7 Differentialrechnung

7.1 Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen.

(i) $f_1(x) = 2x^3 - 6x^2 + 3x - 17$;
(ii) $f_2(x) = \frac{1}{x}$;
(iii) $f_3(x) = x^2 \cdot (2x + 1)$;
(iv) $f_4(x) = x \cdot e^x$.

Lösung Diese Ableitungsaufgaben sind ein Einstieg in die Methoden der Differentialrechnung, denn die angegebenen Funktionen sind so einfach, dass man noch kaum auf die üblichen Regeln zur Berechnung von Ableitungen zurückgreifen muss, sondern meist ohne großen Aufwand einfach ableiten kann.

(i) Die Funktion $f_1(x) = 2x^3 - 6x^2 + 3x - 17$ ist ein Polynom, und um ein Polynom abzuleiten, muss man im Grunde nur zwei Dinge wissen: erstens kann man eine Summe ableiten, indem man die einzelnen Summanden der Reihe nach ableitet und die errechneten Ableitungen hinterher zusammenzählt, und zweitens gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$. Um ganz genau zu sein, sollte ich auch noch erwähnen, dass ein konstanter Faktor vor einer Funktion beim Ableiten einfach erhalten bleibt, aber das wird niemanden überraschen. Es gilt also:

$$f_1'(x) = 2 \cdot 3x^{3-1} - 6 \cdot 2x^{2-1} + 3 \cdot x^{1-1},$$

denn die Ableitung einer konstanten Funktion ist immer Null. Daraus folgt dann:

$$f_1'(x) = 6x^2 - 12x + 3,$$

da $x^0 = 1$ gilt.

(ii) Etwas anders sieht es schon bei $f_2(x) = \frac{1}{x}$ aus. Offenbar ist f_2 kein Polynom, so dass sich die oben angeführte Regel $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ nicht auf diesen Fall anwenden

T. Rießinger, *Übungsaufgaben zur Mathematik für Ingenieure*,
DOI 10.1007/978-3-662-54803-5_7

lässt. Man kann die Regel aber so verallgemeinern, dass etwas Verwertbares dabei herauskommt, denn sie gilt nicht nur für natürliche Exponenten $n \in \mathbb{N}$, sondern generell für beliebige Exponenten $a \in \mathbb{R}$. Mit anderen Worten: für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist $(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$. Das hilft beim Ableiten von $f_2(x) = \frac{1}{x}$ ungemein, weil man $\frac{1}{x}$ als Potenz schreiben kann. Bekanntlich ist nämlich $\frac{1}{x} = x^{-1}$, und das heißt, ich habe es hier mit einer Potenz mit dem Exponenten $a = -1$ zu tun. Damit folgt:

$$f_2'(x) = (-1) \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2},$$

da $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ gilt.

(iii) Es gibt zwei Möglichkeiten, die Funktion $f_3(x) = x^2 \cdot (2x + 1)$ abzuleiten, und ich werde Ihnen beide Möglichkeiten zeigen. Einerseits habe ich hier natürlich ein Produkt, und da liegt es nahe, die Produktregel zum Ableiten zu benutzen. Sind also u und v zwei differenzierbare Funktionen, so sagt die Produktregel, dass

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x)$$

gilt. In diesem Fall ist $u(x) = x^2$ und $v(x) = 2x + 1$. Daher gilt $u'(x) = 2x$ und $v'(x) = 2$, und das bedeutet für die Produktregel:

$$\begin{aligned} f_3'(x) &= (u(x) \cdot v(x))' \\ &= 2x \cdot (2x + 1) + 2 \cdot x^2 \\ &= 4x^2 + 2x + 2x^2 = 6x^2 + 2x. \end{aligned}$$

