

Kapitel 1

Reellwertige Funktionen von mehreren reellen Veränderlichen

1.1 Vorbetrachtungen

Aufgabe 1.1. Bestimmen Sie für die nachfolgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jeweils den maximalen Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$, den Wertebereich $W_f \subseteq \mathbb{R}$ und die Nullstellen:

$$a) f(x, y) = \sin(xy), \quad b) f(x, y) = \cos(xy),$$

$$c) f(x, y) = \tan(xy), \quad d) f(x, y) = \cot(xy).$$

Aufgabe 1.2. Bestimmen Sie für die nachfolgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jeweils den maximalen Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$ und den Wertebereich $W_f \subseteq \mathbb{R}$:

$$a) f(x, y) = x + y + \cos(xy), \quad b) f(x, y) = \sqrt{1-y} + e^{-x^2},$$

$$c) f(x, y) = \sqrt{x^2 - y} + \sqrt{y - x^2}, \quad d) f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}.$$

Aufgabe 1.3. Gegeben sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x, y) = (\ln x + \ln y)^{\sin(xy)}$. Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 1.4. Bestimmen Sie die maximalen Definitionsbereiche $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$, die Wertebereiche $W_f \subseteq \mathbb{R}$ und die Niveaulinien der Funktionen

$$a) f(x, y) = x + y + |x| + |y|, \quad b) f(x, y) = x^2 + 4xy + 4y^2.$$

Aufgabe 1.5. Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$, den Wertebereich $W_f \subseteq \mathbb{R}$ und die Niveaulinien der Funktionen

$$a) f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2y}, \quad b) f(x, y) = e^{-xy^2}.$$

Aufgabe 1.6. Bestimmen Sie von $f(x, y) = \frac{(x-1)^2 + y^2}{(x+1)^2 + y^2}$ die Äquipotentiallinien für $(x, y) \neq (-1, 0)$.

Aufgabe 1.7. Bestimmen Sie von $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $(x, y) \neq \mathbf{0}$, die Äquipotentiallinien.

Lösungsvorschläge

Lösung 1.1.

- a) Es gilt $D_f = \mathbb{R}^2$ und $W_f = [-1, 1]$. Die Nullstellen befinden sich bei $xy = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Speziell für $k = 0$, also für $xy = 0$, hat f entlang der beiden Koordinatenachsen den Wert 0.

Alternativ können die Nullstellen als eine Schar von Graphen dargestellt werden. Aus der obigen Gleichung ergibt sich nach Division mit $x \neq 0$ die Darstellung

$$y = \frac{k\pi}{x}, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ für } x \neq 0$$

oder

$$y \in \mathbb{R} \text{ für } x = 0.$$

- b) Es gilt $D_f = \mathbb{R}^2$ und $W_f = [-1, 1]$. Die Nullstellen befinden sich bei $xy = (k + 1/2)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Alternativ können die Nullstellen als eine Schar von Graphen dargestellt werden. Aus der obigen Gleichung ergibt sich nach Division mit $x \neq 0$ die Darstellung

$$y = \frac{(k + 1/2)\pi}{x}, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ für } x \neq 0.$$

- c) Es gilt

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (k + 1/2)\pi < xy < (k + 3/2)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

und $W_f = \mathbb{R}$. Die Nullstellen befinden sich wie beim sin bei $xy = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Speziell für $k = 0$, also für $xy = 0$, hat f entlang der beiden Koordinatenachsen den Wert 0.

Die aus dem Definitionsbereich ausgeschlossene Menge kann auch alternativ als eine Schar von Graphen dargestellt werden. Aus der obigen Ungleichung resultiert nach Division mit $x \neq 0$ die Darstellung

$$y = \frac{(k + 1/2)\pi}{x}, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ für } x \neq 0.$$

d) Es gilt

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : k\pi < xy < (k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

und $W_f = \mathbb{R}$. Die Nullstellen befinden sich wie beim \cos bei $xy = (k + 1/2)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Die aus dem Definitionsbereich ausgeschlossene Menge kann auch alternativ als eine Schar von Graphen dargestellt werden. Aus der obigen Ungleichung resultiert nach Division mit $x \neq 0$ die Darstellung

$$y = \frac{k\pi}{x}, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ für } x \neq 0$$

oder

$$y \in \mathbb{R} \text{ für } x = 0.$$

Lösung 1.2.

a) Bei der gegebenen Funktion sind keinerlei Einschränkungen zu erkennen. Somit gilt

$$D_f = \mathbb{R}^2, \quad W_f = \mathbb{R}.$$

b) Aus der Forderung $1 - y \geq 0$ ergibt sich

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 1\} \text{ und } W_f = (0, \infty).$$

c) Die Forderung $x^2 - y \geq 0$ liefert $y \leq x^2$, während $y - x^2 \geq 0$ die Beziehung $y \geq x^2$ ergibt. Insgesamt erhält man also

