

Bis jetzt haben wir gelernt, die Bahnparameter und eine Anzahl von Kenngrößen, welche die Umlaufbahn eines Planeten um die Sonne beschreiben, zu berechnen. Wir kennen neben der wahren Anomalie oder der Breite vor allem auch den Abstand der Planeten von der Sonne in Abhängigkeit von der Zeit.

Nach der Vorstellung der Rechenmethode beschreiben wir noch einmal kurz die Verhältnisse in der Bahnebene. Das bringt uns zwar eigentlich keine neuen Erkenntnisse, dient aber dazu, die Übersichtlichkeit auf dem vor uns liegenden Rechenweg zu wahren. Der Ausgangspunkt unserer Berechnung ist die Position des Planeten in Polarkoordinaten in der Bahnebene. Der Endpunkt des Rechenweges sind die Koordinaten im Horizontsystem. Das sind die Koordinaten, mit denen ein Beobachter, der auf der Erdoberfläche steht, den Planeten sehen kann. Zur Erreichung unseres Ziels sind eine Reihe von Koordinatentransformationen notwendig:

- Von der Erde einmal abgesehen, sind die Bahnebenen der Planeten um einen kleinen Winkel zur Ebene der Ekliptik geneigt. In einem ersten Schritt werden die Koordinaten von der Bahnebene zu Koordinaten der Ebene der Ekliptik transformiert. Unser Bezugspunkt ist die Sonne. Die ausgezeichnete Richtung ist die zum Frühlingspunkt. Wir erhalten die Koordinaten im heliozentrisch ekliptikalen Bezugssystem.
- Da wir von der Erde aus die Position der Planeten bestimmen wollen, folgt eine Transformation in das ekliptikale System der Erde. Die Bezugsebene ist wieder die Ebene der Ekliptik. Der Koordinatenursprung ist der Erdmittelpunkt und die Bezugsrichtung ist die x-Achse, der Strahl von der Sonne zum Frühlingspunkt.¹ Wir erhalten die Kenngrößen in geozentrischen ekliptikalen Koordinaten.
- Die Erdachse steht nicht senkrecht auf der Ebene der Ekliptik, sondern ist etwas geneigt. Deshalb drehen wir in einem nächsten Schritt die Bezugsebene so, dass

¹Dem Frühlingspunkt kann kein kosmisches Objekt zugeordnet werden. Er befindet sich praktisch beliebig weit entfernt, sowohl von der Sonne als auch von der Erde. Deshalb können wir, ohne einen sich auswirkenden Fehler zu machen, die x-Achse vom Sonnenmittelpunkt zum Frühlingspunkt der x-Achse vom Erdmittelpunkt zum Frühlingspunkt gleichsetzen.

die Erdachse senkrecht auf ihr steht. Die Bezugsebene ist jetzt die Äquatorebene. Der Koordinatenursprung ist nach wie vor der Erdmittelpunkt und die Bezugsrichtung ist der Strahl zum Frühlingspunkt. Das Ergebnis sind geozentrische äquatoriale Koordinaten.

- In einem nächsten Schritt verschieben wir unsere bisherige Bezugsebene parallel bis zum Standpunkt des Beobachters. Dieses Bezugssystem nennt man topozentrisches äquatoriales System. Der Koordinatenursprung ist der Standort des Beobachters. Die Bezugsrichtung ist die Richtung zum Frühlingspunkt.
- Sind der Standort des Beobachters, d. h. die geographische Länge und Breite, sowie der Beobachtungszeitpunkt bekannt, so können die Koordinaten weiterhin in das Horizontsystem umgewandelt werden. Die Bezugsebene ist jetzt die Ebene, die tangential die Erde im Standpunkt des Beobachters berührt. Der Koordinatenursprung ist jetzt der Standpunkt des Beobachters und die Bezugsrichtung ist die Richtung nach Süden.

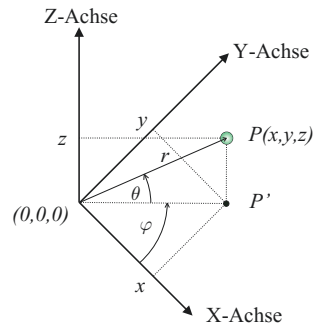
Somit haben wir die Blickrichtung des Beobachters, die Länge, und den Blickwinkel über dem Horizont, die Breite, wenn er auf den Planeten schaut. Doch bevor wir mit den Koordinatentransformationen beginnen, soll die notwendige Rechenmethode beschrieben werden.

2.1 Rechenmethode zur Koordinatentransformation

Wir beginnen mit den bekannten kartesischen Koordinaten. Diese werden in räumliche Polarkoordinaten transformiert. Anschließend wird erläutert, wie zuerst die kartesischen Koordinaten und anschließend die räumlichen Polarkoordinaten in einem anderen Bezugssystem errechnet werden. Im Allgemeinen ist das neue Bezugssystem gegenüber dem alten verschoben und auch verdreht. Das bedeutet den Wechsel in eine andere Bezugsebene, eine neue Bezugsrichtung und Beobachtersposition.

Die Abb. 2.1 zeigt den Zusammenhang zwischen kartesischen und räumlichen Polarkoordinaten. Dabei ist zu beachten, dass der Winkel θ , der ein Maß für die

Abb. 2.1 Zusammenhang zwischen kartesischen und räumlichen Polarkoordinaten



Höhe des Punktes P über der xy -Ebene ist, in Mathematiklehrbüchern üblicherweise zwischen der Verbindungslinie vom Koordinatenursprung $(0, 0, 0)$ zum Punkt P und der z -Achse aufgetragen wird. Hier ist er der Winkel zwischen der Verbindungslinie vom Punkt $(0, 0, 0)$ zum Punkt P' und dem Strahl vom Koordinatenursprung zum Punkt P . Letztgenannter hat die Länge r , den Abstand des Punktes P vom Koordinatenursprung. Die räumlichen Polarkoordinaten $P(r, \theta, \varphi)$ sind mit den zugehörigen kartesischen Koordinaten $P(x, y, z)$ wie folgt miteinander verknüpft:

$$x = r \cos(\varphi) \cos(\theta) \quad (2.1)$$

$$y = r \sin(\varphi) \cos(\theta) \quad (2.2)$$

$$z = r \sin(\theta). \quad (2.3)$$

Die Gleichungen können auch in Matrizenform geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \times r. \quad (2.4)$$

Diese eigentlich einfachen und naheliegenden Beziehungen werden nach Koordinatentransformationen benötigt, um die Polarkoordinaten im neuen System zu ermitteln. Dazu gehen wir folgendermaßen vor. Wir nehmen an, dass die kartesischen Koordinaten bekannt sind. Sie können beispielsweise durch eine Aufgabenstellung gegeben sein, oder wir erhalten sie, was bei unseren Anwendungsfällen vorliegt, durch eine Koordinatentransformation von einem Bezugssystem in ein anderes. Um die zugehörigen Polarkoordinaten zu finden, betrachten wir das Gleichungssystem Gl. (2.1) bis (2.3) oder die Gl. (2.4) in Matrizenform. In beiden Fällen sind die kartesischen Koordinaten (x, y, z) bekannt und es ist jeweils nach den Polarkoordinaten (r, θ, φ) aufzulösen.

Dieses wird nachstehend an einem Beispiel erläutert. Zuvor werden noch die Matrizen R_x , R_y und R_z genannt, die notwendig sind, Drehungen des Koordinatensystems um die entsprechenden Achsen durchzuführen:

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

$$R_y = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

$$R_z = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

In unserem Übungsbeispiel wollen wir das Koordinatensystem (x, y, z) um den Winkel $(-\alpha)$ um die x -Achse drehen.² Die Koordinaten im neuen System sollen (x', y', z') heißen. Anschließend können die zugehörigen räumlichen Polarkoordinaten berechnet werden. Abgesehen von der Entfernung sind das diejenigen Winkel, die, etwas salopp formuliert, ein Beobachter im neuen, gestrichenen System an seinem Fernrohr einstellen muss, um den Punkt P zu sehen. Die neuen kartesischen Koordinaten erhalten wir durch Multiplikation der Rotationsmatrix R_x mit den „alten“ Koordinaten von Gl. (2.4).

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \times r \quad (2.8)$$

Diese Gleichung muss nun ausmultipliziert werden:

$$\begin{aligned} x' &= (1 (\cos(\varphi) \cos(\theta)) + 0 (\sin(\varphi) \cos(\theta)) + 0 \sin(\theta)) r \quad \text{und damit} \\ x' &= (\cos(\varphi) \cos(\theta)) r. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Wir sehen, dass bei der Drehung um die x -Achse die x -Koordinaten unverändert bleiben. Auf die gleiche Weise werden jetzt y' und z' berechnet:

$$y' = (\cos(\alpha) \sin(\varphi) \cos(\theta) - \sin(\alpha) \sin(\theta)) r \quad (2.10)$$

$$z' = (\sin(\alpha) \sin(\varphi) \cos(\theta) + \cos(\alpha) \sin(\theta)) r. \quad (2.11)$$

Jetzt sind die kartesischen Koordinaten des Punktes P vom neuen, gedrehten Koordinatensystem aus gesehen bekannt, und die Rechnung ist eigentlich beendet. Es ist aber vorteilhafter, das Ergebnis in räumlichen Polarkoordinaten (r, θ', φ') vorliegen zu haben. Der Abstand r wird nicht transformiert, weil er sich bei einer Drehung des Koordinatensystems nicht ändert. Jetzt benutzen wir die Gl. (2.1) bis Gl. (2.3) und benennen in ihnen die räumlichen Polarkoordinaten in gestrichene Größen um:

$$\cos(\varphi') \cos(\theta') = \cos(\varphi) \cos(\theta) \quad (2.12)$$

$$\sin(\varphi') \cos(\theta') = \cos(\alpha) \sin(\varphi) \cos(\theta) - \sin(\alpha) \sin(\theta) \quad (2.13)$$

$$\underbrace{\sin(\theta')}_{\text{unbekannt}} = \underbrace{\sin(\alpha) \sin(\varphi) \cos(\theta) + \cos(\alpha) \sin(\theta)}_{\text{alles bekannt}}. \quad (2.14)$$

²Da vielleicht nicht jeder hinreichend Übung mit Matrizenrechnung hat, sei folgende Bemerkung gestattet: Wenn ein Koordinatensystem um den Winkel $+W$ gedreht werden soll, ist in die entsprechende Rotationsmatrix der Winkel $-W$ einzusetzen.

Nun haben wir ein Gleichungssystem mit den Unbekannten θ' und φ' , nach denen umzustellen ist. Ergänzend zu diesem Beispiel soll noch gesagt werden, dass auch Kombinationen von Drehungen in einem einzigen Schritt berechnet werden können. Beispielsweise würde die Kombination einer Drehung um die z -Achse um den Winkel $+\omega$ und anschließend noch um die x -Achse um den Winkel $+i$ wie folgt berechnet werden:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_x(-i) R_z(-\omega) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Weiterhin können Matrizen auch addiert werden. Das heißt bei unseren Anwendungen, dass Bezugssysteme auch längs einer Linie verschoben werden können. Im Anwendungsbeispiel wird unser Koordinatensystem nach den Drehungen noch um die Strecken ϱ_1 , ϱ_2 und ϱ_3 in die x -, y - bzw. z -Richtung bewegt:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_x(-i) R_z(-\omega) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varrho_1 \\ \varrho_2 \\ \varrho_3 \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

2.2 Die Bahnebene

Die Bahnebene ist die Ebene, die durch die Bahn eines Planeten beschrieben wird. Der Bezugspunkt der Polarkoordinaten (u, r) des Planeten ist der Mittelpunkt der Sonne. Die Bezugsebene ist die Bahnebene. Die Bahnebene schneidet im Allgemeinen die Ebene der Ekliptik. Die Schnittlinie der beiden Ebenen ist die Knotenlinie. Der Abstand des Planeten von der Sonne ist die Koordinate r . Die Koordinate des Winkels u ist der Winkel zwischen der Knotenlinie und dem Strahl von der Sonne zum Planeten. Dieses System ebener Polarkoordinaten ist unser „Ausgangssystem“ auf dem etwas mühsamen Weg zum Horizontsystem mit dem Standpunkt des Beobachters auf der Erdoberfläche, unserem „Zielsystem“. Abbildung 2.2 zeigt schematisch die Positionen der Sonne und eines Planeten und die Polarkoordinaten.

2.3 Koordinatentransformationen von der Bahnebene zur Ebene der Ekliptik

Hier soll nun als praktische Anwendung des gezeigten Rechenweges die Transformation der Koordinaten eines Planeten aus der Bahnebene in Koordinaten der Ebene der Ekliptik gezeigt werden. Abbildung 2.3 zeigt schematisch den Zusammenhang von Bahnebene und Ebene der Ekliptik. In den vorhergehenden Kapiteln wurde

Abb. 2.2 Die räumlichen Polarkoordinaten in der Bahnebene

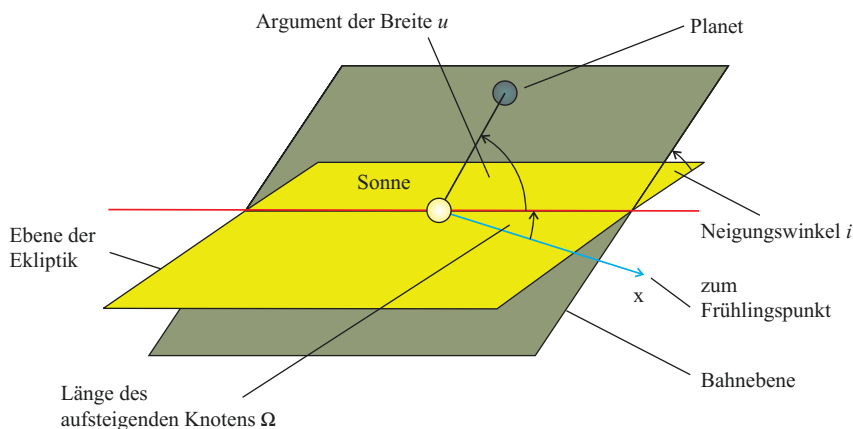
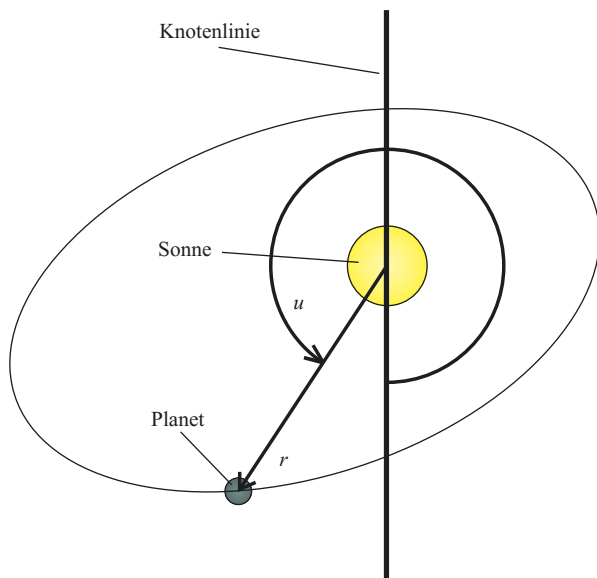
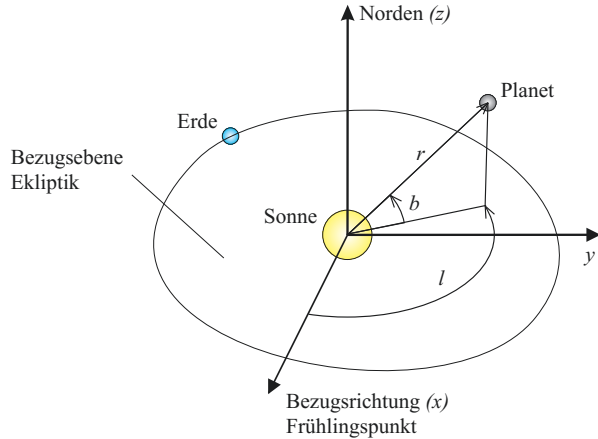


Abb. 2.3 Zusammenhang Bahnebene und Ebene der Ekliptik

gezeigt, dass mit Kenntnis der wahren Anomalie, der Zeit und der durch jahrhundertelange Beobachtungen erhaltenen Kenngrößen der Planeten die Positionen von Planeten vollständig beschrieben sind. Bis jetzt wurden alle Kenngrößen, insbesondere der Abstand r und die wahre Anomalie v , auf die Bahnebene bezogen. Diese unterscheidet sich aber, außer bei der Erde, um einen kleinen Winkel, dem Neigungswinkel i , von der Ebene der Ekliptik. Das ändert natürlich nichts am Abstand des Planeten von der Sonne, weil beide Koordinatensysteme den selben Ursprung, eben den Mittelpunkt der Sonne, haben. Aber es wird notwendig sein, zusätzlich

Abb. 2.4 Die Polarkoordinaten im heliozentrisch ekliptikalen System



einen Winkel zwischen direkter Verbindungslinie Sonne - Planet und der Ebene der Ekliptik anzugeben. Dieser Winkel heißt Breite b im ekliptikalen Bezugssystem (Abb. 2.4). Er wird von -90° , Süden, bis $+90^\circ$, Norden, gemessen.

