

# Kapitel 1

## Reellwertige Funktionen von mehreren reellen Veränderlichen

Durch den Urknall vor rund 14 Milliarden Jahren wurden Raum, Zeit, Materie und damit verbunden auch die mehrdimensionale Analysis erschaffen. Zugegeben, es hat danach noch einige Jahre gedauert, bis diese auch tatsächlich zum Einsatz kam. Umso mehr ist die moderne Analysis heutzutage ein unverzichtbares Mittel zur präzisen Beschreibung der Zusammenhänge aus Natur und Technik, was letztlich auch dazu beiträgt, die Gesetze des Universums, welche durch den „Big Bang“ in Gang gesetzt wurden, besser zu verstehen.

Ein erster Schritt dazu ist die Erweiterung des bereits bekannten Funktionsbegriffs von Abbildungen **einer** reellen Veränderlichen (Merz und Knabner 2013, S. 14 ff.) auf Funktionen mit **mehreren** Variablen.

Eine *Funktion* oder eine *Abbildung* ist eine mit gewissen Eigenschaften versehene *Korrespondenz*  $f : X \rightarrow Y$  zweier beliebiger Mengen  $X$  und  $Y$ . Die Menge aller Funktionen bezeichnen wir mit

$$\text{Abb}(X, Y) := \{f : X \rightarrow Y : f \text{ ist eine Funktion}\}.$$

Mit der Wahl  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $n > 1$ , und  $Y \subseteq \mathbb{R}$  erhalten wir die so gewünschte Klasse von Funktionen.

### 1.1 Vorbetrachtungen

Wir beschäftigen uns nun mit Funktionen gemäß nachstehender

**Definition 1.1** Eine Funktion  $u = f(\mathbf{x})$  mit  $\mathbf{x} \in D_f \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $u \in \mathbb{R}$  heißt **reelle** oder **reellwertige** Funktion von  $n$  Veränderlichen mit dem Vektor  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  aus dem Definitionsbereich  $D_f$ .

Wir schreiben für  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  bzw.  $f \in \text{Abb}(D_f, \mathbb{R})$  auch

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \mathbf{x} \in D_f \subseteq \mathbb{R}^n$$

oder verwenden die Buchstaben  $u = f(x, y)$  sowie  $u = f(x, y, z)$ , wenn nur wenige unabhängige Veränderliche auftreten.

**Bemerkung 1.2** Ein Vektor ist **stets** ein **Spaltenvektor** der Form

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T,$$

im Gegensatz zu einem **geordneten  $n$ -Tupel**

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

also zu einem **Zeilenvektor**. Manchmal unterscheiden wir zwischen einem Spalten- und einem Zeilenvektor. Meistens kommt es jedoch auf diesen Unterschied nicht an, lediglich auf die Reihenfolge der Komponenten, weswegen wir in unseren weiteren Formulierungen der Einfachheit halber **überwiegend geordnete  $n$ -Tupel** einsetzen.

In den Abbildungen verwenden wir bei Vektoren oder Tupeln die **Pfeilnotation**  $\vec{\mathbf{x}}$ , um eventuelle Verwechslungen mit Skalaren auszuschließen.

**Beispiel 1.3** Physikalische Gesetze, bei denen mehrere physikalische Größen miteinander verknüpft werden, sind typische Vertreter von Funktionen mehrerer Veränderlicher.

- a) Das Boyle-Mariotte-Gesetz für ideale Gase beschreibt den Zusammenhang zwischen dem Druck  $p$  eines idealen Gases, der Stoffmenge  $n$ , der idealen Gaskonstanten  $R$ , der Temperatur  $T$  und dem Volumen  $V$  gemäß der Relation

$$p := \frac{nRT}{V}.$$

Da sich die Stoffmenge  $n$  in der Regel nicht ändert, resultiert eine Funktion  $p = p(V, T)$ , bei der aus physikalischen Gründen  $T > 0$  und  $V > 0$  gelten muss.

