$$

Der Feldstärkeverlauf in Bild 2.4-13 ergibt sich somit aus einer Abnahme $E_k(r) \sim 1/r$ im jeweiligen Dielektrikum und aus Feldstärkesprüngen an den Grenzflächen. Im Vergleich zur ebenen Anordnung tritt eine Vergleichmäßigung der Beanspruchung auf, d.h. außen erfolgt eine Entlastung, innen eine Belastung.

In den Dielektrika der *kugelsymmetrischen Anordnung* gilt nach Gl. (2.3-2) allgemein

$$E_k(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{rk}} \cdot \frac{1}{r^2}. \quad (2.4-26)$$

Der Feldstärkeverlauf in Bild 2.4-13 ergibt sich somit aus einer Abnahme $E_k(r) \sim 1/r^2$ im jeweiligen Dielektrikum und aus den Feldstärkesprüngen an den Grenzflächen. Im Vergleich zur ebenen und zur zylindersymmetrischen Anordnung erfolgt außen eine starke Entlastung, das in den anderen Anordnungen schwach belastete Medium 1 ist jetzt am stärksten belastet.

Anmerkung: Theoretisch könnte man auch in den zylinder- und kugelsymmetrischen Anordnungen *konstante Feldstärken* erreichen, wenn für die Dielektrizitätszahlen nach Gl. (2.4-25) und (-26) mit

$$\varepsilon_r(r) \sim 1/r \quad \text{und} \quad \varepsilon_r(r) \sim 1/r^2$$

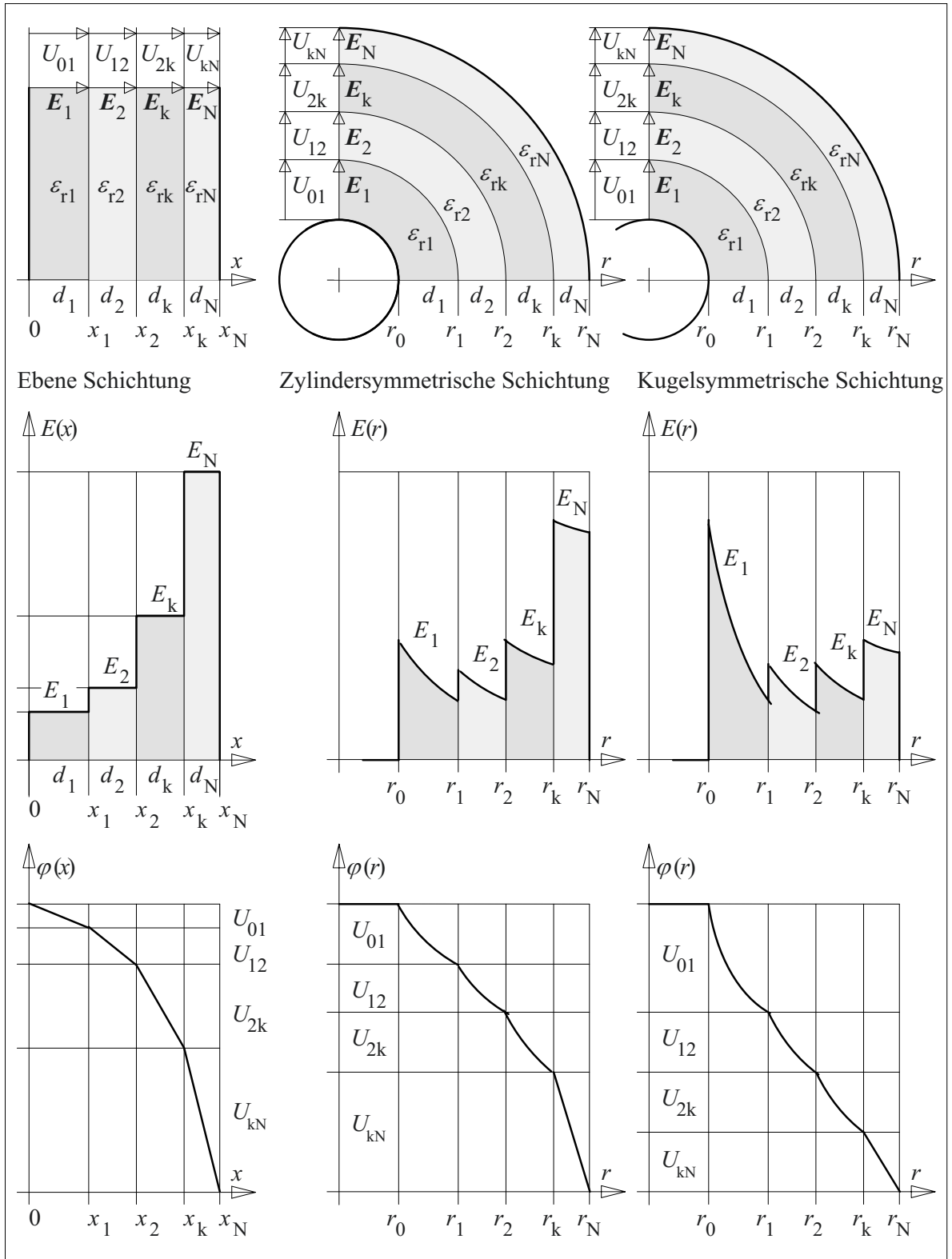


Bild 2.4-13: Ebene, zylindersymmetrische und kugelsymmetrische Schichtung von Isolierstoffen (oben) mit den Feldstärkeverläufen (mittig) und den Potentialverläufen (unten). Die gezeichneten Verläufe entsprechen etwa einer Abstufung der Dielektrizitätszahlen im Verhältnis 6 : 4 : 2 : 1 in x- bzw. in r-Richtung.

als kontinuierlich abnehmend angenommen werden könnten (refraktive Potentialsteuerung). Hierfür gibt es aber keine technisch praktikable Lösung. Auch die Approximation der idealen Verläufe durch diskrete Schichten mit entsprechenden Dielektrizitätszahlen wird in der Regel nicht möglich sein, da die Isolierstoffauswahl in der Praxis durch eine große Zahl von Randbedingungen (z.B. mechanische, thermische oder chemische Beanspruchungen, Kosten usw.) meist sehr stark eingeschränkt ist. Optimierungsaufgaben sind deshalb oft unter Hinnahme gegebener Materialien zu lösen.

Beispiel: Beschichtete kugelförmige Elektrode

Für die kugelsymmetrische Schichtung nach Bild 2.4-13 (rechts) ergibt sich eine starke Belastung des inneren Mediums 1 (z.B. Epoxidharzschicht mit $\varepsilon_{r1} = 6$) und eine wesentlich schwächere Belastung des äußeren Mediums N (z.B. Luftspalt mit $\varepsilon_{rN} = 1$). Wegen der sehr viel höheren elektrischen Festigkeit des Epoxidharzes wäre es nicht sinnvoll, eine Vergleichmäßigung der Feldstärken anzustreben. Schichtungen sollten nach Möglichkeit so aufgebaut werden, dass die *elektrisch festeren Medien* auch *elektrisch stärker beansprucht* werden, als die elektrisch schwächeren Medien.

Bei der **Berechnung der ebenen Anordnung** kann von konstanter Verschiebungsdichte ausgegangen werden, Bild 2.4-13 (links):

$$D = Q/A = \text{const.}$$

Für die einzelnen Feldstärken gilt

$$E_k = Q/(A \varepsilon_k).$$

Aus der Gesamtspannung

$$U = \sum_{i=1}^N E_i d_i = \frac{Q}{A} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{d_i}{\varepsilon_i}$$

folgt die Ladungsdichte

$$\frac{Q}{A} = U / \sum_{i=1}^N \frac{d_i}{\varepsilon_i}$$

und die *Feldstärke* E_k in einer beliebigen Schicht k :

$$E_k = \frac{U}{\varepsilon_k \sum_{i=1}^N \frac{d_i}{\varepsilon_i}} = \frac{U}{\varepsilon_k \left(\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2} + \dots + \frac{d_N}{\varepsilon_N} \right)} \quad (2.4-27)$$

Der *Potentialverlauf* ergibt sich aus der bereichsweisen Integration der elektrischen Feldstärken, Bild 2.4-13 (links unten).

Die *Kapazität* der Anordnung kann aus der Reihenschaltung der Teilkapazitäten

$$C_k = \varepsilon_k A / d_k$$

oder aus dem oben aufgestellten Zusammenhang zwischen Q und U mit $\varepsilon_k = \varepsilon_0 \varepsilon_{rk}$ ermittelt werden:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \cdot A}{\sum_{i=1}^N \frac{d_i}{\varepsilon_{ri}}} = \frac{\varepsilon_0 \cdot A}{\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\varepsilon_{r2}} + \dots + \frac{d_N}{\varepsilon_{rN}}} \quad (2.4-28)$$

Bei der **Berechnung der zylindersymmetrischen Anordnung** ist die Abhängigkeit der Verschiebungsdichte vom Radius r zu berücksichtigen, Bild 2.4-13 (mittig). Aus

$$D = Q/A(r) = Q/(2\pi r \cdot z)$$

folgt Gl. (2.4-25) für die Feldstärke $E_k(r)$ in einer beliebigen Schicht k . Dabei ist z die Länge der Anordnung. Die Integration von $E_k(r)$ in radialer Richtung ergibt die Teilspannung

$$U_{(k-1)k} = [Q/(2\pi \varepsilon_k \cdot z)] \cdot \ln(r_k/r_{k-1}).$$

Nach Summation der Teilspannungen zur Gesamtspannung U kann Q als Funktion von U bestimmt und in Gl. (2.4-25) eliminiert werden:

$$E_k(r) = \frac{U}{r \cdot \varepsilon_k \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{1}{\varepsilon_i} \cdot \ln \frac{r_i}{r_{i-1}} \right\}} \quad (2.4-29)$$

Dieser Ausdruck ist innerhalb einer beliebigen Schicht k , d.h. also für $r_{k-1} < r < r_k$ gültig.

Der *Potentialverlauf* ergibt sich aus der bereichsweisen Integration der elektrischen Feldstärken, Bild 2.4-13 (mittig unten).

Die *Kapazität* der Anordnung kann aus der Reihenschaltung der zylindrischen Teilkapazitäten nach Gl. (2.3-20)

$$C_k = 2\pi \varepsilon_k z / \ln(r_k/r_{k-1})$$

oder aus dem Zusammenhang $C = Q/U$ mit $\varepsilon_k = \varepsilon_0 \varepsilon_{rk}$ ermittelt werden:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 z}{\sum_{i=1}^N \left\{ \frac{1}{\varepsilon_{ri}} \cdot \ln \frac{r_i}{r_{i-1}} \right\}} \quad (2.4-30)$$

Auch bei der **Berechnung der kugelsymmetrischen Anordnung** ist die Abhängigkeit der Verschiebungsdichte vom Radius r zu berücksichtigen, Bild 2.4-13 (rechts). Aus

$$D = Q / A(r) = Q / (4\pi r^2)$$

folgt Gl. (2.4-26) für die Feldstärke $E_k(r)$ in einer beliebigen Schicht k . Die Integration von $E_k(r)$ in radialer Richtung ergibt die Teilspannung

$$U_{(k-1)k} = (1/r_{k-1} - 1/r_k) \cdot Q / (4\pi\varepsilon_k).$$

Nach Summation der Teilspannungen zur Gesamtspannung U kann Q als Funktion von U bestimmt und in Gl. (2.4-26) eliminiert werden:

$$E_k(r) = \frac{U}{r^2 \cdot \varepsilon_k \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{1}{\varepsilon_i} \left(\frac{1}{r_{i-1}} - \frac{1}{r_i} \right) \right\}} \quad (2.4-31)$$

Dieser Ausdruck ist innerhalb einer beliebigen Schicht k , d.h. also für $r_{k-1} < r < r_k$ gültig.

Der *Potentialverlauf* ergibt sich aus der bereichsweisen Integration der elektrischen Feldstärken, Bild 2.4-13 (rechts unten).

Die *Kapazität* der Anordnung kann als Reihenschaltung der kugelsymmetrischen Teilkapazitäten nach Gl. (2.3-12)

$$C_k = 4\pi\varepsilon_k / (1/r_{k-1} - 1/r_k)$$

oder aus dem Zusammenhang $C = Q/U$ mit $\varepsilon_k = \varepsilon_0 \varepsilon_{rk}$ ermittelt werden:

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\sum_{i=1}^N \left\{ \frac{1}{\varepsilon_{ri}} \left(\frac{1}{r_{i-1}} - \frac{1}{r_i} \right) \right\}} \quad (2.4-32)$$

Beispiel: Ummantelter zylindrischer Leiter

Für einen zylindrischen, hochspannungsführenden Leiter ($r_0 = 2$ cm) soll die Stärke bzw. der **Radius** r_1 einer Gießharzummantelung ($\varepsilon_{r1} = 5$) so bestimmt werden, dass die maximale Feldstärke im umgebenden Gas minimal wird. Der Leiter wird in einem coaxialen Außenleiter ($r_2 = 10$ cm) in Luft geführt, Bild 2.4-14 (oben). Der Scheitelwert der anliegenden Wechselspannung soll $\hat{U} = 100$ kV betragen.

Die maximale Feldstärke im Gas tritt an der Gießharzoberfläche bei $r = r_1$ auf. Die Berechnung von $E_{\text{Gas(max)}} = E_2(r_1)$ erfolgt nach Gl. (2.4-29). Die Dimensionierung der Gießharzschicht (Radius r_1) für minimale Feldstärke ist prinzipiell als Extremwertbestimmung durch Differentiation möglich, vgl. Kap. 2.3.1.2. Aus Gründen der Anschaulichkeit wird hier jedoch die numerische Auswertung von Gl. (2.4-29)

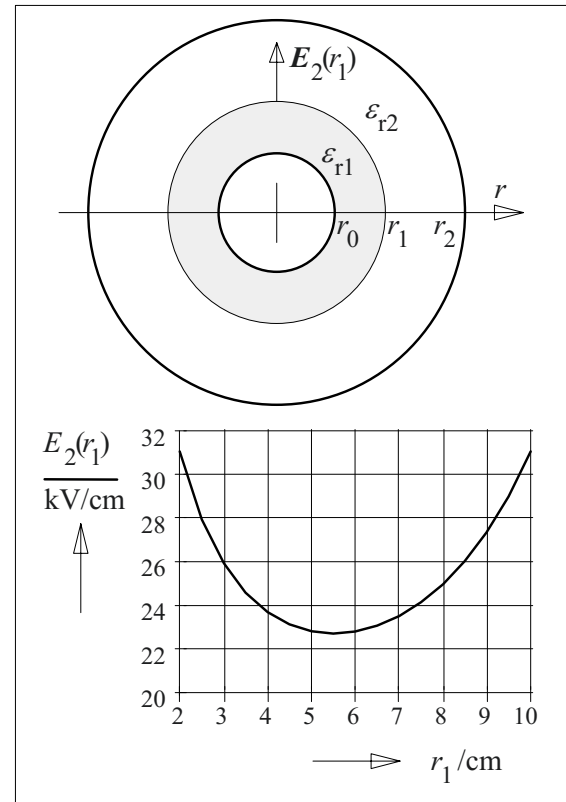


Bild 2.4-14: Gießharzummantelter Leiter in einem gasgefüllten Rohrleiter (oben) und Maximalfeldstärke im Gas als Funktion der Ummantelungsstärke (unten).

vorgezogen, Bild 2.4-14 (unten).

Als Lösung ergibt sich eine Schichtdicke von 3,5 cm, d.h. für $r_1 = 5,5$ cm ein Feldstärkeminimum $\hat{E}_2(r_1) = 23$ kV/mm unterhalb der Durchschlagsfeldstärke \hat{E}_D in Luft (30 kV/cm unter atmosphärischen Normalbedingungen). Für $r_1 \rightarrow r_0 = 2$ cm und für $r_1 \rightarrow r_2 = 10$ cm ergeben sich Feldstärkewerte über dem Wert von \hat{E}_D . Aus dem Diagramm wird deutlich, dass bereits mit einer 1 cm starken Gießharzschicht 60 % der maximal möglichen Feldstärkereduzierung erreicht werden.

Die Verwendung von SF_6 würde bei gleichem Druck zu einer etwa dreifach höheren elektrischen Festigkeit führen und damit auch etwa dreifach höhere Spannungen erlauben.

Anmerkung: Ähnliche Leiterkonfigurationen treten z.B. bei Leitern auf, die unter Öl geführt werden und mit Papier umwickelt sind.

Beispiel: Hochspannungselektrode mit Beschichtung

Eine kugelförmige Hochspannungselektrode mit dem Radius $r_1 = 3$ cm soll verglichen werden mit einer kleineren Elektrode mit dem Radius r_0 , die durch eine Gießharzschicht ($\epsilon_{r1} = 5$) ebenfalls den Außenradius r_1 erhält. Die Gegenelektrode wird in sehr großem Abstand $r_2 \gg r_1$ angenommen, Bild 2.4-15.

Für die zulässige Maximalfeldstärken $\hat{E}_{GH} = 200$ kV/cm in der Gießharzschicht und $\hat{E}_L =$

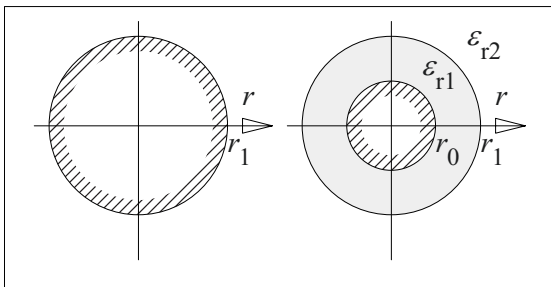


Bild 2.4-15: Kugelförmige metallische Elektrode (links) und beschichtete Elektrode (rechts) mit gleichen Außenradien.

20 kV/cm in der umgebenden Luft sollen die **zulässigen Spannungen** ermittelt werden, die an beide Elektroden gelegt werden können.

1.) An die **metallische Kugelelektrode** in Luft darf nach Gl. (2.3-8) maximal die Spannung

$$\hat{U} = \hat{E}_L \cdot r_1 = 60 \text{ kV}$$

gelegt werden.

2.) Die **beschichtete Kugelelektrode** ist so zu dimensionieren, dass an der Leiteroberfläche bei $r = r_0$ gerade $E_1(r_0) = \hat{E}_{GH} = 200$ kV/cm und an der Gießharzoberfläche bei $r = r_1$ gerade $E_2(r_1) = \hat{E}_L = 20$ kV/cm erreicht werden. Mit Gl. (2.4-31) und $r_2 \rightarrow \infty$ ergeben sich die beiden Bedingungen

$$\hat{E}_1(r_0) = \hat{E}_{GH} = \frac{\hat{U}}{r_0^2 \left\{ \frac{1}{r_0} + \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} - 1 \right) \frac{1}{r_1} \right\}}$$

und

$$\hat{E}_2(r_1) = \hat{E}_L = \frac{\hat{U}}{r_1^2 \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \left\{ \frac{1}{r_0} + \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} - 1 \right) \frac{1}{r_1} \right\}}$$

Durch Division der beiden Bedingungen werden die Spannung \hat{U} und der Klammerausdruck im Nenner eliminiert:

$$\hat{E}_{GH} / \hat{E}_L = (r_1^2 \cdot \epsilon_2) / (r_0^2 \cdot \epsilon_1)$$

Durch Auflösung nach r_0 ergibt sich $r_0 = 0,42$ cm. Damit kann die gesuchte Maximalspannung \hat{U} aus einer der beiden obigen Bedingungen errechnet werden:

$$\hat{U} = 132 \text{ kV}$$

D.h. theoretisch ist an der beschichteten Elektrode mehr als die doppelte Spannung zulässig. Allerdings ist es mit hohem Aufwand verbunden, auf größeren Elektroden eine fehlerfreie Gießharzschicht so stark aufzubringen, dass der größte Teil der Spannung abgebaut werden kann. In der Praxis setzt man deshalb größere metallische Elektroden und Toroide ein, falls in der umgebenden Luft ausreichende Abmessungen vorhanden sind.

2.4.3.2 Spalte und Risse

Spalte und Risse sind unbedingt zu vermei-
dende Fehlstellen in hochbeanspruchten Isolie-
rungen. Mit Gas gefüllte Spalte entstehen z.B.
bei der Schichtung von Isolierstoffen ohne
(vollständige) Imprägnierung der verbleiben-
den Zwischenräume. Risse treten oft nach län-
gerer Zeit infolge der Isolierstoffalterung auf,
meist unter der Wirkung mechanischer und
thermischer Beanspruchungen. Auch beim
Aushärten gegossener Körper kann es infolge
von Schrumpfspannungen zu Rissen kommen.

Spalte und Risse **parallel zum elektrischen Feld** sind besonders kritisch, weil dadurch ein
großer Teil der Isolierstrecke (evtl. sogar die
gesamte Isolierung) durch eine *Grenzfläche
sehr geringer elektrischer Festigkeit mit tan-
gentialer Beanspruchung* überbrückt wird. Die
(makroskopische) Feldverteilung wird meist
nicht sehr stark beeinflusst. Im Spalt und an
den Grenzflächen kommt es aber zu mikro-
skopischen Feldüberhöhungen und drastisch
reduzierter elektrischer Festigkeit, vgl. Kap.
2.4.2.3 (Längs geschichtetes Dielektrikum).

Beispiel:

Glasfaserverstärkte Kunststoffe (GFK) besitzen eine
außerordentlich erhöhte mechanische Festigkeit durch
Glasfasern, die in den Kunststoff („Kunststoffmatrix“)
eingebettet sind. Stäbe und Rohre aus verstärktem Epo-
xidharz dienen als mechanisch und elektrisch bean-
spruchte Teile von Hänge-, Stütz- und Gehäuseisolato-
ren. Dabei kommt der fehlerlosen, hohlraumfreien und
dauerhaften chemischen Verbindung von Harz- und
Glasfaseroberfläche besondere Bedeutung zu, sie wird
durch Aufbringen einer geeigneten Schlichte bzw. eines
Haftvermittlers auf die Glasoberfläche sichergestellt
(*Silanisierung*). Mangelnde oder fehlerhafte Silanisie-
rung führt zur Ablösung der Fasern vom Harz. In den
entstehenden sehr langen Spalten kann sich eindiffun-
dierende Feuchtigkeit ansammeln, was zu einem weit-
gehenden Verlust der elektrischen Festigkeit führt.

Spalte und Risse **quer zum elektrischen Feld**
können näherungsweise als quer geschichtetes
Dielektrikum behandelt werden, Kap. 2.4.2.2.
Die Feldstärke E_i in einem gasgefüllten Riss
oder Spalt ($\varepsilon_{ri} = 1$) ist durch den Effekt der
Feldverdrängung nach Gl. (2.4-17) im Ver-
hältnis der Dielektrizitätszahlen $\varepsilon_r/\varepsilon_{ri} = \varepsilon_r$ ge-
genüber der ursprünglichen Feldstärke erhöht:

$$E_i = \varepsilon_r \cdot E \quad (2.4-33)$$

Aufgrund der niedrigen elektrischen Festigkeit
luftgefüllter Spalte kommt es bei sehr niedri-
gen Spannungen zum Einsatz von *Teilentla-
dungen*, die den Isolierstoff erodieren und mit
der Zeit zum Durchschlag führen (*Erosions-
durchschlag*).

Beispiel: Ablösung eines Dielektrikums

Der Epoxidharzverguss eines Zylinderkondensators (R_2
 $= 5 \text{ cm}$, $R_1 = R_2/e$, $\varepsilon_r = 4$) schrumpft beim Aushärten
auf den Innenleiter auf und löst sich dabei teilweise vom
Außenleiter ab. Es entsteht ein umlaufender Spalt mit
der Spaltweite $d_i = 0$ bis 1 mm , Bild 2.4-16. Es soll der
Effektivwert der anliegenden Wechselspannung U abge-
schätzt werden, bei dem mit dem Einsatz von Teilentla-
dungen zu rechnen ist.

Die elektrische Festigkeit beträgt in Luft bei Normalbe-
dingungen etwa $\hat{E} = 30 \text{ kV/cm} = 3 \text{ kV/mm}$, sie nimmt
mit abnehmenden Abständen zu, vgl. Bild 3.2-15. D.h.
die Festigkeit des Luftspaltes ist bei dem größten Ab-
stand $d_i = 1 \text{ mm}$ am geringsten. Für diesen Abstand gilt
 $\hat{E}(1 \text{ mm}) \geq 4 \text{ kV/mm}$. Wenn man von gleichmäßiger
Feldstärke im Spalt ausgeht, ist also der Entladungsein-
satz bei $d_i = 1 \text{ mm}$ zu erwarten.

Aus Gl. (2.3-21) für die Feldstärke beim äußeren Radius
 $r = R_2$ und aus Gl. (2.4-33) für die Feldüberhöhung
durch die Spaltbildung folgt

$$U = E \cdot R_2 \cdot \ln(R_2/R_1) = (E_i/\varepsilon_r) \cdot R_2 \cdot \ln(R_2/R_1).$$

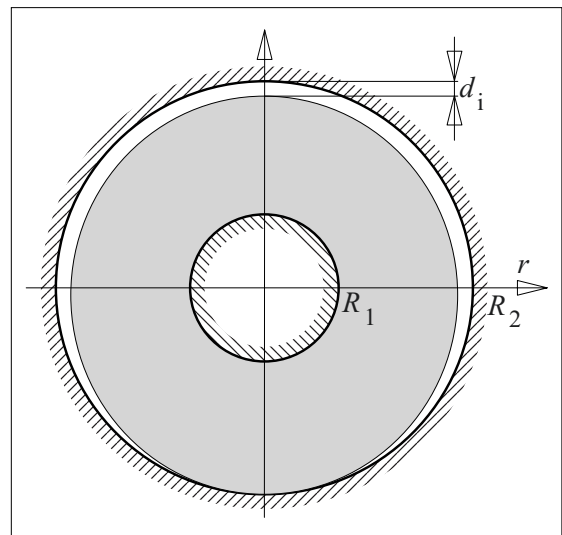


Bild 2.4-16: Ablösung eines Dielektrikums vom
äußeren zylindrischen Leiter beim Aufschrumpfen
auf den inneren zylindrischen Leiter.

Wird für die Teilentladungseinsatzfeldstärke $\hat{E}_i \geq 4 \text{ kV/mm}$ eingesetzt, ergibt sich für die *Teilentladungseinsatzspannung* der Scheitelwert $\hat{U} \geq 5 \text{ kV}$ bzw. der Effektivwert $U \geq 3,5 \text{ kV}$.

Anmerkung: Ein Teilentladungseinsatz bei $U = 3,5 \text{ kV}$ bedeutet praktisch den *Verlust der elektrischen Festigkeit* der Anordnung. Ohne Spaltbildung würde nämlich die höchste relevante Feldstärke bei $r = R_1$ auftreten. Wenn im Epoxidharz $\hat{E} = 40 \text{ kV/mm}$ zugelassen wird, ergäbe sich nach Gl. (2.3-22) für die zulässige Spannung der Scheitelwert $\hat{U} = 74 \text{ kV}$ bzw. der Effektivwert $U = 52 \text{ kV}$.

Beispiel: Hartpapierdurchführung

Die früher verwendeten Durchführungswickel aus phenolharzgetränktem bzw. -laminierem Papier ergaben feste Isolierkörper („Hartpapier“), die aber *nicht spaltfrei* aushärten durften, um zu große mechanischen Spannungen und Risse zu vermeiden. Dadurch waren schon bei Betriebsspannung senkrecht und parallel zu den Papierlagen Teilentladungen möglich, gegen die das Phenolharz aber relativ widerstandsfähig ist. Trotzdem stellen die permanenten Teilentladungen nach heutigen Maßstäben einen erheblichen Qualitätsmangel dar, weil Erosionsdurchschläge (oft auch parallel zu den Papierlagen aufgrund tangentialer Feldstärkekomponenten) nicht auszuschließen sind.

Man verwendet deshalb inzwischen hohlraum- und teilentladungsfreie **RIP-Isolierkörper** aus Epoxidharz (RIP resin impregnated paper). Sie werden aus Krepppapier gewickelt, getrocknet, unter Vakuumanwendung vollständig mit dünnflüssigem Epoxidharz imprägniert und gehärtet.

Beispiel: Kondensatordielektrikum aus Kunststofffolien

Ein Kondensatordielektrikum wird aus $12 \text{ }\mu\text{m}$ starken Polypropylenfolien ($\epsilon_r = 2,2$) gewickelt. Zwischen den aufeinanderliegenden Folien entstehen luftgefüllte Spalte bis zu einer Stärke von $4 \text{ }\mu\text{m}$, die nicht imprägniert werden können. Es soll abgeschätzt werden, mit welcher Spannung ein vierlagiges Dielektrikum beansprucht werden darf.

Wegen der Abnahme der elektrischen Festigkeit mit zunehmender Spaltweite ist mit dem Entladungseinsatz an den Stellen des größten Abstandes $d_i = 4 \text{ }\mu\text{m}$ zu rechnen. Für die Festigkeit des Luftspaltes gilt dabei nach dem Paschen-Gesetz für Luft (Kap. 3.2) etwa $\hat{U}_i \geq 360 \text{ V}$ bzw. $\hat{E}_i \geq 90 \text{ V}/\mu\text{m}$.

Für die Feldstärke im Kunststoffdielektrikum folgt mit Gl. (2.4-33) näherungsweise $\hat{E} = \hat{E}_i / \epsilon_r \geq 41 \text{ V}/\mu\text{m}$. Das Dielektrikum mit der Dicke $d = 4 \cdot 12 \text{ }\mu\text{m} = 48 \text{ }\mu\text{m}$ kann danach mit einer Spannung in der Größenordnung $\hat{U} \geq 48 \text{ }\mu\text{m} \cdot 41 \text{ V}/\mu\text{m} = 2,0 \text{ kV}$ beansprucht werden. Es

handelt sich hierbei nur um eine Abschätzung der Teilentladungseinsatzspannung, so dass eine genauere Berechnung der dielektrischen Schichtung nach Gl. (2.4-27) nicht sinnvoll erscheint.

Anmerkung 1: Höhere Spannungen sind möglich, wenn die maximale Spaltweite reduziert werden kann. Allerdings ist auch darauf zu achten, dass die Feldstärken in den Kunststofffolien die jeweiligen Festigkeiten nicht überschreiten.

Anmerkung 2: Bei Kondensatordielektrika aus Folien oder Papieren wird das Teilentladungsverhalten wesentlich von den *Rändern der Metallfolien* bestimmt, die als Elektroden mit den Dielektrika aufgewickelt werden. An den Rändern treten nämlich erhebliche Feldverzerrungen und Feldüberhöhungen, sowie nicht von Folien ausgefüllte Zwickel auf. Auf eine *Imprägnierung* kann deshalb bei Hochspannungskondensatoren nicht verzichtet werden.

2.4.3.3 Zwickel (Tripel-Punkte)

Tangential beanspruchte Grenzflächen stellen besondere Schwachstellen einer Isolieranordnung dar, Bild 2.4-17 (links). Man versucht deshalb nach Möglichkeit, diese „*Stützeranordnung*“ zu vermeiden und die Grenzflächen senkrecht zum elektrischen Feld auszurichten, Bild 2.4-17 (rechts). Die tangential Beanspruchung wird dadurch erheblich reduziert und nimmt nach außen hin auf vernachlässigbar kleine Werte ab. Wegen des Zusammentreffens dreier Materialien spricht man auch vom „*Tripel-Punkt*“.

Leider entsteht in dem Zwickel zwischen Isolierstoffplatte und abhebender Elektrode durch Feldverdrängung eine verstärkte *normal gerichtete elektrische Beanspruchung*. Besitzt das Medium im Zwickel nur eine geringe elek-

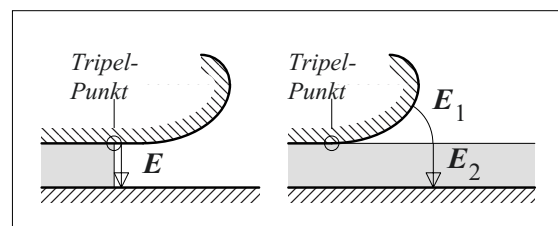


Bild 2.4-17: Isolierstoffplatte zwischen Elektroden: "Stützeranordnung" mit tangentialer Beanspruchung der Isolierstoffgrenzfläche (links) und "Gleit-anordnung" mit normaler Beanspruchung des Isolierstoffzwickels (rechts).

trische Festigkeit (wie z.B. Luft), so kann es schon bei sehr geringen Spannungen zum Einsatz von Teilentladungen kommen, die sich bei (erheblich) höheren Spannungen zu Gleitentladungen entlang der Isolierstoffoberfläche bis zum Überschlag ausweiten können. Man spricht deshalb von der sogenannten „**Gleitanordnung**“.

Anmerkung: Es handelt sich hierbei um ein *grundlegendes Problem* der Hochspannungstechnik, da man in sehr vielen technischen Anordnungen solche Gleitanordnungen nicht vermeiden kann. Viele technische Maßnahmen

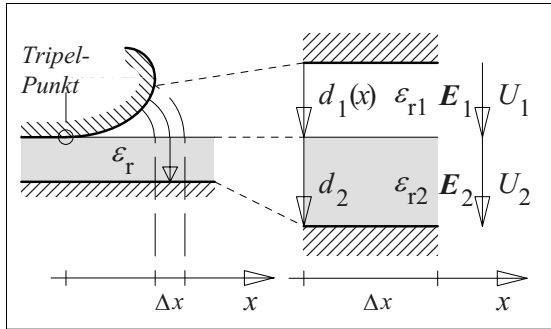


Bild 2.4-18: „Gleitanordnung“ mit hochbeanspruchtem Zwickel (links) und Ersatzanordnung eines Ausschnittes für die näherungsweise Berechnung (rechts).