Nun zur eigentlichen Rechnung. Gegeben sind der Abstand r und die wahre Anomalie v eines Planeten zu einem gegebenen Zeitpunkt. Das sind die räumlichen Polarkoordinaten in der Bahnebene, wenn als Bezugslinie für die Länge die Verbindungslinie zwischen Sonne und Perihel gewählt wird. Seine kartesischen Koordinaten berechnen sich wie folgt:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(v) \\ r \sin(v) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es müssen folgende Transformationen durchgeführt werden:

1. Drehung der Bahnebene um die z -Achse um den Winkel $-\omega$. Danach ist die Länge nicht mehr die wahre Anomalie v , die vom Perihel aus gemessen wurde, sondern das Argument der Breite u , welches von der Knotenlinie aus gemessen wird. Wir nennen nochmals die Gl. (1.72), die den Zusammenhang zwischen u und v beschreibt: $u = \omega + v$.
2. Drehung der Bahnebene um die x -Achse um den Winkel $-i$. Nun berechnen wir die Koordinaten bereits in der Ebene der Ekliptik, beziehen sie aber noch auf die Knotenlinie. Jetzt ergibt sich die Möglichkeit, die Rechnung zu vereinfachen bzw. abzukürzen. Die Methode, mit der die räumlichen Polarkoordinaten im jeweils neuen Bezugssystem berechnet werden, ist im Abschn. 2.1 beschrieben. Wenn wir in diejenigen Gleichungen, die Gl. (2.12) und Gl. (2.13) entsprechen, auf der „unbekannten“ Seite bereits die Winkeldifferenz $l - \Omega$ anstatt lediglich l einsetzen, erhalten wir direkt die Länge l und die Breite b .

3. Wir verzichten auf die „Abkürzung“ und führen eine Drehung der Bahnebene um die z-Achse um den Winkel $-\Omega$ durch. Nach der Drehung werden die Koordinaten nicht mehr auf die Knotenlinie bezogen, sondern auf die „richtige“ x-Achse, dem Strahl von der Sonne zum Frühlingspunkt.³

Wir beginnen mit der ersten Transformation: Gemäß der Rotationsmatrix, Gl. (2.7), werden die kartesischen Koordinaten der um den Winkel $-\omega$ gedrehten Bahnebene berechnet. Verwendet wird für die Drehung um die z-Achse

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega) & -\sin(\omega) & 0 \\ \sin(\omega) & \cos(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r \cos(v) \\ r \sin(v) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Diese neuen, durch Drehung entstandenen kartesischen Koordinaten, haben im neuen System folgende Polarkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(u) \\ r \sin(u) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es folgt die zweite Transformation: Wir benötigen die Rotationsmatrix für die Drehung um die x-Achse (Gl. (2.5)) und setzen den Winkel zwischen Bahnebene und Ebene der Ekliptik ein:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(i) & -\sin(i) \\ 0 & \sin(i) & \cos(i) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r \cos(u) \\ r \sin(u) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(u) \\ r \sin(u) \cos(i) \\ r \sin(i) \sin(u) \end{pmatrix}.$$

Wenn wir den kürzeren Rechenweg wählen, können wir gemäß der Denkweise der Gl. (2.12) bis Gl. (2.14) schreiben

$$\cos(b) \cos(l - \Omega) = \cos(u) \quad (2.17)$$

$$\cos(b) \sin(l - \Omega) = \sin(u) \cos(i) \quad (2.18)$$

$$\sin(b) = \sin(u) \sin(i). \quad (2.19)$$

In Abb. 1.12 kann man sich die Situation auf der Bahnebene noch einmal verdeutlichen. Zur Vereinfachung fassen wir die Terme mit bekannten Kenngrößen in Konstanten zusammen:

³Es ist üblich, den Frühlingspunkt dem Sternbild Widder (Υ) zuzuordnen, wo er sich auch vor etwa 2000 Jahren befand. Gegenwärtig befindet sich der Frühlingspunkt eher im Sternbild Fische ($\P$).

$$A = \cos(u) \quad (2.20)$$

$$B = \sin(u) \cos(i)$$

$$C = \sin(u) \sin(i).$$

Wenn wir das Gleichungssystem Gl. (2.17) bis Gl. (2.19) nach b und nach l auflösen, erhalten wir die gesuchten räumlichen Polarkoordinaten im heliozentrisch ekliptikalen System.

Jetzt zur dritten Transformation: Wir benötigen wieder die Rotationsmatrix für die Drehung um die z -Achse, Gl. (2.7), und drehen das Koordinatensystem in der Ebene der Ekliptik um den Winkel $-\Omega$:

$$\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\Omega) & -\sin(\Omega) & 0 \\ \sin(\Omega) & \cos(\Omega) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r \cos(u) \\ r \sin(u) \cos(i) \\ r \sin(u) \sin(i) \end{pmatrix}.$$

Noch einmal, das sind unsere bekannten Größen. Wir multiplizieren die Faktoren:

$$\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\Omega) \cos(u) - r \sin(\Omega) \cos(i) \sin(u) \\ r \sin(\Omega) \cos(u) + r \cos(\Omega) \cos(i) \sin(u) \\ r \sin(i) \sin(u) \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Das Ergebnis sind die kartesischen Koordinaten des Planeten von der Sonne aus gesehen. Analog zu den Überlegungen, die zu den Gl. (2.12) bis (2.14) führten, schreiben wir:

$$\cos(\Omega) \cos(u) - \sin(\Omega) \cos(i) \sin(u) = \cos(b) \cos(l) \quad (2.22)$$

$$\sin(\Omega) \cos(u) + \cos(\Omega) \cos(i) \sin(u) = \cos(b) \sin(l) \quad (2.23)$$

$$\sin(i) \sin(u) = \sin(b). \quad (2.24)$$

Dieses Gleichungssystem ist nach b und nach l aufzulösen. Wiederum ist es besser, statt die Terme auf der linken Seite direkt zu nutzen, diese vorher auszurechnen und nur die so erhaltenen Zahlenwerte für die weitere Rechnung zu verwenden. Auch hier fassen wir zur Vereinfachung die Terme mit bekannten Kenngrößen in Konstanten zusammen:

$$A = \cos(\Omega) \cos(u) - \sin(\Omega) \cos(i) \sin(u) \quad (2.25)$$

$$B = \sin(\Omega) \cos(u) + \cos(\Omega) \cos(i) \sin(u)$$

$$C = \sin(i) \sin(u).$$

Zur Erhöhung der Übersichtlichkeit werden, mathematisch nicht völlig korrekt, die entsprechenden Größen nochmals A , B und C genannt. Nun kann das

Gleichungssystem Gl. (2.22) bis (2.24) nach b und nach l aufgelöst werden. Wir erhalten die gesuchten räumlichen Polarkoordinaten im heliozentrisch ekliptikalen System.

Bei der Auflösung der Gleichungssysteme Gl. (2.17) bis Gl. (2.19) und Gl. (2.22) bis Gl. (2.24) muss jedoch folgendes beachtet werden, was am Beispiel des letztgenannten Gleichungssystems erklärt wird: Es bietet sich an, zuerst die dritte Gleichung (Gl. (2.24)) nach b aufzulösen. Dabei ergeben sich zwei Lösungen. Werden im Anschluss die erste (Gl. (2.22)) oder die zweite Gleichung (Gl. (2.23)) nach l aufgelöst, so ergeben sich wiederum jeweils zwei Lösungen, also insgesamt vier Lösungen. Setzt man in diese vier Lösungen für l noch die beiden sich unterscheidenden Lösungen von b ein, so hat man schließlich zwei Lösungen für b und acht Lösungen für l . Auch wenn man bedenkt, dass es ausreichend ist, entweder die Gl. (2.22) oder die Gl. (2.23) nach l aufzulösen, so verbleiben immer noch zwei sich zu π ergänzende Lösungen für die Breite b und vier Lösungen für die Länge l . Letztere unterscheiden sich im Vorzeichen, um π oder ergänzen sich zu π .

Es folgt die ausführliche Berechnung am Beispiel der Venus unter Verwendung des kürzeren Rechenwegs nach der zweiten Koordinatentransformation. Dazu stellen wir die notwendigen Bahnparameter (siehe Tab. 1.3, Umrechnen in Bogenmaß) zusammen: $\Omega = 1,34034051$, $i = 0,0592492$, $u = 1,3698907$, $v = 0,4106876$ und $\omega = u - v = 0,9592031$. Aus Gl. (2.19) folgt sofort

$$b = \begin{pmatrix} \arcsin(\sin(u) \sin(i)) \\ \pi - \arcsin(\sin(u) \sin(i)) \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

und speziell für die Venus

$$\begin{aligned} b &= \begin{pmatrix} \arcsin(\sin(1,3699) \sin(0,0592)) \\ \pi - \arcsin(\sin(1,3699) \sin(0,0592)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,0581 \\ 3,0835 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,3^\circ \\ 176,7^\circ \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Venus hat den selben Drehsinn um die Sonne wie die Erde, entgegen dem Uhrzeiger oder in mathematisch positiver Richtung. Deshalb muss der Neigungswinkel i einen Wert zwischen 0° und 90° haben. Die Breite b muss zwischen 0 und dem Neigungswinkel i liegen. Folglich ist der Wert $b = 3,3^\circ$ die gesuchte Breite. Aus den Gl. (2.17), Gl. (2.20) und Gl. (2.26) kann jetzt die Länge berechnet werden:

$$l = \begin{pmatrix} \arccos\left(\frac{A}{\cos(b)}\right) + \Omega \\ -\arccos\left(\frac{A}{\cos(b)}\right) + \Omega \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

$$l = \begin{pmatrix} 2,7099 \\ -0,0292 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 155,3^\circ \\ -1,7^\circ \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Die Länge ist ein positiver Winkel zwischen 0 und dem Vollwinkel. Deshalb ist die Lösung $l = 155,3^\circ$ die gesuchte Länge. Weiterhin haben wir die Möglichkeit, mittels der Gl. (2.21) die zugehörigen kartesischen Koordinaten im heliozentrisch ekliptikalen System zu berechnen:

$$\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,6518 \\ 0,3003 \\ 0,0417 \end{pmatrix} AE.$$

Wir sehen vor allem, dass $x''' < 0$ und $y''' > 0$ ist, die Länge also ein Winkel im zweiten Quadranten sein muss. Der Abstand der Venus, $r = 0,7188391 AE$, wurde nicht transformiert, weil der Koordinatenursprung der beiden Systeme (Bahnebene, ekliptikal) jeweils der Mittelpunkt der Sonne ist und somit die Strecke vom Koordinatenursprung zum Planeten nicht vom Bezugssystem abhängt.

Abschließend folgen die Berechnung von Breite b und Länge l nach der vollständigen Koordinatentransformation, also nach der Drehung um $-\Omega$. Zur Berechnung der Breite vergleichen wir die Gl. (2.19) und Gl. (2.24). Sie sind identisch. Das bedeutet, sie haben dieselben Lösungen. Die Diskussion zum Finden der richtigen Lösung wurde bereits weiter oben beschrieben. Jetzt setzen wir das nunmehr bekannte b in Gl. (2.22) und lösen nach l auf. Wir erhalten

$$l = \begin{pmatrix} \arccos\left(\frac{A}{\cos(b)}\right) \\ -\arccos\left(\frac{A}{\cos(b)}\right) \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

$$l = \begin{pmatrix} 2,7099 \\ -0,0292 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 155,3^\circ \\ -1,7^\circ \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

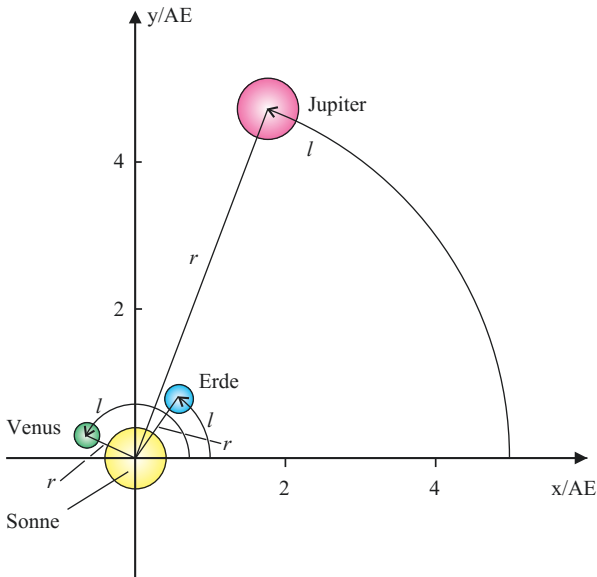
nur dass hier der Term $A = \cos(\Omega) \cos(u) - \sin(\Omega) \cos(i) \sin(u)$, siehe Gl. (2.25), verwendet werden muss. Die Diskussion zum Finden der richtigen Lösung ist ebenfalls entsprechend.

Wie soll es auch anders sein, mit beiden Rechenwegen erhalten wir die gleichen Ergebnisse. Tabelle 2.1 fasst sie für die Venus und zusätzlich für die Erde und die Sonne zusammen. Abbildung 2.5 zeigt schematisch, also nicht maßstabsgerecht, die Positionen in der Ebene der Ekliptik. Die Winkel der Länge l und die Proportionen der Entfernungen r zur Sonne sind im Rahmen der Zeichengenauigkeit entsprechend eingezeichnet.