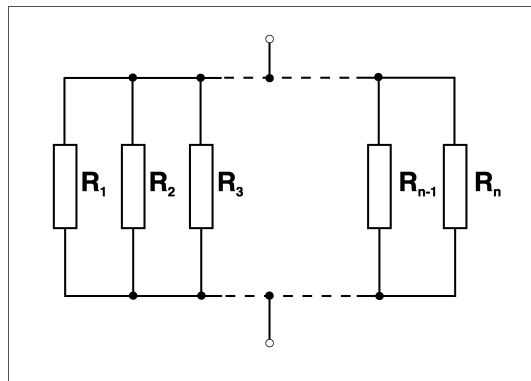
- b) Das Ohmsche Gesetz beschreibt in einem elektrischen Leiter den Zusammenhang zwischen der Stromstärke  $I$ , dem Widerstand  $R$  und der Spannung  $U$  durch die Relation

$$U = U(R, I) := RI.$$

- c) Eine Parallelschaltung von  $n$  Widerständen  $R_1, R_2, \dots, R_n$ , deren Gesamtwiderstand  $R$  sich nach den Kirchhoff-Gesetzen darstellt als

$$R = R(R_1, R_2, \dots, R_n) := \left( \sum_{j=1}^n \frac{1}{R_j} \right)^{-1}$$

wird durch eine solche Funktion beschrieben. Auch hier gilt aus physikalischen Gründen stets  $R_j > 0$ .



Parallelschaltung von  $n$  Widerständen

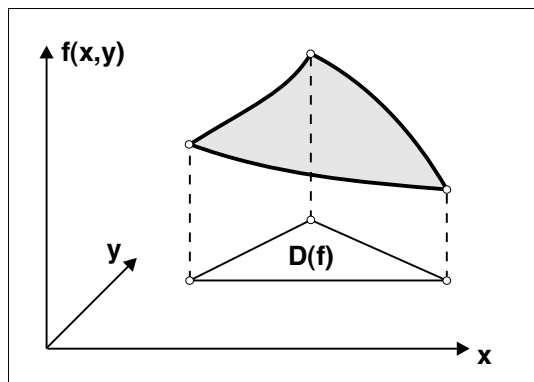
**Beispiel 1.4** Die Beschreibung von orts- und zeitabhängigen physikalischen Größen führt auf Funktionen mehrerer Veränderlicher. Die **Temperatur**  $T$  eines wärmeleitenden Mediums ist bei Abkühlungs- bzw. Aufheizungsprozessen eine Funktion von Ort  $(x, y, z)$  und Zeit  $t$  gemäß

$$T = T(x, y, z, t).$$

Gilt nun  $D_f \subset \mathbb{R}^2$ , so kann die funktionale Beziehung

$$u = f(x, y), \quad (x, y) \in D_f, \quad (1.1)$$

auch *geometrisch* gedeutet werden. Der Graph von  $f$  ist eine Teilmenge des dreidimensionalen Raumes  $\mathbb{R}^3$  und somit unserer Anschauung zugänglich.



Graph der Funktion  $u = f(x, y)$  ist eine (gekrümmte) Fläche in  $\mathbb{R}^3$

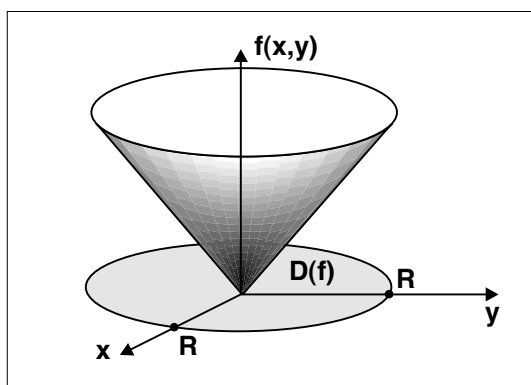
**Definition 1.5** Der Graph

$$G(f) := \{(x, y, u) \in \mathbb{R}^3 : u = f(x, y), (x, y) \in D_f\}$$

einer Funktion  $f$  von zwei unabhängigen Veränderlichen heißt **Fläche** in  $\mathbb{R}^3$ .

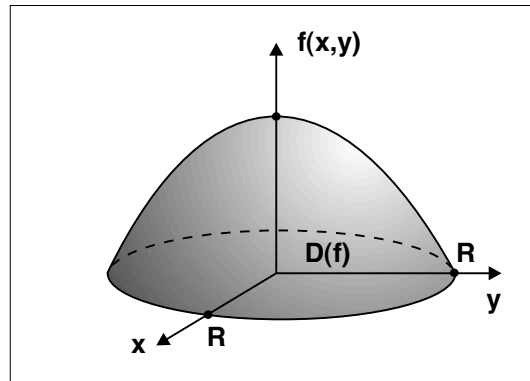
**Beispiel 1.6** Bekannte und immer wiederkehrende Gebilde sind:

- a) die **Kegelfläche** in  $\mathbb{R}^3$  mit der Gleichung  $u = f(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2}$ , wobei  $(x, y) \in D_f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$ ,



Kegelfläche

- b) die **Halbsphäre** in  $\mathbb{R}^3$  mit der Gleichung  $u = f(x, y) := \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$ , wobei  $(x, y) \in D_f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$ .