Das funktioniert, aber der Aufwand, hier erst die Produktregel zu bemühen, ist doch ein wenig zu hoch. Einfacher dürfte es hier sein, erst einmal f_3 ein wenig anders darzustellen, indem ich die Klammer ausmultipliziere. Das ergibt:

$$f_3(x) = x^2 \cdot (2x + 1) = 2x^3 + x^2.$$

Jetzt brauche ich überhaupt keine Produktregel mehr, denn in dieser Form kann man f_3 einfach der Reihe nach summandenweise ableiten. Damit folgt:

$$f_3'(x) = 2 \cdot 3x^2 + 2x = 6x^2 + 2x.$$

(iv) Zur Ableitung der Funktion $f_4(x) = x \cdot e^x$ hat man kaum eine Wahl: f_4 ist ein Produkt zweier Funktionen, bei dem sich nichts mehr ausmultiplizieren oder sonstwie vereinfachen lässt. Also werde ich um die Produktregel nicht herum kommen. Offenbar ist hier $u(x) = x$ und $v(x) = e^x$, so dass ich die einzelnen Ableitungen $u'(x) = 1$ und $v'(x) = e^x$ erhalte, denn die Ableitung der Exponentialfunktion ist wieder die Exponentialfunktion selbst. Mit der Produktregel folgt dann:

$$f_4'(x) = 1 \cdot e^x + e^x \cdot x = e^x + xe^x = e^x \cdot (1 + x).$$

7.2 Leiten Sie die folgenden Funktionen ab.

(i) $f_1(x) = x^2 e^x$;
(ii) $f_2(x) = \sqrt{1+x^2}$;
(iii) $f_3(x) = 2x \cdot \cos(x^2)$;
(iv) $f_4(x) = \ln(1+x^2)$;
(v) $f_5(x) = \sqrt{1-x^2} \cdot \sin x$;
(vi) $f_6(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$;
(vii) $f_7(x) = \frac{\sin x}{x^2}$.

Lösung Auch in dieser Aufgabe sind einige Ableitungen zu berechnen; allerdings setzen die angeführten Funktionen schon etwas mehr Differentialrechnung voraus als die Funktionen in Aufgabe 7.1. Neben der Produktregel, die auch schon in 7.1 vorkam, werden hier die Quotientenregel und die Kettenregel gebraucht sowie Kenntnisse über die Ableitungen einiger weiterer spezieller Funktionen wie der Logarithmus, die Wurzel und die trigonometrischen Funktionen.

(i) Die Funktion $f_1(x) = x^2 e^x$ hat gewisse Ähnlichkeiten mit der Funktion, die wir uns in Aufgabe 7.1 (iv) angesehen haben: sie ist das Produkt einer Potenz von x mit der Exponentialfunktion e^x, und da keine Chance besteht, dieses Produkt weiter vereinfachen zu können, bevor man mit dem Ableiten anfängt, bleibt mir nichts anderes übrig, als die Produktregel zu verwenden. Es gilt $f_1(x) = u(x) \cdot v(x)$ mit $u(x) = x^2$ und $v(x) = e^x$. Die einzelnen Ableitungen lauten somit $u'(x) = 2x$ und $v'(x) = e^x$. Damit ergibt die Produktregel:

$$f_1'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x) = 2xe^x + e^x \cdot x^2 = e^x(x^2 + 2x).$$

Dabei habe ich in der ersten Gleichung nur die Produktregel aufgeschrieben, in der zweiten Gleichung die Funktionen u und v sowie ihre Ableitungen in die Produktregel eingesetzt, und in der dritten Gleichung den Faktor e^x vorgeklammert.

(ii) Die Funktion $f_2(x) = \sqrt{1+x^2}$ verlangt schon etwas andere Methoden. Die einzige bisher verwendete Ableitungsregel ist die Produktregel, und die hilft hier überhaupt nicht weiter, weil nirgendwo ein Produkt zu entdecken ist. Ich muss mich also auf eine andere Regel besinnen, und der Schlüssel liegt hier in der Kettenregel. f_2 ist nämlich eine verkettete Funktion, das heißt, f_2 entsteht als *Hintereinanderausführung* zweier Funktionen: für einen Input x wird zuerst $1 + x^2$ ausgerechnet und anschließend die Wurzel aus dem Ergebnis dieser Rechnung gezogen. Die innere Funktion, mit der noch etwas angestellt wird, ist also $v(x) = 1 + x^2$, und die äußere Funktion, die auf die innere Funktion angewendet werden muss, lautet $u(x) = \sqrt{x}$. Damit ist