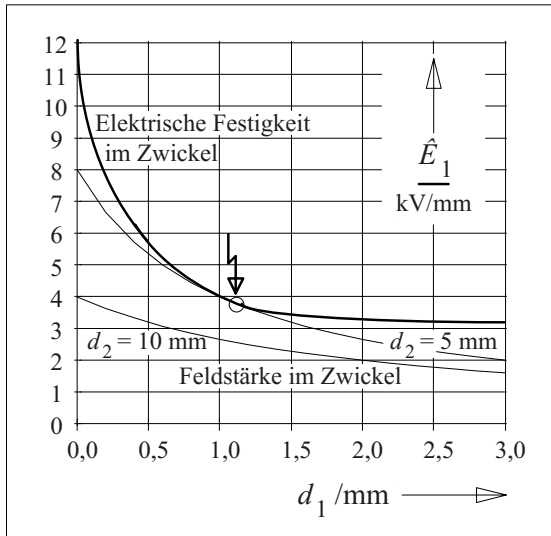


Bild 2.4-19: Feldstärke im Zwickel als Funktion der Spaltweite bei $\hat{U} = 8 \text{ kV}$ für 5 mm und 10 mm starke Isolierstoffplatten (unten) sowie Verlauf der elektrischen Festigkeit (oben). Das Verhältnis der Dielektrizitätszahlen wurde als 1:5 angenommen.

zielen deshalb darauf ab, den Einsatz von Entladungen in Zwickeln und die Ausweitung zu Oberflächenentladungen zu vermeiden [26].

Für die überschlägige Abschätzung der *Teilentladungseinsetzspannung* U_{TEE} wird vereinfachend angenommen, dass es sich um ein quer geschichtetes Dielektrikum mit bereichsweise homogenem Feld handeln soll, Bild 2.4-18. Die Spaltweite d_1 des Zwickels nimmt dabei mit zunehmendem Abstand x vom Tripelpunkt zu. Betrachtet wird ein Ausschnitt Δx mit näherungsweise homogenen Feldbereichen 1 (Zwickel) und 2 (Isolierstoffplatte). Die Feldstärke im Zwickel ist nach Gl. (2.4-18)

$$E_1(d_1) = \frac{U}{d_1 + d_2 \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}} \quad (2.4-34)$$

Beispiel: Elektrodenrand über einer Isolierstoffplatte

Betrachtet wird ein Elektrodenrand über einer Isolierstoffplatte nach Bild 2.4-18. Bild 2.4-19 zeigt die numerische Auswertung von Gl. (2.4-34) für eine Gesamtspannung $\hat{U} = 8 \text{ kV}$ (Effektivwert $U = 5,7 \text{ kV}$), für die Isolierstoffdicken $d_2 = 5 \text{ mm}$ und 10 mm und für das Verhältnis der Dielektrizitätszahlen $\epsilon_{r1}/\epsilon_{r2} = 1/5$.

Es ergibt sich eine *Feldstärkeabnahme im Zwickel* mit zunehmender Spaltweite d_1 . Bei Verdopplung der Isolierstoffdicke d_2 von 5 auf 10 mm nimmt die Feldstärke bei $d_1 = 0$ auf den halben Wert ab, der weitere Abfall über d_1 erfolgt jedoch langsamer.

Bild 2.4-19 enthält ebenfalls den Verlauf der *elektrischen Festigkeit im Zwickel*. Die Zunahme der Festigkeit mit abnehmender Schichtdicke d_1 ist typisch für sehr viele Isolierstoffe, wie z.B. Luft, SF_6 und Isolieröl. Die gezeichnete Kurve entspricht etwa der Festigkeit von *Luft* bei Atmosphärendruck und Raumtemperatur.

Bei der Isolierstoffplatte mit der Dicke $d_2 = 5 \text{ mm}$ erreicht die Feldstärke im Spalt etwa für $d_1 = 1,2 \text{ mm}$ die Festigkeit des Spaltes, es

kommt zu Teilentladungen. Offenbar entspricht die Spannung $\hat{U} = 8 \text{ kV}$ (Effektivwert $U = 5,7 \text{ kV}$) der *Teilentladungseinsetzspannung* \hat{U}_{TEE} (Effektivwert U_{TEE}). Angegeben wird i.d.R. der Effektivwert.

Bei doppelt starker Isolierung ($d_2 = 10 \text{ mm}$) tritt bei $\hat{U} = 8 \text{ kV}$ ($U = 5,7 \text{ kV}$) noch keine Entladung auf. Aus Bild 2.4-19 wird allerdings deutlich, dass die Spannung (bzw. die Feldstärke) nur noch um ca. 40 % gesteigert werden müsste, damit die Kurve der elektrischen Festigkeit erreicht wird.

Anmerkung: Es besteht offenbar *kein linearer Zusammenhang* zwischen *Isolierstoffdicke* d_2 und dem Scheitelwert der *Teilentladungseinsetzspannung* \hat{U}_{TEE} :

$$\hat{U}_{\text{TEE}} \sim d_2^{0,5}$$

Nach Gl. (2.4-34) wird die Feldstärke im Winkel durch das Produkt $d_2 \cdot \varepsilon_{r1}/\varepsilon_{r2}$ beeinflusst, d.h. es gilt nach der beschriebenen **Modellvorstellung** für den Scheitelwert der Teilentladungseinsetzspannung

$$\frac{\hat{U}_{\text{TEE}}}{\text{kV}} = \sqrt{2} K \left(\frac{d_2}{\text{cm}} \cdot \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} \right)^a \quad (2.4-35)$$

Aus Bild 2.4-19 könnte man für den Proportionalitätsfaktor K in Luft den theoretischen Wert 18 ermitteln. In **Experimenten** hat sich jedoch gezeigt, dass der Faktor deutlich kleiner sein kann. Offenbar ist die theoretische Modellvorstellung mit bereichsweise homogenen Feldern nach Bild 2.4-18 zu einfach, außerdem wurden Oberflächeneffekte und unterschiedliche Elektrodenformen nicht berücksichtigt. Trotzdem stimmen die prinzipiellen Abhängigkeiten der Gl. (2.4-35) für den Exponenten $a = 0,45 \dots 0,5$ gut mit der Erfahrung überein [22], [23].

Bei scharfkantigen Elektroden gilt für *Luft* etwa $K = 8$ und für *SF₆* $K = 21$ [23]. Für *Isolieröl* wird der Wert $K = 20$ abgeleitet [23].

Anmerkung: Für unterschiedliche Elektrodenränder unter *Öl* werden Werte von $K = 21,6$ (papierumwickel-

ter Leiter auf einer Papierisolation) bis $K = 15,6$ (für scharfkantige Elektrode auf einer Papierisolation) genannt, ohne gesonderte Berücksichtigung des Verhältnisses $\varepsilon_{r1}/\varepsilon_{r2} \simeq 1/2$, das schon in den Faktoren enthalten ist [22].

Beispiel: Belagsränder in Kondensatordielektrika

Bei Wickelkondensatoren werden die metallischen Folienbeläge zusammen mit den Isolierfolien bzw. Isolierpapieren aufgewickelt, verbleibende Hohlräume werden mit einem Imprägniermittel gefüllt, Bild 2.4-20. Der Anschluss der nach links und rechts gegeneinander versetzten Beläge erfolgt an den Stirnseiten über eingelegte Zungen oder großflächig über alle herausstehenden Folienkanten, Bild 2.4-20 (oben).

Besonders hohe elektrische Beanspruchungen treten in den Isolierstoffzwickeln vor den Rändern der metallischen Beläge auf. Dabei ist weniger die normale (radiale) Beanspruchung des Imprägniermittels unter der abhebenden Elektrode kritisch (vgl. voriges Beispiel). Problematisch ist vor allem die *tangentiale (axiale) Beanspruchung der Isolierstoffoberflächen*, die durch die extreme Feldüberhöhung vor der stark gekrümmten Elektrodenkante entsteht, Bild 2.4-20 (unten).

Für eine überschlägige Berechnung wird näherungsweise eine zylindersymmetrische Anordnung mit $R_1 = d_M/2$ und $R_2 = d_M/2 + d_1$ angenommen. Dabei wird die gekrümmte Elektrodenkante als „Innenleiter“ aufgefasst, die angrenzenden Beläge werden als „Außenleiter“ angesehen und durch einen Hilfszylinder mit dem Radius $R_2 = d_M/2 + d_1$ ersetzt. Die Schichtung der Dielektrika hat in erster Näherung keinen Einfluss auf die Höhe der maximalen elektrischen Feldstärke im Imprägniermittelspalt, da das elektrische Feld E_{Rand} an der Folienkante parallel zur Trennfläche verläuft, Bild 2.4-20 (unten), d.h. es handelt sich um ein längs geschichtetes Dielektrikum, vgl. auch Bild 2.4-9.

Mit Gl. (2.3-22) ergibt sich für die Randfeldstärke (Kantenfeldstärke)

$$E_{\text{Rand}} = \frac{U}{R_1 \ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{E_0 d_I}{\frac{d_M}{2} \ln(1 + \frac{2d_I}{d_M})}$$

und für die Feldstärkeüberhöhung als Kehrwert des Homogenitätsgrades η

$$\frac{E_{\text{Rand}}}{E_0} = \frac{1}{\eta} = \frac{\frac{2d_I}{d_M}}{\ln(1 + \frac{2d_I}{d_M})} \quad (2.4-36)$$

Die numerische Auswertung von Gl. (2.4-36) zeigt, dass schon bei runden Kanten erhebliche Feldstärkeüberhöhungen auftreten können, Bild 2.4-21 (untere Kurve). Nimmt man eine weitere Überhöhung durch Unebenheiten der

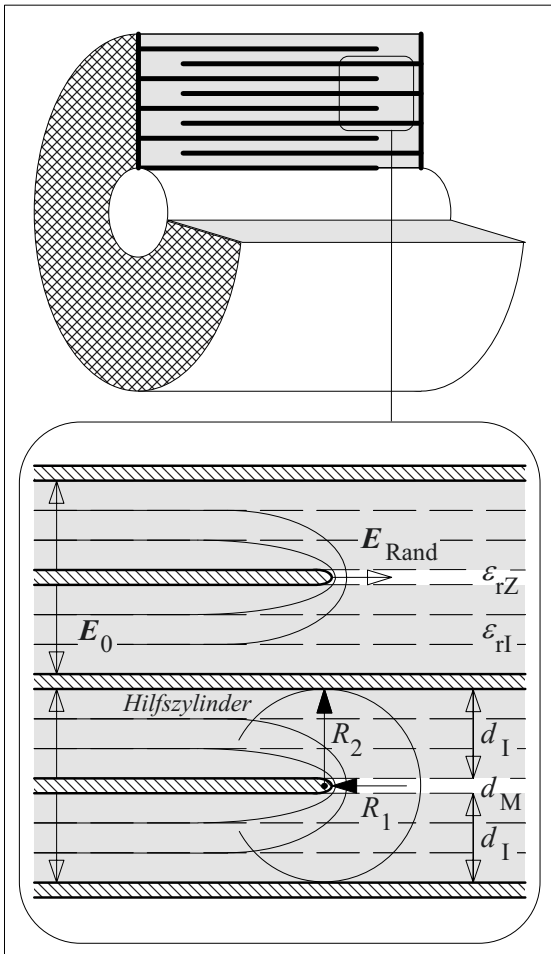


Bild 2.4-20: Rundwickelkondensator mit Stirnkontaktierung der gegeneinander versetzten metallischen Beläge (oben) und Schnittbild für den rechten Belagsrand m. Äquipotentiallinien (unten).

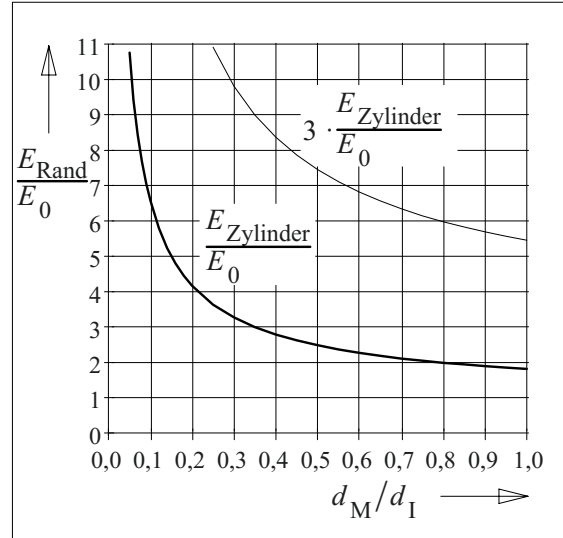


Bild 2.4-21: Feldstärkeüberhöhung in einem Kondensatorwickel an den Rändern eines Elektrodenbelages. Untere Kurve: Rechnung unter Annahme eines zylindersymmetrischen Feldes. Obere Kurve: Berücksichtigung einer zusätzlichen Überhöhung durch Oberflächenrauigkeiten bzw. Spitzen.

Oberflächen in Anlehnung an Gl. (2.3-62) mit einem Faktor 3 an, so ergeben sich noch extremere Werte, Bild 2.4-21 (obere Kurve).

Zahlenbeispiel:

Ein Kondensator besteht aus papierisolierten Wickeln mit einer Isolationsdicke $d_I = 50 \mu\text{m}$, die mit Mineralöl imprägniert sind. Die Kanten der metallischen Beläge bestehen aus umgeschlagenen $6 \mu\text{m}$ starken Aluminium-Folien. Dadurch wird eine glatte Krümmungskontur an der Kante erreicht. Teilentladungseinsatz wurde bei einer Wechselspannung $U = 3 \text{ kV}$ gemessen. Es sollen die Feldstärken zwischen den Belägen sowie an den Kanten der Beläge berechnet werden.

Die Feldstärke zwischen den Belägen innerhalb des Papiers ist für den homogenen Feldbereich $E_0 = 3 \text{ kV} / 50 \mu\text{m} = 60 \text{ kV/mm}$. In den mit Imprägnieröl gefüllten Spalten ist dabei die Feldstärke aufgrund der Feldverdrängung $E_{0-\text{Öl}} = \epsilon_{\text{r-Papier}} / \epsilon_{\text{r-Öl}} \cdot E_0 \approx 120 \text{ kV/mm}$. An den Kanten folgt aus Gl. (2.4-36) oder aus Bild 2.4-21 mit $d_M = 2 \cdot 6 \mu\text{m} = 12 \mu\text{m}$ und $d_M/d_I = 0,24$ eine Feldüberhöhung $E_{\text{Rand}}/E_0 = 3,7$. Für den Effektivwert der Randfeldstärke ergibt sich damit $E_{\text{Rand}} = 220 \text{ kV/mm}$. Solche Festigkeitswerte kann man noch von Ölspaltweiten im Bereich von einigen μm erwarten [27]. Die abgeschätzte Maximalfeldstärke tritt jedoch nur unmittelbar vor der stark gekrümmten Kante auf und nimmt mit zunehmender Entfernung sehr stark $\sim 1/r$ ab, d.h. im Abstand von $6 \mu\text{m}$ ($r = 12 \mu\text{m}$) auf 110 kV/mm und im Abstand von $18 \mu\text{m}$ ($r = 24 \mu\text{m}$) auf nur noch 55 kV/mm .

Anmerkung: In der Praxis ist eine Berechnung der Randfeldstärken und der Teilentladungseinsetzspannungen wegen vieler unbekannter Parameter in der Regel nicht möglich. Es sind deshalb *Versuche mit unterschiedlichem Isolationsaufbau* erforderlich, um die zulässige Belastung zu ermitteln. Beispielsweise würde die TE-Einsatzspannung in o.g. Beispiel bei scharfkantig geschnittenen Aluminiumfolienrändern von 3 auf 2,5 kV ($E_0 = 50$ kV/mm) absinken. Andererseits ist durch die Verwendung spezieller synthetischer Isolierflüssigkeiten eine erhebliche Steigerung der Teilentladungseinsatzfeldstärke möglich.

Theoretisch lässt sich das Volumen eines Kondensators durch die Wahl einer optimalen Metallfoliendicke d_M minimieren: Für $d_M \rightarrow 0$ wird der Überhöhungsfaktor unendlich groß, d.h. die zulässige Feldstärke und die Energiedichte gehen gegen Null. Für $d_M \gg d_I$ ist das Totvolumen des Belages V_M sehr viel größer als das Speichervolumen des Dielektrikums V_I , die Energiedichte geht ebenfalls gegen Null. Dazwischen muss ein *Maximum der Energiedichte* existieren:

$$w = 0,5 \varepsilon E_0^2 V_I / (V_I + V_M) \quad (2.4-37)$$

Diese Gleichung kann mit den geometrischen Beziehungen für die Volumina, mit Gl. (2.4-36) für E_0 und mit Vorgabe einer maximalen Randfeldstärke zur Maximierung der Energiedichte w benutzt werden:

Durch Nullsetzen der Ableitung von w nach dem Verhältnis d_I/d_M ergibt sich eine transzendente Gleichung für dieses Verhältnis, die sich iterativ mit $d_I/d_M = 0,24$ lösen lässt. D.h. der metallische Belag sollte theoretisch etwa viermal so stark sein wie der Isolierstoff.

In der Praxis liegt das Optimum bei *sehr viel dünneren Belägen*, da die zulässige Randfeldstärke *nicht konstant* ist. Sie nimmt mit abnehmendem Krümmungsradius stark zu. Der optimale Isolationsaufbau muss deshalb, wie oben schon erwähnt, durch Versuche ermittelt werden.

2.4.3.4 Dielektrische Hohlräume und Kugeln

Allseits geschlossene Hohlräume in einem Medium höherer Dielektrizitätszahl treten z.B. als *Bläschen* in einer Isolierflüssigkeit, als *Lunker* bei einem Epoxidharzverguss oder als *Hohlraum* in einem Porzellankörper auf, Bild 2.4-22.

Fehlstellen können auch als kugelförmige Dielektrika in Medien niedrigerer Dielektrizitätszahl auftreten, z.B. als *nichtleitende Partikel* in Öl oder Gas.

Der prinzipielle Effekt der Feldverdrängung in Medien niedrigerer Dielektrizitätszahl wurde schon am Beispiel der Risse und Spalte in Kap. 2.4.3.2 behandelt. Bei allseits begrenzten kugelförmigen Fehlstellen, ist allerdings die Feldverdrängung weniger stark ausgeprägt.

Bei Lösung der Potentialgleichung (2.3-34) für die kugelsymmetrische Anordnung nach Bild 2.4-22 ist als Randbedingung zu beachten, dass sich in unendlich großer Entfernung ein homogenes Feld E_0 ergibt. Außerdem müssen die Grenzbedingungen nach Gl. (2.4-13) und (-16) an der Kugeloberfläche erfüllt sein. Als Lösung ergibt sich *im Inneren der Kugel* ein homogenes Feld [2]:

$$E_1 = E_0 \cdot 3 \varepsilon_2 / (\varepsilon_1 + 2 \varepsilon_2) \quad (2.4-38)$$

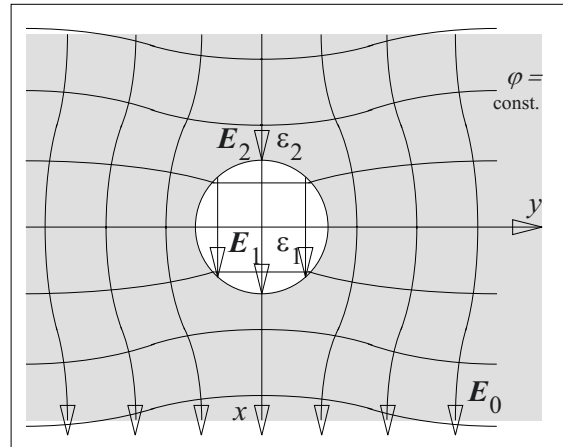


Bild 2.4-22: "Dielektrische Kugel" als Modell eines Hohlraumes in einem Isolierstoff bzw. eines dielektrischen Partikels.

Außerhalb der Kugel gilt an der Kugeloberfläche auf der vom äußeren Feldvektor E_0 bestimmten x -Achse

$$E_2 = E_0 \cdot 3 \varepsilon_1 / (\varepsilon_1 + 2 \varepsilon_2). \quad (2.4-39)$$

Der Vergleich der Gleichungen (2.4-38) und (-39) zeigt, dass die Beträge der *normal* zur Oberfläche gerichteten Feldstärken im umgekehrten Verhältnis der Dielektrizitätszahlen stehen (Gl. (2.4-17), quer geschichtetes Dielektrikum). In der y -Achse gilt an der Kugeloberfläche die Stetigkeit der *tangentialen* Komponenten $E_1 = E_2$.

Im Falle eines **dielektrischen Hohlraumes** mit niedrigerer Dielektrizitätszahl $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ ist die Feldstärke E_1 im Hohlraum gegenüber E_0 erhöht. Der maximale Wert für $\varepsilon_1 \ll \varepsilon_2$ beträgt nach Gl. (2.4-38) $E_1 = 1,5 \cdot E_0$. D.h. in kugelförmigen Hohlräumen gibt es *nur eine mäßige Feldstärkeüberhöhung*. Gravierender ist meist die *geringe elektrische Festigkeit* eines gasgefüllten Hohlraumes im Vergleich zu einem hoch beanspruchbaren umgebenden Isolierstoff. Dadurch treten Teilentladungen schon bei wesentlich niedrigeren Spannungen auf als bei einem homogenen festen oder flüssigen Isolierstoff.

Für ein **dielektrisches Partikel**, dessen Dielektrizitätszahl ε_1 größer ist als die Dielektrizitätszahl ε_2 des umgebenden Mediums, ist die Feldstärke E_2 außerhalb der Kugel größer als im Inneren. Für $\varepsilon_1 \gg \varepsilon_2$ ergibt sich aus Gl. (2.4-39) der Maximalwert $E_2 = 3 \cdot E_0$ auf der x -Achse an der Kugeloberfläche. D.h. dielektrische Partikel können zu deutlichen Feldstärkeüberhöhungen in flüssigen und in gasförmigen Medien führen, und sie können die elektrische Festigkeit reduzieren, v.a. in Flüssigkeiten.

2.4.3.5 Feldkräfte an Grenzflächen

Besonders störend ist oft, dass Partikel den **elektrischen Feldkräften** folgen können und sich im Bereich der höchsten Feldstärke anreichern.

Für die mechanische Zugspannung auf eine Grenzfläche **senkrecht zum elektrischen Feld** gilt [2]

$$\sigma = \partial F / \partial A = \frac{1}{2} \cdot E_1^2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \varepsilon_1 / \varepsilon_2. \quad (2.4-40)$$

Sie wirkt in Richtung auf die niedrigere Dielektrizitätszahl („Längszug“). Im *inhomogenen Feld* sind die Kräfte auf beiden Seiten eines dielektrischen Körpers nicht mehr gleich groß, er wird durch eine resultierende Kraft in die Richtung zunehmender Feldstärke gezogen.

Beispiel:

In **Isolieröl** orientieren sich faserförmige Verunreinigungen parallel zu den Feldlinien, vorwiegend im inhomogenen Teil des Feldes. Dies reduziert die Festigkeit von großen Ölspalten erheblich („Faserbrückendurchschlag“).

Auch in **gasisolierten Schaltanlagen** führt die Anwesenheit von dielektrischen (und leitfähigen) Partikeln zu einer Reduzierung der Festigkeit [28].

Auch die Feldkomponente E_t **tangential zu einer Trennfläche** übt eine Kraft senkrecht auf die Grenzfläche in Richtung auf die niedrigere Dielektrizitätszahl aus. Für den sogenannten „Querdruck“ gilt

$$\begin{aligned} \sigma &= \partial F / \partial A \\ &= \frac{1}{2} \cdot E_t^2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1). \end{aligned} \quad (2.4-41)$$

Die Zugspannung auf **metallische Elektrodenoberflächen** ergibt sich aus dem immer normal zur Oberfläche wirkenden Feld zu

$$\begin{aligned} \sigma &= \partial F / \partial A \\ &= \frac{1}{2} \cdot E_n^2 \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.4-42)$$

Die *Ableitung* von Gl. (2.4-40) bis (-42) erfolgt aus einer *Energiebilanz* bei einer gedachten Verschiebung der Trennfläche um eine infinitesimale Strecke Δx durch die gesuchte Kraft F . Sie führt zu einer Änderung der elektrischen Feldenergie, die der dabei geleisteten mechanischen Arbeit $F \cdot \Delta x$ entspricht. Durch Bezug der Kraft auf die Fläche ergibt sich die mechanische Druck- oder Zugspannung σ [2].

2.4.4 Gleichspannung und Übergangsvorgänge

Zwischen dem bei reiner Gleichspannungsbeanspruchung vorliegenden stationären Strömungsfeld und dem bisher behandelten dielektrischen Verschiebungsfeld besteht eine vollständige *Analogie*, aus der sich die *Gesetzmäßigkeiten des Strömungsfeldes* ableiten lassen (Kap. 2.4.4.1). Damit lassen sich einige typische *Beispiele* für gleichspannungsbeanspruchte Isoliersysteme berechnen (Kap. 2.4.4.2). Oft liegen aber keine stationären Verhältnisse vor: Beim Zuschalten einer Gleichspannung, bei Umpolvorgängen und bei Spannungsveränderungen tritt zunächst ein Verschiebungsfeld auf, das erst in einem *Übergangsvorgang* in einen neuen stationären Zustand übergeht (Kap. 2.4.4.3).

2.4.4.1 Analogien zum dielektrischen Verschiebungsfeld

Aus den Materialgleichungen (2.1-19) und (2.1-20) ergibt sich eine vollständige Analogie zwischen dem Feld der dielektrischen Verschiebungsdichte \mathbf{D} und dem Feld der Leitungsstromdichte \mathbf{J} .

Die einander entsprechenden Gleichungen/Randbedingungen des Verschiebungsfeldes und des stationären Strömungsfeldes werden nachfolgend nebeneinander gestellt:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad \mathbf{J} = \kappa \mathbf{E} \quad (2.4-43)$$

Aus Gl. (2.4-15) und Gl. (2.4-16) folgt die Stetigkeit der Normalkomponenten für die Feldgrößen \mathbf{D} und \mathbf{J} an Grenzflächen:

$$D_{1n} = D_{2n} \quad J_{1n} = J_{2n} \quad (2.4-44)$$

An Grenzflächen geht nach Gl. (2.4-13) auch die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke \mathbf{E} sowohl im Verschiebungsfeld, als auch im Strömungsfeld stetig über:

$$E_{1t} = E_{2t} \quad E_{1t} = E_{2t} \quad (2.4-45)$$

An die Stelle der Kapazität C im Verschiebungsfeld tritt im Strömungsfeld der Leitwert $G = 1/R$ (Kehrwert des Widerstandes). Für einen Plattenkondensator heißt dies beispielsweise

$$C = \varepsilon A/d \quad G = 1/R = \kappa A/d. \quad (2.4-46)$$

Die Gegenüberstellung zeigt, dass alle Beziehungen des Verschiebungsfeldes auch für das stationäre Strömungsfeld gelten, wenn die Dielektrizitätszahlen ε durch die Leitfähigkeiten κ , die Verschiebungsdichte \mathbf{D} durch die Leitungsstromdichte \mathbf{J} und die Kapazitäten C durch die Leitwerte G ersetzt werden. Dies gilt auch für die abgeleiteten Gleichungen (2.4-17) bis (2.4-32), die sich auf Grenzflächen quer, längs und schräg zur Feldrichtung beziehen.

Für die **quer geschichteten Isolierstoffe** gilt die Stetigkeit der normal zur Trennfläche gerichteten Stromdichte $\mathbf{J}_1 = \mathbf{J}_2 = \mathbf{J}$. In Analogie zu Gl. (2.4-17) folgt daraus

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}. \quad (2.4-47)$$

Die *Feldstärkebeträge* stehen im *umgekehrten Verhältnis* wie die *Leitfähigkeiten*. Analog zur dielektrischen Feldverdrängung gilt hier, dass das Medium mit der niedrigeren Leitfähigkeit mit einer höheren Feldstärke beansprucht wird, als das Medium mit der höheren Leitfähigkeit.

Anmerkung: Leitfähigkeiten unterscheiden sich oft um mehrere Größenordnungen. Dadurch wird der Isolierstoff mit der höheren Leitfähigkeit nahezu vollständig entlastet, der Isolierstoff mit der niedrigeren Leitfähigkeit wird hingegen nahezu mit der gesamten anliegenden Spannung belastet. Es handelt sich dann um eine *fast vollständige Feldverdrängung*. Bild 2.4-23 stellt die Feld- und Potentialverteilung für ein Leitfähigkeitsverhältnis $\kappa_1 : \kappa_2 = 1 : 10$ dar.

An der Grenzfläche gehen zwar die Normalkomponenten der Stromdichte J_n , nicht aber die Normalkomponenten der Verschiebungs-

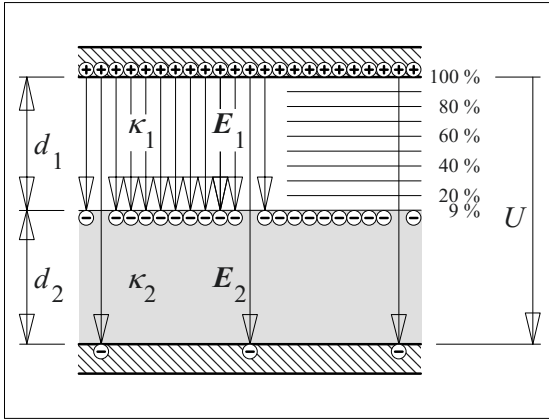


Bild 2.4-23: Feld- und Potentialverteilung in zwei quer geschichteten mit Gleichspannung beanspruchten Dielektrika (Leitfähigkeitsverhältnis 1 : 10).

dichte D_n stetig über. Die Differenz der Verschiebungsdichten D_{1n} und D_{2n} entspricht einer *Flächenladungsdichte* σ auf der Trennfläche. Man spricht auch von *Grenzflächenpolarisation*, Bild 2.4-23:

$$\begin{aligned}\sigma &= D_{2n} - D_{1n} \\ &= \varepsilon_2 E_2 - \varepsilon_1 E_1 \\ &= E_1 \cdot (\varepsilon_2 \cdot \kappa_1 / \kappa_2 - \varepsilon_1) \quad (2.4-48)\end{aligned}$$

Nach einem Kurzschluss der Elektroden verschwindet diese Flächenladung (Grenzflächenpolarisation) nicht sofort, sie baut sich erst mit einer Zeitkonstanten $R_2 C_1$ ab, die sich aus der Geometrie und den Materialgrößen κ_2 und ε_1 ergibt, vgl. auch Bild 2.1-16. Wird der Kurzschluss zu rasch wieder aufgehoben kann es zu einer *oft unerwarteten und deshalb gefährlichen Nachladung der Elektroden* (sog. Rückkehrspannung) kommen (Kap. 2.4.4.3).

Beispiel: Kondensator(-misch-)dielektrikum

Nahezu vollständige Feldverdrängung liegt z.B. in Kondensatordielektrika aus ölimprägniertem Papier und hochisolierenden Kunststofffolien vor. Hierfür wurde bereits in Kap. 2.1.4.2 ein Zahlenbeispiel erläutert. Es zeigt, dass die Isolation praktisch ausschließlich durch die Kunststofffolien erfolgt. Die Papierlagen dienen vor allem als Imprägnierdocht.

Bei **längs geschichteten Isolierstoffen** wird das zur Grenzfläche parallele, d.h. tangential

elektrische Feld E theoretisch nicht von den benachbarten Materialien beeinflusst. Nach Gl. (2.4-45) gilt $E_1 = E_2 = E$. Die Stromdichten unterscheiden sich auf beiden Seiten der Grenzfläche entsprechend den unterschiedlichen Leitfähigkeiten: $J_1 = \kappa_1 E$ und $J_2 = \kappa_2 E$. Nach Gl. (2.4-46) ergeben sich beiderseits der Grenzfläche auch unterschiedliche flächenbezogene Leitwerte bzw. Widerstände.

Es sei jedoch bemerkt, dass bei Gleichspannungsbeanspruchung die parallel zum Feld verlaufende Trennfläche besonders kritisch ist, weil *gut leitfähige Fremdschichten* (z.B. durch Ablagerung, Verschmutzung oder Befeuchtung) zu einer Verzerrung des Feldes und zu extremen Feldüberhöhungen führen können, wenn die Fremdschicht nicht vollständig gleichmäßig ausgebildet ist, Bild 2.4-24.

Für **schräg geschichtete Isolierstoffe** unterschiedlicher Leitfähigkeit im stationären Strömungsfeld ergibt sich das Brechungsgesetz für Gleichspannungsfelder und Äquipotentiallinien in Analogie zu Gl. (2.4-21):

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \quad (2.4-49)$$

α_1 und α_2 sind die Winkel zwischen den Flächennormalen und den Feldvektoren E_1 und E_2 , Bild 2.4-25.

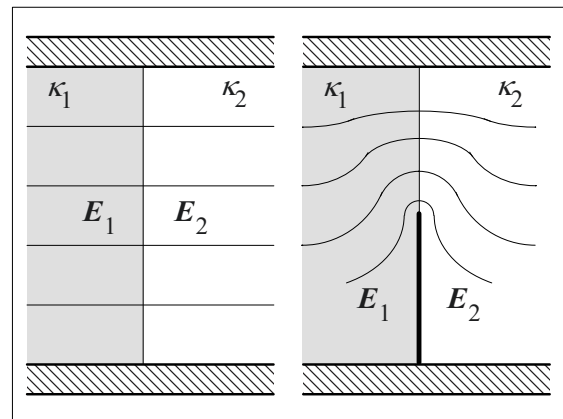


Bild 2.4-24: Längs geschichtete, mit Gleichspannung beanspruchte Dielektrika. Links: Ideale Potentialverteilung. Rechts: Potentialverteilung mit einer leitfähigen Fremdschicht.