Tab. 2.1 Zusammenstellung der Polarkoordinaten ausgesuchter Planeten im heliozentrisch ekliptikalen System

Kenngröße	Erde	Venus	Jupiter
$l/^{\circ}$	53,3	155,3	69,5
$b/^{\circ}$	0	3,3	0,7
$r/^{\circ}$	1,0	0,7	5,0

Abb. 2.5 Schematische Darstellung der Planetenpositionen in der Ebene der Ekliptik



2.4 Der Übergang von heliozentrischen zu geozentrischen ekliptikalen Koordinaten

Bisher haben wir die Planeten von der Sonne aus betrachtet. Da wir auf der Erde leben und letztendlich das Ziel unserer Rechnungen darin besteht, dass wir erfahren, wohin wir unser Fernrohr richten müssen, wenn wir einen bestimmten Planeten beobachten wollen, müssen wir unseren Bezugspunkt, also den Koordinatenursprung des jeweiligen Bezugssystems, in einem ersten Schritt in den Erdmittelpunkt legen. Damit scheidet aber die Erde als zu berechnender Planet aus. Stattdessen können wir die Sonne sehen. Da die gesamte Rechnung jeweils für einen Zeitpunkt gemacht wird, ist es nicht wichtig, welche Bahn die Sonne von der Erde aus gesehen beschreibt. Entscheidend ist, dass wir ihre Koordinaten zu genau diesem Zeitpunkt berechnen können.

2.4.1 Die Transformation

Wir vergegenwärtigen uns noch einmal, welche Koordinaten uns bereits bekannt sind und welche wir berechnen wollen. Die Abb. 2.6 zeigt eine schematische Darstellung in der x-y-Ebene, also der Ebene der Ekliptik. Auf die Darstellung in z-Richtung wird zugunsten der Übersichtlichkeit verzichtet. Wir kennen die heliozentrischen ekliptikaln Koordinaten der Länge der Erde L und der Länge des betrachteten Planeten l sowie die entsprechenden Koordinaten der Breite B und b . Des Weiteren sind uns die Abstände R , die Strecke Erde - Sonne, und r , die Strecke Planet - Sonne, bekannt. Gesucht sind die Koordinaten λ , β und Δ . Das sind die Länge, die Breite und der Abstand des Planeten von der Erde in geozentrisch ekliptikaln Koordinaten. Eine einfache Überlegung ergibt sofort:

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'_p \\ y'_p \\ z'_p \end{pmatrix}$$

bzw. in Polarkoordinaten

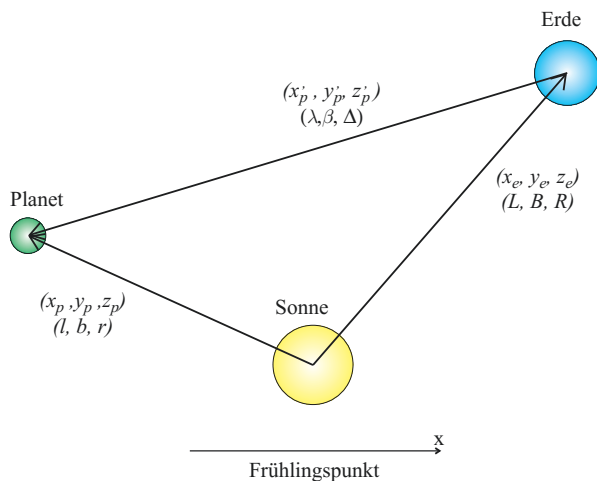
$$r \cos(b) \cos(l) = R \cos(B) \cos(L) + \Delta \cos(\beta) \cos(\lambda)$$

$$r \cos(b) \sin(l) = R \cos(B) \sin(L) + \Delta \cos(\beta) \sin(\lambda)$$

$$r \sin(b) = R \sin(B) + \Delta \sin(\beta).$$

Zur Vereinfachung werden Substitutionen eingeführt, deren konkrete Werte unter Verwendung der Werte aus Tab. 2.1 in Tab. 2.2 angegeben sind:

Abb. 2.6 Zur Berechnung der geozentrischen Koordinaten



Tab. 2.2 Werte für die Substitution für Venus und Jupiter

	Venus	Jupiter
M	-0,651788	1,764474
N	0,593840	0,593840
S	0,300270	4,730320
T	0,790963	0,790963
X	0,04170957	0,059129
Y	0	0

$$M = r \cos(b) \cos(l) \quad (2.31)$$

$$N = R \cos(B) \cos(L) \quad (2.32)$$

$$S = r \cos(b) \sin(l) \quad (2.33)$$

$$T = R \cos(B) \sin(L) \quad (2.34)$$

$$X = r \sin(b) \quad (2.35)$$

$$Y = R \sin(B). \quad (2.36)$$

Damit erhalten wir das folgende, deutlich übersichtlichere Gleichungssystem:

$$M = N + \Delta \cos(\beta) \cos(\lambda)$$

$$S = T + \Delta \cos(\beta) \sin(\lambda)$$

$$X = Y + \Delta \sin(\beta).$$

Dieses wird nach den gesuchten geozentrischen Polarkoordinaten γ , β und Δ des jeweils betrachteten Planeten aufgelöst:

$$\lambda = -\arctan \frac{S - T}{N - M}, \quad (2.37)$$

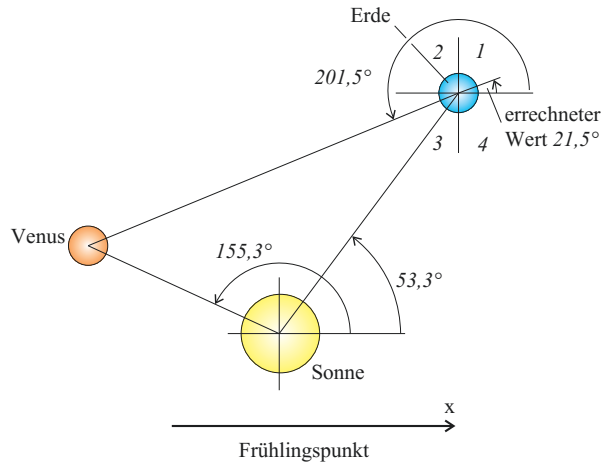
$$\beta = -\arctan \left(\frac{\cos(\lambda)(X - Y)}{N - M} \right) \quad \text{und} \quad (2.38)$$

$$\Delta = \frac{X - Y}{\sin(\beta)}. \quad (2.39)$$

Tabelle 2.2 enthält die Werte für die Substitutionen, die für die nachfolgenden Berechnungen noch benötigt werden. Daraus ergeben sich unmittelbar für die Länge der Venus:

$$\lambda = 0,375265 \text{ rad} = 21,5^\circ \quad (2.40)$$

Abb. 2.7 Umwandlung von geozentrisch ekliptikal zu geozentrisch äquatorial (1...4 Quadranten des geozentrischen Koordinatensystems)



und die des Jupiters

$$\lambda = 1,2819 \text{ rad} = 73,4^\circ. \quad (2.41)$$

Betrachten wir jetzt in Abb. 2.7 die Verhältnisse bei der Venus. Da sie sich im geozentrisch ekliptikalen System betrachtet im 3. Quadranten befindet, wird der Winkel geändert. Zum ursprünglich errechneten Wert sind 180° zu addieren. Wir erhalten

$$\lambda = 201,5^\circ.$$

Der Jupiter befindet sich von der Erde aus gesehen im 1. Quadranten. Deshalb wird der Winkel der Länge nicht geändert. In Tab. 2.3 sind die Koordinaten im geozentrisch ekliptikalen System zusammengefasst. Unter Verwendung der Gl. (2.38) werden jetzt die Breiten β für Venus und Jupiter errechnet:

$$\beta = 0,0311 \text{ rad} = 1,78^\circ \quad (\text{Venus}) \quad (2.42)$$

$$\beta = 0,0197 \text{ rad} = 1,13^\circ \quad (\text{Jupiter}). \quad (2.43)$$

Wir nehmen die Ergebnisse zunächst zur Kenntnis und untersuchen im folgenden Schritt, ob sich der jeweilige Planet ober- oder unterhalb der Ebene der Ekliptik befindet, d. h. ob das betreffende β positiv oder negativ ist.⁴ Wir berechnen (siehe Abb. 2.6)

⁴Dies kann bei genauerer Rechnung auch für die Erde zutreffen, weil sich Mond und Erde um einen gemeinsamen Schwerpunkt drehen, der sich auf der Ebene der Ekliptik befindet. Das bedeutet aber nicht, dass das auch für den Mittelpunkt der Erde zutreffen muss. Außerdem beziehen wir uns auf das Äquinoktium des Jahres 2000. Durch die im Abschn. 2.9 genannten, aber in der Rechnung nicht berücksichtigten Einflüsse auf die Erdbahn kann es ebenfalls zu Abweichungen kommen.

Tab. 2.3 Zusammenfassung
Polarkoordinaten im geozentrisch
ekliptikalen System

KenngroÙe	Venus	Jupiter
$\lambda/^{\circ}$	201,50	73,45
$\beta/^{\circ}$	1,78	0,82
Δ/AE	1,34	4,11

$$z_p = \Delta \sin(\beta) = \Delta \sin(0,0311) > 0$$

für die Venus und

$$z_p = \Delta \sin(0,0197) > 0$$

für den Jupiter.

Wir kennen zwar die jeweiligen Abstände nicht, die hier beide (unexakterweise) Δ heißen, wissen aber, dass sie positiv sein müssen. Somit sind beide z-Werte positiv. Versetzen wir uns in die Ebene der Ekliptik, in der sich die Sonne und die Erde befinden, so müssen wir nach „oben“ schauen, um die Planeten zu sehen, weil in beiden Fällen die Breite β eben positiv ist. Jetzt können mit Gl. (2.39) die Abstände Δ berechnet werden:

$$\Delta = \frac{X - Y}{\sin(\beta)} = 1,339444 AE$$

für die Venus und

$$\Delta = \frac{X - Y}{\sin(\beta)} = 4,627177 AE \tag{2.44}$$

für den Jupiter.

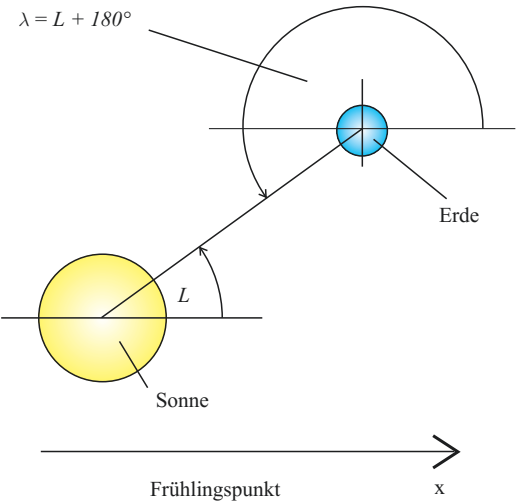
2.4.2 Die Position der Sonne

Da wir beginnend mit diesem Abschnitt die Planeten von Koordinatensystemen aus betrachten, die ihren Ursprung im Erdmittelpunkt und später auch auf der Erde haben, können wir, wie einleitend zu diesem Kapitel beschrieben, die Sonne rein rechnerisch wie einen Planeten behandeln.

Die Berechnung der Länge der Sonne im geozentrisch ekliptikalen System wird in Abb. 2.8. schematisch dargestellt. Es ist leicht zu erkennen, dass zum bekannten Wert der Länge L im heliozentrischen System 180° zu addieren sind:

$$\lambda = L + 180^{\circ}. \tag{2.45}$$

Abb. 2.8 Umrechnung der Länge L der Erde in die Länge λ im geozentrisch ekliptikalen System



Tab. 2.4 Die Polarkoordinaten der Sonne im geozentrisch ekliptikalen System

KenngroÙe	Sonne
$\lambda/^\circ$	233,281
$\beta/^\circ$	0
Δ/AE	0,989075

Die Breite ist selbstverständlich Null, weil sich die Sonne wie auch die Erde in der Ebene der Ekliptik befinden. Am Abstand zwischen Sonne und Erde ändert sich auch nichts. Wir können den Wert von Tab. 1.3 übernehmen. In Tab. 2.4 sind die Koordinaten im geozentrisch ekliptikalen System zusammengefasst.

2.4.3 Die Position des Mondes

In diesem Abschnitt soll die Position des Mondes von der Erde aus gesehen beschrieben werden. Da unser Mond eben auch der Mond des Planeten Erde und von der Erdoberfläche aus gesehen ein doch sehr groÙes kosmisches Objekt ist, sollte die Beschreibung der Mondposition berechtigt sein. Dieses Kapitel erscheint dafür das geeignetste zu sein, weil die Länge, die Breite und der Abstand zur Erde in geozentrisch ekliptikalen Koordinaten angegeben werden. Kennen wir diese, so kann nach Abarbeiten der ab Abschn. 2.5 genannten Koordinatentransformationen die Position des Mondes, von der Erdoberfläche aus gesehen, berechnet werden.

Einleitend werden die Gravitationskräfte der Erde, F_{erde} , und der Sonne, F_{sonne} , die auf die Mondbahn wirken, genannt und anschlieÙend miteinander verglichen:

$$F_{erde} = \gamma \frac{m_{erde} \times m_{mond}}{d_{em}^2} \quad \text{und}$$

$$F_{sonne} = \gamma \frac{m_{sonne} \times m_{mond}}{d_{es}^2}.$$

Das Verhältnis der Kräfte beträgt somit

$$\frac{F_{erde}}{F_{sonne}} = \frac{m_{erde}}{m_{sonne}} \times \frac{d_{es}^2}{d_{em}^2}.$$

Die benötigten Werte werden Tab. 2.7 entnommen und eingesetzt:

$$\frac{F_{erde}}{F_{sonne}} = \frac{5,9722 \times 10^{24} \text{ kg}}{1,98892 \times 10^{30} \text{ kg}} \times \frac{(149597870700 \text{ m})^2}{(384400 \text{ km})^2} = 0,455.$$

Die Einflüsse der Erde und der Sonne auf den Mond unterscheiden sich lediglich etwa um den Faktor zwei. Der Einfluss der Sonne ist nicht zu vernachlässigen. Das bedeutet, dass die Anordnung Erde-Mond nicht mehr als Zweikörpersystem behandelt werden kann.