$$f_2(x) = \sqrt{1+x^2} = u(v(x)),$$

denn hier wird die Wurzelfunktion u nicht mehr einfach nur auf den Input x angewendet, sondern auf die innere Funktion $v(x) = 1 + x^2$. Für diese Situation gibt es die Kettenregel, die angibt, wie man eine verkettete Funktion ableiten kann. Sie lautet:

$$(u(v(x))' = v'(x) \cdot u'(v(x)).$$

In Worte gefasst heißt das: man leitet die verkettete Funktion ab, indem man die innere Ableitung mit der äußeren Ableitung multipliziert. Die innere Ableitung ist schlicht die Ableitung der inneren Funktion, also in diesem Fall $v'(x) = 2x$. Die äußere Ableitung ist die Ableitung der äußeren Funktion, wobei Sie darauf achten müssen, dass Sie in diese äußere Ableitung, sobald Sie sie erst einmal haben, auch als Input die innere Funktion $v(x)$ einsetzen. Ich berechne also zuerst die Ableitung von $u(x) = \sqrt{x}$. Auch das kann ich aber als Potenz schreiben, denn es gilt: $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. Nach der allgemeinen Regel über das Ableiten von Potenzen folgt dann:

$$u'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Nun muss ich aber die äußere Ableitung nicht auf x anwenden, sondern auf die innere Funktion $v(x) = 1 + x^2$. Damit ist

$$u'(v(x)) = \frac{1}{2\sqrt{v(x)}} = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}},$$

und ich habe alles zusammen, um die Kettenregel mit Leben zu füllen. Es gilt:

$$f_2'(x) = v'(x) \cdot u'(v(x)) = 2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

(iii) Die Funktion $f_3(x) = 2x \cdot \cos(x^2)$ ist noch ein wenig schlimmer, weil man zwei Ableitungsregeln anwenden muss. Zunächst ist f_3 offenbar ein Produkt, und es macht Sinn, sich für den Anfang an die Produktregel zu erinnern. Sie liefert:

$$f_3'(x) = 2 \cdot \cos(x^2) + (\cos(x^2))' \cdot 2x.$$

Das wäre alles nicht weiter schlimm, wenn nicht die Funktion $\cos(x^2)$ noch abgeleitet werden müsste, und dafür brauche ich wieder die Kettenregel. Die innere Funktion lautet hier $v(x) = x^2$, und die äußere Funktion ist natürlich der Cosinus. Nach dem Prinzip „innere Ableitung · äußere Ableitung" folgt dann:

$$(\cos(x^2))' = 2x \cdot (-\sin(x^2) = -2x \sin(x^2),$$

denn die innere Ableitung lautet $v'(x) = 2x$, und die Ableitung der Cosinusfunktion ist die negative Sinusfunktion, wobei ich wieder darauf achten muss, dass ich nicht

einfach nur $\sin x$ schreibe, sondern in diese äußere Ableitung auch wieder die innere Funktion x^2 einsetze.
Nun habe ich mir also die fehlende Ableitung von $\cos(x^2)$ verschafft und kann die obige Rechnung zu Ende führen. Es gilt:

$$\begin{aligned} f_3'(x) &= 2 \cdot \cos(x^2) + (\cos(x^2))' \cdot 2x \\ &= 2\cos(x^2) + (-2x)\sin(x^2) \cdot 2x \\ &= 2\cos(x^2) - 4x^2 \sin(x^2). \end{aligned}$$