Halbsphäre

Eine weitere Darstellungsmöglichkeit der funktionalen Beziehung (1.1) eröffnet sich für  $D_f \subset \mathbb{R}^2$ , wenn der Graph  $G(f)$  mit Ebenen  $u = \text{const}$  geschnitten wird. Die entstehenden Schnittlinien werden orthogonal auf die  $(x, y)$ -Ebene projiziert. Damit ergibt sich ein Höhenlinien-Porträt der Funktion  $f$ .

**Definition 1.7** Für  $u = f(x, y)$  mit  $(x, y) \in D_f \subset \mathbb{R}^2$  heißen die implizit definierten Kurven

$$\Gamma_h := \{(x, y) \in D_f : f(x, y) = h\}, \quad h \in \mathbb{R},$$

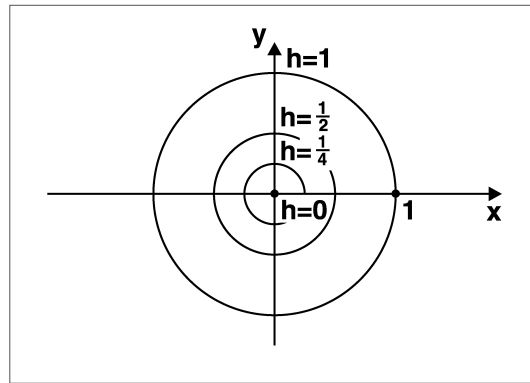
**Höhenlinien**, oder **Niveaulinien** oder **Äquipotentiallinien** von  $f$ .

Das grafische Gebilde, das durch Darstellung einer Funktion mittels ihrer Höhenlinien entsteht, heißt **Karte** von  $f$ .

**Beispiel 1.8** Die Höhenlinien der **Kegelfläche**  $u = f(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2}$  sind die Linien

$$\sqrt{x^2 + y^2} = h = \text{const}, \quad h \geq 0.$$

Diese bilden eine Schar konzentrischer Kreise vom Radius  $h$  um den Mittelpunkt  $(x, y)^T = \mathbf{0}$ .



Höhenlinien der Kegelfläche

Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $n > 2$  sind einer Veranschaulichung nicht mehr unmittelbar zugänglich. Ihr Graph ist eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Im Fall  $n = 3$  sind zumindest die Höhenlinien darstellbar. Entsprechend gilt auch hier

**Definition 1.9** Für  $u = f(x, y, z)$  mit  $(x, y, z) \in D_f \subset \mathbb{R}^3$  heißen die implizit definierten Flächen

$$F_h := \{(x, y, z) \in D_f : f(x, y, z) = h\}, \quad h \in \mathbb{R},$$

**Niveauflächen** oder **Äquipotentialflächen** von  $f$ .

**Beispiel 1.10** Die Niveauflächen der Funktion  $f(x, y, z) := x^2 + y^2 - 2z$  sind die **Rotationsparaboloide**

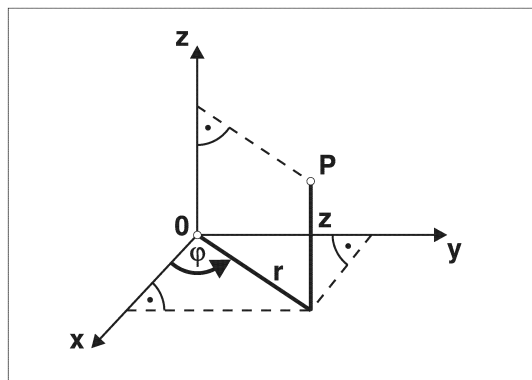
$$2z + h = x^2 + y^2, \quad h = \text{const.}$$

Deren Rotationsachse ist die  $z$ -Achse.