Da die Mondbahn um die Erde sich deutlich von einer Kreisbahn unterscheidet, müssen die Länge, die Breite und der Abstand des Mondes in Abhängigkeit von der Zeit korrigiert werden. Nachstehend werden die modifizierten räumlichen Polarkoordinaten und der Abstand des Mondmittelpunktes vom Erdmittelpunkt (λ , β , Δ) im geozentrisch ekliptikalen System angegeben ([1], Seite 96 f.):

$$\begin{aligned} \lambda / ^\circ = & L_0 + 22640'' \sin(l) + 769'' \sin(2l) + 36'' \sin(3l) \\ & - 4586'' \sin(l - 2D) + 2370'' \sin(2D) - 668'' \sin(l') \\ & - 412'' \sin(2F) - 212'' \sin(2l - 2D) - 206'' \sin(l + l' - 2D) \\ & + 192'' \sin(l + 2D) - 165'' \sin(l' - 2D) + 148'' \sin(l - l') \\ & - 125'' \sin(D) - 110'' \sin(l + l') - 55'' \sin(2F - 2D), \\ \beta / ^\circ = & 18520'' \sin(F + \lambda - L_0 + 0,114 \sin(2F) + 0,150 \sin(l')) \\ & - 526'' \sin(F - 2D) + 44'' \sin(l + F - 2D) - 31'' \sin(-l + F - 2D) \\ & - 25'' \sin(-2l + F) - 23'' \sin(l' + F - 2D) + 21'' \sin(-l + F) \\ & + 11'' \sin(-l' + F - 2D) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\Delta/km = & 385000 - 20905 \cos(l) - 570 \cos(2l) \\ & - 3699 \cos(2D - l) - 2956 \cos(2D) + 246 \cos(2l - 2D) \\ & - 205 \cos(l' - 2D) - 171 \cos(l + 2D) - 152 \cos(l + l' - 2D).\end{aligned}$$

Dabei bedeuten L_0 die mittlere Länge des Mondes, l die mittlere Anomalie des Mondes, l' die mittlere Anomalie der Sonne, F der mittlere Abstand des Mondes vom aufsteigenden Knoten und D der mittlere Abstand des Mondes von der Sonne mit:

$$\begin{aligned}L_0/^\circ &= 218,31665 + 481267,88134 T - 0,001327 T^2 \\ l/^\circ &= 134,96341 + 477198,86763 T + 0,008997 T^2 \\ l'/^\circ &= 357,52911 + 35999,05029 T + 0,000154 T^2 \\ F/^\circ &= 93,27210 + 483202,01753 T - 0,003403 T^2 \\ D/^\circ &= 297,85020 + 445267,11152 T - 0,001630 T^2.\end{aligned}$$

2.5 Transformation von geozentrisch ekliptikalen zu geozentrisch äquatorialen Koordinaten

Bis jetzt haben wir die Planeten vom Erdmittelpunkt aus betrachtet. Dabei war die Bezugsebene die Ebene der Ekliptik. Die Bezugsrichtung war die x-Achse, also die Richtung eines Strahls von der Erde zum Frühlingspunkt. Die neue Bezugsebene soll die Äquatorebene sein. Vergrößert man diese über die Abmessungen der Erde hinaus, nennt man diese Ebene Himmelsäquatorebene.

Wenn wir die Transformation von geozentrisch ekliptikalen Koordinaten zu geozentrisch äquatorialen Koordinaten durchführen wollen, muss in einem ersten Schritt die Schrägstellung der Erdachse ([2], Seite 18) berechnet werden. Sie ist eine Funktion der Zeit:

$$\epsilon = (23,439291^\circ - 0,013004^\circ/Jhd \times T). \quad (2.46)$$

Für die Zeit wird der schon mehrmals genannte Wert $T = 0,128727 Jhd$ verwendet, die Anzahl der Jahrhunderte nach dem Beginn des Jahres 2000 bis zu unserem Beobachtungszeitpunkt. Wir erhalten:

$$\epsilon = 23,439291^\circ - 0,013004^\circ/Jhd \times 0,128727 Jhd = 23,44^\circ.$$

Die Aufstellung der Transformationsgleichungen ist unkompliziert. Wir müssen das bisherige Bezugssystem lediglich um den Winkel ϵ in die mathematisch negative Richtung (Uhrzeigersinn) drehen, also den (positiven) Wert des Winkels in die Transformationsmatrix der x-Achse einsetzen (Abb. 2.9):

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\epsilon) & -\sin(\epsilon) \\ 0 & \sin(\epsilon) & \cos(\epsilon) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Die gestrichenen kartesischen Koordinaten sind die gesuchten Koordinaten im äquatorialen System. Im nächsten Schritt werden die kartesischen Koordinaten des ekliptikalen Systems durch die bereits bekannten Polarkoordinaten ersetzt.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\epsilon) & -\sin(\epsilon) \\ 0 & \sin(\epsilon) & \cos(\epsilon) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \Delta \cos(\lambda) \cos(\beta) \\ \Delta \sin(\lambda) \cos(\beta) \\ \Delta \sin(\beta) \end{pmatrix}$$

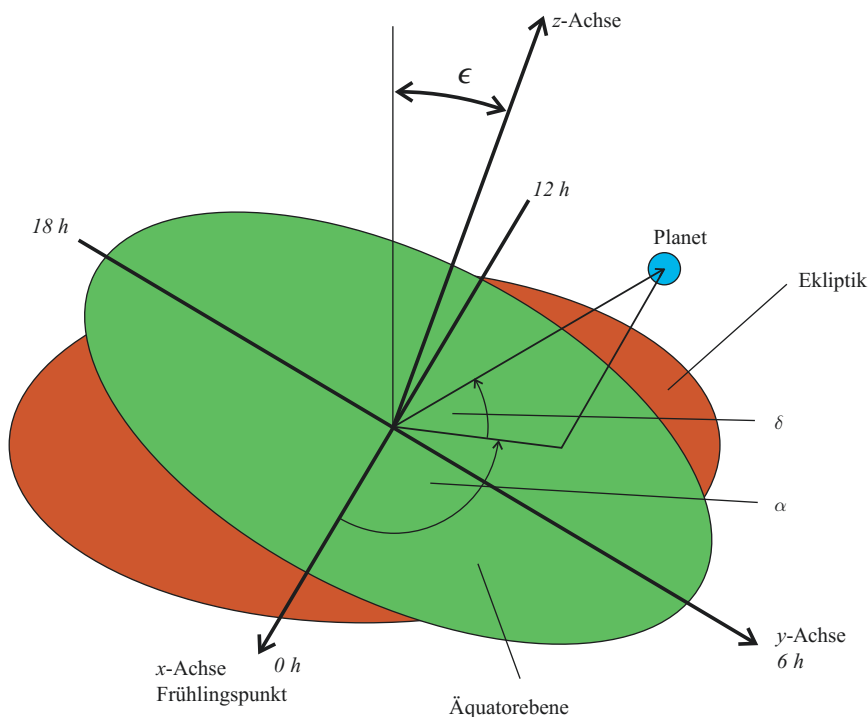


Abb. 2.9 Transformation geozentrisch ekliptikaler in geozentrisch äquatoriale Koordinaten

Wir multiplizieren die Rotationsmatrix und die Matrix der ungestrichenen Koordinaten, also die des geozentrisch ekliptikalen Systems, aus:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta \cos(\lambda) \cos(\beta) \\ \Delta \cos(\beta) \cos(\epsilon) \sin(\lambda) - \Delta \sin(\beta) \sin(\epsilon) \\ \Delta \cos(\epsilon) \sin(\beta) + \Delta \cos(\beta) \sin(\lambda) \sin(\epsilon) \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten die kartesischen Koordinaten im geozentrisch äquatorialen System. Gesucht sind aber die räumlichen Polarkoordinaten. Wir wiederholen den Gedankengang, der zum Gleichungssystem Gl. (2.12) bis (2.14) führt, und erhalten die Transformationsgleichungen:

$$\cos(\alpha) \cos(\delta) = \cos(\lambda) \cos(\beta) \quad (2.47)$$

$$\sin(\alpha) \cos(\delta) = \cos(\beta) \cos(\epsilon) \sin(\lambda) - \sin(\beta) \sin(\epsilon)$$

$$\sin(\delta) = \cos(\epsilon) \sin(\beta) + \cos(\beta) \sin(\lambda) \sin(\epsilon). \quad (2.48)$$

Hierbei wurde die Entfernung Δ zwischen Sonne und den Planeten „weggekürzt“. Sie ändert sich durch die Transformation nicht. Jetzt sind unter Berücksichtigung von Gl. (2.40) und Gl. (2.41)(λ) sowie Gl. (2.42) und Gl. (2.43) (β) alle notwendigen Parameter für die Transformation von geozentrisch ekliptikalen zu geozentrisch äquatorialen Koordinaten bekannt. Die gesuchten Größen sind α und δ , die Länge und die Breite in geozentrisch äquatorialen Koordinaten, die Rektaszension bzw. Deklination heißen. Zu deren Lösung führen wir folgende Hilfsgrößen ein:

$$A = \cos(\beta) \times \cos(\lambda) \quad (2.49)$$

$$C = \sin(\epsilon) \times \cos(\beta) \times \sin(\lambda) + \cos(\epsilon) \times \sin(\beta). \quad (2.50)$$

Zwei Substitutionen sind ausreichend, wir haben zwar drei Gleichungen, aber nur zwei Unbekannte. Nach einfacher Rechnung ergeben sich:

$$A = -0,929959$$

$$C = -0,1171420$$

für die Venus und

$$A = -0,778873$$

$$C = 0,2674645$$

für den Jupiter.

Aus den Gl. (2.48) und (2.50) erhalten wir unmittelbar

$$\delta = \arcsin(C) = -0,1174 = -6,73^\circ. \quad (2.51)$$

Weiterhin folgt aus den Gl. (2.47) und (2.49)

$$\alpha = \arccos\left(\frac{A}{\cos(\delta)}\right) = 2,7830 = 159,46^\circ. \quad (2.52)$$

Das ist eine erste Lösung. Eine weitere mögliche Lösung ist

$$\alpha = -\arccos\left(\frac{A}{\cos(\delta)}\right) = -2,7830 = -159,46^\circ.$$

Das richtige Ergebnis muss jedoch positiv sein. D. h. zum errechneten Wert sind 360° zu addieren. Somit erhalten wir als zweite Lösung

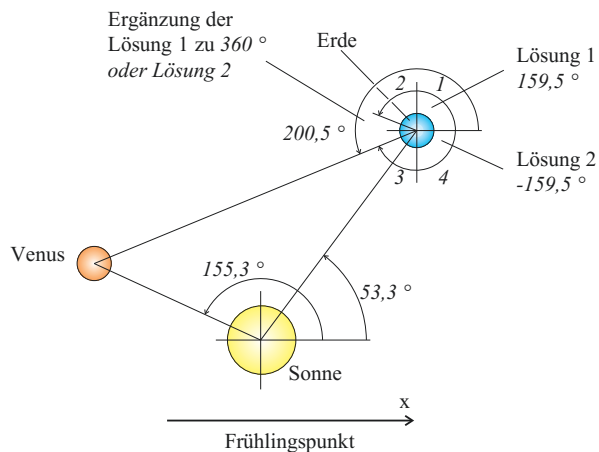
$$\alpha = 200,54^\circ.$$

Nun haben wir zwei unterschiedliche Lösungen und müssen uns im nächsten Schritt für eine entscheiden. Wir schauen auf Abb. 2.10, die der Abb. 2.7 sehr ähnlich ist. Lediglich die Erdachse ist etwas um die x-Achse gedreht. Wiederum befindet sich die Venus im dritten Quadranten und somit ist die Lösung $\alpha = 200,54^\circ$ die richtige.

Rektaszensionswerte werden üblicherweise in Stunden angegeben ($1h = 15^\circ$), weil diese Werte gleich der Zeit sind, die seit dem letzten Meridurchgang des Planeten vergangen ist:

$$\alpha = 13:22:10,4h.$$

Abb. 2.10 Entscheidung bei der Zweifachlösung der Rektaszensionsformel (1...4 Quadranten des äquatorialen Koordinatensystems)



2.6 Die Transformation von geozentrisch äquatorialen zu topozentrischen Koordinaten

Letztendlich wollen wir auf der Erde stehen und mit den errechneten Polarkoordinaten einen bestimmten Planeten finden. Genau deshalb wird die Transformation von geozentrisch äquatorialen Koordinaten zu den gesuchten Koordinaten im Horizontsystem im Abschn. 2.7 beschrieben. Wir müssen jedoch bedenken, dass wir uns nicht im Erdmittelpunkt, sondern auf der Erdoberfläche befinden. Folglich ist immer ein kleiner Fehler einzurechnen, der vom Abstand des Beobachtungsobjekts zur Erde abhängt. Wenn wir genauer rechnen wollen, müssen wir die Polarkoordinaten des topozentrischen Systems verwenden.

Außerdem befindet sich erstmals der Koordinatenursprung, die Position unseres Beobachters, auf der sich drehenden Erde, und es gehen der Beobachtungszeitpunkt in Form der Sternzeit und der Beobachtungsort in die Rechnung ein.

Die Bezugsebene für die topographischen Koordinaten liegt parallel zur Äquatorialebene. Der Standort des Beobachters befindet sich auf der Bezugsebene. Das bedeutet, dass sich bei nicht allzu nahen kosmischen Objekten die Polarkoordinaten und die Entfernungen des geozentrischen Äquatorialsystems und des topozentrischen Systems praktisch nicht unterscheiden. Die beiden Bezugspunkte haben lediglich den Abstand des Erdradius voneinander. Dieser ist klein im Vergleich zu den üblicherweise in der Astronomie betrachteten Weglängen.

Bekannt sind die Rektaszension α , die Deklination δ und der Abstand zum Planeten Δ in geozentrisch äquatorialen Koordinaten. Gesucht werden die entsprechenden topozentrischen Koordinaten α' , δ' und Δ' . Abb. 2.11 zeigt schematisch die Situation.

Für die eigentliche Rechnung müssen noch die geozentrische Breite und der Abstand zum Erdmittelpunkt am Beobachtungsort ermittelt werden, was im nächsten Abschnitt beschrieben wird.

2.6.1 Die geozentrische Breite und der Abstand zum Erdmittelpunkt

Es muss berücksichtigt werden, dass die Erde nicht kugelförmig ist, sondern sich besser als ein Rotationsellipsoid beschreiben lässt (Abb. 2.12). Die geographische

Abb. 2.11 Umwandlung von geozentrisch äquatorialen zu topozentrischen Koordinaten

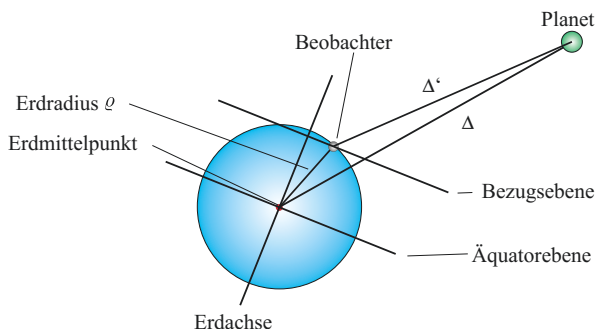
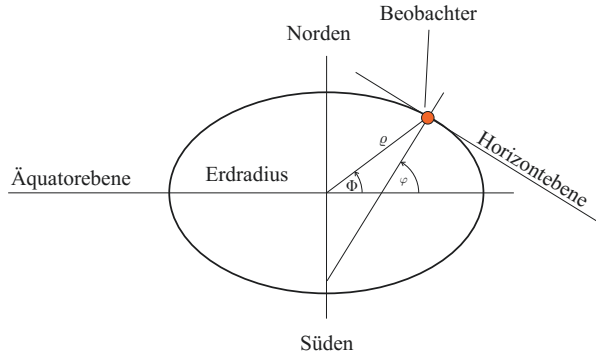


Abb. 2.12 Zur Berechnung der geozentrischen Breite



Breite ist der Winkel, mit dem der Horizont des Beobachters gegen die Erdachse geneigt ist. Die geozentrische Breite ist der Winkel zwischen der Linie, die den Erdmittelpunkt mit dem Beobachter verbindet, und der Äquatorebene. Es gilt annähernd ([2], Seite 180):

$$\Phi = \varphi - 0,1924^\circ \times \sin(2\varphi). \quad (2.53)$$

Der Abstand ϱ des Beobachters vom Erdmittelpunkt berechnet sich wie folgt:

$$\varrho \approx 6378,14 \text{ km} - 21,38 \text{ km} \times \sin^2(\varphi). \quad (2.54)$$