(iv) Um die Funktion $f_4(x) = \ln(1 + x^2)$ abzuleiten, braucht man einerseits die Kettenregel, denn offenbar gibt es hier eine innere Funktion $1+x^2$, auf die der Logarithmus als äußere Funktion angewendet wird. Und andererseits muss man natürlich wissen, was beim Ableiten des Logarithmus herauskommt, da die Kettenregel die Bestimmung der äußeren Ableitung verlangt, und das ist in diesem Fall die Ableitung der Logarithmusfunktion. Nach der Kettenregel ist jedenfalls

$$f_4'(x) = 2x \cdot \ln'(1 + x^2).$$

Man kann sich nun überlegen, dass $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ gilt, und da ich in die äußere Ableitung wieder die innere Funktion einsetzen muss, folgt daraus:

$$f_4'(x) = 2x \cdot \ln'(1 + x^2) = 2x \cdot \frac{1}{1 + x^2} = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

(v) Bei der Funktion $f_5(x) = \sqrt{1 - x^2} \cdot \sin x$ kommt wieder Verschiedenes auf einmal. Es ist dann immer günstig, die Dinge der Reihe nach abzuarbeiten und nicht jede Regel gleichzeitig anwenden zu wollen, denn das führt fast immer zu Durcheinander und Konfusion. Offenbar ist f_5 ein Produkt; also wende ich zunächst die Produktregel an und kümmere mich hinterher um den Rest. Damit gilt:

$$f_5'(x) = (\sqrt{1 - x^2})' \cdot \sin x + (\sin x)' \cdot \sqrt{1 - x^2}.$$

Bisher habe ich mich vor jedem Problem gedrückt: erstens ist die Wurzel aus $1 - x^2$ abzuleiten und zweitens die Ableitung von $\sin x$ anzugeben. Das zweite Problem ist leicht lösbar, denn es gilt $(\sin x)' = \cos x$. Und das erste Problem ist auch nicht dramatisch, da es sich bei der Berechnung von $\sqrt{1 - x^2}$ um eine Anwendung der Kettenregel handelt. Die innere Funktion ist $1 - x^2$ und die äußere Funktion ist die Wurzelfunktion. Da ich in Teil (ii) bereits nachgerechnet hatte, dass $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ gilt, folgt also nach dem Prinzip „innere Ableitung · äußere Ableitung“:

$$(\sqrt{1 - x^2})' = -2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}},$$

denn $-2x$ ist die Ableitung von $1 - x^2$, und in die Ableitung der Wurzelfunktion musste ich die innere Funktion $1 - x^2$ einsetzen.

Nun habe ich alle benötigten Ableitungen zusammen, und damit folgt:

$$\begin{aligned} f_5'(x) &= (\sqrt{1-x^2})' \cdot \sin x + (\sin x)' \cdot \sqrt{1-x^2} \\ &= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \sin x + \cos x \cdot \sqrt{1-x^2}. \end{aligned}$$

(vi) Die Funktion $f_6(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ ist recht unproblematisch. Ich habe hier einen Quotienten aus zwei übersichtlichen Polynomen und kann ohne Weiteres die Quotientenregel verwenden. Sie lautet:

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)},$$

wobei $v^2(x)$ eine abkürzende Schreibweise für $(v(x))^2$ ist. Im Fall der Funktion f_6 ist $u(x) = x^2 - 1$ und $v(x) = x^2 + 1$. Damit erhalte ich die Ableitungen $u'(x) = v'(x) = 2x$. Aus der Quotientenregel folgt dann:

$$\begin{aligned} f_6'(x) &= \frac{2x \cdot (x^2+1) - 2x \cdot (x^2-1)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{2x^3 + 2x - 2x^3 + 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{4x}{(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

(vii) Auch bei der Funktion $f_7(x) = \frac{\sin x}{x^2}$ handelt es sich um eine Anwendung der Quotientenregel, wobei man noch zusätzlich wissen muss, wie die Ableitung der Sinusfunktion heißt. Das habe ich aber schon in Teil (v) geklärt: es gilt $(\sin x)' = \cos x$, und damit steht der Quotientenregel nichts mehr im Weg. Es gilt $u(x) = \sin x$ und $v(x) = x^2$, woraus sich sofort die Ableitungen $u'(x) = \cos x$ und $v'(x) = 2x$ ergeben. Insgesamt folgt dann aus der Quotientenregel:

$$\begin{aligned} f_7'(x) &= \frac{\cos x \cdot x^2 - 2x \cdot \sin x}{(x^2)^2} \\ &= \frac{x^2 \cos x - 2x \sin x}{x^4} \\ &= \frac{x \cos x - 2 \sin x}{x^3}. \end{aligned}$$