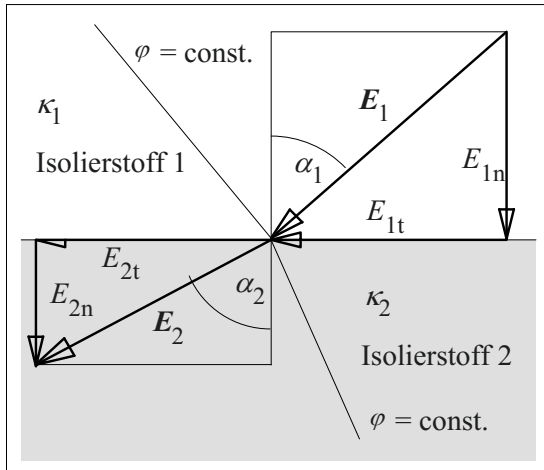


Bild 2.4-25: Vektoren der elektrischen Feldstärke und Potentiallinien an der Grenzfläche zwischen Isolistoffen unterschiedlicher Leitfähigkeit ("Brechung" von Feld- und Potentiallinien bei schräg geschichteten Isolistoffen im stationären Strömungsfeld).

Für den in der Praxis häufig vorliegenden Fall *sehr großer Leitfähigkeitsunterschiede* auf beiden Seiten der Grenzfläche, d.h. für $\kappa_2 \gg \kappa_1$, strebt der Winkel α_2 selbst für kleine Winkel α_1 gegen 90° . D.h. die Feldlinien verlaufen im *sehr viel besser leitfähigen Medium 2* nahezu parallel zur Trennfläche, die Potentiallinien treten nahezu senkrecht aus der Fläche aus, Bild 2.4-26 (unten). In dem *sehr hochohmigen Material 1* verlaufen die Feldlinien nahezu senkrecht und die Äquipotentiallinien nahezu parallel zur Grenzfläche, Bild 2.4-26 (oben).

Anmerkung: Dieser Umstand lässt sich anschaulich dadurch erklären, dass in dem besser leitfähigen Medium ein *Strom* nur parallel zur Trennfläche fließen kann und somit Feldlinien parallel und Potentiallinien senkrecht zur Trennfläche orientiert sein müssen. In dem wesentlich hochohmigeren Material stehen die Feldlinien weitgehend senkrecht auf der Grenzfläche, was der Situation vor einer *leitfähigen Elektrode* entspricht.

Beispiel: Bei ölisolierten Geräten für hohe Gleichspannungen wird die Potentialaufteilung im Öl dadurch gesteuert, dass durch hochohmige *Pressspanbarrieren* ein möglichst gleichmäßiger *Ölkanal* höherer Leitfähigkeit gebildet wird (z.B. bei Durchführungen) [7].

Auch bei schräg geschichteten Dielektrika bildet sich an der Grenzfläche eine *Flächenla-*

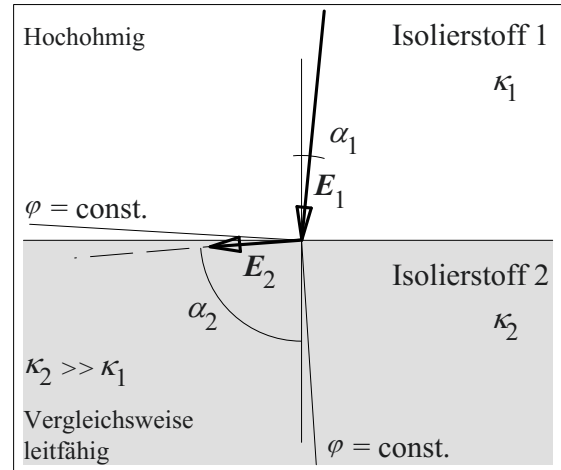


Bild 2.4-26: Brechung von Feld- und Potentiallinien des stationären Strömungsfeldes an der Grenzfläche zwischen Isolistoffen mit sehr unterschiedlicher Leitfähigkeit.

dung. Sie kann ebenfalls aus der Differenz der Normalkomponenten der Verschiebungsdichte \mathbf{D} berechnet werden.

Bei der *Berechnung* von Gleichspannungsfeldern kommt erschwerend hinzu, dass sich die Leitfähigkeiten nicht nur sehr stark unterscheiden können. Es ist oft auch schwer, *verlässliche Zahlenwerte* zu erhalten, da Leitfähigkeiten von der genauen Materialzusammensetzung, von den Fertigungsbedingungen und sehr stark auch von der Temperatur abhängen. Einige Beispiele sind nachfolgend genannt:

- Beispielsweise besitzen unterschiedliche Porzellanmischungen auch unterschiedliche Leitfähigkeiten.
- Bei ölprägniertem Papier beeinflusst der Feuchtigkeitsgehalt die Leitfähigkeit.
- Der Leitfähigkeitsunterschied in einer Öl-Pressspanisolierung mag bei 20°C 100 : 1 betragen. Er nimmt bei Erhöhung der Betriebstemperatur auf 90°C u.U. auf nur noch 10 : 1 ab.

Wie schon in Kap. 2.4.1.1 erwähnt, kommt der Bestimmung verlässlicher und anwendungsge rechter Leitfähigkeitswerte in der Praxis eine große Bedeutung zu. Angesichts der großen Schwankungsbreiten kann eine Feldberech-

nung mit falschen Werten zu völlig falschen Ergebnissen führen.

2.4.4.2 Typische Gleichspannungsfelder

Nachfolgend sollen einige Beispiele für typische Gleichspannungsfelder betrachtet werden. Durch die hohen Leitfähigkeitsunterschiede, die starke Temperaturabhängigkeit und die Empfindlichkeit gegen Fremdschichten ergeben sich Feldverteilungen, die sich völlig von einem vergleichbaren Wechselspannungsfeld unterscheiden.

Beispiel 1:

Kondensator(-misch-)dielektrikum

Das schon mehrfach behandelte Beispiel eines Gleichspannungskondensators mit Mischdielektrikum aus *Kunststofffolien* und *ölimprägniertem Papier* mit hundertfach höherer Leitfähigkeit (Kap. 2.1.4.2 und 2.4.4.1) zeigt, dass fast die gesamte Spannung von den elektrisch festeren Kunststofffolien isoliert werden muss. Das Volumen der Papiere ist wegen ihrer höheren Leitfähigkeit elektrisch weitgehend entlastet.

Dabei wirkt sich nachteilig aus, dass das Papiervolumen nicht als kapazitives Speichervolumen wirkt. Aus Gewichtsgründen ist es deshalb erstrebenswert, auf den „Imprägnier-Docht“ Papier zu verzichten und die Imprägnierung durch eine ausreichende Oberflächenrauigkeit der Folien sicherzustellen.

Anmerkung: Bei Wechselspannung wird wegen der Feldverdrängung das Papier mit einer Feldstärke belastet, die etwa halb so groß ist wie in den Kunststofffolien (Gl. (2.4-17) mit $\varepsilon_2/\varepsilon_1 = 2$). Aufgrund der oft sehr viel besseren Isolationsfähigkeit von Kunststofffolien kann deshalb das Feld im Papier die kritische Größe sein, die die Spannung begrenzt, ohne dass die Festigkeit der Kunststofffolien ganz ausgenutzt wird. Auch hier ist es deshalb wünschenswert, das Papier durch Kunststofffolien zu ersetzen („Allfilm-Dielektrikum“).

Beispiel 2: Gleichspannungskabel

In Gleichspannungskabeln ergibt sich bei homogenem Dielektrikum ein zylindersymmetrisches Feld. Nach Gl. (2.3-21) fällt die Feld-

stärke zwischen Innen- und Außenleiter $\sim 1/r$ ab, Bild 2.4-27 (Kurve 1). Im Betrieb wird der Innenleiter durch die Stromwärme erwärmt, es entsteht ein *Temperaturgefälle* $T(r)$ von innen nach außen. Da die Leitfähigkeit sehr stark temperaturabhängig ist, entsteht auch ein *Leitfähigkeitsgefälle*. Dadurch ergibt sich eine kontinuierliche Feldverdrängung von innen nach außen. Je nach Leitertemperatur und Art des Isolierstoffs wird der *Feldstärkeverlauf* mehr oder weniger gut *vergleichmäßig*, Bild 2.4-27 (Kurven 2 und 3).

Für die Dimensionierung des Kabels muss allerdings nicht nur vom aufgewärmten Betriebszustand sondern auch vom *kalten Ausgangszustand* ausgegangen werden, da das

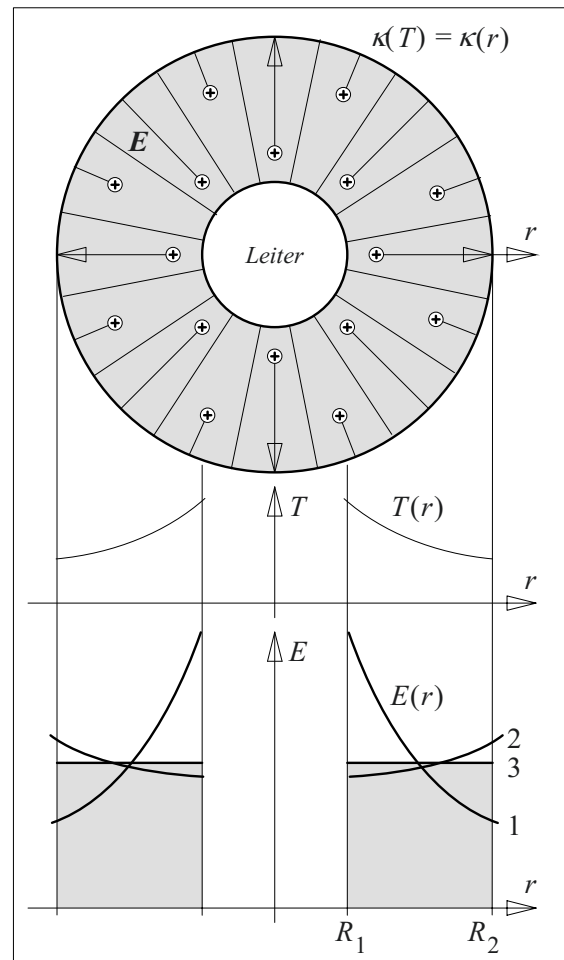


Bild 2.4-27: Gleichstromkabel mit temperaturbedingtem Leitfähigkeitsgradienten und Veränderung des ursprünglichen Feldstärkeverlaufs durch Raumladungen (Kurven 1, 2 und 3).

Kabel ja unmittelbar nach dem Zuschalten die Spannung auch im noch kalten Zustand halten muss.

Die kontinuierliche Veränderung der Leitfähigkeit bewirkt die Ansammlung von Ladung im Isolierstoff. Sie ist allerdings nicht wie bei den quer geschichteten Isolierstoffen als Flächenladung an der Grenzfläche konzentriert sondern als *Raumladung* im gesamten *inhomogenen Isolierstoff* verteilt. Dies führt letztlich zur Abweichung des Feldstärkeverlaufes vom ursprünglichen Verlauf $\sim 1/r$.

Für den Betrieb des Kabels ist die Raumladung von großer Bedeutung, weil nach einem *Polaritätswechsel* die noch vorhandene Raumladung zu einer starken *Feldüberhöhung* führen kann. Außerdem kann die Raumladung zu einem gefährlichen *Nachladen* des Kabels führen, wenn der Kurzschluss zwischen Innen- und Außenleiter wieder aufgehoben wird. Wegen der hohen Kapazität langer Kabel kann dabei schon bei relativ niedrigen „*wiederkehrenden Spannungen*“ eine erhebliche und gefährliche Ladungsmenge angesammelt werden.

Beispiel 3: Gleichspannungs-Durchführung

Eine Hochspannungselektrode unter Öl soll über eine kapazitiv gesteuerte Durchführung angeschlossen werden, Bild 2.4-28. Bei *Wechselspannung* nehmen die kapazitiven Steuerbeläge aufgrund ihrer gegenseitigen Kapazitäten etwa die vorgegebenen Potentialwerte an. Damit wird die tangential Beanspruchung der Durchführungsoberfläche stark reduziert, Bild 2.4-28 (oben).

Auch bei *Gleichspannung* erfolgt im Inneren des als homo-

gen angenommenen Durchführungskörpers die gewünschte Potentialaufteilung aufgrund der gegenseitigen Widerstände der Steuerbeläge, die jetzt resistiv und nicht mehr kapazitiv wirken. *Außerhalb* der Durchführung ergibt sich im Öl eine vollständig andere Potentialverteilung, die im wesentlichen von der Geometrie der Elektrode bestimmt wird, Bild 2.4-28 (mittig). Die Durchführung wirkt nur noch wie eine hochohmige Begrenzung des wesentlich besser leitfähigen Ölvolumens. Damit entsteht eine sehr hohe *tangentiale Belastung* der Durchführungsoberfläche.

Diese Feldkonzentration kann durch sehr große Elektrodendurchmesser in sehr großen Ölgefäßen vermieden werden. Dies stellt jedoch i.d.R. keine ökonomische Lösung dar.

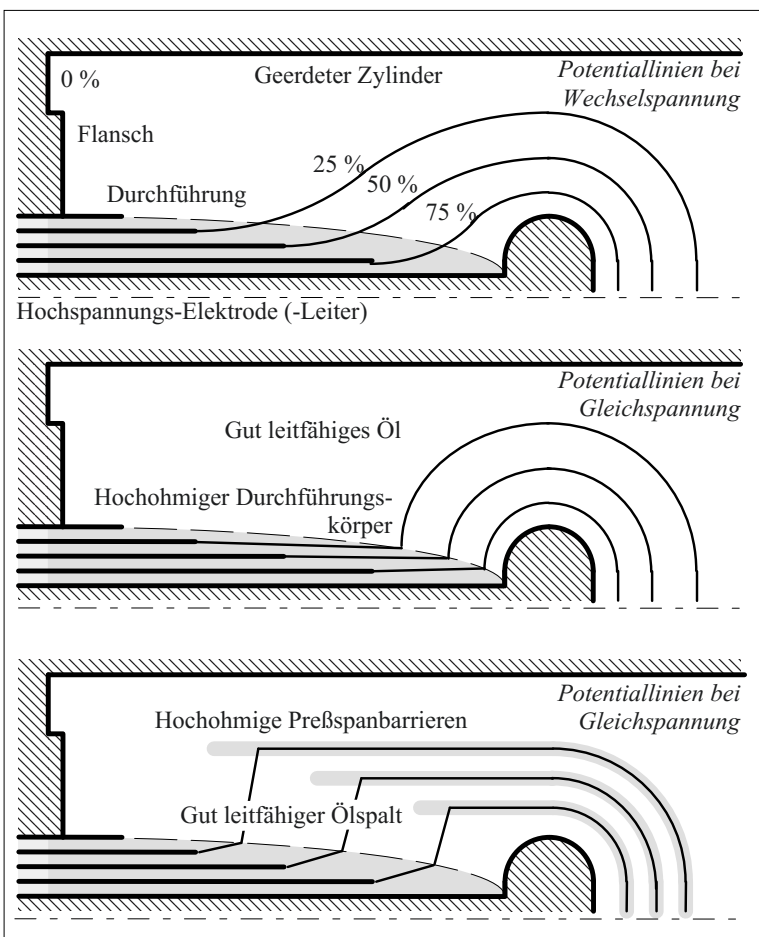


Bild 2.4-28: Anschluß einer Hochspannungselektrode unter Öl über eine kapazitiv gesteuerte Durchführung bei Wechselspannung (oben) und Gleichspannung (Mitte und unten). Verbesserung der Potentialverteilung bei Gleichspannung durch hochohmige Preßspanbarrieren (unten) [7].

Für die dargestellten beengten Einbauverhältnisse kann die tangentiale Feldstärkebelastung aber auch durch ein System hochohmiger, zylindrischer und in der Länge abgestufter *Pressspanbarrieren* vergleichmäßigt werden, Bild 2.4-28 (unten). Dadurch soll nach außen hin ein möglichst *gleichmäßiger Ölspalt* abgegrenzt werden, in dem der von der Hochspannungs- zur Erdseite fließende Strom eine möglichst gleichmäßige Potentialaufteilung bewirkt.

Die Steuerwirkung der Barrieren bei Gleichspannung beruht also darauf, dass die *äußere Potentialaufteilung* im Ölspalt an die *innere Steuerung* der Durchführungsbeläge angeglichen wird. Die Durchführung selbst kann das stationäre Strömungsfeld außerhalb der Durchführung nicht mehr beeinflussen [7], [10].

Bei *erhöhter Temperatur* verringern sich die Leitfähigkeitsunterschiede zwischen den verschiedenen Materialien und die Steuerwirkung der Barrieren ist weniger ausgeprägt. Ein ausreichend genaues Bild kann i.A. nur durch *numerische Feldberechnung* mit korrekten Leitfähigkeitswerten gewonnen werden (Kap. 2.5).

Aus dem Brechungsgesetz Gl. (2.4-49) ergibt sich, dass die Potentiallinien im Bereich des Ölspaltes aus den schlecht leitfähigen Materialien (Durchführung und Barrieren) nahezu senkrecht austreten, vgl. Bild 2.4-26. Im Elektrodenbereich liegt ein *quer geschichtetes Dielektrikum* vor. Das Feld wird aus den gut

leitfähigen Ölspalten in die hochohmigen Barrieren verdrängt. D.h. Dicke und Zahl der Barrieren muss so bemessen sein, dass die gesamte Spannung von den Barrieren isoliert wird.

Anmerkung: Die Barrieren erfüllen im übrigen auch bei *Wechselspannung* eine wichtige Funktion: Obwohl der Einfluss dünner Barrieren auf die Feldstärken im Öl gering ist, wird durch *Unterteilung der Ölstrecke* in enge Spalte die elektrische Festigkeit erheblich gesteigert.

Beispiel 4: HGÜ-Wanddurchführung

Auf den Freiluftisolatoren von Wanddurchführungen bilden sich durch Ablagerung von Staub und Verschmutzungen *Fremdschichten*, die bei Einwirkung von *Feuchtigkeit* durch Betauung oder Beregnung eine vergleichsweise hohe *Oberflächenleitfähigkeit* erhalten, Bild 2.4-29.

Bei *Wechselspannung* ist die Feldverzerrung durch die Leitungsströme wegen der vergleichsweise großen kapazitiven Verschiebungsströme meist vernachlässigbar. Bei *Gleichspannung* wirken sich Fremdschichten, die eine deutlich höhere Leitfähigkeit als der Durchführungsisolator haben, sehr stark feldverzerrend aus, insbesondere wenn die Fremdschicht die Oberfläche nicht vollständig gleichmäßig bedeckt.

In Anlagen für die *Hochspannungs-Gleichstromübertragung* (HGÜ) ist bei höheren Spannungen die *ungleichförmige Beregnung* (z.B. im Windschatten eines Gebäudes) kri-

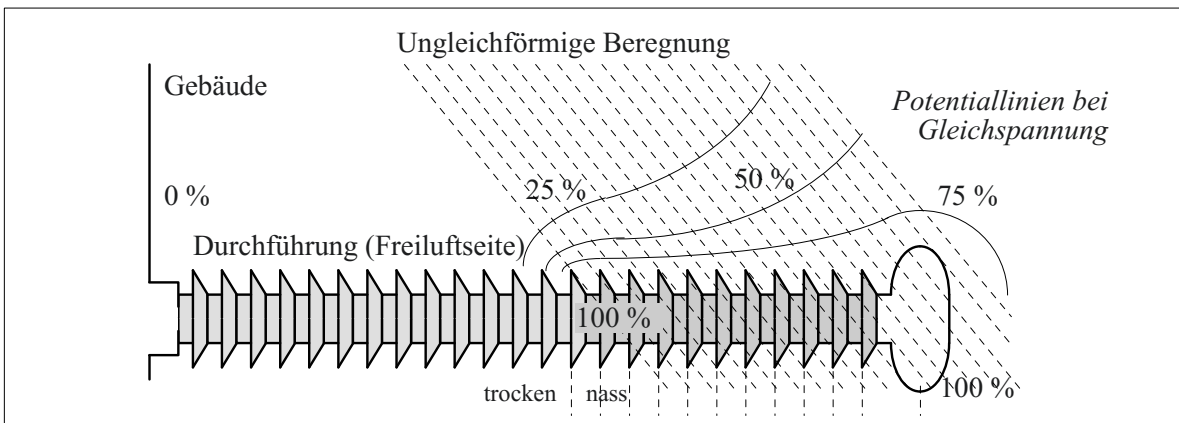


Bild 2.4-29: Freiluftseite einer HGÜ-Wanddurchführung und Ausbildung einer leitfähigen Fremdschicht, die aufgrund ungleichförmiger Beregnung nur einen Teil der Oberfläche überbrückt, vgl. Bild 7.2.4-1 und -2.

tisch, Bild 2.4-29. Dadurch wird das Hochspannungspotential über große Längen bis an die Grenze zwischen trockener und nasser Oberfläche verschoben. Dadurch entstehen, wie in einer Gleitanordnung mit scharfer Elektrodenkante (Bild 2.4-17, -18 und -24), extreme tangential- und radiale Feldstärkeüberhöhungen, die (im vergleichsweise günstigsten Fall) zum Überschlag oder (im ungünstigsten Fall) zu einem radialen Durchschlag der Durchführung führen.

Es ist deshalb häufig erforderlich, *hydrophobe* (wasserabweisende) Silikonpaste auf die Isolatoroberfläche aufzutragen, um die Bildung leitfähiger Flüssigkeitsfilme auf der gut benetzbaren Porzellanoberfläche zu vermeiden. Auf den Auftrag und die regelmäßige Erneuerung der *Silikonpaste* kann verzichtet werden, wenn der Porzellanisolator durch einen *Verbundisolator* aus einem GFK-Rohr mit Schirmen aus *Silikon-Elastomer* ersetzt wird [7], [8], [9], [10], vgl. Kap. 5.3.4 mit Bild 5.3-18.

Beispiel 5: Energiespeicherkondensator

Energiespeicherkondensatoren werden mit *Gleichspannung* aufgeladen und i.d.R. *stoßartig* bzw. in einer gedämpften *hochfrequenten Schwingung* entladen.

Im stationären aufgeladenen Zustand, d.h. bei reiner *Gleichspannungsbeanspruchung*, unterscheidet sich die Potentialverteilung an den Rändern der Beläge erheblich von der in Bild 2.4-20 dargestellten Verteilung, Bild 2.4-30. Der ölgefüllte Imprägnierspalt, der in dem Zwickel vor dem Belagsrand endet, hat i.d.R. eine höhere Leitfähigkeit κ_Z als die angrenzenden Isolierfolien mit κ_I . Dadurch entsteht ein relativ gleichmäßiger Spalt in dem ein potentialsteuernder Leitungsstrom fließen kann, Bild 2.4-30 (unten). Die *Belagsränder* werden *entlastet*.

Deshalb ist die *Gleichspannungsfestigkeit* eines Kondensatordielektrikums auch in der Praxis erheblich höher als die Wechselfeldspannungsfestigkeit. Oft kann man von einer etwa dreifach höheren Festigkeit ausgehen.

Die eigentliche Beanspruchung von Energiespeicherkondensatoren entsteht deshalb nicht im stationären Zustand bei anstehender Gleichspannung, sondern während der stoßartigen bzw. schwingenden *Entladung*. Das zugehörige Wechselfeld entspricht eher der Darstellung in Bild 2.4-30 (oben). Hinzu kommt, dass sich im stationären Zustand *Raumladungen* an den Trennflächen zwischen Imprägnierspalt und Isolierfolien anlagern. Tritt bei schwingender Entladung eine *Polaritätsumkehr* ein, verstärken sich Wechselfeld und Raumladungsfeld und beanspruchen die Belagsränder stärker als bei reiner Gleich- oder Wechselbeanspruchung, vgl. Kap. 7.3.3.

Die *Lebensdauer* von Energiespeicher- bzw. Impulskondensatoren wird deshalb als Anzahl der möglichen Entladungen in Abhängigkeit von der Ladespannung, dem Prozentsatz des Durchschwingens („polarity reversal“) und der Frequenz der Entladungsschwingung angegeben [29].

2.4.4.3 Übergangsvorgänge

Die bisher betrachtete Gleichspannungsbeanspruchung setzt einen stationären Zustand vor-

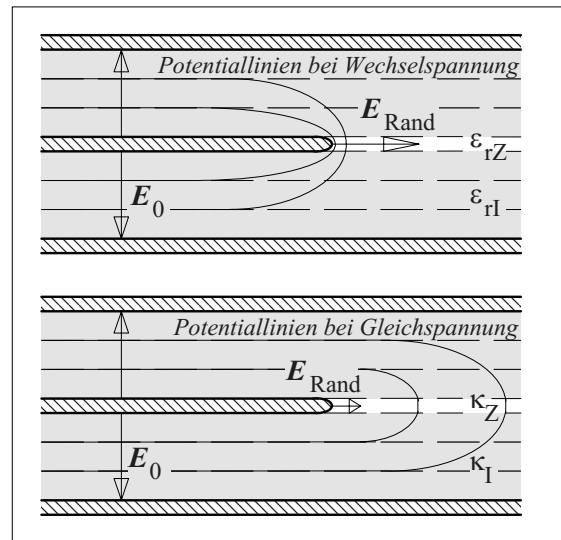


Bild 2.4-30: Belastung der Belagsränder in einem Kondensatordielektrikum bei Wechselfeldspannung (oben) und Entlastung der Ränder durch einen besser leitfähigen Imprägnierspalt bei Gleichspannung (unten).

aus, dessen Erreichen bei Isolierstoffen mit niedriger Leitfähigkeit viele Stunden bis zu Tagen in Anspruch nehmen kann. Nach Gl. (2.1-41) sind hierfür Zeiten erforderlich, die sehr viel größer sind als die Eigenentladungszeitkonstanten der beteiligten Isolierstoffe:

$$t \gg \tau_e = \varepsilon / \kappa \quad (2.4-50)$$

Beim **Anlegen einer Gleichspannung** muss man deshalb folgende Phasen unterscheiden (vgl. auch Bild 2.1-16):

a) Das Anlegen einer Spannung findet in der Regel innerhalb einer Zeit statt, die sehr viel kürzer ist als die relevanten Zeitkonstanten des dielektrischen Systems. Man kann dann zunächst von einem *dielektrischen Verschiebungsfeld* ausgehen, dessen Ausbildung von den *Dielektrizitätszahlen* ε bestimmt wird. Bei geometrisch einfachen Anordnungen kann ein Netzwerkmodell aufgestellt werden, das ausschließlich aus *Kapazitäten* besteht.

b) Danach läuft ein *Übergangsvorgang* ab, der aus Entladungs- und Umladungsvorgängen in den verschiedenen Dielektrika besteht. Für die mathematische Beschreibung ist es erforderlich, neben den Materialgleichungen $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ und $\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E}$ auch die Kontinuitätsgleichung (2.1-35) in allgemeiner Form, d.h. unter Berücksichtigung von Leitungsstromdichte \mathbf{J} und Verschiebungsstromdichte $\partial \mathbf{D} / \partial t$, anzusetzen. Für einfachere Anordnungen kann oft ein Netzwerkmodell mit *Kapazitäten* C (für die Beschreibung des Verschiebungsstromes) und mit *Widerständen* R (für die Beschreibung des Leitungsstromes) gebildet werden. Spannungen und Ströme werden dann durch *Netzwerk-analyse* berechnet. Hierfür hat sich die Verwendung der *Laplace-Transformation* als zweckmäßig erwiesen [2], [30], [31].

Bemerkung: Die Beschreibung von Materialien durch eine einzige Dielektrizitätszahl (Kapazität) und eine einzige Leitfähigkeit (Widerstand) vernachlässigt, dass **Polarisationsvorgänge** im Material lange Zeiten in Anspruch nehmen können, ehe ein stationärer Zustand erreicht wird. Polarisationsvorgänge werden

deshalb mit aufwändigeren Ersatzschaltbildern nachgebildet, die *RC*-Glieder mit unterschiedlichen Zeitkonstanten zur Beschreibung unterschiedlicher Polarisierungseffekte enthalten, vgl. Kap. 4.3.

c) Nach Abklingen des Übergangsvorganges stellt sich der *stationäre Zustand* ein, dessen Ausbildung ausschließlich von den Leitfähigkeiten der Isolierstoffe bestimmt wird (vgl. Kap. 2.4.4.1 und 2.4.4.2). Für einfache Anordnungen kann ein Netzwerkmodell aus *Widerständen* gebildet werden.

Bei Gleichspannungsanwendungen tritt häufig der Fall auf, dass ein **vorliegender Zustand** durch einen Übergangsvorgang **in einen anderen Zustand** überführt wird. Beispiele sind hierfür die Transienten nach einem *Polaritätswechsel* (z.B. bei einer Gleichspannungsprüfung), nach einer *Erhöhung oder Absenkung* des Gleichspannungswertes, nach einem *Kurzschluss* bzw. einer *Entladung* der Anordnung oder beim Aufbau einer *wiederkehrenden Spannung*.

Für die Berechnung der genannten Transienten ergibt sich dann folgendes Vorgehen:

a) Zunächst muss der *Ausgangszustand* berechnet werden. Im einfachsten Fall handelt es sich dabei um einen stationären Zustand. In einem *Netzwerkmodell* wird der Ausgangszustand durch den Ladezustand der Ersatzkapazitäten beschrieben. Bei komplexen Anordnungen, für die kein Netzwerkmodell angegeben werden kann, muss der Ausgangszustand durch ein in der Regel numerisch berechnetes *Feld- bzw. Potentiallinienbild* beschrieben werden.

b) Die *nachfolgende Spannungsänderung* wird in einem Netzwerkmodell durch eine entsprechende Spannungsquelle berücksichtigt. In komplexeren Anordnungen, die durch Feld- oder Potentiallinienbilder beschrieben werden, kann das mit der Spannungsänderung verbundene *dielektrische Verschiebungsfeld* in Form eines Feldbildes dem Ausgangszustand überlagert werden. Man erhält dadurch die elektri-

sche Beanspruchung unmittelbar nach der erfolgten Spannungsänderung [7], [10].

c) Der *Übergangsvorgang* ergibt sich im Netzwerkmodell durch transiente Netzwerkanalyse. Für komplexe geometrische Anordnungen muss die numerische Feldberechnung auf der Grundlage der transienten Feldtheorie erfolgen. In der Praxis begnügt man sich jedoch oft mit der Berechnung des *stationären Endzustandes*.

Nachfolgend werden einige praktische Beispiele behandelt. *Beispiel 1* befasst sich mit dem Anlegen einer Gleichspannung an ein quer geschichtetes Kondensatordielektrikum. Die wiederkehrende Spannung nach einem Kurzschluss des Kondensators wird in *Beispiel 2* betrachtet. *Beispiel 3* zeigt, dass während eines Übergangsvorganges in quer geschichteten Dielektrika an manchen Schichten Feldstärkeüberhöhungen auftreten können. *Beispiel 4* behandelt die komplexen Feldverhältnisse in einem Barrierensystem beim Umpolen der Gleichspannung.

Beispiel 1: Anlegen einer Gleichspannung

In Kap. 2.1.4.2 und 2.1.4.4 wurde als Beispiel für stationäre und langsam veränderliche kapazitive Felder ein zweischichtiges Kondensatordielektrikum aus Kunststofffolien und ölprägnierten Papieren mit $d_1 = d_2 = 30 \mu\text{m}$, $\varepsilon_{r1} = 2,2$, $\varepsilon_{r2} = 4,4$, $\kappa_1 = 10^{-16} \text{ S/m}$ und $\kappa_2 = 10^{-14} \text{ S/m}$ betrachtet, Bild 2.1-11, -15, und -16. Es soll der Übergangsvorgang betrachtet werden.

Da die Grenzflächen zwischen den Materialien hier auch Äquipotentialflächen sind, kann der Übergangsvorgang mit einem *Netzwerkmodell* aus Kapazitäten C_1 und C_2 mit parallelen Widerständen R_1 und R_2 beschrieben werden:

Unmittelbar nach Anlegen der Gleichspannung stellt sich aufgrund des dielektrischen Verschiebungsfeldes eine „kapazitive Spannungsverteilung“ ein, d.h. die Kunststofffolien werden mit $2/3$ und die Papiere mit $1/3$ der Spannung beansprucht.

In einem *näherungsweise exponentiellen Übergangsvorgang* wird die Kapazität C_1 der hochisolierenden Folien über den Widerstand R_2 des relativ leitfähigen Ölpapiers (Zeitkonstante $\tau = R_2 C_1$) so lange nachgeladen, bis sich die *stationäre* („ohmsche“) *Spannungsverteilung* eingestellt hat. Dies kann viele Stunden in Anspruch nehmen.

Die Kunststofffolien müssen dann fast die gesamte Spannung isolieren, die Papiere werden nur noch mit etwa 1 % der Gesamtspannung belastet.

Beispiel 2: Wiederkehrende Spannung

Bei dem im obigen Beispiel betrachteten Kondensator liegt im *stationären Zustand* an der Ersatzkapazität C_1 (Kunststofffolien) mit ca. $0,99 \cdot U$ nahezu die gesamte Spannung, während C_2 (Papiere) nur auf etwa $0,01 \cdot U$ geladen ist, Bild 2.4-31 (links).

Bei einem *Kurzschluss* des Kondensators an den äußeren Klemmen verteilt sich die Ladung $Q_1 \approx C_1 \cdot U$ so auf die beiden jetzt parallel geschalteten Teilkapazitäten C_1 und C_2 , dass entgegengesetzt gleiche Spannungen an C_1 und C_2 entstehen. Die Spannung zwischen den äußeren Klemmen wird damit Null. Mit $C_2 = 2 C_1$ und bei Vernachlässigung von $Q_2 = C_2 \cdot 0,01 \cdot U$ ergibt sich theoretisch die Spannung $u_1' = -u_2' = 1/3 \cdot (C_1 \cdot U) / C_1 = U/3$, Bild 2.4-31 (Mitte). Die Differenz der kapazitiv gespeicherten Energien vor und nach dem Kurzschluss wird als Stromwärme im Widerstand des Kurzschlusskreises umgesetzt. Wird der Kurzschluss nicht mehr aufgehoben, entladen sich die parallelen Kapazitäten C_1 und C_2 exponentiell über $R_2 \ll R_1$ mit der Zeitkonstanten $\tau = (C_1 + C_2) \cdot R_2$.