Die geographische Breite des Beobachtungsortes sei

$$\varphi = 52,62^\circ = 0,9183 \text{ rad}. \quad (2.55)$$

Damit können mit den Gl. (2.53) und Gl. (2.54) die geozentrische Breite Φ und der Abstand zum Erdmittelpunkt ϱ errechnet werden:

$$\Phi = 52,43^\circ = 0,9151 \text{ rad}$$

$$\varrho = 6364,6 \text{ km}.$$

2.6.2 Die Sternzeit

Unser Anliegen besteht darin, für den Zeitpunkt der Beobachtung am gegebenen Beobachtungsort die Sternzeit zu berechnen. Für eine einfache und anschauliche Erklärung der Sternzeit wollen wir zwei Experimente durchführen:

1. Die Erde befinde sich in der Position 1. Eine auf der Erdoberfläche befindliche Person peilt mittels einer Vorrichtung einen in großer Entfernung befindlichen Stern an (Pfeil in Abb. 2.13, Graph(a)). Nachdem sich die Erde um 360° gedreht

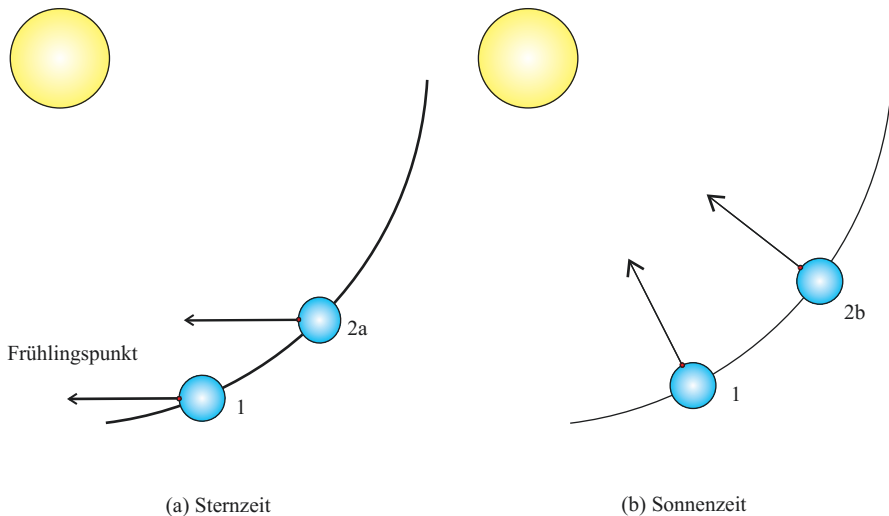


Abb. 2.13 Unterschied von Sternzeit und Sonnenzeit

hat, kann die Person den Stern ein zweites Mal anpeilen. Die Erde befindet sich jetzt in der Position 2a. Während sich die Erde einmal um die eigene Achse drehte, ist ein Sterntag vergangen⁵.

2. Dieses Mal peilt die Person den Sonnenmittelpunkt an (siehe Abb. 2.13, Graph(b)). Die Erde befinde sich dabei in Position 1. Nachdem sich die Erde um 360° drehte, d. h. nach einem Sterntag, hat sie einen gewissen Weg auf ihrer Umlaufbahn um die Sonne zurückgelegt. Sie befindet sich jetzt in Position 2b. Die Person stellt mit Hilfe der Vorrichtung fest, dass jedoch noch nicht der Sonnenmittelpunkt angepeilt wird. Die Erde muss sich ein wenig mehr als um 360° drehen, damit dies der Fall ist. Diese Zeit für eine Volldrehung, vermehrt um die Zeit, bis der Sonnenmittelpunkt wieder angepeilt wird, ist ein Sonnentag. Der Sonnentag ist also ein wenig länger als ein Sterntag. Die Differenz beträgt knapp vier Minuten.

Die Definition und die Eigenschaften der Sternzeit sind vielfach beschrieben worden. Wer es genauer wissen will, kann beispielsweise an folgenden Stellen nachschlagen: [3], [2] Seite 39, [1] Seite 46, [4] oder [5] Seite 7.

Zur Berechnung der Sternzeit am Beobachtungsort zur Beobachtungszeit sind folgende Rechenschritte abzuarbeiten.

⁵Etwas genauer formuliert - ein Sterntag ist die Zeitdauer, die der Frühlingspunkt für eine (scheinbare) Umrundung der Erde benötigt.

- Berechnung der Sternzeit θ_0 für Null Uhr Greenwicher Zeit am Beobachtungstag.
- Berechnung der Sternzeit θ_{zeit} für die Beobachtungszeit nach Greenwicher Zeit am Beobachtungstag.
- Berechnung der Sternzeit θ_{ort} unter Berücksichtigung des Beobachtungsortes.

2.6.2.1 Sternzeit für Null Uhr Greenwicher Zeit am Beobachtungstag

Für den genannten Zeitpunkt ist die mittlere Sternzeit in Greenwich zu ermitteln ([2], [4]). Der Zusammenhang zwischen der Sternzeit θ und der Zeit T , die seit dem Äquinoktium im Jahr 2000 verging, ist endgültig definiert. Diese Definition kann in Grad oder in Stunden angegeben werden:

$$\begin{aligned}\theta/^{\circ} &= 100,46061837 + 36000,770053608 \times T \\ &+ 0,000387933 \times T^2 - \frac{T^3}{38710000}\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}\theta/h &= \left(6 + \frac{41}{60} + \frac{50,54841}{3600}\right) + \left(\frac{8640184,812866}{3600} \times T\right) \\ &+ \left(\frac{0,093104}{3600} \times T^2\right) - \left(\frac{0,0000062}{3600} \times T^3\right).\end{aligned}\quad (2.56)$$

Mit Hilfe der Gl. (1.18) erhalten wir das Julianische Datum und anschließend daraus mit Gl. (1.19) die Zeit in Jahrhunderten, $T_0 = 0,1287201 Jhd.$ Wir berechnen θ_0 zu

$$\theta_0 = \theta(0,1287201) = 4734,4817^{\circ}.$$

Ergänzend formen wir diesen Winkel in die entsprechende Zeitangabe um

$$\theta_0 = \frac{4734,4817^{\circ}}{15^{\circ} h^{-1}} = 315,6321 h.$$

Nutzen wir die Gl. (2.56), erhalten wir die Sternzeit in Stunden:

$$\theta_0 = 315,6321 h. \quad (2.57)$$

Erwartungsgemäß stimmen beide Werte überein. Wir kennen jetzt die Sternzeit um Null Uhr Greenwicher Zeit.

2.6.2.2 Sternzeit für die Beobachtungszeit am Beobachtungstag

Zur Ermittlung der Sternzeit für die Beobachtungszeit muss zur Sternzeit um Null Uhr ($UT = 0$) noch die aktuelle Uhrzeit (in unserem Spezialfall $UT = 6 h$) addiert werden. Dabei wird letztere mit einem Korrekturfaktor multipliziert:

$$\theta_{zeit} = \theta_0 + UT \times 1,00273790935. \quad (2.58)$$

Verwenden wir $UT = 6 h$ und Gl. (2.57), sind das

$$\theta_{zeit} = 321,6485 h \quad \text{oder} \quad \theta_{zeit} = \frac{321,6485 h}{24 h/d} = 13,4020 d.$$

Es interessiert aber nur der Bruchteil eines Tages, d. h. aus θ_{zeit} wird

$$(\theta_{zeit} - \text{floor}(\theta_{zeit})) \times 24 h/d = 9,6485 h. \quad (2.59)$$

Umgerechnet in Grad erhalten wir

$$\theta_{zeit} = 9,6485 h \times 15^\circ h^{-1} = 144,73^\circ. \quad (2.60)$$

Das ist die Sternzeit von Greenwich in Stunden am Beobachtungstag, dem 15.11.2012, um 6 Uhr UT morgens, und der entsprechende Winkel.

2.6.2.3 Sternzeit unter Berücksichtigung des Beobachtungsortes

Für Beobachter, die sich nicht auf dem nullten Längengrad von Greenwich befinden, muss die geographische Länge λ des Beobachtungsortes berücksichtigt werden. In unserem Beispiel beträgt sie $13^\circ:12,5'$ östlicher Länge:

$$\lambda = 13^\circ + \left(\frac{12,5}{60}\right)^\circ = 13,21^\circ \quad (2.61)$$

und in Stunden umgerechnet

$$\lambda = \left(13 + \frac{12,5}{60}\right)^\circ \times \frac{1}{15^\circ h^{-1}} = 0,8806 h. \quad (2.62)$$

Die mittlere Sternzeit am Beobachtungsort berechnet sich zu

$$\theta_{ort} = \theta_{zeit} + \lambda. \quad (2.63)$$

In unserem Beispiel bedeutet das unter Verwendung von Gl. (2.59) und Gl. (2.62)

$$\theta_{ort} = 9,6485 h + 0,8806 h = 10,5291 h$$

oder, wer das Rechnen in Winkelmaßen bevorzugt nutzt Gl. (2.60) und Gl. (2.61) und erhält:

$$\theta_{ort} = 144,73^\circ + 13,21^\circ = 157,94^\circ = 2,7565 \text{ rad}. \quad (2.64)$$

2.6.2.4 Transformation von geozentrisch äquatorialen Koordinaten zu topozentrischen Koordinaten

Wir vergegenwärtigen uns noch einmal die im Abschn. 2.6 genannten, uns bekannten und gesuchten Größen. Die Beziehungen zwischen ihnen ergeben sich aus der Addition der räumlichen Polarkoordinaten. Etwas locker formuliert gilt $\varrho + \Delta' = \Delta$, (siehe Abb. 2.11). Somit erhalten wir:

$$\Delta \cos(\delta) \cos(\alpha) = \Delta' \cos(\delta') \cos(\alpha') + \varrho \cos(\Phi) \cos(\theta) \quad (2.65)$$

$$\Delta \cos(\delta) \sin(\alpha) = \Delta' \cos(\delta') \sin(\alpha') + \varrho \cos(\Phi) \sin(\theta) \quad (2.66)$$

$$\Delta \sin(\delta) = \Delta' \sin(\delta') + \varrho \sin(\Phi) \quad (2.67)$$

Es werden folgende Vereinfachungen benutzt:

$$A = \Delta \cos(\delta) \cos(\alpha) - \varrho \cos(\Phi) \cos(\theta) \quad (2.68)$$

$$B = \Delta \cos(\delta) \sin(\alpha) - \varrho \cos(\Phi) \sin(\theta) \quad (2.69)$$

$$C = \Delta \sin(\delta) - \varrho \sin(\Phi) \quad (2.70)$$

Die Substitutionen betragen für den Planeten Venus:

$$A = -186121562107,70184,$$

$$B = -69989206525,900528 \quad \text{und}$$

$$C = -23534519377,039692$$

für den Planeten Jupiter:

$$A = 175493012339,03525,$$

$$B = 536920533260,43207 \quad \text{und}$$

$$C = 242412278146,897.$$

und für die Sonne:

$$A = -88468566728,218872,$$

$$B = -108821515184,77333 \quad \text{und}$$

$$C = -47169807656,991295.$$

Unter Verwendung der Substitutionen Gl. (2.68), Gl. (2.69) und Gl. (2.70) wird das Gleichungssystem Gl. (2.65), Gl. (2.66) und Gl. (2.67) nach δ' , α' und Δ' aufgelöst.⁶

$$\delta' = \arctan 2 \left(\frac{((A^2 + B^2 + C^2) \times (A^2 + B^2))^{\frac{1}{2}}}{A^2 + B^2 + C^2}, \frac{C}{(A^2 + B^2 + C^2)} \right), \quad (2.71)$$

$$\alpha' = \arccos \left(\frac{A \times \tan(\delta')}{C} \right) \quad \text{und} \quad (2.72)$$

$$\Delta' = \frac{C}{\sin(\delta')}. \quad (2.73)$$

Wir erhalten für die Venus

$$\begin{aligned} \alpha' &= 2,7830 \text{ rad} = 159,46^\circ \\ \delta' &= -0,1174 \text{ rad}, = -6,73^\circ \quad \text{und} \\ \Delta' &= 200233859559 \text{ m} = 1,338462 \text{ AE}. \end{aligned}$$

Analog zur Berechnung der Rektaszension im Abschn. 2.5 und der Darstellung in Abb. 2.10 muss der Winkel α' zu 360° ergänzt werden:

$$\alpha' = 360^\circ - 159,456036^\circ = 200,543964^\circ = 3,501284 \text{ rad}. \quad (2.74)$$

Für den Jupiter ergibt sich:

$$\begin{aligned} \alpha' &= 71,94^\circ = 1,2557 \text{ rad}. \\ \delta' &= 0,4055 \text{ rad}, = 23,23^\circ \quad \text{und} \\ \Delta' &= 614691118314 \text{ m} = 4,1090 \text{ AE}. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Für die Sonne wird errechnet:

$$\begin{aligned} \alpha' &= 129,11^\circ = 2,2534 \text{ rad}. \\ \delta' &= -18,59^\circ = -0,3245 \text{ rad} \quad \text{und} \\ \Delta' &= 147965537273 \text{ m} = 0,989089 \text{ AE}. \end{aligned}$$

⁶Beim Auflösen nach δ' ergibt sich eine Vierfachlösung. Die Lösungen unterscheiden sich im Vorzeichen oder durch eine additive Verschiebung um π .

Mit derselben Begründung wie bei der Berechnung der Rektaszension der Venus (siehe nochmals Abb. 2.10) muss der errechnete Wert der Rektaszension der Sonne ebenfalls zu 360° ergänzt werden:

$$\alpha' = 360^\circ - 129,11^\circ = 230,89^\circ = 4,0298 \text{ rad.}$$

(2.76)

Weiter oben wurde begründet, dass diese Werte annähernd gleich denen der Rechnung für geozentrisch äquatoriale Koordinaten sein sollten. Die Ergebnisse werden mit denen der Venus verglichen, um eine Vorstellung von der geringen Abweichung, selbst bei unserem Nachbarplaneten, zu vermitteln:

$$\frac{|\Delta - \Delta'|}{1000} = 2794,6 \text{ km}$$
$$|\delta' - \delta| = 0,001548^\circ \quad \text{und}$$
$$|\alpha' - \alpha| = 0,000534^\circ.$$

Tabelle 2.5 stellt im ersten Teil die Koordinaten des geozentrisch äquatorialen Systems und die (nur geringfügig abweichenden) Werte des topozentrischen Systems zusammen.

2.7 Die Transformation von geozentrisch äquatorialen Koordinaten zum Horizontsystem

Die Bezugsrichtung ist die Richtung nach Süden. Die Berechnung erfolgt in zwei Teilschritten. Bevor sie aber durchgeführt werden kann, müssen wir den Stundenwinkel beschreiben, der zwingend für die Berechnung der Polarkoordinaten im Horizontsystem notwendig ist. Anschließend können der Azimut und die Höhe, also die Polarkoordinaten des beobachteten Planeten, berechnet werden. Der

Tab. 2.5 Polarkoordinaten im heliozentrisch äquatorialen System und im topozentrischen System

Kenngröße	Sonne	Venus	Jupiter
	geozentrisch äquatoriales System		
$\alpha / ^\circ$	230,890	200,543	71,944
$\delta / ^\circ$	−18,592	−6,727	23,231
Δ / AE	0,98908	1,33944	4,11004
	topozentrisches System		
$\alpha' / ^\circ$	230,890	200,544	71,944
$\delta' / ^\circ$	−18,590	−6,726	23,231
Δ' / AE	0,98909	1,33848	4,10896

Azimutwinkel wird von Süden ausgehend nach Westen, dann nach Norden, weiter nach Osten und schließlich wieder bis Süden gemessen, so dass z. B. der Norden den Azimut $A = 180^\circ$ hat. Die Höhe ist der Winkel zwischen Horizont und dem Planeten. Leider kann es u. U. zu Missverständnissen kommen, weil beispielsweise bei der Navigation von Schiffen die Bezugsrichtung nach Norden weist.