Dabei habe ich in der ersten Gleichung die konkreten Einzelableitungen in die Quotientenregel eingesetzt, in der zweiten Gleichung verwendet, dass $(x^2)^2 = x^4$ gilt, und in der dritten Gleichung schließlich den Bruch durch x gekürzt.

7.3 Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen die Kurvenpunkte, in denen die Tangente parallel zur x-Achse verläuft.

(i) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$;
(ii) $g(x) = \ln(1 + \sin^2 x)$.

Lösung Dass eine Gerade parallel zur x-Achse verläuft, kann man mit Hilfe ihrer Steigung ausdrücken: offenbar kann so eine Gerade weder ansteigen noch abfallen und muss deshalb die Steigung Null haben. Nun geht es hier aber nicht um irgendwelche Geraden, sondern um Tangenten zu bestimmten Funktionen, und die Steigung einer Tangente berechnet man mit Hilfe der ersten Ableitung der zugehörigen Funktion. Ist beispielsweise f die Funktion, so hat die Tangente im Punkt x_0 die Steigung $f'(x_0)$. Folglich ist es nicht schwer herauszufinden, in welchen Punkten eine Tangente die Steigung Null hat, sofern man die erste Ableitung der zugrunde liegenden Funktion kennt: man muss nur die Gleichung $f'(x) = 0$ lösen, und schon hat man die x-Werte, bei denen die Tangente parallel zur x-Achse verläuft.

(i) Nach diesen prizipiellen Überlegungen machen die eigentlichen Aufgaben keine großen Probleme mehr. Die Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ hat die Ableitung $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$. Herausfinden muss ich, für welche x-Werte diese Ableitung Null ergibt, mitystems anderern Worten: ich muss die Gleichung $3x^2 - 6x - 9 = 0$ lösen. Nun gilt:

$$3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0,$$

da ich hier einfach nur auf beiden Seiten durch 3 geteilt habe. Die Lösung dieser quadratischen Gleichung erfolgt mit der p, q-Formel. Es gilt:

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm \sqrt{4} = 1 \pm 2.$$

Somit ist $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$. Die Tangente an die Funktionskurve von $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ verläuft also genau dann parallel zur x-Achse, wenn sie entweder bei $x_1 = -1$ oder bei $x_2 = 3$ gezogen wird.

(ii) Auch die Funktion $g(x) = \ln(1 + \sin^2 x)$ kann ich nach dem gleichen Schema behandeln mit dem kleinen Unterschied, dass g sicher kein Polynom ist und deshalb die Ableitung etwas komplizierter ausfällt. Ich habe hier wieder einmal eine verkettete Funktion, wobei die innere Funktion $v(x) = 1 + \sin^2 x$ lautet und die äußere Funktion der Logarithmus ist. Die innere Ableitung muss ich selbst schon mit Hilfe der Kettenregel ausrechnen, denn es gilt $v(x) = 1 + (\sin x)^2$, und daraus folgt:

$$v'(x) = \cos x \cdot 2\sin x = 2\sin x \cos x.$$

Weiterhin wissen Sie, dass $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ist, und da man in die äußere Ableitung immer die innere Funktion einsetzen muss, erhalte ich insgesamt:

$$g'(x) = 2\sin x \cos x \cdot \frac{1}{1 + \sin^2 x} = \frac{2\sin x \cos x}{1 + \sin^2 x}.$$