Wird aber die *Verbindung* unmittelbar nach Herstellen des Kurzschlusses *wieder getrennt*, so können sich die auf $u_1' = U/3$ und $u_2' = -U/3$ geladenen Teilkapazitäten nur noch durch Eigenentladung, d.h. über den jeweils zugehörigen Ersatzwiderstand mit der Eigenentla-

dungszeitkonstanten $\tau_1 = R_1 C_1 = \varepsilon_1 / \kappa_1$ bzw. $\tau_2 = R_2 C_2 = \varepsilon_2 / \kappa_2$ entladen. Im betrachteten Beispiel würde die exponentielle Entladung von C_2 etwa fünfzigmal so schnell erfolgen wie die exponentielle Entladung von C_1 , so dass an den offenen Klemmen die resultierende Spannung $u'(t) = u_1'(t) + u_2'(t)$ entsteht, die als „wiederkehrende Spannung“ (*Rückkehrspannung, recovery voltage*) bezeichnet wird, Bild 2.4-31 (rechts).

Anmerkung: Die wiederkehrende Spannung wird durch Umladung von Ladungen hervorgerufen, die an den Trennflächen im Dielektrikum gespeichert waren. Eine ähnliche Nachladung findet auch statt, wenn im Dielektrikum *Raumladungen* gespeichert sind (vgl. Beispiel Gleichspannungskabel in Kap. 2.4.4.2), oder wenn Ladung durch *Polarisationerscheinungen* gespeichert ist, vgl. Kap. 4.3.2.1.

Anmerkung: Geladene Kondensatoren und die wiederkehrende Spannung zählen zu den **Hauptgefahren beim Umgang mit hohen Spannungen**. Geräte mit großen Kapazitäten

(z.B. Kondensatoren, Kabel) müssen deshalb *dauernd kurzgeschlossen* werden. Bei einer *Reihenschaltung* von Kondensatoren müssen auch die *Einzelkondensatoren* in den Kurzschluss einbezogen werden, da bei einem Kurzschluss an den äußeren Klemmen die Einzelkondensatoren noch immer (entgegengesetzt) geladen sein können. Von einer vollständigen Identität der Einzelkondensatoren sollte man (schon wegen möglicher Temperaturunterschiede!) aus Sicherheitsgründen nicht ausgehen.

Anmerkung: Es wird versucht, Kenngrößen wiederkehrender Spannungen für die *dielektrische Diagnose*, z.B. bei Transformatoren und Kabeln einzusetzen [32], [33], vgl. Kap. 6.4.7.5.

Beispiel 3: Transiente Feldstärkeüberhöhungen in geschichteten Dielektrika

Der Übergangsvorgang von der kapazitiven zur ohmschen Potentialverteilung nach Anlegen einer Gleichspannung kann in geschichteten Dielektrika *vorübergehend zu höheren Belastungen* führen als dies aus den Anfangs- und Endzuständen erkennbar ist.

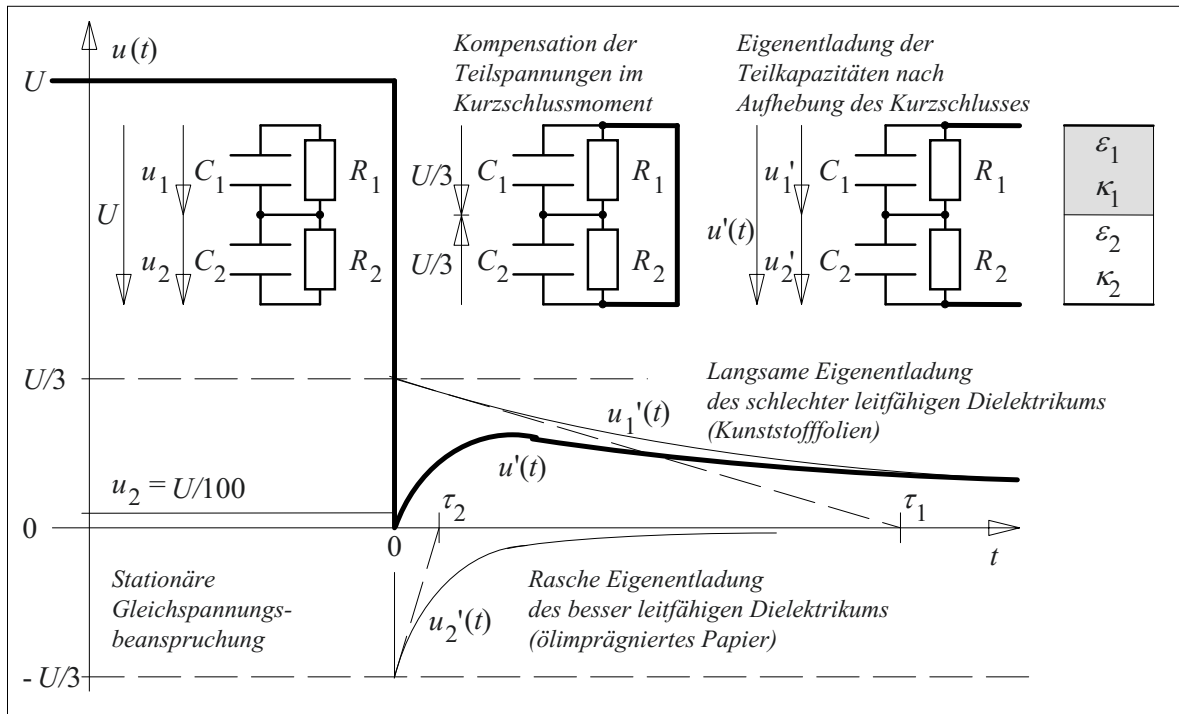


Bild 2.4-31: Gleichspannungsbeanspruchung und wiederkehrende Spannung an einem Dielektrikum aus Kunststofffolien und hundertfach besser leitfähigem ölprägniertem Papier (weitere Erläuterungen im Text).

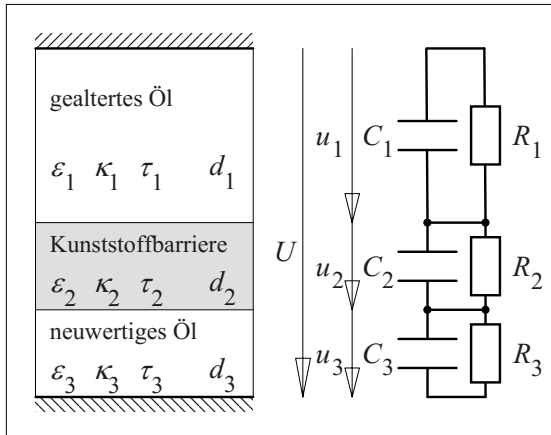


Bild 2.4-32: Dreischichtiges Dielektrikum mit unterschiedlichen Eigenentladungszeitkonstanten (z.B. im Verhältnis 1 : 100 : 10), vgl. Bild 2.4-33 mit den zugehörigen Spannungsverläufen beim Anlegen einer Gleichspannung U .

Betrachtet wird ein dreischichtiges Dielektrikum aus einer Kunststoffbarriere, die zwei Ölschichten unterschiedlicher Qualität trennt (gealtertes/neuwertiges Öl), Bild 2.4-32. Dabei wird angenommen, dass die *Eigenentladungszeitkonstanten* von gealtertem Öl, Kunststoffbarriere und neuwertigem Öl zueinander im Verhältnis 1 : 100 : 10 stehen. Das Verhältnis der *Ersatzkapazitäten* wird als 1 : 2 : 2 angenommen. Mit $\tau = RC$ ergibt sich daraus ein Verhältnis der *Ersatzwiderstände* von 1 : 50 : 5.

Beim Anlegen der Gleichspannung stellt sich

aufgrund des dielektrischen Verschiebungsfeldes zunächst die *kapazitive Spannungsverteilung* ein, Bild 2.4-33. D.h. Dielektrikum 1 wird mit der halben Spannung beansprucht, auf die Dielektrika 2 und 3 entfällt jeweils ein Viertel der Spannung U .

Wegen der geringen Eigenentladungszeitkonstanten τ_1 des Dielektrikums 1 wird C_1 *rasch entladen*, $u_1(t)$ nimmt sehr rasch ab. Die Dielektrika 2 und 3 müssen dann einen zusätzlichen Anteil der anliegenden Spannung U übernehmen. D.h. die Ersatzkapazitäten C_2 und C_3 werden über R_1 *nachgeladen*. Deshalb steigen die Spannungen $u_2(t)$ und $u_3(t)$ zu Beginn in gleicher Weise an, Bild 2.4-33.

Im weiteren Verlauf macht sich die geringere Eigenentladungszeitkonstante des Dielektrikums 3 bemerkbar, indem C_3 wieder entladen und C_2 über R_3 auf noch höhere Spannungen geladen wird. Dadurch ergibt sich für $u_3(t)$ ein zunächst steigender und langfristig fallender Verlauf mit einem ausgeprägten *Maximum*.

Dieses Maximum ist erheblich höher als der anfängliche Spannungswert an diesem Material und beträgt ein Vielfaches des stationären Endwertes. Es ergibt sich somit möglicherweise eine *Überbeanspruchung* des Dielektrikums 3 im Verlauf des oft nicht weiter betrachteten

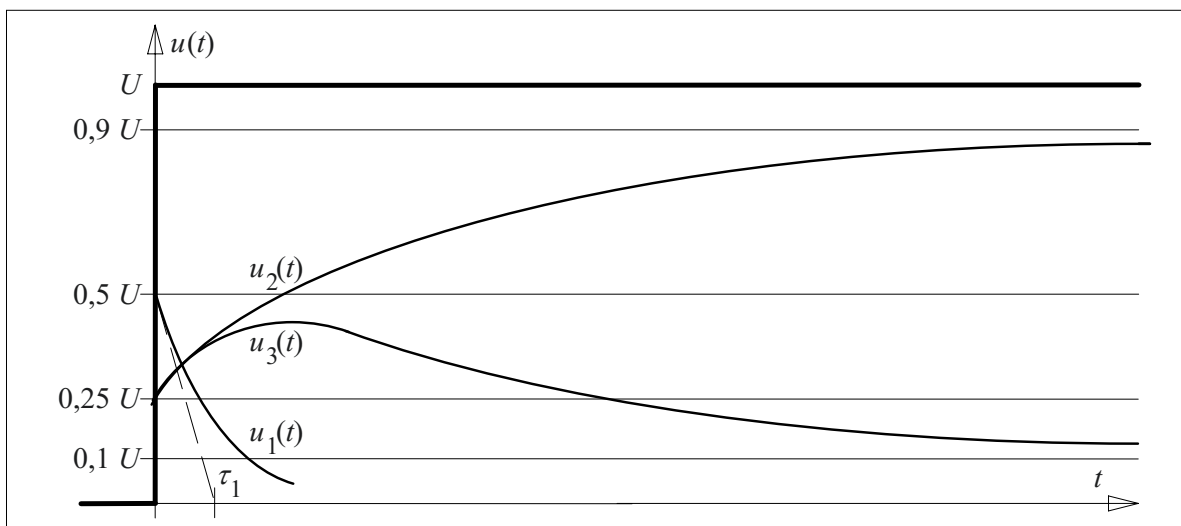


Bild 2.4-33: Spannungsverläufe am dreischichtigen Dielektrikum nach Bild 2.4-32 mit vorübergehender Spannungsüberhöhung am Dielektrikum 3 nach Anlegen einer Gleichspannung.

Übergangsvorganges.

Im stationären Zustand teilt sich die Spannung im Verhältnis der Ersatzwiderstände auf, d.h. Dielektrikum 1 wird mit 2 %, Dielektrikum 2 mit 89 % und Dielektrikum 3 mit 9 % der Gesamtspannung U beansprucht.

Anmerkung: Im Vergleich zum Öl ist die hohe Beanspruchung der Kunststoffbarriere möglicherweise noch tolerierbar, da feste Isolierstoffe i.d.R. erheblich höher beansprucht werden können als flüssige Isolierstoffe.

Die genaue Höhe der hier qualitativ geschilderten Überbeanspruchung des Dielektrikums 3 ergibt sich aus einer *Netzwerkanalyse*. Das Ergebnis hängt sehr stark von der Art der betrachteten Schichtung ab. *Kritisch* sind in dieser Beziehung Schichtungen, bei denen die anfängliche und die stationäre Spannungsverteilung sehr unterschiedlich sind.

Beispiel 4: Umpolen einer Gleichspannung

Beim Umpolen einer Gleichspannung können in einem Barrierensystem unter Öl (wie es in HGÜ-Isolierungen, z.B. in *Stromrichtertransformatoren* oder *Glättungsdrosseln* eingesetzt wird) sehr komplexe Feldverhältnisse und Feldverschiebungen entstehen, die mit erheblichen Feldüberhöhungen verbunden sind. Das Feld lässt sich meist nicht mehr durch ein Netzwerkmodell beschreiben, es muss i.d.R. durch eine numerische Feldberechnung ermittelt werden, vgl. Kap. 2.5.

Für eine qualitative Betrachtung der Verhältnisse beim Umpolen wird eine ebene Anordnung aus zwei hochohmigen Barrieren zwischen zwei ebenen Elektroden unter vergleichsweise leitfähigem Isolieröl betrachtet, Bild 2.4-34. Die Anordnung könnte als stark vereinfachtes *Modell eines Barrierensystems* nach Bild 2.4-28 aufgefasst werden.

Bei Anliegen einer *negativen Gleichspannung* an der oberen Elektrode bildet sich das stationäre Strömungsfeld im Öl parallel zu den Grenzflächen der hochohmigen Barrieren aus, Bild 2.4-34a. Es kann einem Leitungstrom von

der unteren zur oberen Elektrode zugeordnet werden, der zwischen den hochohmigen Barrieren geführt wird. Innerhalb des Ölkanals ist der Abstand der Potentiallinien groß und die Feldstärke ist niedrig, wenn der Ölkanal lang genug ist. Dadurch kann das Barrierensystem das Feld im Ölkanal steuern. Außerhalb des Überlappungsbereiches müssen die Barrieren allerdings nahezu die gesamte Spannung isolieren. Sie müssen dafür z.B. durch mehrlagigen Aufbau mit ausreichender Dicke ausgelegt werden.

Den *Vorgang des Umpolens* kann man durch Überlagerung einer positiven Spannungsänderung mit der doppelten Amplitude beschreiben. Sie wirkt sich zunächst als starkes dielektrisches Verschiebungsfeld aus, das dem ursprünglichen Strömungsfeld zu überlagern ist [7], Bild 2.3-34b. Dabei wird die Feldverdrängung aus den Barrieren in das Öl in erster Näherung vernachlässigt.

Das *Ergebnis der Überlagerung* zeigt eine *sehr starke Belastung des Ölspaltes*, Bild 2.4-34c. Die Barrieren werden geringfügig entlastet. Auffällig ist die Bildung von „Inseln“, die ein höheres Potential als 100 % und ein niedrigeres Potential als 0 % der angelegten Gleichspannung aufweisen. Sie entstehen durch positive und negative *Flächenladungen* auf den Oberflächen der Barrieren, die sich dort im stationären Zustand angesammelt hatten, vgl. auch Bild 2.4-23.

Nach Ablauf des *Übergangsvorganges*, in dessen Verlauf im wesentlichen die Kapazitäten der Barrieren über die in Reihe liegenden Widerstände der Ölspalte umgeladen werden, stellt sich eine neue stationäre Feldverteilung bei *positiver Gleichspannung* ein, die der ursprünglichen entgegengesetzt gleich ist, Bild 2.4-34d.

Anmerkung: Die Erfahrung bei *Gleichspannungsprüfungen* von ölisierten Geräten mit Barrierensystemen zeigt, dass die *Minuten nach einer Umpolung* oft kritisch sind. In dieser Zeit treten gelegentlich Teilentladungen auf, die nach einiger Zeit wieder verschwinden. Darin kommt offenbar der Abbau von hohen Feldstärken unmittelbar nach der Umpolung zum Ausdruck, vgl. Bild 2.4-34c.

2.4.5 Feldsteuerung an Grenzflächen

Besonders kritische Anordnungen der Hochspannungstechnik sind Grenzflächen, die in tangentialer Richtung besonders stark belastet werden. Die meisten Probleme ergeben sich dabei an Grenzflächen zur elektrisch nicht besonders festen Luft, d.h. an den sog. Oberflächen. Problematisch sind alle Belastungsarten, d.h. Wechsel-, Gleich- und Stoßspannung.

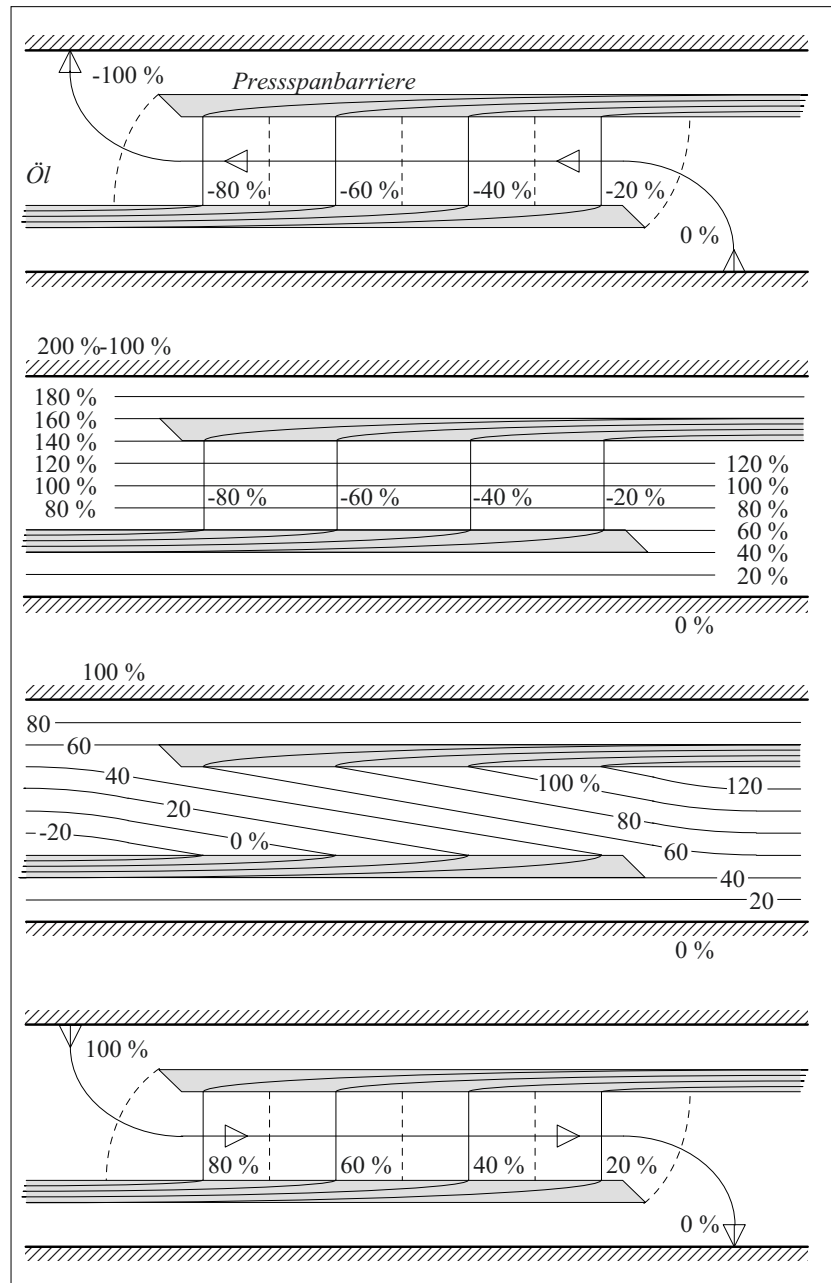
Eine Entladung kann dabei sowohl durch das normal gerichtete Feld in einem Zwickel gezündet werden (vgl. Kap. 2.4.3.3) als auch durch das tangentialen Feld an einer Kante (vgl. Kap. 3.2.6), Bild 2.4-35 oben (rechts und links). Die Einsetzspannungen sind in beiden Fällen vergleichbar, Gl. (2.4-35) u. (3.2-72). Das Vorhandensein eines starken tangentialen Feldes führt dann zur Ausbildung von Oberflächen- oder Gleitentladungen, die aufgrund

Bild 2.4-34a: Stationäres Strömungsfeld bei Anliegen einer negativen Gleichspannung an der oberen Elektrode.

Bild 2.4-34b: Überlagerung eines dielektrischen Verschiebungsfeldes entgegengesetzter Polarität und doppelter Amplitude beim Umpolen. Die dielektrische Feldverdrängung an den Barrieren wird vernachlässigt.

Bild 2.4-34c: Resultierendes Feld unmittelbar nach dem Umpolen. Durch Flächenladungen an den Grenzflächen bilden sich "Inseln" mit Potentialen über 100 % und unter 0 %.

Bild 2.4-34d: Stationäres Strömungsfeld nach dem Umpolen und nach Abklingen des Übergangsvorganges, d.h. nach Aufladung der Barrierenkapazitäten über die in Reihe liegenden Ölspalte.



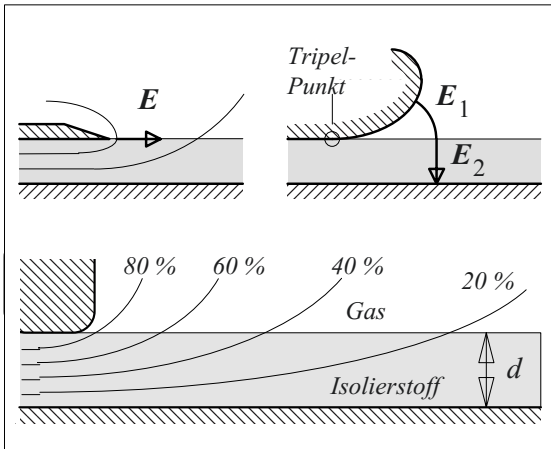


Bild 2.4-35: Zündung von Oberflächenentladungen durch tangential und normal gerichtete Felder (oben links u. rechts). Gleitanordnung mit hoher tangentialer Belastung und geringer Isolierstoffdicke (unten, mit Vernachlässigung der Feldlinienbrechung).

hoher Querkapazitäten (und hoher kapazitiver Ströme über den Entladungskanal) bei Wechselspannung sehr leistungsstark sein können und damit Isolieranordnungen besonders stark durch Oberflächenerosion schädigen können, Kap. 3.2.6.

Anordnungen mit hohen tangentialen Feldstärken und großen Querkapazitäten (geringen Isolationsdicken), die zu Gleitentladungen neigen, werden als „Gleitanordnungen“ bezeichnet, Bild 2.4-35 unten. Sie treten in sehr vielen Isoliersystemen auf. Besonders häufige Fälle sind z.B.

- in rotationssymmetrischer Anordnung gegeben (u.a. bei Kabeln, Kap. 7.1.1 oder bei Durchführungen, Kap. 7.1.2),
- bei ebenen Anordnungen (z.B. am Rand eines Plattenkondensators oder bei dünnen Isolierfolien, Bild 2.4-20)
- sowie an der Oberfläche isolierter rechteckiger Leiter (z.B. bei Generatorstabisolierungen, Bild 7.1.6-4 oder isolierten Stromschienen).

Es gehört deshalb zu den grundlegenden Aufgaben der Hochspannungstechnik, die tangentialen elektrischen Beanspruchungen an den Grenzflächen gering zu halten. Für diese **Feld- bzw. Potentialsteuerung** kommen verschiedene Technologien in Betracht, die am Bei-

spiel eines Kabelendverschlusses erläutert werden [464], Bild 2.4-36:

(1) Bei der **geometrischen Feldsteuerung** wird das Erdpotential des Kabelmantels durch die geometrische Form des *leitfähigen Deflektors* nach außen geführt, Bild 2.4-36 (1). Die gekrümmte trichterförmige Kontur stellt wie bei einem Rogowski-Profil sicher, dass die Feldstärke von innen nach außen stark abnimmt. Der Deflektor befindet sich bei Kabelendverschlüssen (Kap. 7.1.1.4) in einem Steuerkonus aus elastomerem Material, an dessen Grenzflächen die Feldstärken so weit abgesenkt sein müssen, dass sie beherrscht werden können. Im Randfeld eines Plattenkondensators sind die Elektroden häufig gekrümmt (Rogowski- oder Borda-Profil, Verrundung nach Gl. (2.3-43)). Die geometrische Feldsteuerung benötigt Volumen und führt deshalb zu Konstruktionen mit großen Abmessungen bzw. Durchmessern.

(2) Bei der **kapazitiven Feldsteuerung** werden zwischen Erd- und Hochspannungspotential leitfähige Steuerbeläge aufgebracht, Bild 2.4-26 (2). Durch die Kapazitäten zwischen den Belägen ergibt sich die gewünschte Potentialaufteilung. Der Versatz der Beläge in Längsrichtung zwingt diese Potentialaufteilung auch der Oberfläche der Anordnung auf. Die kapazitive Steuerung ist die wirkungsvollste, d.h. mit ihrer Hilfe kann eine vollständig lineare Potentialaufteilung in Längsrichtung erreicht werden, und zwar bei sehr geringen Durchmessern bzw. Isolationsdicken. Die kapazitive Steuerung wird deshalb für Hochspannungsdurchführungen bis zu den höchsten Spannungen eingesetzt, Kap. 7.1.2.

Anmerkung: Bei Kabelendverschlüssen und bei Kabelmuffen dominiert heute aus fertigungs- und montage-technischen Gründen die *geometrische Steuerung*. Auch refraktive, resistive und nichtlineare Steuerung werden für Mittelspannungskabel eingesetzt.

(3) Bei der **refraktiven Feldsteuerung** wird z.B. über der freigelegten Kabelisolierung ein Schlauch mit wesentlich *erhöhter Dielektrizitätszahl* aufgezogen, der an den Kabelmantel anschließt, Bild 2.4-36 (3). Durch Brechung (Refraktion) der Feldlinien und Feldverdrän-

gung wird das Feld von der Kante des Kabelmantels weggedrängt. Dadurch entsteht eine Entzerrung des Feldes und eine Absenkung der maximalen Feldstärke an der Kante des Kabelmantels.

(4) Bei der **resistiven Feldsteuerung** wird auf die Kabelisolierung ein *halbleitfähiges (resistives) Material* aufgebracht, Bild 2.4-36 (4). Zusammen mit den Querkapazitäten gegen den Innenleiter ergibt sich eine RC-Kettenleiterstruktur, die bei Wechselspannung eine Potentialsteuerung entlang der beschichteten Isolierung bewirkt.

(5) Die **nichtlineare Feldsteuerung** beruht auf Materialien, die bei niedrigen Feldstärken isolierende Eigenschaften aufweisen und bei höheren Feldstärken in einen wesentlich besser leitfähigen Zustand übergehen, Bild 2.4-36 (5). Dadurch wird das elektrische Feld gerade an Stellen höchster Feldstärke durch eine lokal erhöhte Leitfähigkeit verdrängt und abgesenkt. Nichtlineare Materialien wie Zinkoxid (ZnO), Siliziumkarbid (SiC) und Eisenoxid (FeO) werden in ein polymeres Grundmaterial eingebettet und bilden darin sog. *Mikrovaristoren*.

Die klassische Anwendung der resistiven und der nichtlinearen Feldsteuerung ist die Generator- bzw. Motorstabisolierung, Bild 7.1.6-4. Die aufzutragenden Schichten sind dünn und können deshalb auch auf isolierten Leiterstäben aufgebracht werden, die sich in den Wickelköpfen eng beieinander befinden.

Die **refraktive Feldsteuerung** kann nur bei zeitveränderlichen Spannungen (*AC oder Stoß*) eingesetzt werden. **Resistive und nichtlineare Steuerungen** sind stark von der *Frequenz* der angelegten Spannung abhängig.

Allen Feld- bzw. Potentialsterverfahren ist gemein, dass sie die tangentialen Belastungen an **Grenz- und Oberflächen** herabsetzen. Trotzdem sind Grenzflächen i.d.R. noch *hoch belastet* und bedürfen einer besonders *sorgfältigen Ausführung*. D.h. i.d.R. müssen Fremdschichten, Lufteinschlüsse, Feuchtigkeit Zutritt und Hohlraumbildung in der Fertigung und im Betrieb sicher ausgeschlossen werden.

2.5 Numerische Feldberechnung

Die numerische Feldberechnung gehört heute zu den wichtigsten Handwerkszeugen des hochspannungstechnisch tätigen Entwicklers, Konstrukteurs und Forschers. Nur durch nu-

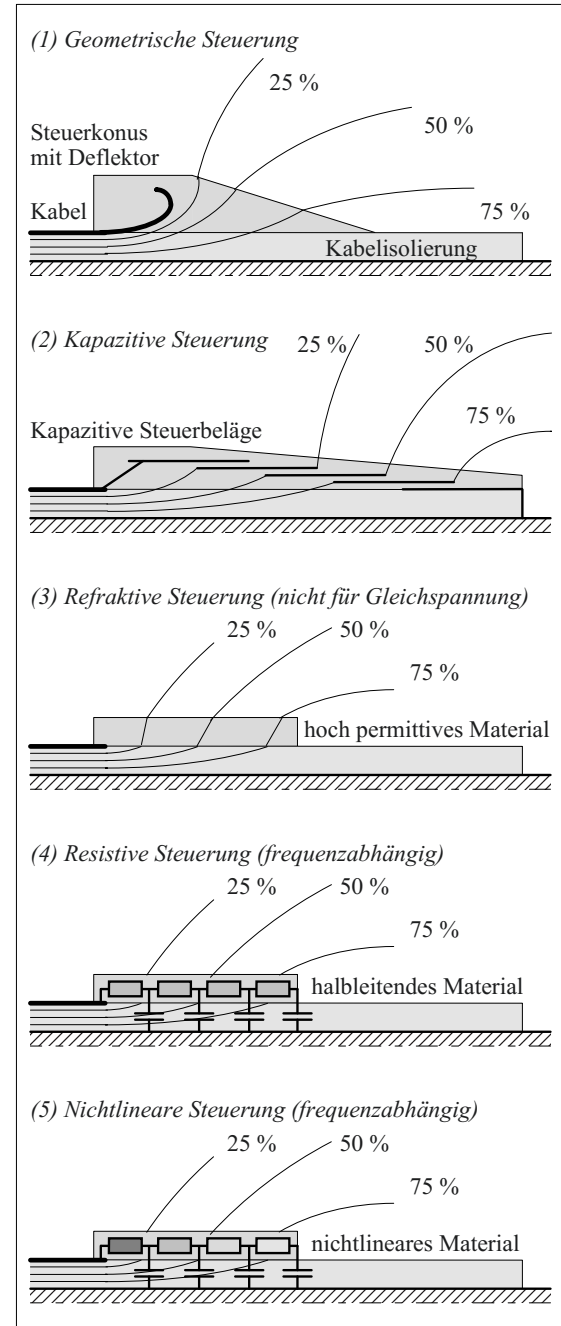


Bild 2.4-36: Technologien zur Feld- bzw. Potentialsteuerung bei typischen Gleitanordnungen am Beispiel rotationssymmetrischer Kabelenden.

merische Rechnung können für komplexe Isoliersysteme ausreichend genaue Feldstärkewerte ermittelt werden.

Dabei sollte die numerische Rechnung nicht die gedankliche Auseinandersetzung mit der Art der vorliegenden Beanspruchung ersetzen. Eine intensive Vor- und Nachbereitung der numerischen Rechnung ist nötig, um Fehler und falsche oder zu weitreichende Schlüsse aus den Ergebnissen zu vermeiden. Es ist deshalb immer empfehlenswert, ein qualitatives Feldbild zur *Veranschaulichung* zu zeichnen (Kap. 2.3.3) und an einem vereinfachten Modell eine *analytische Abschätzung* zu versuchen. Die numerische Rechnung kann dann auf der Grundlage dieser Abschätzungen auf Plausibilität überprüft werden.

2.5.1 Übersicht

Für diese einführende Darstellung wird die Betrachtung auf elektrische **Potentialfelder**, d.h. auf *statische, stationäre* und *langsam veränderliche quasistationäre* (kapazitive) elektrische Felder beschränkt, die mit der Poissonschen bzw. Laplaceschen Differentialgleichung (2.3-31) beschrieben werden können.

Anmerkung: Durch Einbeziehung des **Vektorpotentials** können auch schnell veränderliche und nichtstationäre Felder, d.h. Felder mit *Wirbelströmen* und *elektromagnetische Wellen* berechnet werden [394].

Für die Lösung von Potentialfeldern gibt verschiedene numerische Verfahren, bei denen drei grundsätzlich verschiedene Ansätze unterschieden werden können [34]:

a) Integralgleichungsmethoden (IEM: integral equations methods) überlagern die von Ladungen, Strömen und Dipolmomenten erzeugten Felder bzw. Potentialgrößen, durch Summation bzw. Integration über die einzelnen Beiträge. Durch Definition eines Vektor- und eines Skalarpotentials [2], [3] kann damit auch das schnell veränderliche elektromagnetische Feld berechnet werden.

Das klassische Verfahren für die Berechnung langsam veränderlicher Felder ist das *Ersatz-*

ladungsverfahren (CSM: charge simulation method), das in Kap. 2.3.5 bereits für die analytische Rechnung eingesetzt wurde. Das Ersatzladungsverfahren kann auch auf Flächenladungen übertragen werden (SCSM: surface charge simulation method, BEM: boundary element method). Für schnell veränderliche Felder ist die Momentenmethode (MOM: Method of moments) anwendbar.

Der *Vorteil* der Integralgleichungsmethoden liegt darin, dass räumlich *nicht begrenzte dreidimensionale* Anordnungen mit einer begrenzten Zahl von Elementen (Ladungen u.s.w.) berechenbar sind. Für die Hochspannungstechnik ist es auch vorteilhaft, dass der Einfluss von *Raumladungen* einfach berücksichtigt werden kann. Die Berechnung von Anordnungen mit vielen *verschiedenen Materialien* ist allerdings sehr aufwändig, da der Einfluss von Grenzflächen durch zusätzliche Elemente (Ladungen, etc.) berücksichtigt werden muss.

b) Die Methoden der Finiten Differenzen (FDM: finite difference method) und der **Finiten Elemente** (FEM: finite element method) diskretisieren den gesamten zu betrachtenden Feldraum und stellen Differentialgleichungssysteme auf der Grundlage der diskretisierten Potentialgleichung (FDM) bzw. der Extremwertbestimmung eines Energiefunktional (FEM) auf. Die Behandlung schnell veränderlicher Felder ist mit der FEM möglich.