2.7.1 Stundenwinkel

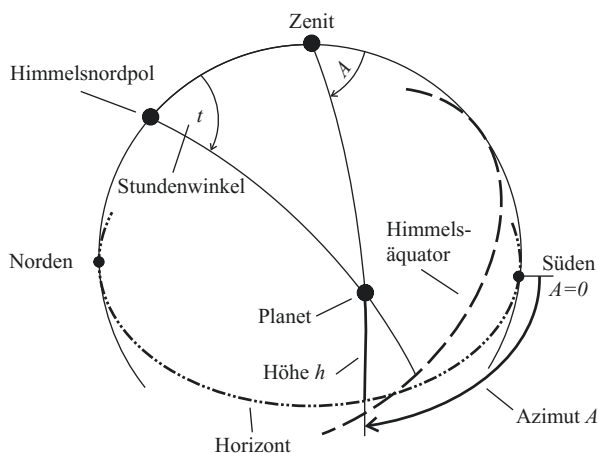
Der Stundenwinkel ist der Winkel t , der in Abb. 2.14 dargestellt wird. Er wird gemessen zwischen dem Bogen, der vom Himmelsnordpol (annähernd Position des Polarsterns) in Richtung Süden geht und dem Bogen, der durch den betrachteten Planeten verläuft. Praktischerweise wird er zumeist in Stunden angegeben, denn er ist die Zeit seit dem Durchgang durch den Meridian (Blickrichtung Süden). Die Rektaszension eines Planeten oder auch eines anderen astronomischen Objekts ist die Sternzeit, zu der es seinen lokalen Meridian passiert. Der Stundenwinkel eines Objekts ist definiert als die Differenz zwischen der aktuellen lokalen Sternzeit und der Rektaszension des Objekts.

Stundenwinkel = aktuelle lokale Sternzeit – Rektaszension des Objekts

$$t = \theta_{\text{ort}} - \alpha \quad (2.77)$$

Wir erhalten unter Verwendung der Sternzeit (Gl. (2.64)) und der einzelnen Rektaszensionen (Gl. (2.74), Gl. (2.75) und Gl. (2.76)) die Stundenwinkel für die Sonne und unsere betrachteten Planeten:

Abb. 2.14 Stundenwinkel t , Azimut A und Höhe h



$$t/\text{rad} = 2,756511 - 3,501284 = -0,744773 \quad (\text{Venus}) \quad (2.78)$$

$$t/\text{rad} = 2,756511 - 1,255653 = 1,500858 \quad (\text{Jupiter}) \quad (2.79)$$

$$t/\text{rad} = 2,756511 - 4,029791 = -1,273280 \quad (\text{Sonne}). \quad (2.80)$$

Somit zeigt der Stundenwinkel des Objekts, wie viel Sternzeit seit dem Überqueren des lokalen Meridians vergangen ist [6]. Er ist auch der winkelförmige Abstand zwischen dem Objekt und dem Meridian, gemessen in Stunden (1 Stunde = 15 Grad). Ein Objekt mit einem Stundenwinkel von z. B. 2,5 h hat den lokalen Meridian 2,5 h zuvor überquert und ist zur Zeit 37,5° westlich des Meridians. Negative Stundenwinkel zeigen die Zeitspanne an, bis das Objekt den Meridian das nächste Mal überquert. Natürlich bedeutet ein Stundenwinkel von Null, dass das Objekt sich gerade auf dem lokalen Meridian befindet.

2.7.2 Berechnung von Azimut und Höhe

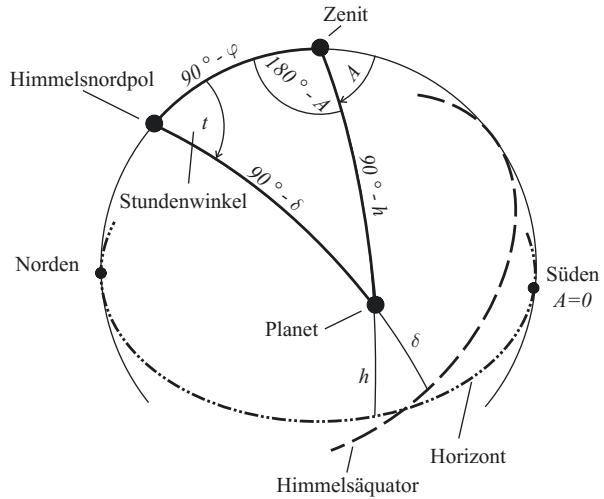
Wir wollen nun aus den bekannten Koordinaten Rektaszension und Deklination des geozentrisch äquatorialen Systems den Azimut, also die Blickrichtung in der Horizontebene, und die Höhe, den Winkel zwischen Horizont und Planeten, ermitteln. Die Berechnung kann auf zwei unterschiedlichen Wegen durchgeführt werden. Zum einen können wir der bisherigen Logik folgen: Errechnen der neuen kartesischen Koordinaten durch Multiplikation der bisherigen Koordinaten mit einer Rotationsmatrix und anschließendes Berechnen der neuen Polarkoordinaten (was aufgrund der komplizierten Aufgabenstellung ein erhöhtes Maß an Abstraktionsvermögen erfordert). Andererseits führt die Berechnung bzw. Auswertung eines sphärischen Dreiecks zum gleichen Ergebnis.

2.7.2.1 Berechnung mit Rotationsmatrix

Um diese Art der Rechnung durchzuführen, brauchen wir die Polarkoordinaten im „alten“ System und die entsprechende Rotationsmatrix, in welche der Drehwinkel einzusetzen ist. Um diese Parameter zu erhalten, betrachten wir Abb. 2.15. Der Winkel zwischen Bezugsebene und dem Planeten ist die Deklination δ . Das „alte“ Bezugssystem, das geozentrisch äquatoriale System, muss um die y-Achse gedreht werden. Der Drehwinkel beträgt $\pi/2 - \varphi$. So können wir schreiben:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_y(\varphi - \pi/2) \begin{pmatrix} \cos(\delta) \cos(t) \\ \cos(\delta) \sin(t) \\ \sin(\delta) \end{pmatrix}.$$

Abb. 2.15 zur Transformation geozentrisch äquatorial zu horizontal



Setzen wir die Rotationsmatrix Gl. (2.6) ein, so erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\frac{\pi}{2} + \varphi) & 0 & -\sin(-\frac{\pi}{2} + \varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(-\frac{\pi}{2} + \varphi) & 0 & \cos(-\frac{\pi}{2} + \varphi) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\delta) \cos(t) \\ \cos(\delta) \sin(t) \\ \sin(\delta) \end{pmatrix}.$$

Wir multiplizieren aus und setzen die nunmehr errechneten neuen kartesischen Koordinaten auf der rechten Seite der Gleichung gleich den neuen Polarkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} \cos(h) \cos(A) \\ \cos(h) \sin(A) \\ \sin(h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi - \frac{\pi}{2}) \cos(t) \cos(\delta) - \sin(\varphi - \frac{\pi}{2}) \sin(\delta) \\ \cos(\delta) \sin(t) \\ \cos(\varphi - \frac{\pi}{2}) \sin(\delta) + \sin(\varphi - \frac{\pi}{2}) \cos(t) \sin(\delta) \end{pmatrix}.$$

Als letzter Schritt vor der Erstellung des Transformationssystemes wird ein Teil der Terme umgeformt. Das Gleichungssystem zur Bestimmung der Höhe h und des Azimuts A lautet:

$$\cos(h) \cos(A) = \sin(\varphi) \cos(\delta) \cos(t) \sin(\delta)$$

$$\cos(h) \sin(A) = \cos(\delta) \sin(t)$$

$$\sin(h) = \sin(\varphi) \sin(\delta) + \cos(\varphi) \cos(\delta) \cos(t).$$

Wir erhalten für die Höhe h eine Doppellösung

$$h = \begin{pmatrix} \arcsin(\sin(\varphi) \sin(\delta) + \cos(\varphi) \cos(\delta) \cos(t)) \\ \pi - \arcsin(\sin(\varphi) \sin(\delta) + \cos(\varphi) \cos(\delta) \cos(t)) \end{pmatrix}. \quad (2.81)$$

Der Azimut A ergibt sich zu:

$$A = \left(\begin{array}{c} \arcsin(\cos(\delta) \sin(t)/\cos(h)) \\ \pi - \arcsin(\cos(\delta) \sin(t)/\cos(h)) \end{array} \right). \quad (2.82)$$

Eine Interpretation dieser Formel wird im Abschn. 3.1.3 erfolgen.

2.7.2.2 Auswertung eines sphärischen Dreiecks

Wir stellen nochmals die bereits bekannten Größen zusammen. Bekannt sind die Rektaszension α , die Deklination δ und die Beobachtungszeit bzw. der Beobachtungsort, die in den Stundenwinkel t eingegangen sind. Gesucht sind die Höhe h über dem Horizont und der Azimutwinkel A . Die Abb. 2.15 zeigt eine schematische Darstellung des astronomischen Dreiecks, auch nautisches Dreieck genannt. Es ist ein sphärisches Dreieck mit den Eckpunkten Himmelsnordpol (also nahezu der Polarstern), Zenit (der Blick senkrecht nach oben) und dem eigentlichen Planeten, dessen horizontale Koordinaten gesucht sind. In unserem Dreieck ist die gesuchte Größe der Bogen $(90^\circ - h)$. Sie ist leicht mit dem Kosinussatz aus der sphärischen Geometrie, Gl. (A.4), zu berechnen:

$$\begin{aligned} \cos(90^\circ - h) &= \cos(90^\circ - \delta) \cos(90^\circ - \varphi) \\ &\quad + \sin(90^\circ - \delta) \sin(90^\circ - \varphi) \cos(t) \end{aligned}$$

Diese Zeile wird vereinfacht zu

$$\sin(h) = \sin(\delta) \sin(\varphi) + \cos(\delta) \cos(\varphi) \cos(t).$$

Lösen wir diese Gleichung nach h auf, so erhalten wir nochmals die Lösung Gl. (2.81). Nun ist noch der Azimut zu berechnen. Wir benutzen den Sinussatz, Gl. (A.3), und schreiben:

$$\frac{\sin(180^\circ - A)}{\sin(90^\circ - \delta)} = \frac{\sin(t)}{\sin(90^\circ - h)}.$$

Das wird vereinfacht zu

$$\frac{\sin(A)}{\cos(\delta)} = \frac{\sin(t)}{\cos(h)}$$

und anschließend nach A aufgelöst:

$$A = \arcsin\left(\frac{\sin(t) \cos(\delta)}{\cos(h)}\right).$$

Wir erhalten wiederum die erste Lösung von Gl. (2.82).

Wenn wir die Doppellösung für die Höhe in die Doppellösung für den Azimut einsetzen, werden wir letztendlich zwei Lösungen für die Höhe und vier für den Azimut

haben. Es gilt also Entscheidungen für die richtigen Lösungen zu finden. Wir wählen bei dem Term für die Höhe (Gl. (2.81)) die erste (obere) Lösung aus, weil die Höhe immer Werte zwischen -90° und 90° haben sollte. Das ist bei der zweiten Lösung nicht der Fall. Bei der Berechnung des Azimuts haben wir nach der Koordinatentransformation eine Doppellösung (Gl. (2.82)). Die Auswertung des astronomischen bzw. nautischen Dreiecks erbrachte nur eine Lösung, die mit der ersten, oberen Lösung der Transformationsmethode übereinstimmt. Wir entscheiden uns deshalb für diese.

Auch wenn wir uns an dieser Stelle wiederholen, die Berechnungen der Höhe und des Azimuts sind in gewissem Sinne das „Endergebnis“ all unserer bisherigen Überlegungen und von großer Bedeutung: Bei Kenntnis der geozentrisch äquatorialen Koordinaten, der Sternzeit und des Beobachtungsortes ist es möglich, die Höhe und den Azimut von Planeten und auch anderen kosmischen Objekten zu bestimmen. Deshalb werden die Gleichungen hier nochmals aufgeführt:

$$h = \arcsin(\sin(\varphi) \sin(\delta) + \cos(\varphi) \cos(\delta) \cos(t)) \quad (2.83)$$

$$A = \arcsin\left(\frac{\sin(t) \cos(\delta)}{\cos(h)}\right). \quad (2.84)$$

2.7.2.3 Die Position von Venus, Jupiter und der Sonne

Bevor wir mit den Gleichungen Gl. (2.83) und (2.84) die Höhe über dem Horizont und den Azimut, vom Süden aus betrachtet, berechnen können, müssen wir noch die geographische Breite φ des Beobachtungsortes, den Stundenwinkel t und die Deklinationen δ unserer betrachteten Objekte bereitstellen: Die geographische Breite wird Gl. (2.55) entnommen. Die Stundenwinkel wurden mit den Gl. (2.78) bis (2.80) auf Seite 64 berechnet. Bei den zu verwendenden Deklinationen δ müssen wir uns entscheiden, ob wir die Werte aus der Transformationsrechnung geozentrisch ekliptikal in geozentrisch äquatorial oder aus der Rechnung geozentrisch äquatorial in geozentrisch topologisch verwenden. Bei weit entfernten kosmischen Objekten ist der Unterschied vernachlässigbar. Bei nahen Objekten ist die Rechnung mit den Deklinationen der letztgenannten Transformation genauer.⁷ Deshalb entscheiden wir uns für die Deklinationen aus der Transformation von geozentrisch äquatorial in geozentrisch topologischen Koordinaten (siehe Tab. 2.5). Weil die zu verwendenden Werte sich an den Textstellen befinden, wo sie ursprünglich berechnet wurden, werden sie nochmals in Tab. 2.6 zusammengestellt. Wir erhalten für die Venus:

$$h = 0,357 \text{ rad} = 20,5^\circ \quad \text{und} \quad A = -0,802 \text{ rad} = -45,9^\circ.$$

Der Azimut wird vom Süden aus in Richtung Westen, dann in Richtung Norden und anschließend in Richtung Osten bzw. Süden gemessen. Er ist auf diese Weise immer

⁷Ob das überhaupt auf unsere Rechnung zutrifft, bei der wir eine Anzahl von Einflüssen auf die Position der Planeten nicht berücksichtigten, soll jetzt nicht betrachtet werden.