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\} \text{ und } W_f = \{0\}.$$

d) Aus $x^2 - y^2 \geq 0$ resultiert

$$y^2 \leq x^2 \iff |y| \leq |x| \iff -|x| \leq y \leq |x|.$$

Zusammenfassend ist dann

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -|x| \leq y \leq |x|\} \text{ und } W_f = [0, \infty).$$

Lösung 1.3. Der Logarithmus erfordert strikt positive Argumente, also muss zunächst $x > 0$ und $y > 0$ gelten. Aus $\ln x + \ln y = \ln(xy)$ resultiert die Darstellung

$$f(x, y) = (\ln(xy))^{\sin(xy)}.$$

Da $-1 \leq \sin(xy) \leq 1$, ist f nur für $\ln(xy) \geq 0$ definiert, um negative Argumente bei Wurzeln zu vermeiden, und um Divisionen durch 0 zu umgehen, ergibt sich die zusätzliche Einschränkung $\ln(xy) > 0$, also insgesamt $xy > 1$. Zusammenfassend ergibt sich damit

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, xy > 1\}.$$

Der Definitionsbereich liegt demnach im 1. Quadranten strikt oberhalb des Graphen $y = \frac{1}{x}$.

Lösung 1.4.

a) Es gilt $D_f = \mathbb{R}^2$ und $f(x, y) \geq 0$. Wir setzen demnach

$$f(x, y) = x + y + |x| + |y| \stackrel{!}{=} c \geq 0.$$

Wir führen einige Fallunterscheidungen durch.

Für $x \geq 0, y \geq 0$ resultiert:

$$2x + 2y = c \implies y = -x + \frac{c}{2}.$$

Für $x \geq 0, y \leq 0$ resultiert:

$$2x = c \implies x = \frac{c}{2}.$$

Für $x \leq 0, y \leq 0$ resultiert:

$$f(x, y) \equiv 0.$$

Für $x \leq 0, y \geq 0$ resultiert:

$$2y = c \implies y = \frac{c}{2}.$$

b) Es gilt $D_f = \mathbb{R}^2$ und $f(x, y) = (x + 2y)^2 \geq 0$. Damit ergeben sich aus

$$f(x, y) = (x + 2y)^2 \stackrel{!}{=} c \geq 0$$

die Geradenpaare

$$y = -\frac{x}{2} \pm \frac{\sqrt{c}}{2}.$$

Lösung 1.5.

a) Es gilt $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$ und $W_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Der Ansatz

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2y} \stackrel{!}{=} c \neq 0$$

führt auf die Darstellung

$$x^2 + y^2 = 2cy \iff x^2 + (y - c)^2 = c^2.$$

Dies sind Kreise um die Punkte $(0, c)$ mit Radius $|c|$. Die Punkte auf der x -Achse werden somit nicht mit einbezogen.

b) Es gilt $D_f = \mathbb{R}^2$ und $W_f = (0, \infty)$. Die Forderung

$$f(x, y) = e^{-xy^2} \stackrel{!}{=} c > 0$$

ergibt

$$y = \pm \sqrt{-\frac{\ln c}{x}} \quad \text{für} \quad \frac{\ln c}{x} \leq 0.$$

Auf den Koordinatenachsen

$$x = 0 \quad \vee \quad y = 0$$

gilt $f(x, y) \equiv 1$.

Lösung 1.6. Aus

$$\frac{(x-1)^2 + y^2}{(x+1)^2 + y^2} \stackrel{!}{=} c \geq 0$$

folgt

$$(c-1)x^2 + (c-1)y^2 + 2(c+1)x + (c-1) = 0.$$

Daraus resultiert für

$$c = 1 : x = 0,$$

$$c \neq 1 : \left(x + \frac{(c+1)}{(c-1)} \right)^2 + y^2 = \frac{4c}{(c-1)^2}.$$

Damit ist für $c = 1$ die Äquipotentiallinie die y -Achse, für $c \neq 1$ sind die Äquipotentiallinien die Kreise um $\left(\frac{c+1}{1-c}, 0 \right)$ mit Radius $\frac{2\sqrt{c}}{|c-1|}$.

Lösung 1.7. Die Äquipotentiallinien ergeben sich aus

Endlich gelöst! Aufgaben zur Mathematik für Ingenieure
und Naturwissenschaftler

Band 2: Analysis in \mathbb{R}^n und gewöhnliche
Differentialgleichungen

Merz, W.; Knabner, P.

2017, IX, 293 S., Softcover

ISBN: 978-3-662-54782-3