Der *Vorteil* dieser Methoden liegt in der sehr einfachen Berücksichtigung beliebig vieler *Materialien und Grenzflächen*. Dadurch können auch Isoliersysteme mit komplex geschichtetem Aufbau berechnet werden. Außerdem können *nichtlineare Materialien* zugelassen werden. Die Methode der finiten Elemente hat sich deshalb bei der Berechnung magnetischer Felder durchgesetzt, da nichtlineare ferromagnetische Materialien berücksichtigt werden müssen.

Nachteilig ist die Notwendigkeit, den *gesamten Feldraum* zu diskretisieren. Dadurch entsteht eine sehr große Anzahl von Elementen, insbesondere bei dreidimensionalen Anord-

nungen. Bei der Methode der finiten Elemente kann dabei die Feinheit der Diskretisierung noch an die jeweilige Feldregion angepasst werden, wodurch die Zahl der Elemente wieder reduziert wird.

Anmerkung: Die Methode der Finiten Elemente ist in anderen Bereichen der Technik für die (mathematisch analoge) Berechnung *mechanischer, thermischer und magnetischer Felder* bereits seit langem etabliert. Sie ist deshalb in der *industriellen Anwendung* beliebt, weil Entwicklung und Konstruktion eines Gerätes vor allem auch die Betrachtung thermischer und mechanischer Beanspruchungen umfasst. Moderne Feldberechnungsprogramme übernehmen die geometrischen Daten direkt aus einem CAD-System und können Feldberechnung für **kombinierte Belastungen** mechanischer, thermischer, magnetischer und elektrischer Natur durchführen (*multi-physics*).

c) Die Monte Carlo Methode (MCM) greift auf den Mittelwertsatz der Potentialtheorie zurück, nach dem das Potential $\varphi(P)$ im Mittelpunkt P einer Kugel gleich dem Mittelwert der Potentiale auf der Kugeloberfläche ist. In dem betrachteten Punkt werden Zufallsläufe (random walk) gestartet, die mit einer gewissen Häufigkeit die Elektroden bekannten Potentials treffen. Dadurch ergibt sich ein Mittelwert aus den getroffenen Elektrodenpotentialen als statistischer Schätzwert für das Potential $\varphi(P)$, dessen Güte aus der Streuung beurteilt werden kann [16].

Die Monte Carlo Methode wird als geeignete Methode angesehen, um einzelne Potentialwerte in einem Teilgebiet des Feldraumes zu ermitteln, das weniger interessant ist [34].

Nachfolgend werden das Ersatzladungsverfahren (Kap. 2.5.2), das Differenzenverfahren (Kap. 2.5.3) und die Methode der finiten Elemente (Kap. 2.5.4) näher betrachtet.

2.5.2 Ersatzladungsverfahren

Beim Ersatzladungsverfahren werden die Felder einzelner Ersatzladungen im betrachteten Aufpunkt A_k durch *Summation* der einzelnen Beiträge zum resultierenden Potential φ_k überlagert, Bild 2.5-1:

$$\varphi_k = \varphi_{k1} + \varphi_{k2} + \varphi_{k3} + \dots + \varphi_{kn} \quad (2.5-1)$$

Dieser Gedanke wurde bereits in Kap. 2.3.5 zur analytischen Feldberechnung eingesetzt, vgl. Gl. (2.3-45).

Als Ersatzladungen werden die *Punktladung* (Q_1), die *Linienladung* (Q_2) und die *Ringladung* (Q_3) verwendet. Die Beiträge φ_{kj} einzelner Ladungen Q_j auf das Potential φ_k wird über *Potentialkoeffizienten* p_{kj} beschrieben:

$$\varphi_{kj} = p_{kj} \cdot Q_j \quad (2.5-2)$$

Für Punktladungen ergibt sich der Potentialkoeffizient aus Gl. (2.3-44) zu $p_{kj} = 1/(4\pi\epsilon r_{kj})$ als Funktion der Abstände r_{kj} . Auch für Linien- und Ringladungen können entsprechende Koeffizienten angegeben werden [16].

Die Elektrodenoberflächen werden durch *Äquipotentialflächen* angenähert. D.h. die diskreten Ersatzladungen müssen hinter der gewünschten Elektrodenkontur gesetzt werden, damit sich auf der Elektrodenkontur endliche Potentialwerte ergeben. Für den Ort der Ersatzladung würde sich ein unendlich großes Potential ergeben.

Im ersten Verfahrensschritt werden *n Ersatzladungen* unbekannter Größe in Anlehnung an den Verlauf der Elektrodenkonturen *gesetzt*, Bild 2.5-2.

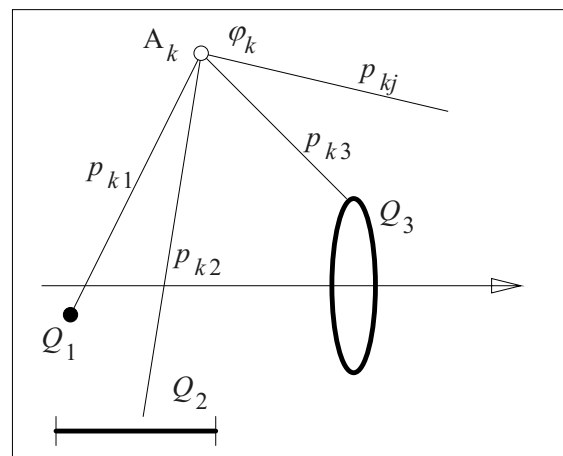


Bild 2.5-1: Punktladung, Linienladung und Ringladung als Grundelemente des Ersatzladungsverfahrens, sowie Einfluß mehrerer Ladungen auf das Potential im betrachteten Aufpunkt k.

Der zweite Schritt besteht in der Auswahl von ebenfalls n *Konturpunkten* auf den Elektroden, in denen die Potentiale φ_{E1} bis φ_{En} gegeben sind.

Im dritten Schritt kann mit Hilfe der *Potentialkoeffizienten* ein Gleichungssystem aufgestellt werden, das die Konturpunktpotentiale als Funktion der unbekannten Ersatzladungen ausdrückt. Die Auflösung des Gleichungssystems ergibt die *Größe der Ersatzladungen*:

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \cdots \\ Q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{E1} \\ \varphi_{E2} \\ \cdots \\ \varphi_{En} \end{bmatrix} \quad (2.5-3)$$

Damit sind die Ersatzladungen bekannt und es kann mit Gl. (2.5-1) und (-2) das *Potential in jedem beliebigen Punkt* des Feldraumes berechnet werden.

In einem vierten Schritt wird zunächst die Güte der Ersatzladungspositionierung überprüft, indem auf den Elektrodenkonturen zusätzliche *Kontrollpunkte* ausgewählt werden, für die das Potential berechnet und mit dem gegebenen Potential der Elektroden verglichen wird. Bei nicht tolerierbaren Abweichungen muss die Ersatzladungspositionierung verbessert werden.

Der Verlauf der berechneten Äquipotentialfläche wird niemals genau mit der gegebenen Elektrodenfläche übereinstimmen. Beide Flächen berühren sich voraussetzungsgemäß in den Konturpunkten. In den dazwischenliegenden Kontrollpunkten wird die Abweichung des berechneten Potentials auf der Elektrodenfläche bestimmt.

Für die *Positionierung der Ersatzladungen* haben sich einige Regeln bewährt, Bild 2.5-2:

- Ersatzladungen und Konturpunkte müssen als Paare gesetzt und sollten räumlich zugeordnet werden.
- Der Abstand zwischen Ladung und Konturpunkt sollte etwa dem Abstand zu benachbarten Ladungen entsprechen.

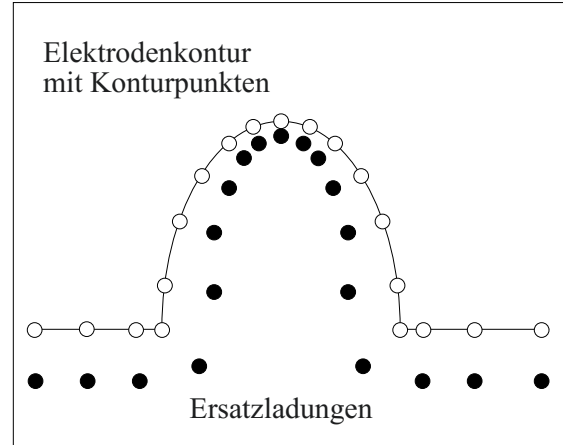


Bild 2.5-2: Setzen von Ersatzladungen und Konturpunkten in Anlehnung an den Verlauf einer gegebenen Elektrodenkontur.

- Je nach Krümmung der Elektrodenkontur sollten die Ladungen enger oder weiter gesetzt werden.
- Veränderungen der Ladungs- und Konturpunktabstände sollten allmählich ohne große Veränderung der benachbarten Abstände erfolgen.

Die *Qualität der Nachbildung* steigt mit Zahl und Dichte der Ersatzladungen. Allerdings darf die Zahl der Ladungen nicht zu groß werden, um numerische Probleme bei der Lösung des Gleichungssystems (2.5-3) zu vermeiden.

Die Wirkung *dielektrischer Grenzflächen* kann durch Flächenladungen oder durch Ersatzladungen beiderseits der Grenzfläche berücksichtigt werden [16]. In Anordnungen mit vielen verschiedenen Materialien resultiert daraus ein erheblicher Mehraufwand, der häufig den Einsatz eines anderen Verfahrens nahe legt.

Elektroden auf *freiem Potential* können berechnet werden, indem Ersatzladungen gesetzt werden, deren Summe gleich Null ist: $\sum Q_i = 0$.

Dadurch ergibt sich eine weitere Gleichung, die bei der Bestimmung des Elektrodenpotentials benötigt wird [16].

Eine Weiterentwicklung des Ersatzladungsverfahrens besteht im Einsatz von *Flächenladungen*, die auch die physikalische Ladungsver-

teilung auf den Elektroden und in den Grenzflächen annähern (Surface Charge Simulation Method, Boundary Element Method).

Anmerkung: Das Ersatzladungsverfahren hat eine enge Beziehung zur physikalischen Ursache der Quellenfelder. Deshalb ist das Ersatzladungsverfahren leicht verständlich und es ist deshalb eine der ersten numerischen Verfahren in der Hochspannungstechnik. Trotzdem sind Position und Verteilung der Ersatzladungen nicht identisch mit der Position und Verteilung physikalischer Ladungen, aber die Beträge entsprechen einander.

2.5.3 Finite-Differenzen-Verfahren

Für die Feldberechnung mit dem Differenzenverfahren wird der Feldraum mit einem regelmäßigen Gitter überzogen, Bild 2.5-3. Das Potential φ_0 in einem Gitterpunkt kann dann als Funktion der Potentiale $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ in den angrenzenden Gitterpunkten angegeben werden, wenn der Verlauf des Potentials $\varphi(x,y,z)$ in die jeweilige Richtung x, y oder z durch eine Taylor-Reihe angenähert wird.

In kartesischen Koordinaten gilt jeweils für eine Veränderung in x -, y - und z -Richtung, ohne Veränderung in die anderen Richtungen

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \Delta x \cdot \partial \varphi / \partial x + (\Delta x^2 / 2) \cdot \partial^2 \varphi / \partial x^2 + \dots,$$

$$\varphi(y) = \varphi_0 + \Delta y \cdot \partial \varphi / \partial y + (\Delta y^2 / 2) \cdot \partial^2 \varphi / \partial y^2 + \dots,$$

$$\varphi(z) = \varphi_0 + \Delta z \cdot \partial \varphi / \partial z + (\Delta z^2 / 2) \cdot \partial^2 \varphi / \partial z^2 + \dots$$

In einer ebenen **zweidimensionalen** Anordnung nach Bild 2.5-3 ergeben sich damit die Nachbarpotentiale von φ_0 , wenn die Taylor-Reihe nach dem zweiten Glied abgebrochen wird:

$$\varphi_1 \approx \varphi_0 + h \cdot \partial \varphi / \partial x + (h^2 / 2) \cdot \partial^2 \varphi / \partial x^2$$

$$\varphi_3 \approx \varphi_0 - h \cdot \partial \varphi / \partial x + (h^2 / 2) \cdot \partial^2 \varphi / \partial x^2$$

$$\varphi_2 \approx \varphi_0 + h \cdot \partial \varphi / \partial y + (h^2 / 2) \cdot \partial^2 \varphi / \partial y^2$$

$$\varphi_4 \approx \varphi_0 - h \cdot \partial \varphi / \partial y + (h^2 / 2) \cdot \partial^2 \varphi / \partial y^2$$

Der Abbruch der Reihe nach dem zweiten Glied bedeutet, dass die Schrittweite h , bzw. die Gitterweite h , nur so groß gewählt werden

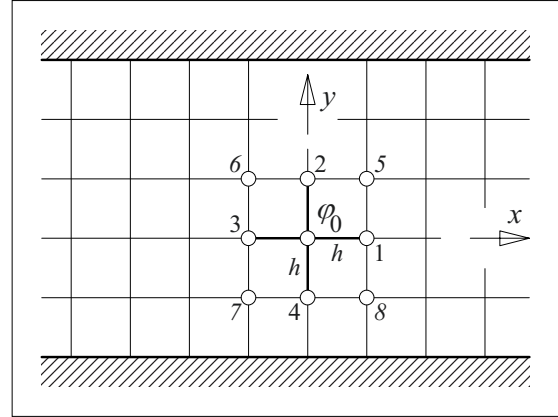


Bild 2.5-3: Diskretisierung des Feldraumes durch ein quadratisches Gitter für die Feldberechnung nach dem Differenzenverfahren.

darf, dass sich der Potentialverlauf noch mit ausreichender Genauigkeit durch ein Polynom zweiter Ordnung annähern lässt. Bei sehr inhomogenen Feldern kann dies sehr kleine Gitterelemente und eine sehr großen Anzahl von Gitterpunkten erfordern.

Die Summe der vier Nachbarpotentiale ergibt

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 4 \cdot \varphi_0 \quad (2.5-4)$$

Dabei heben sich die Terme mit den ersten Ableitungen aufgrund entgegengesetzter Vorzeichen auf. Die Summe der Terme mit den zweiten Ableitungen ist nach der Potentialgleichung (2.3-32) für den raumladungsfreien Fall ebenfalls gleich Null. Das Potential φ_0 ergibt sich also nach Gl. (2.5-4) als Mittelwert der vier Nachbarpotentiale („Viereckformel“):

$$\varphi_0 = (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) / 4 \quad (2.5-5)$$

φ_0 kann in gleicher Weise aus den diagonal angeordneten Potentialen berechnet werden („Diagonalformel“):

$$\varphi_0 = (\varphi_5 + \varphi_6 + \varphi_7 + \varphi_8) / 4 \quad (2.5-6)$$

Durch eine analoge Ableitung ergeben sich die entsprechenden Gleichungen für **dreidimensionale** Felder. Für benachbarte Punkte gilt beispielsweise die „Würfelformel“, Bild 2.5-4:

$$\varphi_0 = (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5 + \varphi_6) / 6 \quad (2.5-7)$$

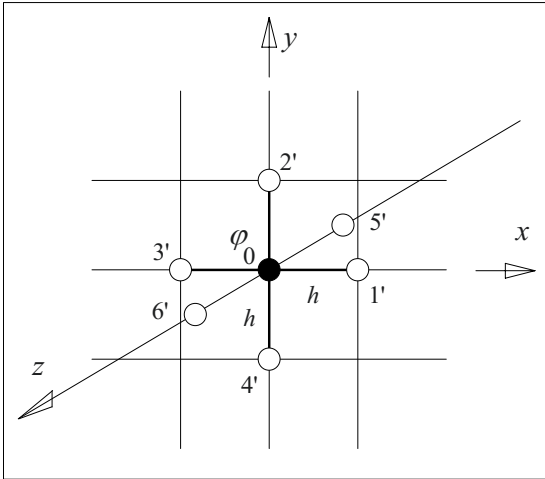


Bild 2.5-4: Diskretisierung des Feldraumes für die dreidimensionale Feldberechnung nach dem Differenzenverfahren.

Das Differenzenverfahren erlaubt auch die Berechnung **geschichteter Dielektrika**. Innerhalb der Materialien sind die o.g. Gleichungen gültig. Für Punkte auf einer Grenzfläche liegen benachbarte Punkte auf beiden Seiten dieser Grenzfläche, Bild 2.5-5. Die Summation der Potentiale analog zu Gl. (2.5-4) ist dann so vorzunehmen, dass die Grenzbedingungen nach Gl. (2.4-13) bis (-16) erfüllt sind. Dies führt zu einer unterschiedlichen Gewichtung der einzelnen Potentiale. Analog zu Gl. (2.5-5) ergibt sich für die Viereckformel beispielsweise das Grenzflächenpotential [16]

$$\varphi_0 = \frac{1}{4} \left\{ \varphi_1 + \varphi_3 + 2 \cdot \frac{\varepsilon_{r1} \varphi_2 + \varepsilon_{r2} \varphi_4}{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}} \right\} \quad (2.5-8)$$

Werden die o.g. Gleichungen auf alle Punkte des Gitters angewandt, ergibt sich ein lineares *Gleichungssystem*, für dessen Lösung die *Kenntnis aller Randpotentiale* erforderlich ist.

Das Differenzenverfahren kann mit *geringem Aufwand*, z.B. für eine iterative Lösung des Gleichungssystems programmiert werden. Es war deshalb eines der ersten numerischen Verfahren im praktischen Einsatz [4].

Beispiel: Belagsrand im Kondensatordielektrikum

Die Potentialverteilung in der Nähe des Belagsrandes in einem Kondensatordielektrikum soll mit Hilfe des Dif-

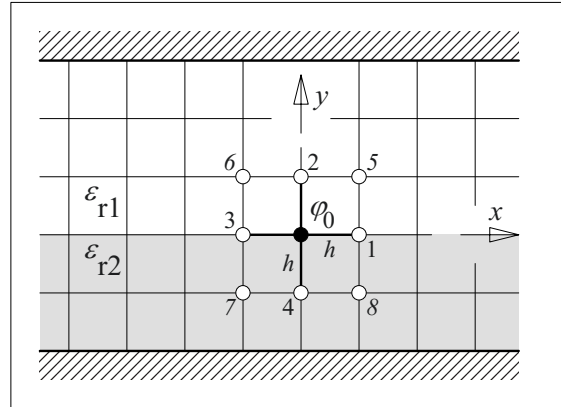


Bild 2.5-5: Berechnung geschichteter Dielektrika mit dem Differenzenverfahren.

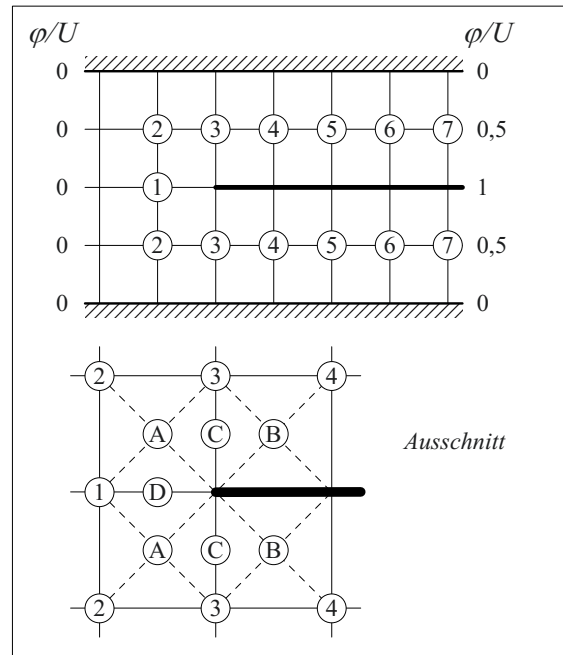


Bild 2.5-6: Berechnung eines Kondensatordielektrikums mit Hilfe des Differenzenverfahrens.

ferenzenverfahrens berechnet werden. Bild 2.5-6 zeigt einen Schnitt durch die ebene Anordnung (vgl. Bild 2.4-30). Um eine übersichtliche, nachvollziehbare Rechnung zu ermöglichen, wird die Maschenweite des Gitters sehr grob gewählt.

Für die Rechnung müssen *alle* Randpotentiale bekannt sein. Die Elektrodenpotentiale werden deshalb auf $\varphi/U = 1$ bzw. $\varphi/U = 0$ gesetzt. Da es sich um eine links und rechts offene Anordnung handelt, gibt es noch weitere Randpunkte, deren Potentiale ebenfalls vorgegeben werden müssen. Wegen der Feldhomogenität in den jeweiligen Außenbereichen werden diese Randpotentiale auf $\varphi/U = 0$ (links) und $\varphi/U = 0,5$ (rechts) gesetzt.

Aufgrund der Symmetrie der Anordnung kann die Berechnung auf die Potentiale φ_1 bis φ_6 in der unteren (oder der oberen) Hälfte der Anordnung beschränkt werden. Die Lösung des Gleichungssystems auf der Basis der Viereckformel (2.5-5) erfolgt durch Iteration und beginnt mit den Startwerten $\varphi_i = 0$.

Die iterative Neuberechnung von Potentialen nach Gl. (2.5-5) schreitet von φ_6 (rechts) bis φ_1 (links) fort. Im nächsten Iterationsschritt wird die Iterationsrichtung umgekehrt usw. Dadurch erhält man eine raschere Konvergenz. Nachfolgend sind mehrere Iterationsschritte dargestellt:

| Rich- tung | φ_1/U | φ_2/U | φ_3/U | φ_4/U | φ_5/U | φ_6/U | φ_7/U (Rand) |
|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|-------------------------|
| Start: | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,5 |
| ← | 0,292 | 0,084 | 0,334 | 0,336 | 0,344 | 0,375 | 0,5 |
| → | | 0,156 | 0,373 | 0,429 | 0,451 | 0,488 | 0,5 |
| ← | 0,337 | 0,147 | 0,405 | 0,463 | 0,479 | 0,488 | 0,5 |
| → | | 0,186 | 0,412 | 0,473 | 0,490 | 0,498 | 0,5 |
| ← | 0,344 | 0,188 | 0,416 | 0,476 | 0,493 | 0,498 | 0,5 |
| → | | 0,190 | 0,417 | 0,477 | 0,494 | 0,499 | 0,5 |
| ← | 0,345 | 0,190 | 0,417 | 0,478 | 0,494 | 0,499 | 0,5 |

Die Iteration wird abgebrochen, wenn sich die Potentialwerte von Iterationsschritt zu Iterationsschritt nur noch innerhalb einer festgelegten Schranke verändern (hier $\Delta\varphi/U < 0,001$).

Durch *Interpolation* können mit Hilfe der Diagonalformel (2.5-6) auch Potentialwerte in Zwischenpunkten, z.B. in A, B, C und D berechnet werden, Bild 2.5-6 (Ausschnitt):

$$\varphi_A = 0,25 \cdot (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + U) = 0,488 U$$

$$\varphi_B = 0,25 \cdot (\varphi_3 + \varphi_4 + U + U) = 0,724 U$$

$$\varphi_C = 0,25 \cdot (\varphi_3 + \varphi_A + \varphi_B + U) = 0,658 U$$

$$\varphi_D = 0,25 \cdot (\varphi_1 + \varphi_A + \varphi_A + U) = 0,580 U$$

Für die Zeichnung eines *Feld-* bzw. *Potentiallinienbildes* müssten die Äquipotentiallinien durch Interpolation zwischen den berechneten Potentialen der festen Gitterpunkte ermittelt werden. Für diesen Zweck ist das Gitter im Beispiel viel zu grob.

Das Ergebnis zeigt allerdings deutlich, dass vor der Belagskante eine *Feld-* bzw. *Potentiallinienkonzentration* eintritt. Man darf dabei aber den berechneten Werten, insbesondere vor der scharfen Belagskante, wegen des groben Gitters, keine zu große Genauigkeit beimessen.

Das Differenzenverfahren hat einige **Nachteile**, so dass in vielen Fällen andere Verfahren besser geeignet sind: Durch das starre, regelmäßige Gitter können *gekrümmte Elektroden- und Grenzflächenkonturen* nur relativ schlecht

angenähert werden. Das Ersatzladungsverfahren und die Methode der Finiten Elemente sind hierbei wesentlich flexibler.

Anmerkung: Bis zu einem gewissen Grade kann die Approximation von Elektroden- und Grenzflächenkonturen durch eine lokale Verzerrung des Netzes verbessert werden. Die Gleichungen (2.5-4) bis (-8) müssen dann modifiziert werden.

Das regelmäßige Gitter kann nicht an den Homogenitätsgrad des Feldes angepasst werden. Eine *feine Diskretisierung* in inhomogenen Bereichen des Feldes erstreckt sich zwangsläufig über den *gesamten Feldraum*. Dadurch muss ein unangemessen hoher Rechenaufwand getrieben werden. Dies wirkt sich bei dreidimensionalen Feldern besonders gravierend aus. Häufig ist hier das Ersatzladungsverfahren die einfachere Methode.

2.5.4 Methode der Finiten Elemente

Für die Methode der finiten Elemente wird der Feldraum ebenfalls mit einem Gitter überzogen. Bei der Berechnung von **Potentialfeldern** werden die *Potentiale der Knotenpunkte* im Gitter so bestimmt, dass die *gesamte Feldenergie minimal* wird.

Dieses Prinzip der Minimierung eines Energiefunktionals ist in anderen Bereichen von Wissenschaft und Technik seit langem eingeführt [16], [36], [37], [38]. Es ist ein großer Vorteil der Methode der finiten Elemente, dass mit standardmäßigen Programmsystemen gleichzeitig *mechanische, thermische, magnetische und elektrische Felder* berechnet werden können (*multi-physics*). Gerade in der industriellen Anwendung müssen Hochspannungsgeräte hinsichtlich vieler verschiedener Beanspruchungen ausgelegt werden.

Anmerkung: Dieser Ansatz ist auch auf **linear überlagerte Felder** (wie z.B. Strömungs- und Verschiebungsfelder) sowie auf **zeitharmonische** oder **transiente Felder** übertragbar. Es müssen dann allerdings *verschiedene Energiebeiträge* summiert und die zeitliche Veränderung der Energieanteile durch eine zusätzliche zeitliche Diskretisierung und eine Berechnung in aufeinanderfolgenden Zeitschritten berücksichtigt werden [282].

Anmerkung: Auch **nichtstationäre Felder** bzw. *elektromagnetische Wellen* können mit dem Ansatz der Minimierung der Energie behandelt werden, wenn *alle Energiebeiträge* im betrachteten Volumen einbezogen werden. Hierzu gehören die gespeicherte elektrische Energie, die gespeicherte magnetische Energie, über Leitungsströme zu- und abgeführte Energie, die Energie einer Raumladungsdichte, die Wirbelstromverlustenergie und ein Zusatzterm, der die sog. Coulomb-Eichung des Vektor-Potentials erlaubt [394].

Die grundlegende Vorgehensweise der Potentialbestimmung durch Minimierung der Feldenergie soll am Beispiel des Plattenkondensators veranschaulicht werden, Bild 2.5-7.

Beispiel:

Minimale Feldenergie im Plattenkondensator

Im homogenen Feld des Plattenkondensators ist das Potential in halbem Abstand zwischen den beiden Elektroden zu bestimmen.

Die Elektroden werden als „Netzknoten“ mit den bekannten Randpotentialen $\varphi_0 = U$ und $\varphi_2 = 0$ interpretiert. Die auf halbem Abstand dazwischenliegende Äquipotentialfläche wird als „Knoten“ 1 mit dem unbekannten Potential φ_1 angesehen, Bild 2.5-7.

Für die Energien in den dazwischenliegenden „Elementen“ 1 und 2 gilt mit Gl. (2.1-11)

$$W_1 = \frac{1}{2} \cdot C_1 \cdot (U - \varphi_1)^2$$

und

$$W_2 = \frac{1}{2} \cdot C_2 \cdot (\varphi_1 - 0)^2.$$
(2.5-9)

φ_1 ist so zu wählen, dass die Gesamtenergie

$$W = \sum W_i = W_1 + W_2 \quad (2.5-10)$$

minimal wird. Da φ_1 das einzige variable Potential ist, ergibt sich das *Minimum der Feldenergie* aus der Bedingung

$$\partial W / \partial \varphi = \partial W_1 / \partial \varphi_1 + \partial W_2 / \partial \varphi_1 = 0.$$

Mit Gl. (2.5-9) folgt daraus

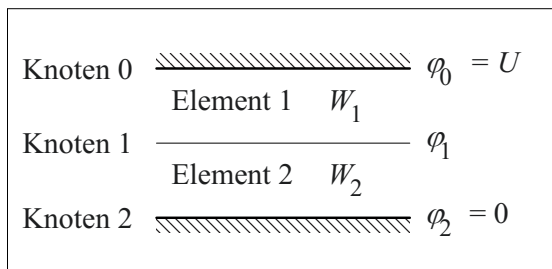


Bild 2.5-7: Potentialberechnung im Plattenkondensator durch Minimierung der Feldenergie (üblicherweise werden dreieckige Elemente gewählt).

$$\frac{1}{2} \cdot C_1 \cdot 2 \cdot (U - \varphi_1) \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot C_2 \cdot 2 \cdot (\varphi_1 - 0) = 0$$

und

$$\varphi_1 = U \cdot C_1 / (C_1 + C_2). \quad (2.5-11)$$

Für $C_1 = C_2$ ergibt sich daraus die *erwartete Lösung*

$$\varphi_1 = U/2 \quad (2.5-12)$$

Anmerkung: Es lässt sich leicht zeigen, dass für den berechneten Extremwert ein *Minimum der Energie* vorliegt. Für die anderen Extremwerte $\varphi_1 = U$ und $\varphi_1 = 0$ ergibt sich jeweils ein Maximum der Energie.

Anhand des vorstehenden Beispiels lässt sich auch zeigen, wie einfach *Feldgebiete mit unterschiedlichen Materialien* berücksichtigt werden können, indem einfach die Feldenergien der betreffenden Elemente mit unterschiedlichen Dielektrizitätszahlen berechnet werden:

Beispiel:

Minimale Feldenergie im geschichteten Dielektrikum

Werden in der Anordnung nach Bild 2.5-7 unterschiedliche Dielektrizitätszahlen $\epsilon_{r1} = 1$ und $\epsilon_{r2} = 2$ angenommen, so ergibt sich für die Kapazitäten bei gleichen Abständen $C_2 = 2 \cdot C_1$. Aus Gl. (2.5-11) folgt unmittelbar die erwartete Lösung

$$\varphi_1 = U/3. \quad (2.5-13)$$

Für eine realistische Feldberechnung muss der Feldraum ohne Rücksicht auf den meist unbekannten Verlauf der Äquipotentialflächen durch ein Netz *diskretisiert* werden. Man wählt bei zweidimensionalen (ebenen und rotationssymmetrischen) Problemen meist *dreieckige* und bei dreidimensionalen Problemen meist *tetraederförmige Elemente*, Bild 2.5-8. Die Eckpunkte der Elemente sind die *Knoten* des Netzes.

Der Feld- bzw. *Potentialverlauf* innerhalb eines Elementes wird für die Berechnung der Feldenergie benötigt. Er wird durch *Interpolation aus den Knotenpotentialen* ermittelt. In Bild 2.5-8 ist eine lineare Interpolation des Potentials zwischen den berechneten bzw. gegebenen Knotenpotentialen dargestellt. In diesem Fall geht man näherungsweise von konstanter Feldstärke im gesamten Element aus.

Die **Diskretisierung** des gesamten Feldraumes mit dreieckigen oder tetraederförmigen Elementen hat im Vergleich zum Differenzenver-

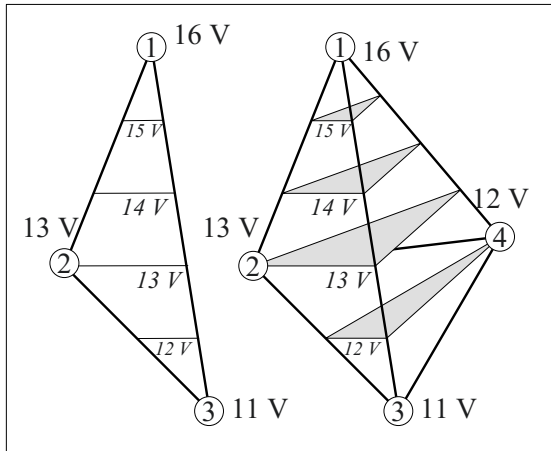


Bild 2.5-8: Dreiecke und Tetraeder als (finite) Elemente für zwei- und dreidimensionale Felder mit linearer Interpolation des Potentials.

fahren den großen Vorteil, dass die Elemente den Verläufen von *Elektrodenkonturen* und *Grenzflächen* angepasst werden können und dass weniger interessierende Feldbereiche durch ein sehr grobes Netz darstellbar sind. Dadurch kann trotz hoher Auflösung in den interessierenden Bereichen die *Zahl der Knoten und Elemente* begrenzt werden, Bild 2.5-9.

Elektroden mit bekanntem Potential, z.B. die Steuerbeläge von Durchführungen, können durch feste Vorgabe von Knotenpotentialen einbezogen werden. Sind die Potentialwerte vollständig frei, d.h. unbekannt, ist eine Nachbildung durch einen Bereich mit extrem erhöhter Dielektrizitätszahl möglich. Das Feld wird dann (wie aus einer metallischen Elektrode) aus diesem Bereich herausgedrängt und das Feld tritt nahezu senkrecht aus der Oberfläche heraus.