Tab. 2.6 Geographische Breite, Stundenwinkel und Deklination zur Bestimmung des Höhenwinkels und des Azimutwinkels

KenngroÙe	Sonne	Venus	Jupiter
φ / rad	0,918		
t / rad	-1,273	-0,744	1,501
δ' / rad	-0,324	-0,117	0,405

positiv und hat Werte von 0...360°. Ist der errechnete Wert wie in unserem Beispiel negativ, so sind zu diesem 360° zu addieren:

$$A = 360^\circ + (-45,94437473^\circ) = 314,1^\circ.$$

Abgesehen von der Addition von 360° bei der Azimutberechnung erhalten wir analog für den Jupiter

$$h = 0,360\,rad = 20,6^\circ \quad \text{und} \quad A = 1,368\,rad = 78,3^\circ.$$

Zur Berechnung des Sonnenstandes muss bei der Azimutberechnung wieder die Differenzbildung praktiziert werden. Wir erhalten:

$$h = -0,085\,rad = -4,9^\circ \quad \text{und} \quad A = -1,142\,rad = -65,427^\circ.$$

Nach der Addition von 360° bekommen wir den korrigierten Azimutwinkel:

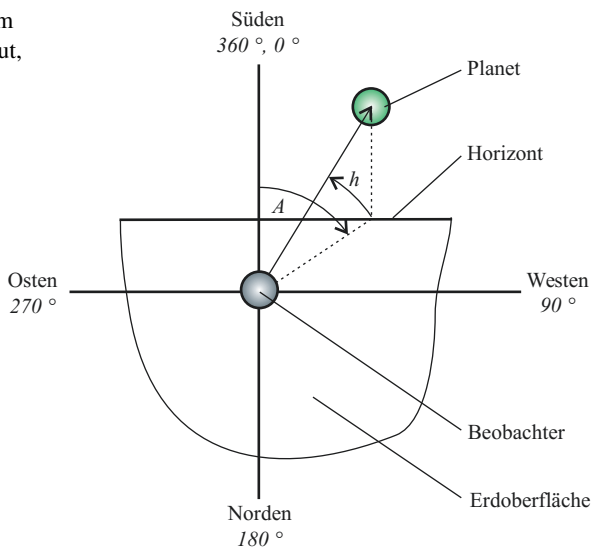
$$A = 360^\circ + (-65,427^\circ) = 294,6^\circ.$$

Wen wundert es, die Sonne geht also auch im November annähernd im Osten auf und befindet sich zum Beobachtungszeitpunkt 6 Uhr UT = 7 Uhr MEZ knapp unter dem Horizont.

2.8 Das Horizontsystem

Wir haben unser „Zielsystem“ erreicht. Abbildung 2.16 zeigt eine schematische Darstellung der Polarkoordinaten des Horizontsystems. Wir stehen auf der Erdoberfläche und sehen den Planeten, der mit dem Winkel h , der Höhe, über dem Horizont steht. Der Azimut zeigt uns an, um welchen Winkel der Planet von der Richtung nach Süden abweicht.

Abb. 2.16 Das Horizontsystem mit einem Planeten (A... Azimut, h ... Höhe)



2.9 Vereinfachungen

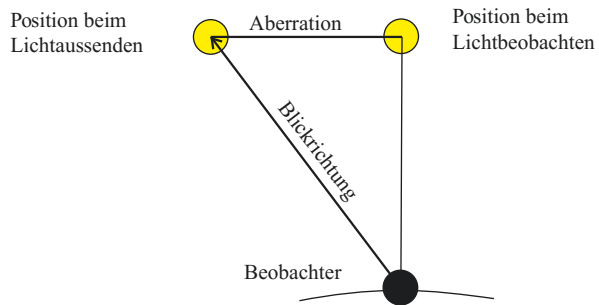
Gemäß unserem Vorhaben, einen leicht verständlichen Rechenweg darzustellen, wurden bei den angeführten Berechnungen eine Reihe von Größen, die einen Einfluss auf die Position der Planeten haben, nicht berücksichtigt. Diese Einflüsse sollen in diesem Abschnitt zumindest genannt und ihre Wirkung abgeschätzt werden.

Vergegenwärtigen wir uns nochmals die Situation. Unser Ziel bestand vorrangig darin, die Koordinaten eines Planeten, also seine Höhe über dem Horizont und den zugehörigen Azimutwinkel, der auf einem geeigneten Kompass abgelesen werden kann, im Horizontsystem zu ermitteln. Nach diesen Winkeln richten wir unser Teleskop aus und versuchen den Planeten zu beobachten.

Praktizierten wir das, so müssten wir jedoch feststellen, dass die errechneten Werte mehr oder weniger von den realen Werten, der tatsächlichen Position, abweichen. Das hat verschiedene Ursachen:

- Die Laufzeit des Lichtes vom Beobachtungsobjekt zum Beobachter wurde nicht berücksichtigt. Diese Zeitspanne heißt Lichtlaufzeit. Vom Zeitpunkt des Aussendens eines Lichtstrahls bis zum Zeitpunkt seiner Beobachtung hat sich zum einen die Erde, und damit der Beobachter, auf ihrer Bahn um die Sonne weiterbewegt. Zum anderen dreht sich die Erde. Von einem geozentrischen Bezugssystem aus gesehen, hat also zusätzlich auch noch der Beobachter seine Position auf der Erde verändert. Wir schauen immer in die Vergangenheit. Abbildung 2.17 zeigt eine schematische Darstellung. An der von uns beobachteten Stelle befand

Abb. 2.17 Unterschiedliche Positionen der Lichtquelle zwischen dem Ort der Lichtaussendung und dem realen Ort während der Lichtbeobachtung

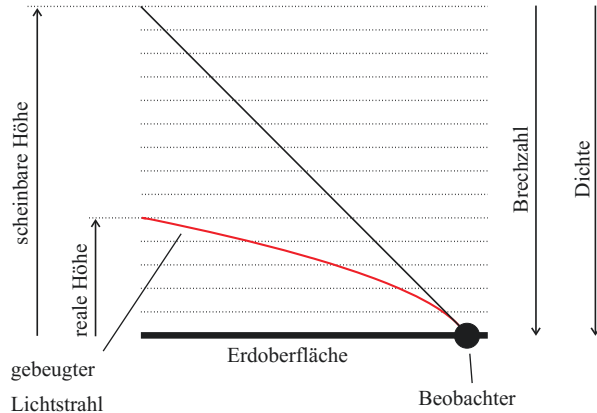


sich das Beobachtungsobjekt zum Zeitpunkt des Aussendens des von uns registrierten Lichtes. Der Beobachter sieht das Licht aus der Richtung kommend, wo sich das Objekt zum Zeitpunkt des Aussendens befand. Jedoch bewegen sich das Beobachtungsobjekt und der Beobachter relativ zueinander.

Wir wollen das an einem Beispiel veranschaulichen. Im Abschn. 3.1 wird der Verlauf des Sonnenstandes beschrieben. Es wird gezeigt, dass wir bei der Beobachtung der Sonne immer um etwa 8 min in die Vergangenheit sehen. Innerhalb dieser Zeitspanne dreht sich die Erde etwa um 2° . Dabei bewegt sie sich mit einer Bahngeschwindigkeit von $30,113 \text{ km/s}$, und legt damit während der Lichtlaufzeit einen Weg von $14861,844 \text{ km}$ zurück, der einem Winkel, bezogen auf einen Umlauf um die Sonne, von $20,5''$ entspricht. Eng verknüpft mit der Lichtlaufzeit ist die Aberration. Darunter versteht man die Verschiebung des Ortes eines Beobachtungsobjekts, an dem es zu einem bestimmten Zeitpunkt gesehen wird, gegenüber dem Ort, an dem es sich tatsächlich befindet. Die Ursache für diesen Effekt ist die endlich große Lichtlaufzeit. Die Aberration des Lichtes muss genau genommen mit Hilfe der speziellen Relativitätstheorie behandelt werden [7].

- Die Brechung des Lichtes in der Erdatmosphäre wurde nicht berücksichtigt. Die Massendichte der Luft ist nicht konstant und nimmt mit zunehmender Entfernung von der Erdoberfläche ab. Die Brechzahl des Lichtes hängt jedoch von der Dichte ab und reduziert sich von einem Wert etwas größer als 1 auf der Erdoberfläche auf exakt 1 im praktisch luftleeren Raum im Weltall. Das ist gleichbedeutend damit, dass sich das Licht nicht geradlinig, sondern auf einer zur Erdoberfläche hin gekrümmten Bahn bewegt. Der Sachverhalt wird in Abb. 2.18 schematisch dargestellt. Sie zeigt, dass unser Beobachtungsobjekt immer auf einer geringfügig höheren Position erscheint, als es sich in der Realität befindet. Diesen Sachverhalt bezeichnet man als Refraktion ([5], Seite 506; [1], Seite 17). Um uns die Größe des Effektes zu verdeutlichen, nehmen wir in Anlehnung an das Beispiel zur Berechnung des Sonnenstandes, siehe Tab. 3.1, eine Höhe des Sonnenstandes von 19° an. Nach einer [8] entnommenen Formel wird die Sonne etwa um $0,01^\circ$ zu hoch beobachtet.
- Außer der Gravitationskraft der Sonne wurden keine zusätzlich auf die einzelnen Planeten wirkenden Kräfte berücksichtigt. In diesem Kapitel wurde die Bewegung der Planeten als Zweikörperproblem, oder auch Kepler-Problem, behandelt. Wenn wir uns mit unseren Rechnungen nicht allzu weit vom

Abb. 2.18 Die Wirkung der Lichtbrechung in der Atmosphäre



derzeitigen Äquinoktium entfernen und hinreichend große Massen, eben Planeten, betrachten, kommen wir durchaus zu vernünftigen Ergebnissen. Bei mehrere Jahre in die Zukunft reichenden Rechnungen jedoch oder bei massearmen Beobachtungsobjekten kommt es zu unbefriedigenden Resultaten ([2], Seite 83). Welche Effekte kommen in Betracht?

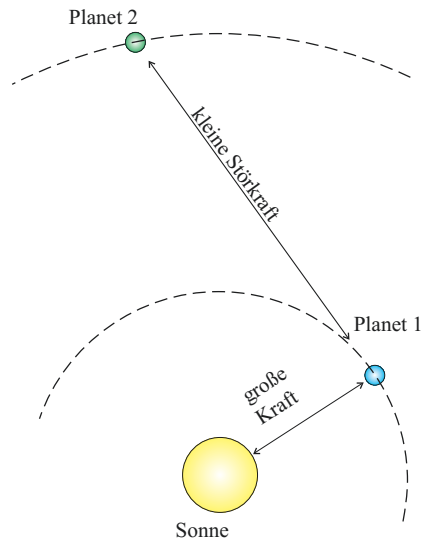
- Die Massenanziehung anderer Planeten durch die Gravitationskräfte. Die Bahn des gerade betrachteten Planeten wird durch die Massenanziehung von anderen Planeten gestört.

In Abb. 2.19 sei der Planet 1 derjenige, dessen Position zu bestimmen ist. Vernachlässigen wir die kleine, aber eben doch vorhandene Kraft, die vom Planeten 2, zusätzlich zur Kraft in Richtung der Sonne, auf den Planeten 1 wirkt, so kann dessen Position durch die beschriebene Lösung des Zweikörperproblems ermittelt werden. Wollen wir jedoch den Einfluss des Planeten 2, der hier symbolisch für alle anderen Massen des Sonnensystems steht, berücksichtigen, muss der Sachverhalt mittels der Störungsrechnung beschrieben werden. Diese ist an sich recht kompliziert und umfangreich, und es ist nicht Anliegen dieses Buches, sie zu vermitteln.

Aber ein Beispiel soll den Einfluss dieser Kräfte deutlich machen. Wir errechnen analog der Berechnungen, welche die Position des Planeten Venus in den vergangenen Abschnitten beschreiben, die Rektaszension α_{kepler} und Deklination δ_{kepler} für die geographische Länge von 15° östlicher Länge und $52,615^\circ$ nördlicher Breite: $\alpha_{kepler} = 13:22:35,87 h = 200,649458^\circ$ und $\delta_{kepler} = -6:46:1,6 h = -6,767^\circ$. Die Beobachtungszeit ist $6,00 UT = 7,00 MEZ$. Diese Werte werden mit den Ergebnissen des professionellen Programms PLANPOS von Montenbruck und Pfleger, beschrieben in [2], Seite 125, verglichen: $\alpha_{mp} = 13:22:06,20 h = 200,525833^\circ$ und $\delta_{mp} = -6:43:02,7 h = -6,717417^\circ$. Die Abweichung der Rektaszensionen voneinander beträgt etwa $0,1^\circ$ und die Deklinationen differieren um etwa $0,05^\circ$.

- Die Präzession. Um diese Erscheinung zu erklären, betrachten wir die Erde als Kreisel. Seine Rotationsachse ist um etwa $23,5^\circ$ gegen die Ebene der

Abb. 2.19 Der Einfluss „störender“ Planeten



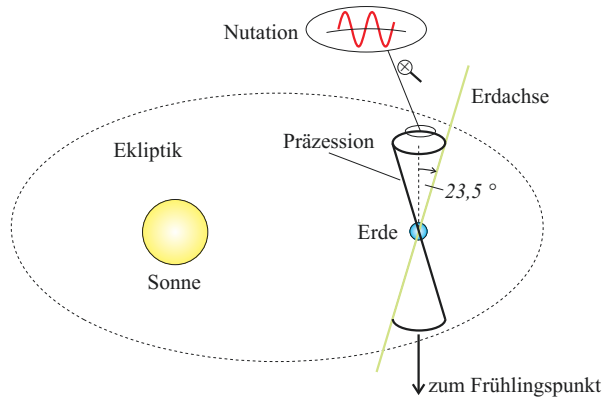
Ekliptik geneigt. Weiterhin hat die Erde keine Kugelform, sondern ihr Durchmesser ist am Äquator etwa 47 km größer als an den Polen. Der Einfachheit halber denken wir uns eine Bauchbinde um die Erde gelegt, längs des Äquators.

Der der Sonne nächstgelegene Punkt der Bauchbinde erfährt nun eine größere Gravitationskraft von der Sonne und eine kleinere Fliehkraft aufgrund seiner Bewegung um die Sonne. Umgekehrt erfährt der sonnenfernste Punkt, also auf der „Außenseite“ des Systems Sonne-Erde gelegen, aufgrund des größeren Abstandes zur Sonne eine kleinere Gravitationskraft und eine größere Fliehkraft. Das bedeutet, die Sonne „versucht“ den Kreisel aufzurichten, so dass die Drehachse durch die Pole senkrecht auf der Ebene der Ekliptik steht. Dieselbe Wirkung hat auch der Mond auf die Erde. Zwar ist seine Masse ungleich kleiner als die der Sonne, aber dafür ist sein Abstand zur Erde, mit kosmischen Maßstäben gemessen, sehr gering. Ergänzend sei bemerkt, dass natürlich auch die Planeten im selben Sinne, aber mit deutlich geringerer Wirkung, die Erde beeinflussen.

Wirkt nun auf einen Kreisel eine äußere Kraft, „versucht“ er, senkrecht zur Figurenachse auszuweichen. Mit anderen Worten, die Rotationsachse des Kreisels, unserer Erde, beschreibt einen Kegelmantel, dessen Spitze sich im Erdmittelpunkt befindet. Abbildung 2.20 zeigt den Kegel, der senkrecht auf der Ebene der Ekliptik steht. Die Periode, die Zeit für einen vollen Umlauf, beträgt etwa 25780 Jahre. Die gemeinsame Wirkung von Sonne und Mond wird Lunisolarpräzession genannt. Sie beträgt etwa $50,4''/\text{Jahr}$. Der Anteil der Planeten heißt lediglich Präzession und beträgt $-0,12''/\text{Jahr}$. Er verringert die Wirkung der Lunisolarpräzession ([9]; [5], Seite 102).