Das kartesische Koordinatensystem in  $\mathbb{R}^3$  haben wir bereits zur geometrischen Veranschaulichung von Funktionszusammenhängen benutzt. Für spezielle Aufgabenstellungen ist es oft vorteilhaft, andere Koordinatensysteme zu verwenden. In der Ebene  $\mathbb{R}^2$  konnten wir z. B. **Polarkoordinaten** sinnvoll einsetzen. **Räumliche Polarkoordinaten** sind in den folgenden zwei Varianten bekannt:

### (I) Zylinderkoordinaten

Es sei  $(\mathbf{0}; x, y, z)$  ein kartesisches Koordinatensystem in  $\mathbb{R}^3$ . Dann kann die Lage eines Punktes  $\mathbf{0} \neq P \in \mathbb{R}^3$  auch durch die drei Größen  $r, \varphi, z$  eindeutig gemäß folgender Skizze beschrieben werden:

Zylinderkoordinaten in  $\mathbb{R}^3$ 

Beide Koordinatensysteme stehen in folgender Relation zueinander:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z, \quad 0 < r, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

also auch

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{r}, \quad z = z, \quad 0 < r, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Darin bleibt also die Koordinate  $z \in \mathbb{R}$  als solche erhalten. Für  $r = 0$  ist  $\varphi$  nicht erklärt; alle Tripel  $(0, \varphi, z)$  werden als  $(0, 0, z)$  identifiziert. Für  $r > 0$  gilt für  $\varphi$  aus dem oben genannten Bereich die Darstellung

$$\varphi = \begin{cases} \arccos \frac{x}{r} & : y \geq 0, \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{r} & : y < 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

*Anmerkung.* Um (1.2) zu verifizieren, setzen wir zunächst  $y = 0$  und erhalten die beiden Winkel

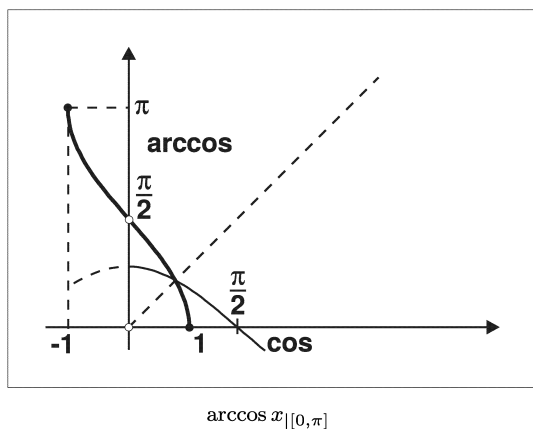
$$\varphi = \arccos \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 0 & : x > 0, \\ \pi & : x < 0. \end{cases}$$

Für  $y > 0$  gilt stets  $-1 < x/r < 1$ , also ist

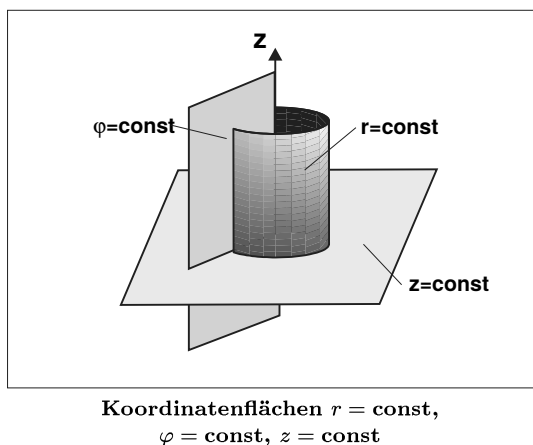
$$\varphi = \arccos \frac{x}{r} \in (0, \pi).$$

Der erste Zweig in (1.2) liefert also  $\varphi \in [0, \pi]$ , und der zweite Zweig für  $y < 0$  ergibt  $\varphi \in (\pi, 2\pi)$ , womit insgesamt  $\varphi \in [0, \pi] \cup (\pi, 2\pi) = [0, 2\pi)$  gegeben ist.

Dazu präsentieren wir zur Erinnerung die nachfolgende Abbildung:



Die Koordinatenflächen  $r = \text{const}$ ,  $\varphi = \text{const}$ ,  $z = \text{const}$  sind gemäß nachfolgender Skizze paarweise orthogonal zueinander:



**Beispiel 1.11** Durch die Gleichung

$$f(x, y, z) := x^2 + y^2 - 2z = 0, \quad z \geq 0$$

wird ein nach oben geöffnetes **Rotationsparaboloid** beschrieben. In Zylinderkoordinaten gelangen wir zur expliziten Darstellung

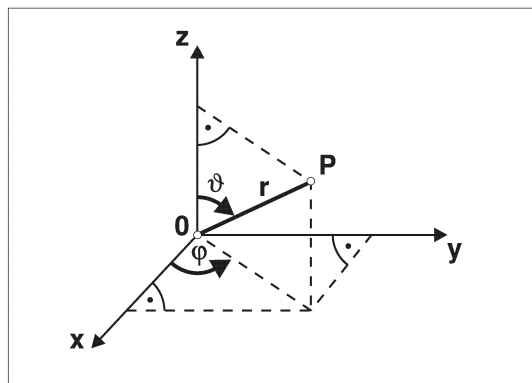
$$z(r) = \frac{r^2}{2}, \quad r \geq 0.$$

Das Fehlen der Veränderlichen  $\varphi$  bedeutet **Rotationssymmetrie**.