Auch hier muss ich der Frage nachgehen, wann diese erste Ableitung Null wird. Dass $g(x)$ ein einigermaßen komplizierter Bruch ist, spielt dabei keine große Rolle; es gilt nämlich:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\sin x \cos x}{1+\sin^2 x} = 0 \Leftrightarrow \sin x \cos x = 0,$$

denn ich kann die ursprüngliche Gleichung mit dem Nenner multiplizieren, der daraufhin wegen der Null auf der rechten Seite verschwindet, und anschließend noch auf beiden Seiten durch 2 teilen. Ein Produkt ist aber genau dann Null, wenn mindestens einer der beiden Faktoren Null ist. Daraus folgt:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \text{ oder } \cos x = 0.$$

Jetzt wird die Sache übersichtlich. Der Sinus wird genau dann Null, wenn sein Input ein geradzahliges Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$ ist, während der Cosinus genau dann Null wird, wenn sein Input ein ungeradzahliges Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$ ist. Da jede ganze Zahl entweder gerade oder ungerade ist, bedeutet das:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2} \text{ mit } k \in \mathbb{Z}.$$

Somit haben genau die Tangenten an g in den Punkten $k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, die Steigung Null.

7.4 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an die Funktionskurve von $f(x) = \sin x$ für den Punkt $x_0 = \pi$.

Lösung Die Tangente an eine Funktionskurve ist eine Gerade, und daher geht es hier um die Bestimmung einer Geradengleichung $y = mx + b$. Dabei ist m die Steigung der Geraden und b der sogenannte y-Achsenabschnitt. Ich muss also die Werte von m und b bestimmen, und alles, was ich zur Verfügung habe, sind die Funktion $f(x) = \sin x$ und der Punkt $x_0 = \pi$. Das reicht aber auch. Die Steigung der Tangente ist nichts anderes als die erste Ableitung der Funktion in dem gegebenen Punkt, also $m = f'(x_0)$. Wegen $f'(x) = \cos x$ ist daher

$$m = f'(x_0) = \cos\pi = -1.$$

Das ist schon die halbe Miete, und ich muss jetzt nur noch b herausfinden. Nach dem bisherigen Stand lautet die Tangentengleichung $y = -x + b$. Ich weiß aber, dass die Tangente mit der Kurve von f einen Punkt gemeinsam hat: für $x_0 = \pi$ berühren sich die die Tangente und die Funktionskurve, denn so ist die Tangente gerade definiert, und das bedeutet, dass bei $x_0 = \pi$ der Funktionswert von f und der y-Wert der Tangente gleich sein müssen. Der Funktionswert lautet:

$$f(\pi) = \sin \pi = 0.$$

Für $x = \pi$ muss daher der y-Wert der Tangente ebenfalls Null sein, und da die Tangentengleichung $y = -x + b$ lautet, folgt daraus:

$$0 = -\pi + b, \text{ also } b = \pi.$$

Mit $m = -1$ und $b = \pi$ erhalte ich daher die Tangentengleichung

$$y = -x + \pi.$$

7.5 Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen.

(i) $f(t) = \frac{e^t}{1+t^2}$;
(ii) $g(t) = t \cdot \ln t$;
(iii) $h(x) = x^x$.

Lösung Hier passiert nichts nennenswert anderes als in Aufgabe 7.1: zu einer gegebenen Funktion ist die erste Ableitung auszurechnen. Die Regeln sind im Wesentlichen dieselben, ich werde auch jetzt die Produktregel, die Quotientenregel und die Kettenregel brauchen.

(i) Die einzige Besonderheit der Funktion $f(t) = \frac{e^t}{1+t^2}$ besteht darin, dass ihre unabhängige Variable nicht mehr x heißt, sondern t, aber für den Vorgang des Ableitens ist das unerheblich. Da es sich um einen Quotienten handelt, ist die Verwendung der Quotientenregel angebracht, und mit dem Zähler $u(t) = e^t$ sowie dem Nenner $v(t) = 1 + t^2$ gilt: $u'(t) = e^t$ und $v'(t) = 2t$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{u'(t)v(t) - v'(t)u(t)}{(v(t))^2} \\ &= \frac{e^t(1 + t^2) - 2te^t}{(1 + t^2)^2} \\ &= \frac{e^t(t^2 - 2t + 1)}{(1 + t^2)^2}. \end{aligned}$$

Wenn man will, kann man $f'(t)$ wegen der zweiten binomischen Formel auch als $f'(t) = \frac{e^t(1-t)^2}{(1+t^2)^2}$ schreiben, aber da es keinerlei Kürzungsmöglichkeiten gibt, macht das die Sache weder besser noch schlechter.