Das hat zur Folge, dass sich der Polarstern verschieben wird. Gegenwärtig befindet er sich eigentlich zufälligerweise nahezu am Himmelsnordpol, der

Abb. 2.20 Präzession und Nutation



nach Norden verlängerten Erdachse. Seine geozentrisch äquatorialen Koordinaten betragen $2:31,8\text{ h} = 37,95^\circ$ für die Rektaszension und $89,26^\circ$ für die Deklination. ([10], Seite 20). In etwa 12000 Jahren wird Wega als Polarstern dienen [9]. Eine weitere Folge ist, dass sich der Frühlingspunkt rückläufig in der Ebene der Ekliptik bewegt (etwa 30° in 1000 Jahren). Gleichbedeutend damit ist, dass sich die Bezugsrichtung für das geozentrisch ekliptikale und das geozentrisch äquatoriale Koordinatensystem kontinuierlich ändert. Bei der Angabe von Positionen kosmischer Objekte muss deshalb immer die Position des Frühlingspunktes, d. h. das Äquinoktium, mit angegeben werden.

- Die Nutation. Sie ist eine vom Mond verursachte Taumelbewegung der Erdachse und überlagert den Kegel, der durch die Präzession beschrieben wird. Die Kegelwand wird geringfügig „gewellt“ (siehe nochmals Abb. 2.20). Die Periode dieser Schwingung beträgt 18,6 Jahre ([9], [11]). Die Position des Himmelspols schwankt nur um wenige Bogensekunden. Sie ist also von weit geringerer Bedeutung als die Präzession. Dennoch hat dieser Effekt zur Folge, dass der wahre, zu einem bestimmten Zeitpunkt reale Frühlingspunkt, um einen mittleren Frühlingspunkt schwankt und sich die Ebene der Ekliptik und der Äquator verschieben ([2], Seite 123).

2.10 Zusammenstellungen

Es wurde bis jetzt in diesem Kapitel das Kepler-Problem, oder auch die Ephemeridenrechnung als Zweikörperproblem, in einer geschlossenen Darstellung beschrieben. Bevor wir im kommenden Kapitel zu einigen Anwendungen dieser Rechenmethode kommen, sollen die wichtigsten Gedanken noch einmal zusammengestellt werden.

Einleitend zu diesem Abschnitt werden die in diesem Buch gebrauchten Konstanten und Maßzahlen zusammengestellt. Dem folgt eine Auflistung der

Tab. 2.7 Zusammenstellung der bei den Rechnungen benötigten Größen

KenngroÙe	Wert
Lichtgeschwindigkeit, c	$299792458\text{ m s}^{-1}$
Gravitationskonstante, γ	$6,67384 \times 10^{-11}\text{ m}^3\text{ kg}^{-1}\text{ s}^{-2}$
Gravitationskonstante, G	$2,959122083 \times 10^{-4}\text{ AE}^3\text{ M}_{\text{Sonne}}^{-1}\text{ d}^{-2}$
Masse der Sonne, m_{sonne}	$1,98892 \times 10^{30}\text{ kg}$
Masse des Mondes, m_{mond}	$7,348 \times 10^{22}\text{ kg}$
Masse der Erde, m_{erde}	$5,9722 \times 10^{24}\text{ kg}$
Monddurchmesser, d_m	3476 km
Erddurchmesser, d_e	12756 km
Sonnendurchmesser, d_s	695800 km
Abstand Mond-Erde, s_{em}	384400 km
Abstand Erde-Sonne, s_{es}	149597870700 m

Rechenschritte, so dass insbesondere die im Kap. 3 gezeigten Anwendungsbeispiele leichter nachvollzogen werden können. Abschließend werden noch einmal alle verwendeten Bezugssysteme aufgelistet und deren Koordinaten genannt.

2.10.1 KenngroÙen

In Tab. 2.7 sind einige Naturkonstanten und die wichtigsten Maßzahlen, die für die dargestellten Berechnungen verwendet werden, zusammengestellt.

2.10.2 Rechenschritte

Aufgrund des doch recht hohen Rechenaufwandes zum Nachvollziehen einzelner in der Folge noch zu beschreibender Anwendungsfälle oder zum Berechnen neuer Planeten-, Mond- oder Sonnenpositionen, ist es notwendig und sinnvoll, einzelne Rechenschritte zu programmieren. Das reicht vom Erstellen eines eigenen Rechenprogramms bis zum Einschreiben der Formeln in ein Tabellenkalkulationsprogramm. Es werden alle notwendigen Rechenschritte zusammengestellt:

- **Zeitmessung.**
 - **Julianisches Datum.** Gl. (1.18) und Gl. (1.17)

$$JD/d = \text{floor}(365,25\text{ y}) + \text{floor}(30,6001(m+1)) + H + 1720996,5 + \text{day} + UT/24$$

mit $H = \text{floor}(y/400) - \text{floor}(y/100).$

- **Anzahl der Jahrhunderte nach aktuellem Äquinoktium.** Gl. (1.19)

$$T = \frac{JD - 2451545,0}{36525} \text{ Jhd.}$$

- **Bahnebene.**

- **Mittlere Anomalie.** Am Beispiel der Erde Gl. (1.25)

$$M = 35999,0498 \frac{^\circ}{\text{Jhd}} \times T_u + 357,5256^\circ$$

- **Winkel zwischen Bahnebene und Ebene der Ekliptik.** Am Beispiel der Venus: Gl. (1.27)

$$i = 0,0010 \frac{^\circ}{\text{Jhd}} \times T + 3,3946^\circ$$

- **Länge des aufsteigenden Knotens.** Am Beispiel der Venus: Gl. (1.29)

$$\Omega = 0,9 \frac{^\circ}{\text{Jhd}} \times T + 76,68^\circ$$

- **Länge des Perihels.** Am Beispiel der Venus: Gl. (1.32)

$$\bar{\omega} = 1,408 \frac{^\circ}{\text{Jhd}} \times T + 131,5718^\circ$$

- **Exzentrische Anomalie.** Gl. (1.48)

$$E_{i+1} = E_i - \frac{M - E_i + e \sin E_i}{e \cos E_i - 1}$$

- **Wahre Anomalie.** Gl. (1.61)

$$v = 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \times \tan \left(\frac{E}{2} \right) \right)$$

- **Abstand Planet-Sonne.** Gl. (1.63)

$$r = a(1 - e \cos E)$$

- **Bahngeschwindigkeit, Vis-viva-Gesetz.** Gl. (1.68)

$$v^2 = \gamma (M + m) \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

- **Argument der Breite.** Gl. (1.73)

$$u = \bar{\omega} - \Omega + v$$

- **Heliozentrisch ekliptikale Koordinaten.**

- **Breite.** Gl. (2.26)

$$b = \begin{pmatrix} \arcsin(\sin(u) \sin(i)) \\ \pi - \arcsin(\sin(u) \sin(i)) \end{pmatrix}$$

- **Länge.** Gl. (2.27)

$$l = \begin{pmatrix} \arccos\left(\frac{A}{\cos(b)}\right) + \Omega \\ -\arccos\left(\frac{A}{\cos(b)}\right) + \Omega \end{pmatrix} \quad \text{mit } A = \cos(u)$$

- **Position der Sonne.** Gl. (2.45)

$$\lambda = L + 180^\circ$$

- **Schrägstellung der Erdachse.** Gl. (2.46)

$$\epsilon = 23,439291^\circ - 0,013004 \frac{^\circ}{Jhd} \times T$$

- **Geozentrisch ekliptikale Koordinaten.**

- **Länge.** Gl. (2.37)

$$\lambda = -\arctan \frac{S-T}{N-M} \quad \text{mit}$$

$$M = r \cos(b) \cos(l)$$

$$N = R \cos(B) \cos(L)$$

$$S = r \cos(b) \sin(l)$$

$$T = R \cos(B) \sin(L)$$

- **Breite.** Gl. (2.38)

$$\beta = -\arctan \left(\frac{\cos(\lambda)(X-Y)}{N-M} \right) \quad \text{mit}$$

$$M = r \cos(b) \cos(l)$$

$$N = R \cos(B) \cos(L)$$

$$X = r \sin(b)$$

$$Y = R \sin(B)$$

- **Abstand.** Gl. (2.39) auf Seite 46

$$\Delta = \frac{X - Y}{\sin(\beta)} \quad \text{mit}$$

$$X = r \sin(b)$$

$$Y = R \sin(B)$$

- **Geozentrisch äquatoriale Koordinaten.**

- **Deklination.** Gl. (2.51)

$$\delta = \arcsin(C) \quad \text{mit}$$

$$C = \sin(\epsilon) \times \cos(\beta) \times \sin(\lambda) + \cos(\epsilon)$$

- **Rektaszension.** Gl. (2.52)

$$\alpha = \arccos\left(\frac{A}{\cos(\delta)}\right) \quad \text{mit}$$

$$A = \cos(\beta) \times \cos(\lambda)$$

- **topozentrische Koordinaten.**

- **geozentrische Breite.** Gl. (2.53)

$$\Phi = \varphi - 0,1924^\circ \times \sin(2\varphi)$$

- **Abstand zum Erdmittelpunkt.** Gl. (2.54)

$$\varrho \approx 6378,14 \text{ km} - 21,38 \text{ km} \times \sin^2(\varphi)$$

- **Sternzeit.**

- **Null Uhr Greenwicher Zeit.** Gl. (2.56)

$$\begin{aligned} \theta_0/h = & \left(6 + \frac{41}{60} + \frac{50,54841}{3600}\right) + \left(\frac{8640184,812866}{3600} \times T_0\right) \\ & + \left(\frac{0,093104}{3600} \times T_0^2\right) - \left(\frac{0,0000062}{3600} \times T_0^3\right) \end{aligned}$$

- **Beobachtungszeit.** Gl. (2.58)

$$\theta_{zeit} = \theta_0 + UT \times 1,00273790935$$

- **Beobachtungsort.** Gl. (2.63)

$$\theta_{ort} = \theta_{zeit} + \lambda$$

Tab. 2.8 Zusammenstellung der Koordinatensysteme

Name	Bezugsebene	Bezugsrichtung	Nullpunkt	Abstand	Länge	Breite
Bahnebene eines Planeten	Bahnebene	Knotenlinie Bahnebene – Ebene der Ekliptik	Sonnen- mittelpunkt	Entfernung zum Sonnenmittel- punkt r	Argument der Breite, $u = 0...360^\circ$ in Richtung der Bewegung des Planeten	
heliocentrisch ekliptikal	Ebene der Ekliptik	Frühlingspunkt	Sonnen- mittelpunkt	Entfernung zum Sonnenmittel- punkt r	ekliptikale Länge l $0...360^\circ$	ekliptikale Breite b $-90^\circ ... 90^\circ$
geozentrisch ekliptikal	Ebene der Ekliptik	Frühlingspunkt	Erdmittelpunkt	Entfernung zum Erdmittelpunkt Δ	ekliptikale Länge λ $0...360^\circ$	ekliptikale Breite β $-90^\circ ... 90^\circ$
geozentrisch äquatorial	Äquatorebene, Himmelsäquator	Frühlingspunkt	Erdmittelpunkt	Entfernung zum Erdmittelpunkt Δ	Rektaszension α $0...24\ h$	Deklination δ $-90^\circ ... 90^\circ$
topozentrisch	am Beobachtungsstandort parallel zur Äquatorebene	Frühlingspunkt	Beobachtungs- standort	Entfernung zum Beobachtungs- standort Δ'	Rektaszension α' $0...24\ h$	Deklination δ' $-90^\circ ... 90^\circ$
horizontal	am Beobachtungsstandort tangential zur Erdoberfläche	Süden	Beobachtungs- standort		Azimet A $0...360^\circ$	Höhe h $-90^\circ ... 90^\circ$

- **Deklination.** Gl. (2.68) bis (2.70) und Gl. (2.71)

$$A = \Delta \cos(\delta) \cos(\alpha) - \varrho \cos(\varphi) \cos(\theta)$$

$$B = \Delta \cos(\delta) \sin(\alpha) - \varrho \cos(\varphi) \cos(\theta)$$

$$C = \Delta \sin(\delta) - \varrho \sin(\varphi)$$

$$\delta' = \arctan 2 \left(\frac{((A^2 + B^2 + C^2) \times (A^2 + B^2))^{\frac{1}{2}}}{A^2 + B^2 + C^2}, \frac{C}{(A^2 + B^2 + C^2)} \right)$$

- **Rektaszension.** Gl. (2.72)

$$\alpha' = \arccos \left(\frac{A \times \tan(\delta')}{C} \right)$$

- **Abstand Beobachter – Planet.** Gl. (2.73)

$$\Delta' = \frac{C}{\sin(\delta')}$$

- **Horizontsystem.**

- **Höhe.** Gl. (2.83)

$$h = \arcsin(\sin(\varphi) \sin(\delta) + \cos(\varphi) \cos(\delta) \cos(t))$$

- **Azimut.** Gl. (2.84)

$$A = \arcsin \left(\frac{\sin(t) \cos(\delta)}{\cos(h)} \right)$$

2.10.3 Koordinatensysteme

In Tab. 2.8 sind die wichtigsten Kenngrößen der verschiedenen Koordinatensysteme, beginnend von der Bahnebene eines Planeten bis zum Horizontsystem, dem System eines Beobachters auf der Erdoberfläche, zusammengestellt.

Literatur

- [1] Montenbruck, O.: Grundlagen der Ephemeridenrechnung. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg (2005)
- [2] Montenbruck, O., Pfleger, T.: Astronomie mit dem Personal Computer. Springer, Berlin (2004)

- [3] Der Sterntag, ohne Angabe der Autoren, in <https://de.wikipedia.org/wiki/Sterntag>, letzter Zugriff am 22.5.2017
- [4] Die Sternzeit, ohne Angabe der Autoren, in <https://de.wikipedia.org/wiki/Sternzeit>, letzter Zugriff am 22.5.2017
- [5] Westphal, W. H.: Physik. Springer, Berlin (1950)
- [6] Der Stundenwinkel, Jason Harris, in <http://docs.kde.org/development/de/kdeedu/kstars/ai-hourangle.html>, letzter Zugriff am 22.5.2017
- [7] Das online-Lexikon der Astronomie von www.astronomie.info <http://lexikon.astronomie.info/stichworte/Berechnungen.html?&printpage>, letzter Zugriff am 22.5.2017
- [8] Der Sonnenstand, ohne Angabe der Autoren, in <https://de.wikipedia.org/wiki/Sonnenstand>, letzter Zugriff am 22.5.2017
- [9] Die Nutation, ohne Angabe der Autoren, in <http://www.physik.uni-frankfurt.de/Dechend/Dateien/Pr%E4zession%20und%20Nutation.htm>, letzter Zugriff am 22.5.2017
- [10] Erich Karkoschka. Atlas für Himmelsbeobachter. Franckh-Kosmos Verlags-GmbH & Co., Stuttgart (2013)
- [11] Die Nutation, ohne Angabe der Autoren, in [https://de.wikipedia.org/wiki/Nutation_\(Astronomie\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Nutation_(Astronomie)), letzter Zugriff am 22.5.2017

Ephemeridenrechnung Schritt für Schritt
Sonnenaufgang und Co. bestimmen leicht gemacht
Richter, D.

2017, XIII, 122 S. 63 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-662-54715-1