## (II) Kugelkoordinaten

Es sei  $(\mathbf{0}; x, y, z)$  wieder ein kartesisches Koordinatensystem in  $\mathbb{R}^3$ . Die Lage eines Punktes  $\mathbf{0} \neq P \in \mathbb{R}^3$  lässt sich nun auch durch die drei Größen  $r, \vartheta, \varphi$  eindeutig gemäß folgender Skizze beschreiben:



Kugelkoordinaten in  $\mathbb{R}^3$

Beide Koordinatensysteme stehen in folgender Relation zueinander:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \sin \vartheta, & y &= r \sin \varphi \sin \vartheta, & z &= r \cos \vartheta, \\ 0 < r, & 0 \leq \varphi < 2\pi, & 0 < \vartheta < \pi \end{aligned}$$

sowie

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}, \quad \cos \vartheta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Für  $r = 0$  sind  $\vartheta$  und  $\varphi$  nicht erklärt; alle Tripel  $(0, \vartheta, \varphi)$  werden als  $(0, 0, 0)$  identifiziert. Anderen Punkten der  $z$ -Achse wird ein Winkel  $\vartheta = 0$  oder  $\vartheta = \pi$  zugeordnet, während  $\varphi$  unbestimmt bleibt.

Der sog. Ausfallwinkel  $\vartheta \in (0, \pi)$  ergibt sich für  $r > 0$  aus

$$\vartheta = \arccos \frac{z}{r}, \tag{1.3}$$

und der Winkel in der  $x$ - $y$ -Ebene  $\varphi \in [0, 2\pi)$  resultiert für  $x \neq 0$  aus den Darstellungen

$$\varphi = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & : x > 0, y \geq 0, \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & : x < 0, y \geq 0, \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & : x < 0, y < 0, \\ \arctan \frac{y}{x} + 2\pi & : x > 0, y < 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

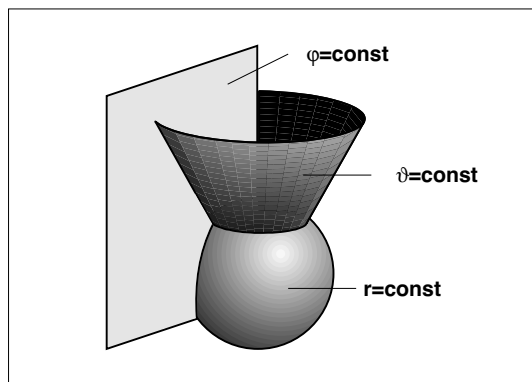
der Reihe nach in den vier Quadranten. Entlang der  $y$ -Achse fehlen in (1.4) noch die beiden Winkel

$$\varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & : x = 0, y > 0, \\ \frac{3\pi}{2} & : x = 0, y < 0, \end{cases} \quad (1.5)$$

welche hiermit nun auch festgelegt sind.

*Anmerkung.* Um die Darstellung (1.4) zu verifizieren, setzen Sie der Reihe nach beispielsweise die Werte  $(1, 1)$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(-1, -1)$ ,  $(1, -1)$  ein, und mit  $\arctan(1) = \pi/4$  bzw.  $\arctan(-1) = -\pi/4$  erhalten Sie die Bestätigung obiger Ausführungen.

Die Koordinatenflächen  $r = \text{const}$ ,  $\vartheta = \text{const}$ ,  $\varphi = \text{const}$  sind gemäß nachfolgender Skizze paarweise orthogonal zueinander.



**Koordinatenflächen  $r = \text{const}$ ,  
 $\vartheta = \text{const}$ ,  $\varphi = \text{const}$**

**Beispiel 1.12** *Das durch die Gleichung*

$$f(x, y, z) := x^2 + y^2 - 2z = 0, \quad z \geq 0$$

Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler

Band 2: Analysis in  $\mathbb{R}^n$  und gewöhnliche

Differentialgleichungen

Merz, W.; Knabner, P.

2017, IX, 405 S., Softcover

ISBN: 978-3-662-54780-9