Üblicherweise wird das Netz durch einen automatischen *Netzgenerator* in Anlehnung an die gegebenen Konturen erzeugt. Oft ist danach noch eine manuelle Optimierung durch Verschieben, Löschen und Setzen von Knoten möglich. Es ist vor allem darauf zu achten, dass die Abmessungen der Elemente so klein sind, dass (bei linearer Interpolation) von homogener Feldstärke ausgegangen werden darf. Für die **Minimierung der Feldenergie** ist zunächst die Energie der einzelnen Elemente (1, 2, 3, ..., k, ..., n) durch Integration der Feldenergiedichte über das Volumen zu ermitteln:

$$W_k = \int_{V_k} \frac{1}{2} \varepsilon E^2 dV \quad (2.5-14)$$

Die Energie eines einzelnen Elementes kann als Funktion der zugehörigen drei (oder vier) Knotenpotentiale und Knotenpunktkoordinaten ausgedrückt werden:

$$W_k = f(\varphi_p, \varphi_q, \varphi_r, \varphi_s; \mathbf{x}_p, \mathbf{x}_q, \mathbf{x}_r, \mathbf{x}_s) \quad (2.5-15)$$

Die Gesamtenergie ergibt sich als Summe der Energien aller Elemente:

$$W = \sum_{k=1}^n W_k \quad (2.5-16)$$

Das Minimum der Energie wird bestimmt, indem die partiellen Ableitungen nach allen Knotenpunktpotentialen (φ_1 bis φ_m) gleich Null gesetzt werden, so dass sich ein **Gleichungssystem** ergibt:

$$\begin{aligned} \partial W / \partial \varphi_1 &= 0 \\ \partial W / \partial \varphi_2 &= 0 \\ \dots\dots\dots & \\ \partial W / \partial \varphi_j &= 0 \\ \dots\dots\dots & \\ \partial W / \partial \varphi_m &= 0 \end{aligned} \quad (2.5-17)$$

Durch *Auflösung des Gleichungssystems* (2.5-17) ergeben sich die Knotenpunktpotentiale φ_1 bis φ_m . Anstelle der direkten Lösung wird häufig eine *iterative Lösung* vorgenommen, weil damit auch nichtlineare Fälle (z.B. in magnetischen Kreisen oder bei sehr hohen elektrischen Feldstärken) berechnet werden können.

Für die Lösung ist prinzipiell die Kenntnis der **Randpotentiale** an den Grenzen des Feldvolumens (d.h. an den Elektroden) erforderlich. Ränder mit unbekannten Potentialen (z.B. zwischen den Elektroden) können als Feldlinien angesehen werden, auf denen die Potentialflächen senkrecht stehen. Hierauf ist bei der Abgrenzung des zu berechnenden Feldraumes zu achten. Notfalls ist der zu berechnende Raum weit über den interessierenden Bereich hinaus zu erstrecken, um den Einfluss von Feldverzerrungen an den Rändern gering zu halten.

Eine weitere Fehlerquelle besteht in der *Interpolation* des Potentials innerhalb der einzelnen Elemente, wenn die Elemente so groß sind, dass der Potentialverlauf durch die Interpolations- bzw. Approximationsfunktionen nicht mehr ausreichend genau beschrieben wird. Besonders groß können die Fehler bei linearer Interpolation werden, vgl. Bild 2.5-8. Es werden deshalb **Polynome höherer Ordnung** verwendet, die an den Grenzen der Elemente stetige Übergänge von Steigung und Krümmung der Äquipotentiallinien erlauben. Die *Genauigkeit*, aber auch der *Rechenaufwand* und die Gefahr *numerischer Instabilitäten* steigt mit dem Grad der Interpolationspolynome erheblich an.

Beispiel: Vergleich zwischen analytischer und numerischer Lösung

In Anlehnung an das Beispiel nach Bild 2.5-7 soll das Feld eines Zylinderkondensators ($R_i = r_0 = 2 \text{ cm}$, $R_a = r_4 = 10 \text{ cm}$) für $U = 20 \text{ kV}$ durch numerische Iteration bestimmt und mit einer exakten analytischen Lösung verglichen werden, Bild 2.5-10.

Als „Knoten“ werden die Äquipotentialflächen bei $r_0 = 2 \text{ cm}$ ($\varphi_0 = U = 20 \text{ kV}$), $r_1 = 4 \text{ cm}$ (φ_1), $r_2 = 6 \text{ cm}$ (φ_2), $r_3 = 8 \text{ cm}$ (φ_3) und $r_4 = 10 \text{ cm}$ ($\varphi_4 = 0$) gewählt. Mit Hilfe der Kapazitäten C_{01} , C_{12} , C_{23} und C_{34} kann die Feldenergie analog zu Gl. (2.5-9) und (-10) als Funktion der unbekannten Potentiale φ_1 , φ_2 und φ_3 ausgedrückt werden. Aus der Extremwertbedingung gemäß Gl. (2.5-17) folgt durch Nullsetzen der partiellen Ableitungen das *Gleichungssystem* für die unbekannten Potentiale:

$$\begin{aligned} \varphi_1(C_{01}+C_{12}) + \varphi_2(-C_{12}) &= C_{01}U \\ \varphi_1(-C_{12}) + \varphi_2(C_{12}+C_{23}) + \varphi_3(-C_{23}) &= 0 \\ \varphi_2(-C_{23}) + \varphi_3(C_{23}+C_{34}) &= 0 \end{aligned}$$

Aus Gl. (2.3-20) ergeben sich für eine 1 m lange Anordnung die Kapazitäten $C_{01} = 80,2 \text{ pF}$, $C_{12} = 137,1 \text{ pF}$, $C_{23} = 193,3 \text{ pF}$ und $C_{34} = 249,2 \text{ pF}$. Durch iterative oder direkte Lösung des Gleichungssystems können die *Potentiale* zu

$$\varphi_1 = 11,38 \text{ kV}, \varphi_2 = 6,34 \text{ kV} \text{ und } \varphi_3 = 2,77 \text{ kV}$$

bestimmt werden. Für die Bestimmung der *Feldstärken* wird ein linearer Ansatz gewählt:

$$\begin{aligned} E_{01} &= (\varphi_0 - \varphi_1)/(r_1 - r_0) = 4,3 \text{ kV/cm} \\ E_{12} &= (\varphi_1 - \varphi_2)/(r_2 - r_1) = 2,5 \text{ kV/cm} \\ E_{23} &= (\varphi_2 - \varphi_3)/(r_3 - r_2) = 1,8 \text{ kV/cm} \end{aligned}$$

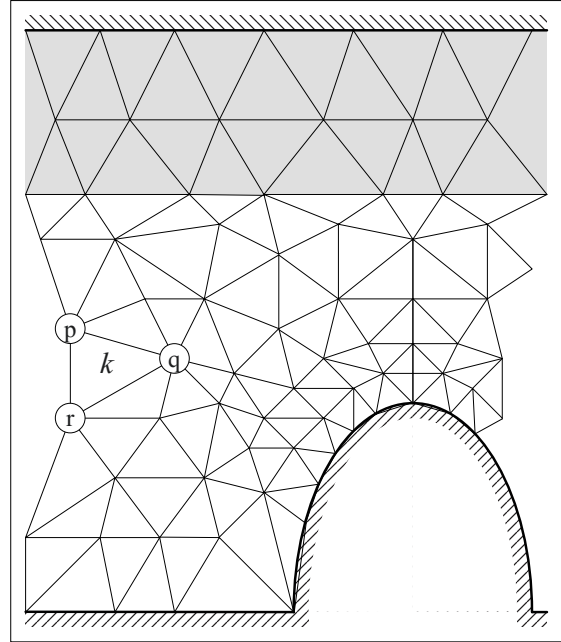


Bild 2.5-9: Diskretisierung des Feldraumes mit finiten Elementen, die den Elektrodenkonturen, den Grenzflächen und dem Homogenitätsgrad des Feldes angepaßt werden können (Ausschnitt).

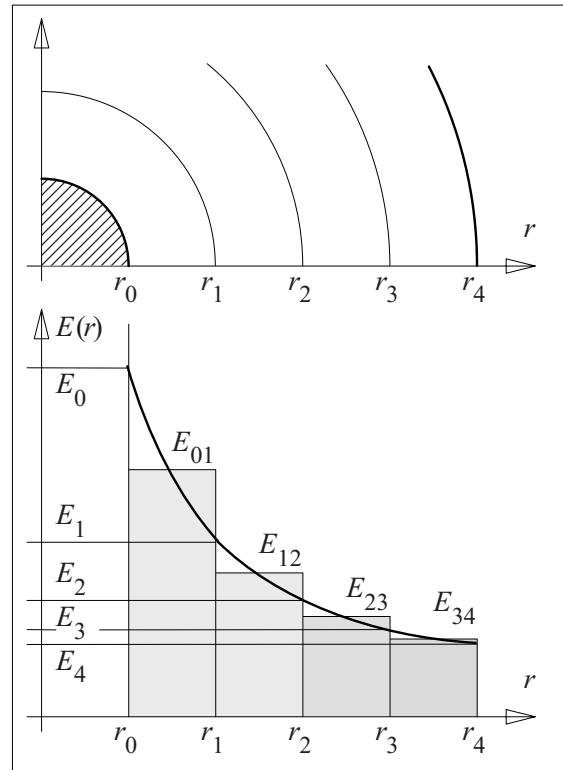


Bild 2.5-10: Vergleich zwischen analytischer und numerischer Lösung am Beispiel eines Zylinderkondensators.

$$E_{34} = (\varphi_3 - \varphi_4)/(r_4 - r_3) = 1,4 \text{ kV/cm}$$

Der *Vergleich* mit einer analytischen Lösung nach Kap. 2.3.1.3 zeigt, dass die Potentialwerte richtig berechnet wurden, weil für die Kapazitätswerte noch keine Näherungswerte, sondern die analytisch berechneten exakten Werte eingesetzt wurden. Trotzdem entstehen bei der Ermittlung der Feldstärken durch lineare Interpolation erhebliche Fehler. Die analytische Rechnung ergibt besonders im inhomogenen Teil des Feldes stark abweichende Werte:

$$E_0 = 6,2 \text{ kV/cm}$$

$$E_1 = 3,1 \text{ kV/cm}$$

$$E_2 = 2,1 \text{ kV/cm}$$

$$E_3 = 1,5 \text{ kV/cm}$$

$$E_4 = 1,2 \text{ kV/cm}$$

Die numerisch berechneten Feldstärken können als *mittlere Feldstärken* der Elemente angesehen werden, Bild 2.5-10. Die Maximalwerte liegen höher, die Minimalwerte niedriger. Die Abweichungen lassen sich durch Wahl kleinerer Elemente und durch Verwendung von Interpolationspolynomen höherer Ordnung erheblich reduzieren.

Programmsysteme zur Feldberechnung mit der Methode der Finiten Elemente bieten Benutzeroberflächen, die den **Anwender** durch den Berechnungsprozess führen und viele Schritte automatisch ausführen, Bild 2.5-11. Für den Anwender steht dabei vor allem das Erlernen programmspezifischer Besonderheiten, die je nach Komplexität und Ausbauzustand des Programmsystems einen ganz erheblichen Arbeitsaufwand bedeuten können. Das zu lösende physikalische Problem, sein Verständnis und das eigentliche Berechnungsverfahren treten dabei oft gefährlich weit in den Hintergrund.

Üblicherweise besteht eine **numerische Feldberechnung** aus mehreren Schritten:

1. Die *geometrischen Daten* von Elektrodenkonturen und den zu berechnenden Bereichen müssen vom Anwender direkt oder in Form von CAD-Datensätzen eingegeben werden. Die **passende Vereinfachung der Geometrie** ist die wichtigste Vorbereitung, die über die Qualität der Berechnung entscheidet: Einerseits scheitert die unkritische Übernahme *aller* konstruktiven Details oft an dem ins Unermessliche steigenden Rechenaufwand. Ande-

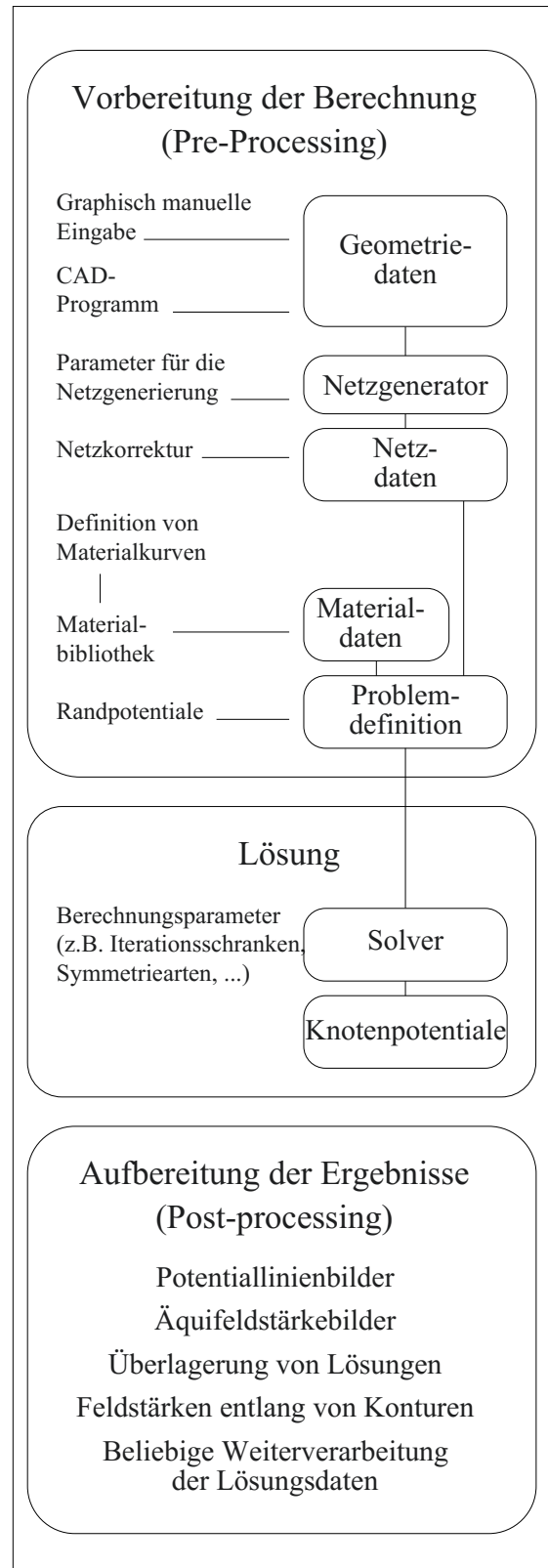


Bild 2.5-11: Struktur eines Finite-Elemente-Programmsystems für die numerische Feldberechnung.

rerseits darf die Vereinfachung *nicht zu grob* werden, um die gewünschte Aussage der Berechnung nicht zu verfälschen.

Dies ist eine *Ermessensaufgabe*, die gerade in Zeiten komplexer und „benutzerfreundlicher“ Programmsysteme vor allem gute analytische Fähigkeiten und ein hoch entwickeltes *physikalisches Verständnis für die Ausbildung elektrischer Felder* erfordert.

D.h. es muss bereits vor Beginn der Berechnung eine *qualitative Vorstellung* von dem zu erwartenden Ergebnis vorliegen.

2. Die **Diskretisierung** der eingegebenen Geometrie erfolgt durch einen automatischen *Netzgenerator*. Hierfür müssen vom Anwender wiederum Parameter vorgegeben werden, die die Feinheit und damit die Qualität des erzeugten Netzes in Abhängigkeit von Geometriedaten (z.B. Krümmungsradien) bestimmen. Dies kann z.B. durch Vorgabe von Knotenpunkten auf den Elektroden oder entlang von Konturen geschehen. Das automatisch erzeugte Netz kann i.d.R. noch einer nachträglichen Kontrolle und einer manuellen *Korrektur* unterworfen werden, z.B. um in wichtigen Teilgebieten eine verbesserte Diskretisierung zu erreichen, oder um Dreiecke mit ungünstigen Seitenverhältnissen weiter zu unterteilen. Auch diese Arbeiten erfordern eine qualitative Vorstellung von dem zu erwartenden Ergebnis.

3. Den erzeugten Netzwerkelementen müssen bereichsweise *Materialwerte* (oder ggf. nicht-lineare *Materialkurven*) und den Rändern *Potentialwerte* zugewiesen werden. Für diese **Definition eines Berechnungsproblems** kann oft auf vordefinierte *Materialien* aus einer *Materialbibliothek* zurückgegriffen werden.

4. Nach diesen Vorbereitungen („Pre-processing“) erfolgt die eigentliche **Lösung des Gleichungssystems** mit einem für das Problem geeigneten mathematischen „*Solver*“. Der Anwender kann wiederum Iterationsschranken, Schrittweiten und den Grad der Interpolationspolynome vorgeben. Er muss dabei einen Kompromiss zwischen Genauigkeit der Rechnung, Rechenzeit und numerischer Stabilität finden. Das *Ergebnis* liegt dann im Form

von *Knotenpotentialen* vor. Die Potentiale im Feldraum ergeben sich aus den Interpolations- bzw. Approximationspolynomen.

Anmerkung: Die Lösung erfolgt oft in mehreren Stufen, in denen auf der Basis eines vorangegangenen Berechnungsdurchlaufes die Diskretisierung für einen weiteren Berechnungsdurchlauf verbessert wird.

Anmerkung: Weiterhin können u.U. auch Routinen programmiert werden, die eine Veränderung von Geometrieparametern in Abhängigkeit von Berechnungsergebnissen erlauben. Dadurch können z.B. Elektrodenkonturen in mehreren Berechnungsdurchläufen *iterativ optimiert* werden um Feldüberhöhungen zu vermeiden.

5. Im Anschluss an die Berechnung kann eine **Aufbereitung der Lösung** bzw. eine *Bearbeitung der Daten* (Post-Processing) mit allen Arten mathematischer Operationen erfolgen. Für die Veranschaulichung des Ergebnisses werden meist *Potentiallinienbilder* oder Bilder mit Linien gleicher Feldstärke erstellt, in die z.B. auch Vektoren eingezeichnet sein können, die Feldrichtung und Feldstärke darstellen. Es ist oft üblich, die Potentiallinienbilder noch farblich zu hinterlegen, um den *Betrag der Feldstärke* darzustellen. Durch *Überlagerung* mehrerer Lösungen können komplexe Vorgänge berechnet werden, wie z.B. das Umpolen einer Gleichspannung durch Überlagerung eines stationären Strömungsfeldes mit einem dielektrischen Verschiebungsfeld, das dem Spannungssprung beim Umpolen entspricht [7], [10]. Für die Beurteilung der elektrischen Beanspruchungen ist es häufig erforderlich, den Verlauf von Feldstärken entlang vorbestimmter *Konturen* darzustellen. Dabei ist i.d.R. auch die Unterscheidung in Feldstärkebeträge, sowie Normal- und Tangentialkomponenten möglich.

6. Abschließend kommt dem Anwender die wichtige Aufgabe zu, die **Plausibilität des Ergebnisses einzuschätzen**. Leider führt die Komplexität moderner Feldberechnungssysteme dazu, dass Eingabefehler unerkannt bleiben und oft nur an einem nicht-plausiblen Feldbild sichtbar werden. Für diese Bewertung ist die schon o.g. physikalische Vorstellungskraft erforderlich. Außerdem können z.B. bekannte Feldstärkewerte in Teilbereichen des Feldbildes analytisch nachgerechnet werden.

2.6 Schnell veränderliche Felder und Wanderwellen

Bei den bisher behandelten langsam veränderlichen Feldern wurde vorausgesetzt, dass innerhalb der betrachteten räumlichen Abmessungen Laufzeiterscheinungen keine Rolle spielen. Feldänderungen laufen so langsam ab, dass sie im betrachteten Feldgebiet näherungsweise als gleichzeitig angesehen werden dürfen. Diese Bedingung wurde bereits in Kap. 2.1.4.4 mit Gl. (2.1-36) bis (-38) formuliert.

Sind die Voraussetzungen der quasistationären Betrachtungsweise nicht mehr erfüllt, müssen die Maxwell'schen Gleichungen in vollständi-

ger Form zur Beschreibung des nichtstationären *elektromagnetischen Wellenfeldes* herangezogen werden, vgl. Kap. 2.1.4.4.

Im Zusammenhang mit Blitzstoßspannungen und Fast Transients gibt es in der Hochspannungstechnik eine Reihe schnellveränderlicher Beanspruchungen (vgl. Kap. 2.2.4 und 2.2.5), die sich im wesentlichen als *leitungsgebundene Wanderwellen* beschreiben lassen.

Anmerkung: Elektromagnetische Wellen, die sich frei, d.h. nicht leitungsgebunden ausbreiten, gehören nicht zu den typischen Beanspruchungen der Hochspannungstechnik. Lediglich im hoffentlich hypothetischen Fall einer nuklearen Explosion außerhalb der Atmosphäre befürchtet man durch den nuklearen elektromagnetischen Impuls (NEMP) auch eine Gefährdung energie-technischer Betriebsmittel.

Freie elektromagnetische Wellen können allerdings in Messsysteme einkoppeln und die *Messsignale* in Stoßspannungs- und Teilentladungsmeßsystemen verändern [5], [18], [19]. Darüber hinaus kann das Strahlungsfeld aber auch gezielt für die *Diagnostik*, insbesondere für die Teilentladungserfassung eingesetzt werden.

Nachfolgend werden leitungsgebundene Wanderwellen (Kap. 2.6.1), Reflexionen (Kap. 2.6.2) und Beispiele (Kap. 2.6.3) betrachtet.

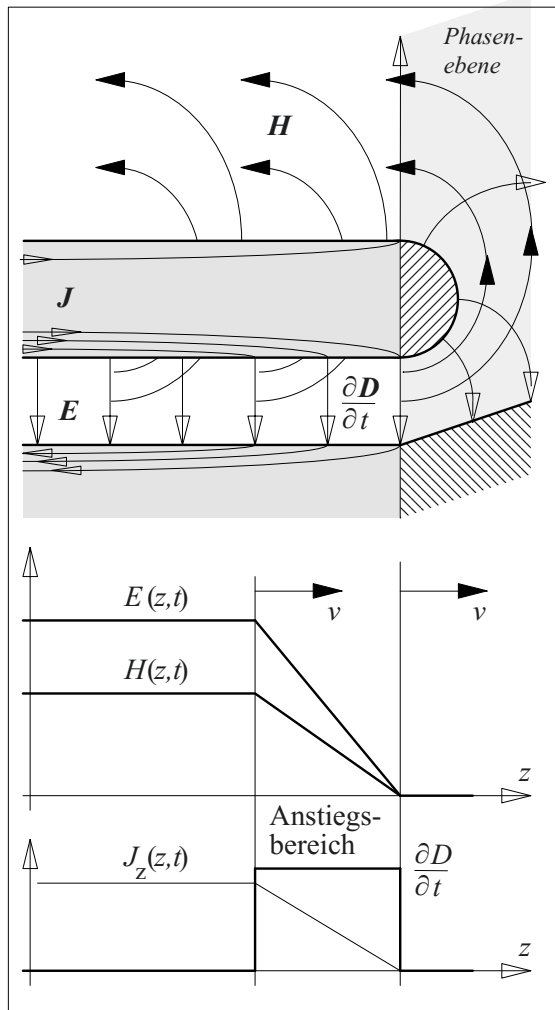


Bild 2.6-1: Ausbreitung einer leitungsgebundenen TEM-Welle mit linear ansteigenden elektrischen und magnetischen Feldstärken.

2.6.1 Leitungsgebundene TEM-Welle

Ein rasch ansteigendes elektrisches Feld zwischen den Leitern einer Leitung ist mit einem Verschiebungsstrom zwischen den Leitern verbunden, Bild 2.6-1. Er setzt sich über den in einer oberflächlichen Schicht in Leitungsrichtung fließenden Leitungsstrom fort. Die dem Strom zugeordneten magnetischen Feldlinien schließen sich um den oberen Leiter.

Im Anstiegsbereich der Feldgrößen handelt es sich um eine *elektromagnetische Welle* mit rechtwinklig zugeordneten Vektoren \mathbf{E} (elektrische Feldstärke), \mathbf{H} (magnetische Feldstärke) und \mathbf{v} (Phasengeschwindigkeit). Die zeitlich veränderlichen Feldgrößen \mathbf{E} und \mathbf{H} bedingen sich dabei gegenseitig über das Induktionsgesetz und das Durchflutungsgesetz, vgl. auch Bild 2.1-17. Wegen den zur Ausbreitungsrichtung transversalen elektrischen und magnetischen Feldvektoren bezeichnet man

diesen Ausbreitungsmodus als TEM-Modus (bzw. als TEM-Welle).

Anmerkung: Neben diesem Grundmodus sind auch noch weitere Moden zwischen den beiden Leitern ausbreitungsfähig, sie spielen jedoch für die elektrischen Beanspruchungen eine untergeordnete Rolle.

Eine wesentliche Vereinfachung der Betrachtung ergibt sich, wenn *infinitesimal kleine Leitungsabschnitte* Δz betrachtet werden, in denen von *quasistationären Verhältnissen* ausgegangen werden darf, Bild 2.6-2. Anstelle der Feldgrößen E und H darf dann mit den **integralen Größen Spannung u und Strom i** gerechnet werden.

Zunächst soll eine **verlustlose Leitung** mit $R' = 0$ und $G' = 0$ betrachtet werden. Aus dem Ersatzschaltbild folgt dann für die Differenz der Spannungen bzw. Ströme an den Stellen z und $z + \Delta z$ (Maschenregel und Knotenregel)

$$u(z + \Delta z) - u(z) = \Delta u = -L' \Delta z \cdot \partial i / \partial t$$

$$i(z + \Delta z) - i(z) = \Delta i = -C' \Delta z \cdot \partial u / \partial t.$$

Durch den Übergang zu infinitesimal kleinen Abschnitten $\Delta z \rightarrow 0$ ergeben sich zwei par-

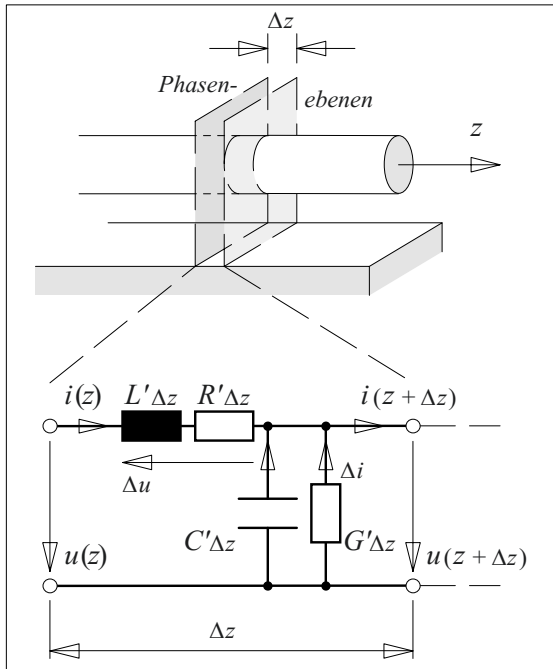


Bild 2.6-2: Beschreibung eines kurzen Leitungsteils durch ein "elektrisch kurzes" Ersatzschaltbild.

tielle Differentialgleichungen für die Orts- und Zeitabhängigkeit der Größen $u(z, t)$ und $i(z, t)$:

$$\partial u / \partial z = -L' \cdot \partial i / \partial t \quad (2.6-1)$$

und

$$\partial i / \partial z = -C' \cdot \partial u / \partial t \quad (2.6-2)$$

Um beide Gleichungen ineinander einsetzen zu können, wird die erste Gleichung nach dem Weg z und die zweite Gleichung nach der Zeit t abgeleitet:

$$\partial^2 u / \partial z^2 = -L' \cdot \partial^2 i / (\partial t \partial z) \quad (2.6-3)$$

$$\partial^2 i / (\partial z \partial t) = -C' \cdot \partial^2 u / \partial t^2 \quad (2.6-4)$$

Durch Einsetzen von Gl. (2.6-4) in Gl. (2.6-3) ergibt sich die Differentialgleichung für die Spannung:

$$\partial^2 u / \partial z^2 = L' C' \cdot \partial^2 u / \partial t^2 \quad (2.6-5)$$

Wird Gl. (2.6-1) nach t und Gl. (2.6-2) nach z abgeleitet, ergibt sich die analoge Differentialgleichung für den Strom:

$$\partial^2 i / \partial z^2 = L' C' \cdot \partial^2 i / \partial t^2 \quad (2.6-6)$$

Die beiden Differentialgleichungen (2.6-5) und (-6) werden auch als **Leitungsgleichungen** bezeichnet. Für die Spannung gilt die allgemeine Lösung

$$u(z, t) = U \cdot \{ f(z - vt) + g(z + vt) \}. \quad (2.6-7)$$

Durch zweimaliges Differenzieren nach z und t und durch Einsetzen kann man zeigen, dass diese Lösung die Differentialgleichungen erfüllt, wenn $v^2 = 1/(L' C')$ gilt. Damit folgt für die **Phasengeschwindigkeit** v als Funktion der Leitungsbeläge L' und C'

$$v = \frac{1}{\sqrt{L' C'}}. \quad (2.6-8)$$

Gl. (2.6-7) beschreibt eine Spannungswandervelle, die aus zwei Anteilen besteht. Der erste Term $f(z - vt)$ entspricht einer sich in $+z$ -Richtung ausbreitenden Wandervelle, weil sich sein Argument bzw. sein Wert nicht ändert, wenn z im gleichen Maße zunimmt wie vt . Der zweite Term $g(z + vt)$ beschreibt dementsprechend eine sich in $-z$ -Richtung ausbreitende Welle, Bild 2.6-3.

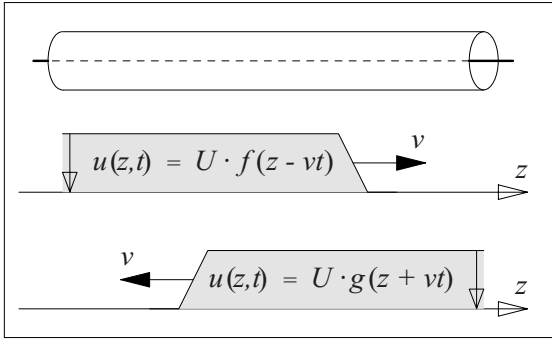


Bild 2.6-3: Spannungswanderwellen in +z- und -z-Richtung als Lösung der Leitungsgleichungen.

Anmerkung: Die Verwendung des *Spannungsbegriffs* bei schnellveränderlichen Vorgängen ist nur mit sehr großer Vorsicht zulässig: Die Definition einer Spannung (eines skalaren Potentials) ist nämlich nur dann möglich, wenn die Integration der elektrischen Feldstärke über dem Weg einen von der Wahl des Weges unabhängigen Wert ergibt, das Ringintegral über $\mathbf{E}d\mathbf{x}$ muss den Wert Null ergeben. D.h. der geschlossene Integrationsweg darf keinen zeitveränderlichen magnetischen Fluss umfassen. Diese Bedingung ist bei der betrachteten TEM-Welle nur in den sogenannten *Phasenebenen* senkrecht zur Leitungsrichtung z erfüllt, weil sie nicht vom magnetischen Feld durchsetzt werden, Bild 2.6-1 und -2. Die Angabe einer Spannung beschreibt also ausschließlich das elektrische Feld in einer Phasenebene. Die Angabe einer Spannung zwischen Punkten, die nicht dieselbe z -Koordinate haben, ist nicht mehr zulässig.

Gleichzeitig mit den Spannungswanderwellen treten *zugehörige Stromwanderwellen* auf, die sich aus der schon angegebenen Lösung für die Spannungswanderwellen ableiten lassen: Gl. (2.6-7) wird nach der Zeit abgeleitet und in Gl. (2.6-2) eingesetzt, aus der die gesuchten Ströme durch Integration bestimmt werden können. Mit

$$\partial u / \partial t = U \cdot \{(-v) \cdot f'(z-vt) + v \cdot g'(z+vt)\}$$

folgt aus Gl. (2.6-2)

$$\partial i / \partial z = U \cdot v \cdot C' \cdot \{f'(z-vt) - g'(z+vt)\}.$$

Durch Integration über z ergibt sich der Strom:

$$i(z,t) = U \cdot v \cdot C' \cdot \{f(z-vt) - g(z+vt)\} \quad (2.6-9)$$

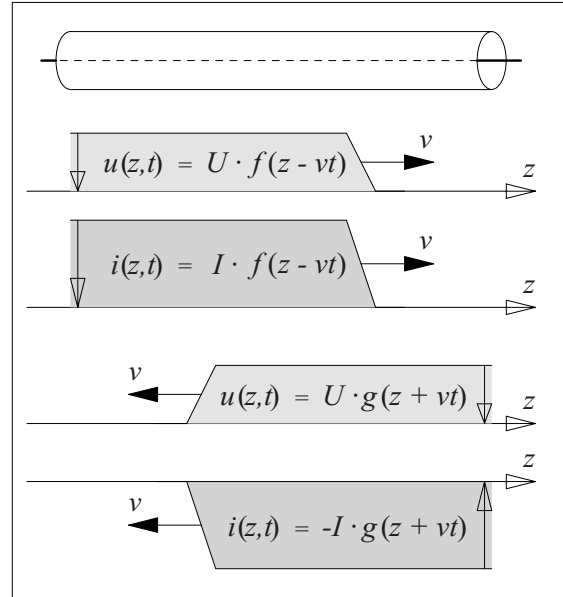


Bild 2.6-4: Zusammengehörige Strom- und Spannungswanderwellen in +z- und -z-Richtung.

Es gibt also auch jeweils eine in +z- und in -z-Richtung fortschreitende Stromwanderwellen. Sie haben unterschiedliche Vorzeichen. Dies bedeutet, dass sich mit der Ausbreitungsrichtung auch die Stromrichtung umkehrt falls die Spannung zwischen den Leitern sich nicht ändert, Bild 2.6-4.

Spannungswanderwelle und Stromwanderwelle mit gleicher Ausbreitungsrichtung *gehören immer zusammen*. Es handelt sich dabei nur um zwei verschiedene mathematische Darstellungsmöglichkeiten ein und desselben physikalischen Prozesses: Spannung und Strom werden nämlich aus dem elektrischen und dem magnetischen Feld *derselben* Wanderwelle abgeleitet.

Die Amplituden der zusammengehörenden Spannungs- und Stromwanderwellen stehen nach Gl. (2.6-9) in einem festen Verhältnis zueinander, dem **Leitungswellenwiderstand** Z_L :

$$Z_L = u/i = 1/(vC')$$

Mit Gl. (2.6-8) folgt hieraus

$$Z_L = \frac{u}{i} = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \quad (2.6-10)$$

Die Leitungsbeläge L' und C' (Induktivitäts- und Kapazitätsbelag) sowie der Leitungswellenwiderstand Z_L hängen von der Ausbreitungsrichtung z ab.

lenwiderstand Z_L hängen von der Art der Leitung und ihren geometrischen Abmessungen ab, Bild 2.6-5. Grundsätzlich gilt, dass der Leitungswellenwiderstand mit zunehmendem Leiterabstand zunimmt und mit zunehmender Leiterfläche abnimmt.

Die Größenordnung von Leitungswellenwiderständen liegt für *Freileitungen* ($C' \approx 10$ nF/km, $L' \approx 1$ mH/km) über 300Ω . Für einen gasisolierten *Rohrleiter* mit dem Radienverhältnis $e:1$ ergibt sich $Z_L = 60 \Omega$. Für ein kunststoffisoliertes *Hochspannungskabel* mit $\varepsilon_r = 2,2$ und $r_a/r_i = e$ folgt $Z_L = 40 \Omega$. Bei *Mittelspannungskabeln* mit großen (Innen-) Leiterquerschnitten ergeben sich noch niedrigere Werte. Koaxiale *Signalkabel* in der Messtech-

nik haben meist einen Leitungswellenwiderstand $Z_L = 50 \Omega$. Für *Transformatorwicklungen* gelten wegen der großen Induktivitäten Leitungswellenwiderstände im Bereich von $10^2 \Omega$ bis $10^4 \Omega$ [45]. Die Werte steigen mit der Nennspannung und sinken mit der Nennleistung.

Die *Phasengeschwindigkeit* v ist für die Grundanordnungen nach Bild 2.6-5 unabhängig von den geometrischen Abmessungen. Im Vakuum und (näherungsweise auch) in Gasen ist v gleich der *Lichtgeschwindigkeit* $v_0 = 300.000 \text{ km/s} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 0,3 \text{ m/ns}$. In Medien mit höherer Dielektrizitätszahl reduziert sich die Phasengeschwindigkeit um den Faktor $\varepsilon_r^{-0,5}$, vgl. Gl. (2.6-8).

| | | | |
|---|--|--|---|
| | | | |
| Koaxiale Leitung | Streifenleitung (Plattenleitung) | Zylinder über Ebene | Zweidrahtleitung |
| Kapazitätsbeläge nach Gl. 2.3-20, -37, -89 und -85: | | | |
| $C' = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln \frac{r_a}{r_i}}$ | $C' = \varepsilon \frac{b}{a}$ | $C' = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln \frac{4h}{d}}$ | $C' = \frac{\pi\varepsilon}{\ln \frac{2a}{d}}$ |
| Äußere Induktivitätsbeläge nach [2] (innere Induktivitäten werden hier vernachlässigt): | | | |
| $L' = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{r_a}{r_i}$ | $L' = \mu \frac{a}{b}$ | $L' = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{4h}{d}$ | $L' = \frac{\mu}{\pi} \ln \frac{2a}{d}$ |
| Leitungswellenwiderstände nach Gl. 2.6-10: | | | |
| $Z_L = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \ln \frac{r_a}{r_i}$ | $Z_L = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{a}{b}$ | $Z_L = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \ln \frac{4h}{d}$ | $Z_L = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \ln \frac{2a}{d}$ |
| Phasengeschwindigkeiten nach Gl. 2.6-8: | | | |
| $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ | $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ | $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ | $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ |

Bild 2.6-5: Leitungsbeläge, -wellenwiderstände und Phasengeschwindigkeiten für grundlegende Leitungstypen.

Beispiel: Blitzeinschlag in eine Freileitung

Bei einem Blitzeinschlag in das Phase-seil einer Freileitung wird ein Spitzenstrom $\hat{I} = 10 \text{ kA}$ eingespeist. Es soll die Höhe der Überspannung abgeschätzt werden.

Der Blitzstrom teilt sich auf zwei von der Einschlagstelle nach beiden Seiten fortschreitende Wanderwellen auf. Mit $Z_L = 300 \Omega$ ergibt sich nach Gl. (2.6-10) ein Spannungsscheitelwert $\hat{U} = 300 \Omega \cdot 5 \text{ kA} = 1,5 \text{ MV}$.

Größe, Form und Richtung der Wanderwelle sind durch die Leitungsgleichungen bzw. durch ihre allgemeinen Lösungen Gl. (2.6-7) und (-8) *noch nicht festgelegt*. Sie richten sich darüberhinaus nach den *Randbedingungen*, d.h. nach den Strömen und Spannungen an den beiden Enden der Leitung, vgl. Kap. 2.6.2.

Analoge Überlegungen lassen sich auch für die **Feldgrößen E und H** in dielektrischen Medien durchführen. Ausgehend von den Maxwell'schen Hauptgleichungen (2.1-14) und (-15) ergeben sich die in Kap. 2.1.4.4 dargestellten Zusammenhänge für den **Feldwellenwiderstand Z** , Gl. (2.1-43), und für die Phasengeschwindigkeit v , Gl. (2.1-42):

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \quad (2.6-11)$$

$$Z = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (2.6-12)$$

In Vakuum und näherungsweise auch in Gasen ergibt sich der (Feld-)Wellenwiderstand des leeren Raumes:

$$Z_0 = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \Omega \quad (2.6-13)$$

Anmerkung: Die Gleichungen (2.6-11), (-12) und (-13) gelten nicht nur für die Feldgrößen der leitungsgebundenen Wanderwelle sondern auch für die Feldgrößen der *freien, nicht leitungsgebundenen TEM-Welle*, vgl. auch Kap. 2.1.4.4.

Beispiel: Feldgrößen in der Streifenleitung

Für den Leitungswellenwiderstand gilt $Z_L = u/i$. Werden Spannung und Strom durch die Feldgrößen E und H ausgedrückt, folgt wegen der zwischen den Leitern nahezu homogenen Wellenfelder

$$Z_L = \frac{u}{i} = \frac{\int E \, ds}{\oint H \, ds} = \frac{E \cdot a}{H \cdot b}.$$

Der Vergleich mit den Gleichungen in Bild 2.6-5 zeigt, dass das Verhältnis der Feldgrößen E und H den Feldwellenwiderstand Z ergibt:

$$\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = Z$$

Die vorstehenden Überlegungen gelten für verlustfreie Leitungen (bzw. für ideale Dielektrika), bei denen die Leitungsbeläge R' und G' in Bild 2.6-2 vernachlässigt wurden. Die **Berücksichtigung von Verlusten** durch konstante Beläge R' und G' führt zu einer exponentiell mit dem Weg *abnehmenden Amplitude* der Wanderwelle (verlustbehaftete Leitungen bzw. nichtideale Dielektrika).

Wenn nicht spezielle Verhältnisse der Leitungsbeläge angenommen werden dürfen („verzerrungsfreie Leitung“), verändert sich auch die *Form der Wanderwelle*, d.h. es tritt i.d.R. eine *Abflachung* der schnellen Anstiege ein. Hierzu trägt z.B. auch bei, dass die Leitungsbeläge *frequenzabhängig* sind, insbesondere R' steigt aufgrund des Skin-effektes mit zunehmender Frequenz stark an.

Bei sehr hohen Spannungen und elektrischen Feldstärken, wie sie z.B. beim Blitzeinschlag

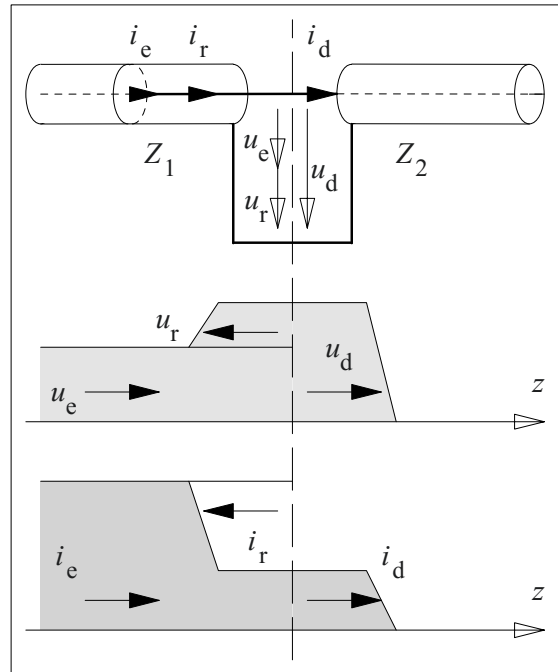


Bild 2.6-6: Reflexion und Brechung einer einlaufenden Wanderwelle an einer Diskontinuität des Leitungswellenwiderstandes.

in eine Freileitung entstehen, können auch *Koronaentladungen* auftreten. Sie müssen durch einen spannungsabhängigen Ableitungsbelag G' berücksichtigt werden. Dieser nichtlineare Effekt führt zu einer verstärkten Dämpfung und Verzerrung der Wanderwelle.

Häufig verzichtet man bei der Betrachtung von Wanderwellenvorgängen jedoch auf eine Berücksichtigung der Dämpfung, da die *unge-dämpfte Welle* meist die härteste Beanspruchung, den sog. „*worst case*“, darstellt.

2.6.2 Reflexionsvorgänge

2.6.2.1 Grundlagen

Am Ende einer Leitung wird das Verhältnis von Spannung und Strom durch das angeschlossene Element bestimmt. Es kann sich dabei um ein einzelnes Bauelement, ein Netzwerk oder eine weiterführende Leitung handeln. Stimmen die Verhältnisse von Spannung und Strom auf der Leitung und am Abschlusselement nicht überein, kommt es zu einer *Reflexion* in Form einer zurücklaufenden Wanderwelle, Bild 2.6-6.

Aufgrund der Maschen- und der Knotenregel muss die Überlagerung von Spannungen und

Strömen der einlaufenden und reflektierten Wellen (Indices „e“ und „r“) gerade die Spannung und den Strom am Abschlusselement ergeben. Wird als Abschlusselement eine weitere Leitung angenommen, so breitet sich in dieser eine durchgehende oder gebrochene Wanderwelle aus (Index „d“):

$$u_e + u_r = u_d \quad (2.6-14)$$

$$i_e + i_r = i_d \quad (2.6-15)$$

Diese Vorstellung ist auch auf ein räumlich konzentriertes Abschlusselement übertragbar, das die „durchgehende“ Welle absorbiert.

Im Falle eines **Leerlaufes** ($Z_2 \gg Z_1$) kann an der Reflexionsstelle *kein resultierender Strom* fließen, d.h. es gilt $i_d = 0$ und $i_r = -i_e$. Nach den Gleichungen (2.6-8), (-9) und (-10) sind den Stromwanderwellen auch Spannungswanderwellen zuzuordnen, für die $u_r = +u_e$ und $u_d = 2u_e$ gilt. Die *Spannung* wird also durch die Reflexion *verdoppelt*, Bild 2.6-7 (links). Dadurch können erhebliche Überbeanspruchungen von Isoliersystemen entstehen.

Im **Kurzschlussfall** ($Z_2 \ll Z_1$) kann an der Reflexionsstelle *keine resultierende Spannung* entstehen. D.h. es gilt $u_d = 0$ und $u_r = -u_e$. Für die zugeordneten Stromwanderwellen ergibt

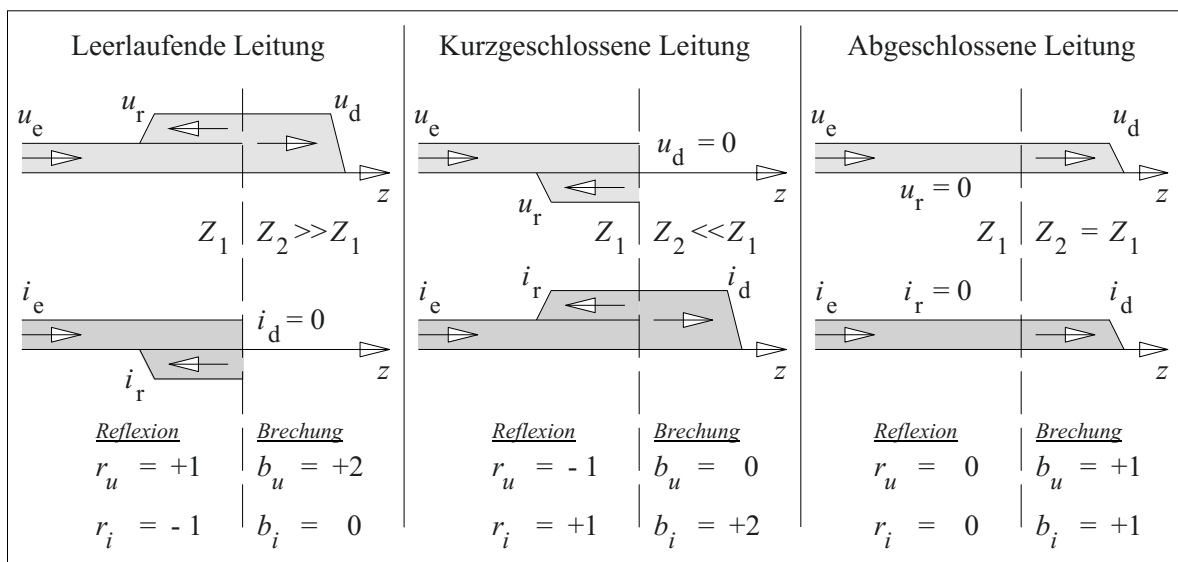


Bild 2.6-7: Reflexion und Brechung einer einlaufenden Wanderwelle an einer Diskontinuität des Leitungswellenwiderstandes für die Sonderfälle der leerlaufenden, der kurzgeschlossenen und der abgeschlossenen Leitung.

sich $i_r = +i_e$ und $i_d = 2i_e$. Der Strom wird also durch Reflexion *verdoppelt*, Bild 2.6-7.

Ist die Leitung durch einen ohmschen Widerstand Z_2 abgeschlossen, der gerade gleich dem Leitungswellenwiderstand Z_L ist, ändern sich Ströme und Spannungen beim Übergang einer Wanderwelle von der Leitung auf den Abschlusswiderstand nicht. Die Energie der einlaufenden Wanderwelle wird vom Abschlusswiderstand reflexionsfrei absorbiert. Man spricht in diesem Fall von „**Anpassung**“, Bild 2.6-7 (rechts).

Im **allgemeinen Fall** müssen die Reflexions- und Brechungs-(Durchgangs-)Faktoren aus Gl. (2.6-14) und (-15) bestimmt werden. Durch Einsetzen von $u_e = i_e Z_1$, $u_r = -i_r Z_1$ und $u_d = i_d Z_2$ ergibt sich aus Gl. (2.6-14)

$$i_e Z_1 - i_r Z_1 = i_d Z_2$$

und

$$i_e - i_r = i_d Z_2 / Z_1.$$

Mit Gl. (2.6-15) folgt daraus

$$2 \cdot i_e = i_d (1 + Z_2 / Z_1).$$

Der *Brechungsfaktor für den Strom* ist damit

$$b_i = \frac{i_d}{i_e} = \frac{2 \cdot Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad (2.6-16)$$

Mit $u_d = i_d Z_2$ und $u_e = i_e Z_1$ ergibt sich auch der *Brechungsfaktor für die Spannung*:

$$b_u = \frac{u_d}{u_e} = \frac{2 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (2.6-17)$$

Aus diesen Gleichungen werden die *Reflexionsfaktoren für Strom und Spannung* durch Einsetzen von Gl. (2.6-14) und (-15) ermittelt:

$$r_i = \frac{i_r}{i_e} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (2.6-18a)$$

$$r_u = \frac{u_r}{u_e} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad (2.6-18b)$$

Allgemein gilt der Zusammenhang

$$r_{u,i} = b_{u,i} - 1. \quad (2.6-19)$$

Bild 2.6-7 stellt die Faktoren nach Gl. (2.6-16) bis (-19) für einige Sonderfälle zusammen.

2.6.2.2 Wellenersatzbild

Nach Gl. (2.6-17) ist die Spannung an einem Übergang zwischen zwei Leitungen oder an einer mit dem Widerstand Z_2 abgeschlossenen Leitung gegeben durch

$$u_d = 2 \cdot u_e \cdot Z_2 / (Z_1 + Z_2).$$

Offenbar kann man die Spannung u_d mit Hilfe eines Ersatzschaltbildes, dem sog. **Wellenersatzbild**, beschreiben, Bild 2.6-8. Dabei wird die Quellenspannung $2 \cdot u_e$ durch einen *Spannungsteiler* aus dem Leitungswellenwiderstand Z_1 und der Abschlussimpedanz Z_2 auf u_d herabgeteilt.

Zu dieser Vorstellung gelangt man auch, wenn man die Leitung 1 als eine Quelle mit der *Leerlaufspannung* $2 \cdot u_e$ und dem *Kurzschlussstrom* $2 \cdot i_e$ ansieht. Daraus ergibt sich eine *Ersatzquelle* mit der Quellenspannung $2 \cdot u_e$ und dem Innenwiderstand $Z_i = (2 \cdot u_e) / (2 \cdot i_e) = Z_1$.

Die Bedeutung des Wellenersatzbildes liegt vor allem in der Möglichkeit, *beliebige Leitungsabschlüsse* aus R, L, C -Netzwerken behandeln zu können [2]: Aufgrund des Zeitverlaufes $u_e(t, z_1)$ an der Reflexionsstelle $z = z_1$ wird der Zeitverlauf $u_d(t, z_1)$ berechnet. Der Zeitverlauf $u_r(t, z_1)$ ergibt sich nach Gl. (2.6-14) als Differenz aus $u_d(t, z_1)$ und $u_e(t, z_1)$:

$$u_r(t, z_1) = u_d(t, z_1) - u_e(t, z_1) \quad (2.6-20)$$

Das Wellenersatzbild beschreibt nur eine *Einfachreflexion*, es ist für Mehrfachreflexionen *nicht* mehr gültig.

Beispiel: Reflexion an einer Kapazität

Eine sprungförmig ansteigende Wanderwelle mit der Spannungsamplitude U auf einer Leitung mit dem Wellenwiderstand Z wird an einer Kapazität C reflektiert, Bild 2.6-9.

Aus dem Wellenersatzbild folgt für u_d eine von 0 auf $2U$ exponentiell ansteigende Spannung mit der Zeitkonstanten ZC . Für u_r ergibt sich nach Gl. (2.6-20) mit

$$u_r(t) = U \cdot \{2 \cdot [1 - e^{-t/(ZC)}] - 1\}$$

eine von $-U$ auf $+U$ ansteigende Spannung. D.h. der kapazitive Abschluss wirkt zunächst, solange C ungeladen

ist, wie ein *Kurzschluss* und nach Aufladung von C wie ein *Leerlauf*. Der einlaufenden Wanderwelle überlagert sich die reflektierte Welle derart, dass die Spannung zunächst in der Wellenfront zu Null kompensiert wird und dann exponentiell auf $2U$ ansteigt, Bild 2.6-9 (links).

Beispiel: Reflexion an einer Induktivität

Eine sprunghörmig ansteigende Wanderwelle mit der Spannungsamplitude U auf einer Leitung mit dem Wellenwiderstand Z wird an einer Induktivität L reflektiert, Bild 2.6-10.

Aus dem Wellenersatzbild folgt für u_d eine von $2U$ auf 0 exponentiell absinkende Spannung mit der Zeitkonstanten L/Z . Für u_r ergibt sich nach Gl. (2.6-20) mit

$$u_r(t) = U \cdot \{2 \cdot e^{-t/(L/Z)} - 1\}$$

eine von $+U$ auf $-U$ absinkende Spannung. D.h. der induktive Abschluss wirkt zunächst, solange kein nennenswerter Strom durch L fließt, wie ein *Leerlauf* und nach Anstieg des Stromes wie ein *Kurzschluss*. Der einlaufenden Wanderwelle überlagert sich die reflektierte Welle derart, dass die Spannung zunächst in der Wellenfront auf $2U$ ansteigt und dann exponentiell auf Null abfällt, Bild 2.6-10 (links).

2.6.2.3 Mehrfachreflexionen

Meistens treten in räumlich ausgedehnten Systemen nicht nur Einfach- sondern auch **Mehrfachreflexionen** auf. Dabei werden die reflektierten Wanderwellen an anderen Leitungsdiskontinuitäten wiederum reflektiert und überlagern sich damit der ursprünglichen Welle. Schon bei wenigen Reflexionsstellen entstehen sehr unübersichtliche Verhältnisse für die räumliche und zeitliche Ausbildung des resultierenden Wellenfeldes.

Es ist deshalb ratsam, die Ausbreitung der Wanderwellen für jede zu betrachtende Leitung in einem „Wanderwellenfahrrplan“ mit Orts- und Zeitachse systematisch darzustellen. Dabei wird die Ausbreitung der Wellen durch sogenannte Wanderungslinien dargestellt, Bild 2.6-11. Die an den Leitungsenden reflektierten und die von außen eingespeisten Anteile werden durch eigene Wanderungslinien berücksichtigt. Aufgrund der Reflexions- und Brechungsfaktoren ergeben sich die Amplituden der zu überlagernden Wellen, es entsteht das sogenannte **Wellengitter nach Bewley** [39].

Als *Einspeisung* ist der jeweilige Momentanwert der einlaufenden Welle anzusehen. Für

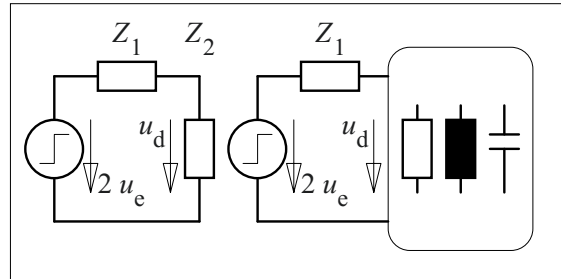


Bild 2.6-8: Beschreibung eines Leitungsendes mit einlaufender Wanderwelle durch eine Ersatzquelle (Wellenersatzbild) und einen ohmschen Leitungsabschluss (links), sowie einen beliebigen R,L,C-Abschluss (rechts).

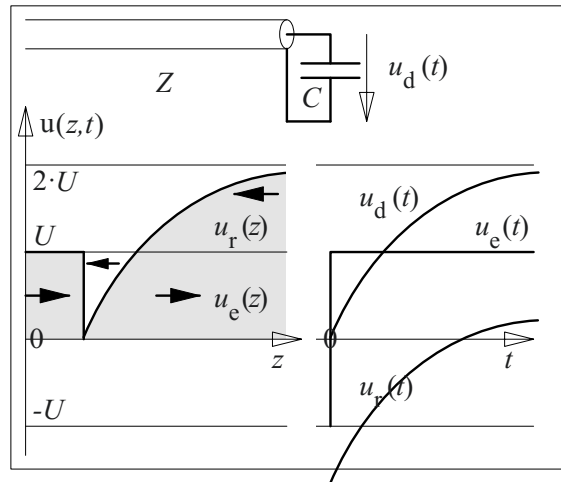


Bild 2.6-9: Reflexion einer sprunghörmigen Wanderwelle an einer Kapazität.

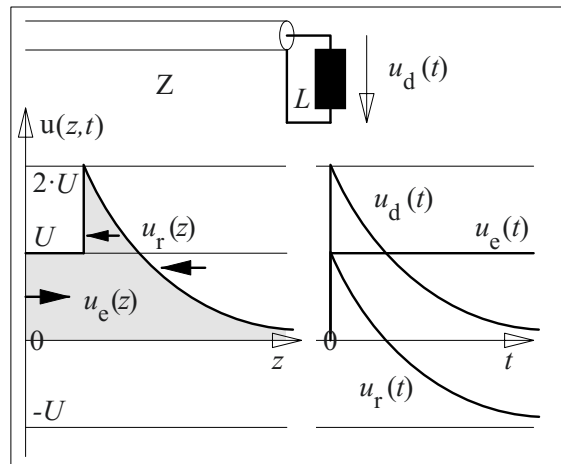


Bild 2.6-10: Reflexion einer sprunghörmigen Wanderwelle an einer Induktivität.

eine übersichtliche Behandlung ist es deshalb erforderlich, die einlaufende Welle zu *diskretisieren*, d.h. nur *einzelne Wellenpunkte* zu betrachten, deren Ausbreitung jeweils durch eine eigene Wanderungslinie verfolgt wird. Dabei wird der jeweilige Amplitudenwert beim Durchgang durch die Stoßstelle von Leitung j nach Leitung k mit dem Brechungsfaktor b_{jk} multipliziert. Bei einer Reflexion auf Leitung j an der Stoßstelle zu Leitung k erfolgt eine Multiplikation mit dem Reflexionsfaktor r_{jk} .

Beispiel: Freileitung zwischen zwei Kabelstrecken

In Bild 2.6-11 sind Zahlenwerte für zwei Kabelstrecken 1 und 3 mit $Z_1 = Z_3 = 40 \Omega$ und eine dazwischenge-

schaltete Freileitungsstrecke 2 mit $Z_2 = 360 \Omega$ eingetragen. Die einlaufende Wanderwelle mit der Amplitude U zum Zeitpunkt $t = \tau$ wurde so diskretisiert, dass die Ausbreitung von drei Wellenpunkten mit den Amplitudenwerten $u_e(t=0) = 0$, $u_e(t=\tau) = U$ und $u_e(t=2\tau) = 0,5 \cdot U$ durch Wanderungslinien verfolgt wird.

Die Amplitudenwerte an den beiden Stoßstellen $z = z_a$ und $z = z_b$ ergeben sich nach Bild 2.6-11 durch Brechung, Reflexion und Überlagerung. Sie werden durch Überlagerung aller hin- und zurücklaufenden Wellen auf einer Seite der Stoßstelle zu dem betrachteten Zeitpunkt ermittelt, Bild 2.6-12:

| | | | | |
|---------|------------|------------|------------|-----------|
| $t = 0$ | $u(z_a) =$ | $0 U$ | $u(z_b) =$ | $0 U$ |
| τ | | $1,800 U$ | | $0 U$ |
| 2τ | | $0,900 U$ | | $0,360 U$ |
| 3τ | | $-0,288 U$ | | $0,180 U$ |

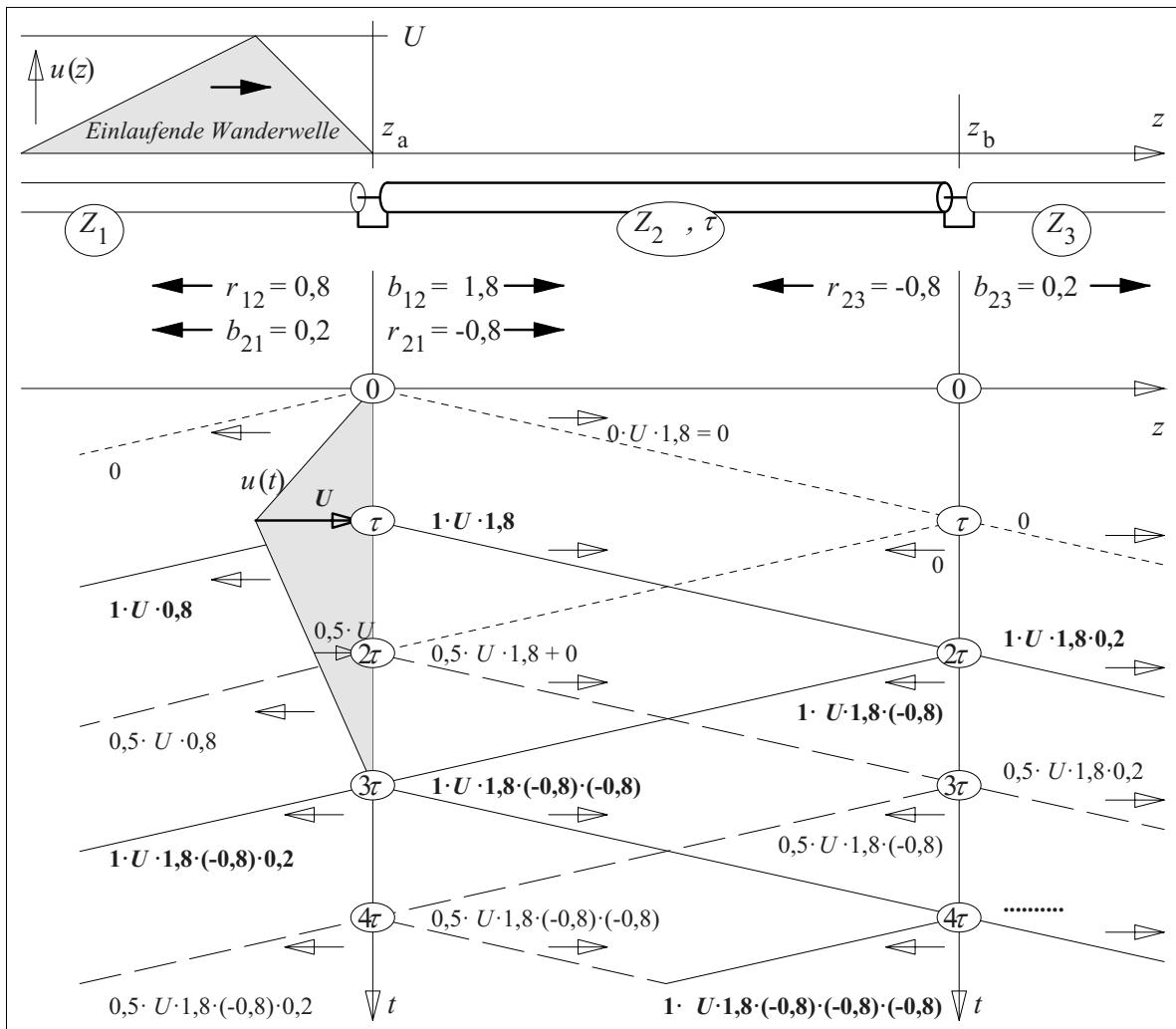


Bild 2.6-11: Beschreibung der Ausbreitung, Reflexion und Brechung von Wanderwellen mit Hilfe eines "Wanderwellenfahrsplans" bzw. eines Bewleyschen Wellengitters anhand eines Beispiels.

| | | |
|---------|------------|-----------|
| 4τ | $-0,144 U$ | $0,230 U$ |
| 5τ | $-0,184 U$ | $0,185 U$ |
| 6τ | $-0,092 U$ | $0,147 U$ |
| 7τ | $-0,118 U$ | $0,074 U$ |

Am *Anfang* der Leitung 2 ($z = z_a$) folgt die Spannung $u_a(t)$ dem Verlauf der einlaufenden Wanderwelle $u_e(t)$. Erst nach der doppelten Laufzeit für $t > 2\tau$ ergeben sich Abweichungen aufgrund der vom anderen Ende der Leitung 2 zurückkommenden Wanderwellen.

Am *Ende* der Leitung 2 ($z = z_b$) tritt die Wanderwelle erst nach der einfachen Laufzeit $t = \tau$ in Erscheinung und die Spannung $u_b(t)$ folgt dem Verlauf der einlaufenden Wanderwelle $u_e(t - \tau)$ zeitversetzt um τ für zwei weitere Laufzeiten.

Anmerkung: Das Beispiel zeigt, dass eine von einem Kabel auf eine Freileitung einlaufende Welle erhebliche Überspannungen durch Reflexion hervorrufen kann. Dies gilt auch für sehr schnelle Übergangsvorgänge in gasisolierten Schaltanlagen an den Durchführungsstellen zu Freileitungen. Am Übergang von einem hohen Leitungswellenwiderstand (Freileitung) auf einen niedrigen Leitungswellenwiderstand (Kabel oder GIS) wird die Überspannung durch Reflexionen herabgesetzt.

Ein weiteres graphisches Verfahren zur Beschreibung von Mehrfachreflexionen ist das **Bergeron-Verfahren** [39]. Dabei werden die Spannungen am Anfang (a) und am Ende (b) einer Leitung in einem u, i -Diagramm durch *Widerstandsgeraden* dargestellt, Bild 2.6-13. Die Steigungen ergeben sich aus den Abschlusswiderständen R_1 und R_2 .

Außerdem lässt sich durch Addition bzw. Subtraktion von Gl. (2.6-7) und (-9) zeigen, dass der Ausbreitung in $+z$ - und in $-z$ -Richtung Geraden mit unterschiedlicher Steigung entsprechen. Für einen bestimmten Wellenpunkt mit konstantem Argument gilt dann für die Ausbreitung in $+z$ -Richtung und in $-z$ -Richtung

$$2 \cdot f(z - vt) = u + i \cdot Z = \text{const.}$$

$$2 \cdot g(z + vt) = u - i \cdot Z = \text{const.} \quad (2.6-21)$$

Die Ausbreitung der Wanderwelle von einem Ende zum anderen Ende der Leitung entspricht dann dem Übergang von einer Widerstandsgeraden zur anderen entlang den von Gl. (2.6-21) beschriebenen Geraden („Bergeron-Geraden“, dünne Linien in Bild 2.6-13). Die Steigung der Bergeron-Geraden ist dabei $du/di = Z$ bzw. $du/di = -Z$. Für die Zeichnung ist es zweckmä-

ßig, die u - und i -Maßstäbe so zu wählen, dass die Bergeron-Geraden unter einem Winkel von 45° zu den Achsen und damit senkrecht zueinander verlaufen. Man beginnt zum Zeitpunkt $t = -\tau$ am Leitungsende (b) mit der Spannung $u_b = 0$ und erreicht zum Zeitpunkt $t = 0$ den Lei-

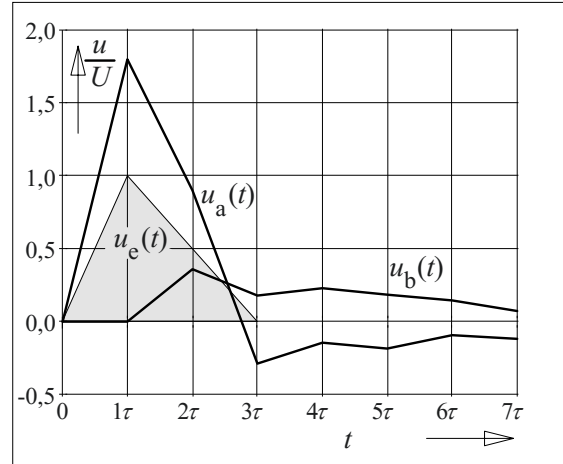


Bild 2.6-12: Spannungsverläufe am Anfang (a) und Ende (b) einer Freileitung, ermittelt mit einem Bewleyschen Wellengitter nach Bild 2.6-11.

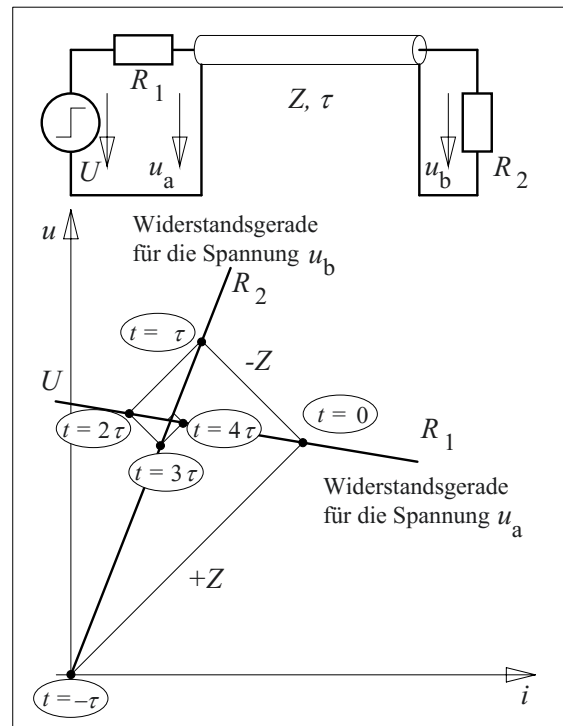


Bild 2.6-13: Beschreibung der Wanderwellenausbreitung nach dem Bergeron-Verfahren.

tungsanfang (a) mit der durch den Spannungssprung auf U hervorgerufenen Anfangsspannung u_a . Die Spannungswerte für Vielfache der Laufzeit τ ergeben sich jeweils auf der zugehörigen Widerstandsgeraden.

Die graphischen Verfahren sind zur Lösung komplexer Probleme oft nicht mehr geeignet. Insbesondere Probleme mit gedämpften Leitungen, nicht-ohmschen Abschlüssen, Frequenzabhängigkeiten und Nichtlinearitäten sind nur noch mit Hilfe von *Netzwerkanalyseprogrammen* lösbar. Dabei können die Leitungen durch eine Reihe elektrisch kurzer Ersatzelemente nach Bild 2.6-2 angenähert oder durch gesteuerte Quellen mit zeitverzögerten Spannungen nachgebildet werden [40].

2.6.3 Beispiele

Wanderwellenerscheinungen spielen in vielen hochspannungstechnischen Anwendungen eine Rolle. Beispielhaft werden Trennerschaltungen in einer gasisolierten Schaltanlage (Kap. 2.6.3.1), der Schutzbereich eines Überspannungsableiters (Kap. 2.6.3.2) und die Impulserzeugung durch Wanderwellengeneratoren (Kap. 2.6.3.3) betrachtet.

2.6.3.1 Gasisolierte Schaltanlage („Fast Transients“)

Beim Zuschalten einer leerlaufenden Leitung auf die spannungsführende Sammelschiene einer gasisolierten Schaltanlage (GIS) durch einen *Trennschalter* kommt es beim Annähern der Schaltkontakte kurz vor der direkten Berührung zur Zündung der restlichen Schaltstrecke, Bild 2.6-14. Auf den Rohrleiter des Abzweigs läuft eine sehr schnell ansteigende Wanderwelle ein (1), die an der Durchführungskapazität reflektiert wird (4). Es handelt sich dabei um die in Kap. 2.2.5 angesprochenen „Fast Transients“, sie können sich in den koaxialen Rohrleitungssystemen einer gasisolierten Schaltanlage mit sehr geringer Dämpfung ausbreiten.

Die durchgehende (gebrochene) Welle teilt sich auf die Freileitung und auf die *parasitäre Leitung* zwischen Schaltanlagenkapselung und leitfähigen Strukturen des Anlagengebäudes auf (Wellen 2 und 3). Die Amplituden der verschiedenen Wanderwellen ergeben sich aus den Leitungswellenwiderständen Z_1 , Z_2 und Z_3 . Außerdem ist im ersten Moment auch die Kapazität C der Durchführung zu beachten, die von der einlaufenden Welle zunächst geladen werden muss, vgl. Bild 2.6-9. Die Spannungsamplitude der einlaufenden Welle ergibt sich nach dem Wellenersatzbild 2.6-8 aus der Spannungsdifferenz zwischen spannungsführender und spannungsfreier Leitung im Zeitpunkt des Schaltstreckendurchbruchs, sowie aus den Leitungswellenwiderständen auf beiden Seiten des Trennschalters. Durch die Reflexion am relativ großen Leitungswellenwiderstand der Freileitung (Z_2) tritt eine erhebliche *Spannungsüberhöhung* auf, die die Isolierung von Durchführung, Schaltanlage und Freileitung belastet.

Besonders kritisch ist die zwischen geerdeten Strukturen auftretende Wanderwelle (3). Sie besitzt zwar wegen des relativ niedrigen Leitungswellenwiderstandes Z_3 nur einen Bruchteil der Spannungsamplitude. Sie kann jedoch in nicht ausreichend geschützten *Sekundäreinrichtungen* (Messsysteme, Leittechnik, etc.) erhebliche Schäden verursachen [41]. Die kurzzeitige Potentialanhebung der Kapselung gegen geerdete Strukturen kann beispielsweise zu *rückwärtigen Überschlägen* in Niederspannungskreise, z.B. in informationstechnische Systeme führen. Grundsätzlich verursachen die aus der gekapselten Anlage austretenden Wellen durch die *sehr schnellen Änderungen* der elektrischen und magnetischen Feldgrößen starke Einkopplungen in benachbarte Leitungen und Systeme. Auf die Sicherstellung der elektromagnetischen Verträglichkeit (EMV) zur Vermeidung von Fehlfunktionen und Schäden ist deshalb bei der Anlagenplanung besonderer Wert zu legen.

Anmerkung: Beim *Schließen eines Trennschalters* tritt nicht nur die beschriebene Zündung mit anschließendem Ausgleichsvorgang auf.

Nach Ausgleich des Potentials fließt kein Strom mehr und die Entladung erlischt. Da sich die sinusförmige Spannung auf der Sammelschiene zeitlich ändert, entsteht erneut eine Spannungsdifferenz, die zu einem weiteren Durchschlag der noch nicht ganz geschlossenen Schaltstrecke führt. Bis zum vollständigen Schließen der Schaltstrecke kann so eine *größere Zahl von Wiederzündungen* mit sehr schnell ansteigenden Spannungs- und Stromamplituden entstehen.

Auch bei der *Öffnung eines Trennschalters* treten ähnliche Vorgänge auf. Mit zunehmendem Kontaktabstand vergrößert sich die Durchbruchspannung und damit auch die Amplitude der Spannungswanderwellen. Die von den Wiederzündungen hervorgerufenen Spannungsüberhöhungen überlagern sich dabei Spannungsüberhöhungen aufgrund von langsam veränderlichen Ausgleichsvorgängen (Schaltüberspannungen).

Anmerkung: In *ausgedehnten gasisolierten Schaltanlagen* gibt es sehr unübersichtliche Reflexionsverhältnisse, die außerdem noch vom aktuellen Schaltzustand der Anlage abhängen. Die Isolationsbeanspruchungen durch

Fast Transients werden deshalb oft durch Messung oder durch aufwändige numerische Simulation ermittelt. Beispielsweise erfordert der direkte Anschluss von *Transformatoren* an die gasisolierte Schaltanlage eine besonders sorgfältige Analyse der transienten Vorgänge: Wegen der hohen Leitungswellenwiderstände von Transformatorwicklungen ist mit einer großen Spannungsüberhöhung durch Reflexion zu rechnen. Hinzu kommen, besonders in sehr ausgedehnten Anlagen, Spannungsüberhöhungen durch Resonanz- und Ausgleichsvorgänge.

Anmerkung: Isolierungen können durch Fast Transients auch an Stellen beansprucht werden, die im quasistationären Fall völlig entlastet sind. Beispielsweise teilt sich eine auf einen Durchführungswinkel einfallende Wanderwelle zunächst im Verhältnis der Leitungswellenwiderstände auf die durch die Steuerbeläge gebildeten konzentrischen Leitungen auf, Bild 2.6-15. Dadurch können auch Wellen in die parasitären Leitungen zwischen dem geerdeten Flansch und dem äußeren, geerdeten Steuerbelag, sowie zwischen dem Hochspannung führenden Leiter und dem Hochspannung führenden Steuerbelag einlaufen.

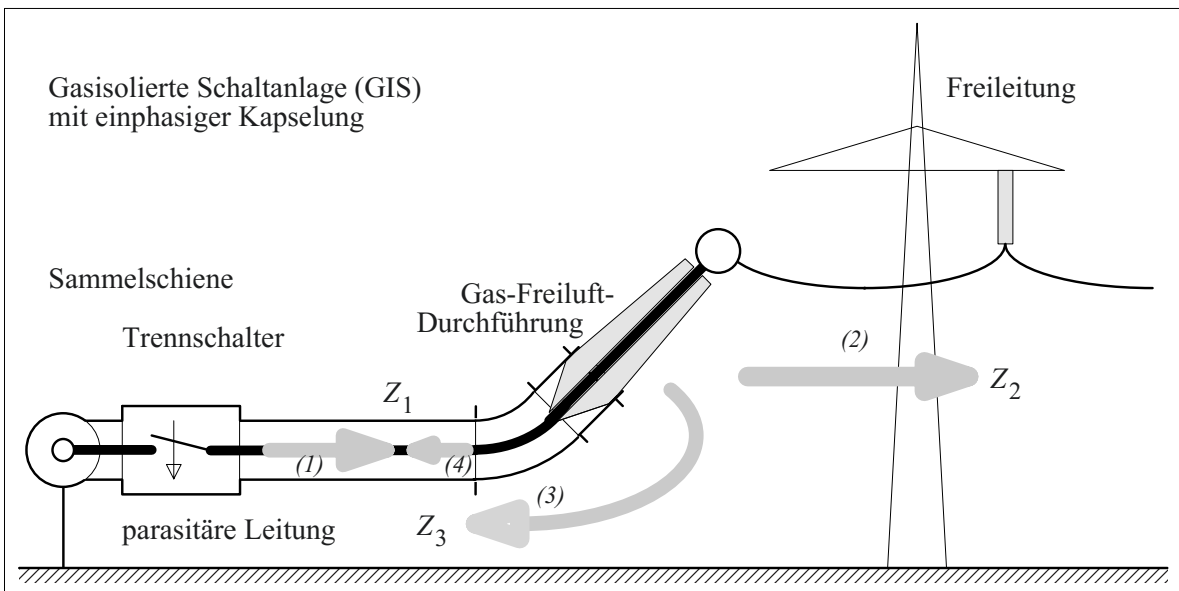


Bild 2.6-14: Entstehung einer Wanderwelle 1 durch Zuschalten eines spannungslosen Abzweigs auf eine spannungsführende Sammelschiene. Die Welle 1 wird an der Gas-Freiluftdurchführung reflektiert (Welle 4) und gebrochen (Welle 2 und 3). Die durchgehenden (gebrochenen) Wellen breiten sich entlang der Freileitung (Welle 2) und auf der parasitären Leitung zwischen Schaltanlagenkapselung und leitenden Gebäudestrukturen aus (Welle 3).

2.6.3.2 Schutzbereich von Überspannungsableitern

Überspannungsableiter sind nichtlineare Bauelemente (Widerstände), die der *Begrenzung von Überspannungen* dienen und die bei Betriebsspannung nur einen sehr geringen Leckstrom aufnehmen. Wirkungsweise und Bauarten sind in Kap. 6.1.4.3 näher erläutert.

Für einen *Metalloxid-Ableiter* steigt der Strom oberhalb der Bemessungsspannung U_r sehr stark an, Bild 2.6-16. Bei Blitzstoßspannungsbeanspruchung ergibt sich mit dem Blitzstrom (der aus einem Wellenersatzschaltbild nach Bild 2.6-8 ermittelt werden kann) und mit der U, I -Ableiterkennlinie eine Spannungsbegrenzung auf den Wert der sog. Restspannung U_{res} , durch die der Blitzstoßspannungs-**Schutzpegel** U_{pl} definiert ist.

Anmerkung: Bei Überspannungsableitern mit *vorgeschalteter Funkenstrecke* wird der Schutzpegel durch die *Ansprechspannung* der Funkenstrecke definiert.

Es wird nun ein Ableiter im Zuge einer Leitung im Punkt 1 betrachtet, Bild 2.6-17 (oben). Solange die Amplitude der *einlaufenden Wanderwelle* unter dem Schutzpegel U_{pl} bleibt, wird vereinfachend angenommen, dass der Ableiter sehr hochohmig bleibt und somit keine Reflexion stattfindet, Bild 2.6-17 (Mitte). Überschreitet die Amplitude der Wanderwelle den Schutzpegel U_{pl} des Ableiters, wird dieser sehr niederohmig und es entstehen *reflektierte und gebrochene Wellen*, die die

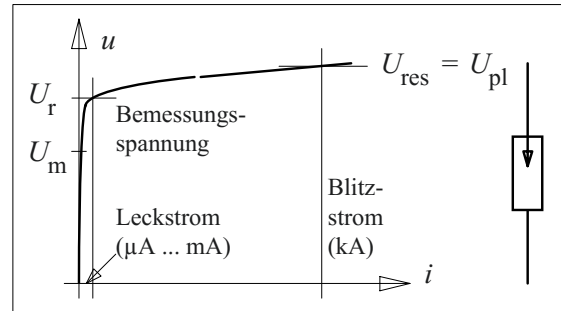


Bild 2.6-16: Idealisierte u, i -Kennlinie eines Metalloxid-Überspannungsableiters.

Spannungsamplituden vor und nach dem Ableiter vermindern, Bild 2.6-17 (unten). Der Verlauf der resultierenden Spannung ist für zwei verschiedene Zeitpunkte durch stärker ausgezogene Linien dargestellt.

Dem Spannungseinbruch am Ableiter um Δu entsprechen zwei sich in $-z$ - und $+z$ -Richtung entgegengesetzt ausbreitende Wanderwellen mit den Spannungsamplituden $-\Delta u$. In Ausbreitungsrichtung der einlaufenden Welle ($+z$ -Richtung) wird damit überall die Spannung auf den Schutzpegel U_{pl} begrenzt. Aber auch vor dem Ableiter ergibt sich sog. **Schutzbereich** L_p , in dem eine vorgegebene Maximalspannung U_{max} nicht überschritten wird. Aus den beiden in Bild 2.6-17 dargestellten Zeitpunkten im unteren Bild ist ersichtlich, dass die Spannungsbegrenzung auf U_{max} im Punkt 2 für jeden Zeitpunkt wirksam ist. Dies bedeutet, dass die ansteigende Spannung der einlaufenden Welle innerhalb des Schutzbereiches L_p

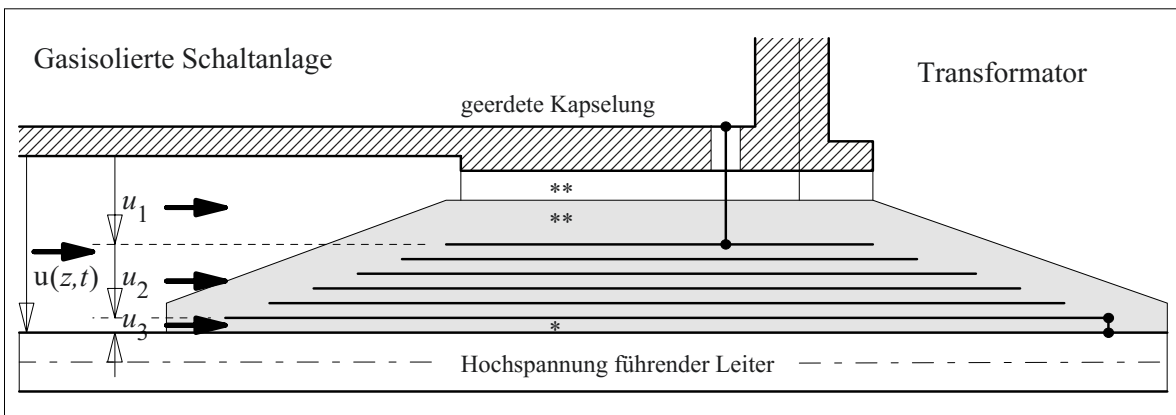


Bild 2.6-15: Beanspruchungen durch Fast Transients unter oder über den Hochspannung oder Erdpotential führenden Belägen, d.h. an Stellen, an denen keine quasistationäre Belastung bestehen kann, (*) bzw. (**).

immer durch die ansteigende Spannung der reflektierten Welle kompensiert wird.

Die grau unterlegte einlaufende Spannungswanderwelle ist gerade für den Zeitpunkt dargestellt, in dem in Punkt 2 der zulässige Spannungswert U_{\max} erreicht wird. Von diesem Zeitpunkt an begrenzt die rücklaufende Welle die Spannungsamplitude. Die Größe des Schutzbereiches L_p soll aus Bild 2.6-17 abgeleitet werden. Für die (räumliche) Steilheit der Wellenstirn gilt

$$\begin{aligned}\Delta u/L_p &= \partial u/\partial z = (\partial u/\partial t) \cdot (\partial z/\partial t)^{-1} \\ &= (\partial u/\partial t) \cdot v^{-1}.\end{aligned}$$

Mit $2 \cdot \Delta u = U_{\max} - U_{pl}$ folgt daraus

$$L_p = \frac{1}{2} \cdot (U_{\max} - U_{pl}) \cdot v / (\partial u/\partial t). \quad (2.6-22)$$

Zahlenbeispiel: Ein Überspannungsableiter mit $U_{pl} = 150$ kV soll eine auf einer Drehstromleitung mit $\partial u/\partial t = 500$ kV/ μ s anstei-

gende Wanderwelle so weit begrenzen, dass im Schutzbereich höchstens 80 % des Blitzstoßspannungspegels für die 123 kV-Ebene erreicht wird (d.h. $U_{\max} = 0,8 \cdot 550$ kV = 440 kV). Die Phasengeschwindigkeit beträgt $v = 300$ m/ μ s. Nach Gl. (2.6-22) ergibt sich für den entsprechenden Schutzbereich $L_p = 87$ m.

Anmerkung: Für den Schutzbereich eines Überspannungsableiters wird auch

$$L_p/m \approx U_m/kV \quad (2.6-23)$$

als Richtwert angegeben [22]. Dabei ist U_m die höchste Spannung für Betriebsmittel (Kap. 6.1.4). Genauere Berechnungsverfahren, in die auch statistische Überlegungen zur Fehlerhäufigkeit und zur akzeptablen Fehlerrate eingehen, ergeben i.d.R. kürzere Schutzbereiche [124].

Anmerkung: Die Berechnung des Schutzbereiches nach Gl. (2.6-22) ist auch für Anordnungen gültig, in denen die weiterführende Leitung in einem *Leerlauf* oder an einem Abschluss mit großer Impedanz (z.B. als Leitung aufgefaste *Transformatorwicklung*) endet [39]. Der Abstand zwischen Ableiter und Leitungsende bzw. -abschluss darf nicht größer als L_p sein. Der Ableiter kann sich auch am Leitungsende befinden.

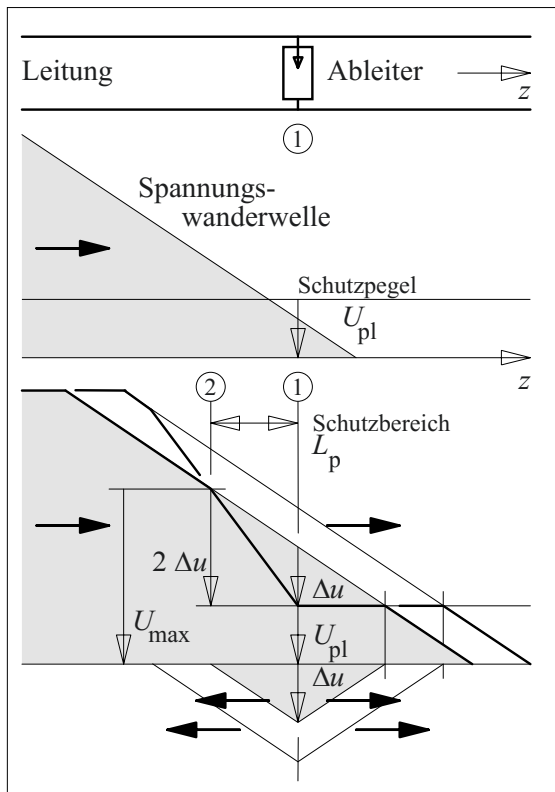


Bild 2.6-17: Schutzbereich eines Überspannungsableiters durch Kompensation der gegenläufigen Spannungswanderwellen nach dem Ansprechen des Überspannungsableiters (unten).

2.6.3.3 Leitungsgeneratoren

Nach dem Prinzip des sogenannten **Kabelgenerators** kann durch die Entladung einer geladenen Leitung die kapazitiv gespeicherte Energie in Form eines sehr schnell ansteigenden Impulses in einer angepassten Last umgesetzt werden, Bild 2.6-18.

Nach Zünden der Schaltfunkenstrecke breitet sich eine Wanderwelle mit der Spannungsamplitude $U/2$ auf der Ausgangsleitung aus und wird in einer an den Leitungswellenwiderstand angepassten Last $R = Z$ absorbiert. Auf der geladenen Leitung (Ladespannung U) breitet sich eine Wanderwelle mit der Spannungsamplitude $-U/2$ in $-z$ -Richtung aus. Nach Reflexion am leerlaufenden Leitungsende breitet sich diese Welle mit $-U/2$ ebenfalls in z -Richtung aus und entlädt die geladene Leitung vollständig. Dadurch entsteht an der Last idealerweise ein *rechteckförmiger Impuls* mit der Spannung $U/2$ und der Halbwertsbreite $t_H = 2 \cdot \tau_L$, die der doppelten Laufzeit auf der geladenen Leitung entspricht.

Anmerkung: In der Praxis verlangsamt die (parasitäre) Induktivität der Schaltfunkenstrecke den Anstieg der Ausgangsspannung $\partial u/\partial t$. Außerdem führen Fehlanpassungen und Leitungsdämpfungen zu weiteren Impulsverzerrungen.

Ein anderes Prinzip besteht in der Entladung zweier paralleler Leitungen im sogenannten **Blumlein-Generator**, Bild 2.6-19. Die beiden Leitungen mit dem Wellenwiderstand Z sind mit ihren Hochspannung führenden Leitern verbunden. Die Last $R = 2Z$ liegt über eine Ausgangsleitung mit dem Wellenwiderstand $2Z$ zwischen den beiden geerdeten Leitern. Nach Aufladung der Leitungen auf die Spannung U ist die Last spannungsfrei, Bild 2.6-19 (oben). Durch Zündung der Schaltfunkenstrecke wird die obere Leitung durch eine Wanderwelle mit der Amplitude $-U$ entladen, vgl. Nr. 1 in Bild 2.6-19 (Mitte). Am ausgangsseitigen Ende der Leitung verändert sich der Wellenwiderstand von Z auf $2Z+Z = 3Z$. Damit sind die Reflexions- und Brechungs-fakto-

ren nach Gl. (2.6-19) und (-17) $r_u = 1/2$ und $b_u = 3/2$. D.h. die reflektierte Welle läuft mit der Spannungsamplitude $-U/2$ zurück, vgl. Nr. 2. Die durchgehende Welle mit der Amplitude $-3U/2$ teilt sich im Verhältnis der Wellenwiderstände auf die zur Last führende Leitung ($-U$) und auf die untere Pulsformungsleitung ($-U/2$) auf. Die Zählrichtung der zugehörigen Spannungen ist im Bild durch Pfeile gekennzeichnet. An der mit $R = 2Z$ angepassten Last entsteht nach Eintreffen der Wellenfront ein Spannungssprung auf $u_R(t) = U$. Die in die Leitungen zurücklaufenden Wellen werden oben am Kurzschluss (KS) der durchgezündeten Schaltfunkenstrecke und unten am Leerlauf (LL) des offenen Leitungsendes mit und ohne Polaritätsumkehr reflektiert, vgl. Nr. 3. An den ausgangsseitigen Leitungsenden ergeben sich die zur Last durchgehenden Teilwellen (analog zur Brechung nach Nr. 2) ohne Veränderung der Amplituden, vgl. Nr. 4. Die

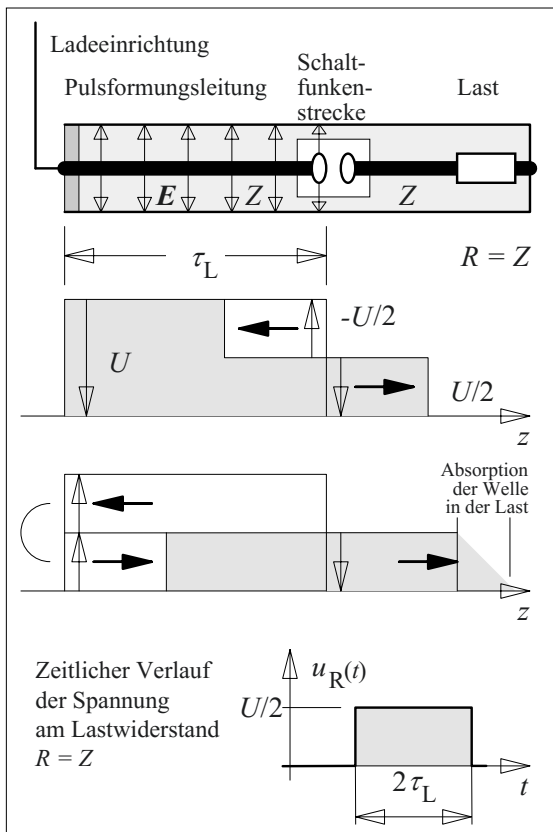


Bild 2.6-18: Erzeugung von Rechteckimpulsen durch Entladung einer Pulsformungsleitung (Leitungsgenerator).

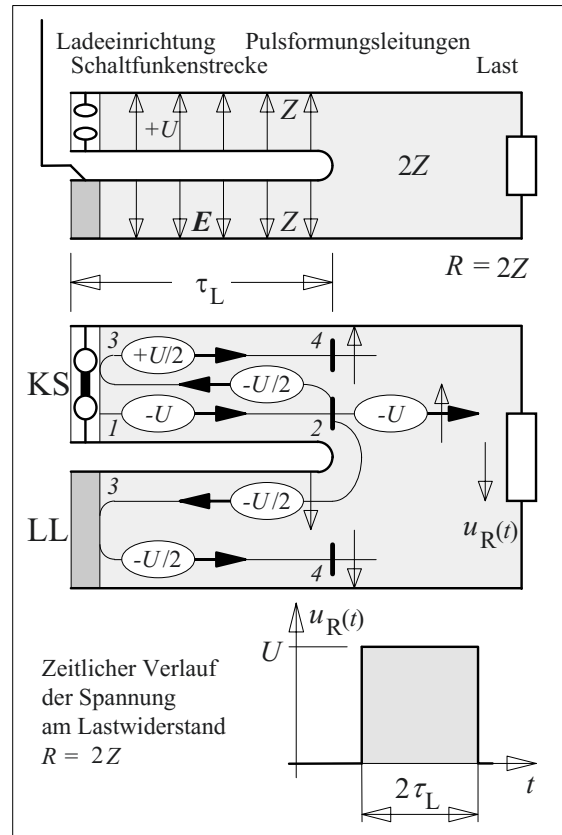


Bild 2.6-19: Erzeugung von Rechteckimpulsen durch Entladung paralleler Pulsformungsleitungen (Blumlein-Generator).

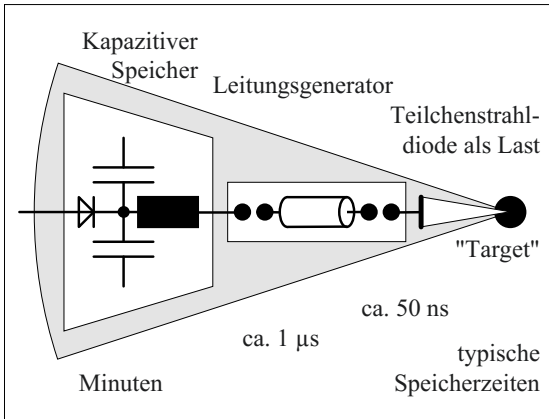


Bild 2.6-20: Modul eines Pulse-Power-Generators mit räumlicher und zeitlicher Kompression der gespeicherten Energie (schematisch).

zugehörigen Feldvektoren sind *gleichgerichtet*, so dass gerade das Feld der ersten zur Last durchgehenden Welle mit einer Zeitverzögerung von $2 \cdot \tau_L$ kompensiert wird. An der Last geht damit die Spannung von U auf 0 zurück. Die weiteren, in die Leitungen zurücklaufenden Wellen kompensieren sich gegenseitig.

Eine wichtige **Anwendung** von Leitungsgeneratoren ist die Erzeugung von Rechteckimpulsen für *Sprungantwortmessungen* an Messsystemen. Hierfür werden vorwiegend Kabelgeneratoren verwendet.

Eine andere Anwendung ist die **Pulsed Power Technologie** zur *räumlichen und zeitlichen Kompression* elektromagnetischer Energie in einem Impuls mit sehr großer Leistung [42]. Zur Erzielung *extremer Energiedichten* werden *mehrere Module* kreisförmig um das „Target“ angeordnet und simultan ausgelöst [14]. Der Leitungsgenerator kann dabei beispielsweise als Treiber für die Beschleunigung von Teilchen in der physikalischen Grundlagenforschung eingesetzt werden, Bild 2.6-20. Dabei wird z.B. Materie in extreme Zustände versetzt, um Fusionsreaktionen auszulösen.

Je nach Spannung und Lastimpedanz wird hierfür entweder das Prinzip des Kabelgenerators oder des Blumlein-Generators verwendet. Die Generatoren können aus coaxialen Leitungen oder aus Plattenleitungen aufgebaut werden [15]. Durch Ausnutzung von Reflexionen an weiteren Ausgangsschaltern ergeben sich

zusätzliche Spannungserhöhungen („Double-bounce switching“), [43]. Als Isoliermedium dient *Wasser* wegen seiner sehr großen Dielektrizitätszahl $\epsilon_r = 81$ und wegen seiner hohen Impulsspannungsfestigkeit. Dadurch kann kurzzeitig sehr viel Energie gespeichert werden. Außerdem wird nach Gl. (2.6-8) die Phasengeschwindigkeit auf $v = v_0/9 = 3 \text{ cm/ns}$ herabgesetzt und die Leitungslänge gegenüber Luft um den Faktor 9 verkürzt. Aufgrund der Leitfähigkeit des Wassers kann Energie nur kurzzeitig (im μs -Bereich) gespeichert werden. Es ist deshalb erforderlich, die wasserisolierte Leitung schwingend aus einer konventionellen Kondensatorbatterie mit etwa gleicher Kapazität (Stoßgenerator, Kap. 6.2.3) aufzuladen und die Schaltfunkenstrecke im Spannungsmaximum auszulösen, ehe eine nennenswerte *Eigenentladung* der wasserisolierten Kapazität stattgefunden hat, Bild 2.6-20. Die gleichzeitige Auslösung der Schaltfunkenstrecken beim *Parallelbetrieb* mehrerer Module stellt extreme Anforderungen an die Triggerung.

Beispiel: Wasserisolierter Impulsgenerator

Es soll ein wasserisolierter Leitungsgenerator nach Bild 2.6-18 aus coaxialen Leitungen für die Erzeugung eines möglichst energiereichen Impulses dimensioniert werden. Der Scheitelwert der Spannung soll $\hat{U} = 500 \text{ kV}$, die Halbwertsbreite $t_H = 50 \text{ ns}$ betragen. Maximale Feldstärke im Wasser ist $\hat{E}_{\max} = 100 \text{ kV/cm}$.

Nach (Gl. 2.3-24) gilt für die maximale Feldenergie einer coaxialen Leitung $R_2/R_1 = e^{0,5} = 1,65$. Mit einer Ladespannung $U = 2\hat{U} = 1 \text{ MV}$ folgen aus Gl. (2.3-22) die Radien $R_1 = 20 \text{ cm}$ und $R_2 = 33 \text{ cm}$. Die Leitungslänge ergibt sich aus der Laufzeit $\tau_L = t_H/2 = 25 \text{ ns}$ als $L = \tau_L \cdot v_0/\epsilon_r^{0,5} = 83 \text{ cm}$.

Aus den Gleichungen in Bild 2.6-5 folgt für die Kapazität $C = 7,5 \text{ nF}$ und für den Leitungswellenwiderstand $Z = 3,3 \Omega$. Die Stromamplitude des Ausgangsimpulses wird damit $\hat{I} = \hat{U}/Z = 150 \text{ kA}$, die Leistung $P = 75 \text{ GW}$.

Die kapazitiv gespeicherte Energie $W = \frac{1}{2} C \cdot U^2 = 3,75 \text{ kJ}$ wird idealerweise vollständig in Impulsenergie $W = \hat{U} \cdot \hat{I} \cdot t_H = 3,75 \text{ kJ}$ umgesetzt. In der Praxis müssen natürlich auch Verluste berücksichtigt werden.

Weitere Impulsstromkreise und viele **Anwendungen** aus der **Hochleistungsimpulstechnik** sind in Kap. 7.3.2 und 7.4.2 beschrieben.

Hochspannungstechnik

Grundlagen - Technologie - Anwendungen

Küchler, A.

2017, XXIII, 659 S. 489 Abb., Hardcover

ISBN: 978-3-662-54699-4