(ii) Dass auch bei der Funktion $g(t) = t \cdot \ln t$ die unabhängige Variable t heißt, kann Sie mittlerweile nicht mehr schrecken. Ansonsten ist $g(t)$ ein einfaches Produkt, dessen Ableitung ich mit der Produktregel berechne. Mit $u(t) = t$ und $v(t) = \ln t$ ist $u'(t) = 1$ und $v'(t) = \frac{1}{t}$. Nach der Produktregel gilt daher:

$$g'(t) = u'(t)v(t) + v'(t)u(t) = \ln t + \frac{1}{t} \cdot t = \ln t + 1.$$

(iii) Die Funktion $h(x) = x^x$ ist allerdings ein besonderer Fall, der immer wieder auf Entsetzen stößt. Bevor ich Ihnen zeige, wie man h *richtig* ableitet, will ich Ihnen noch zwei weitverbreitete Fehler zeigen, die man auf keinen Fall machen darf. Sie alle wissen, dass für beliebige reelle Exponenten $a \in \mathbb{R}$ die Gleichung $(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$ gilt. Nun steht aber hier x im Exponenten, und natürlich ist x eine reelle Zahl, so dass man diese Regel auch auf $h(x) = x^x$ anwenden können müsste. In diesem Fall würde sich die Ableitung $x \cdot x^{x-1} = x^1 \cdot x^{x-1} = x^{1+x-1} = x^x$ ergeben, und das sollte jeden Anhänger dieser Theorie nachdenklich stimmen. Nach meiner etwas gewaltsamen Methode entspricht nämlich die Ableitung genau der Funktion selbst, und so etwas kommt eigentlich nur bei der Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ vor. Der Fehler liegt darin, dass die Regel $(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$ nur dann gilt, wenn a ein *fester* Exponent ist wie in x^2 oder x^{-17}. Sobald sich in den Exponenten eine Variable eingeschlichen hat, ist die Regel nicht mehr anwendbar.

Diese Erkenntnis führt manchmal zu dem umgekehrten Fehler: schließlich kennt man ja die Ableitung von a^x oder weiß zumindest, wo sie steht. Es gilt immer $(a^x)' = \ln a \cdot a^x$, und in diesem Fall würde das zu der Ableitung $\ln x \cdot x^x$ führen. Das ist aber genauso falsch, und das Argument ist fast das gleiche wie eben. Die Regel $(a^x)' = \ln a \cdot a^x$ gilt nur dann, wenn a eine *feste* Basis ist wie in 2^x oder 17^x. Sobald sich in der Basis eine Variable eingenistet hat, ist auch diese Regel nicht mehr anwendbar.

Der Schlüssel zur Ableitung von h liegt aber tatsächlich in der Exponentialfunktion, allerdings verbunden mit der Kettenregel. Wenn man $h(x)$ als e^{etwas} schreiben kann, dann lässt sich die Ableitung mit Hilfe der Kettenregel leicht berechnen. Nun gilt aber für jedes $x > 0$ die Beziehung $x = e^{\ln x}$, denn der natürliche Logarithmus von x ist die Zahl, mit der ich e potenzieren muss, um x zu bekommen, und wenn ich e mit genau dieser Zahl potenziere, dann muss eben x herauskommen. Damit ist aber:

$$x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x \cdot \ln x},$$

denn man potenziert eine Potenz, indem man die Exponenten multipliziert. Nach der Kettenregel folgt:

$$h'(x) = (x \cdot \ln x)' \cdot e^{x \cdot \ln x},$$

da die äußere Ableitung gerade die Ableitung der Exponentialfunktion ist, die sich bekanntlich beim Ableiten selbst reproduziert. Ich weiß aber, was $e^{x \cdot \ln x}$ ist: das war genau x^x. Somit gilt:

$$h'(x) = (x \cdot \ln x)' \cdot x^x,$$

und ich muss nur noch die innere Ableitung ausrechnen. Eigentlich muss ich das aber gar nicht mehr, denn genau diese Ableitung war Gegenstand von Teil (ii) dieser Aufgabe, nur dass die Variable dort t anstatt x hieß. Mit dem Ergebnis von (ii) folgt dann insgesamt:

$$h'(x) = (\ln x + 1) \cdot x^x.$$

7.6 Berechnen Sie die erste und zweite Ableitung der Funktion

$$f(x) = \operatorname{arccot} x.$$

Hinweis: Betrachten Sie $\operatorname{arccot} x$ als Umkehrfunktion der Cotangensfunktion und verwenden Sie den Satz über die Ableitung von Umkehrfunktionen.

Lösung Da ich hier den Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion verwenden soll, macht es Sinn, wenn ich diesen Satz erst einmal kurz vorstelle. Ist g eine differenzierbare Funktion mit einer Umkehrfunktion g^{-1}, so kann man diese Umkehrfunktion ableiten, indem man auf die Ableitung von g selbst zurückgreift. Für jedes y aus dem Definitionsbereich von g^{-1} gibt es natürlich ein x aus dem Definitionsbereich von g, so dass $y = g(x)$ gilt, denn der Definitionsbereich von g^{-1} ist der Wertebereich von g. Zu diesem x kann man die Ableitung $g'(x)$ ausrechnen, und falls $g'(x) \neq 0$ ist, gilt die Beziehung:

$$\left(g^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{g'(x)} \text{ mit } y = g(x).$$

Das sieht zunächst etwas abstrakt aus, aber es wird sich gleich herausstellen, dass man damit sehr konkrete Ableitungen ausrechnen kann. Der Arcuscotangens soll als Umkehrfunktion des Cotangens betrachtet werden. Ich setze also

$$g(x) = \cot x.$$

Nun ist

$$y = \cot x \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} y.$$

Folglich ist

$$(\operatorname{arccot} y)' = \left(g^{-1}(y)\right)',$$

denn mit $g(x) = \cot x$ ist $g^{-1}(y) = \operatorname{arccot} y$. Nach dem Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion ist dann:

$$\left(g^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{g'(x)} \text{ wobei } y = g(x) \text{ ist.}$$

Mit der Quotientenregel kann man ausrechnen, dass

$$g'(x) = (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

gilt. Damit folgt:

$$\left(g^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{g'(x)} = \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = -\sin^2 x,$$

wobei $y = g(x)$ ist. Das sieht schon nicht schlecht aus, ist aber noch sehr unbefriedigend. Gestartet bin ich hier mit der Inputvariablen y für den Arcuscotangens, und herausbekommen habe ich eine Ableitung, die von der Variablen x abhängt, wobei ich weiß, dass $y = \cot x$ ist. Ich muss das Ganze jetzt noch auf die Variable y umschreiben, und das heißt, dass ich möglichst gut $\sin^2 x$ mit Hilfe von y ausdrücken muss. Auf den Ansatz zu kommen, ist dabei gar nicht so leicht. Es gilt zunächst nach dem trigonometrischen Pythagoras:

$$\cot^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} - 1.$$

Daraus folgt:

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \cot^2 x + 1, \text{ also } \sin^2 x = \frac{1}{\cot^2 x + 1}.$$

Damit ist das Problem schon fast gelöst. Wie oben schon erwähnt, gilt nämlich

$$y = \cot x \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} y.$$

Und aus $\cot x = y$ folgt natürlich $\cot^2 x = y^2$. Setzt man das ein, so ergibt sich:

$$\sin^2 x = \frac{1}{\cot^2 x + 1} = \frac{1}{1 + y^2}.$$

Jetzt gehe ich wieder zurück zu meiner Ableitung von $g^{-1}(y)$. Dort hatte ich herausgefunden, dass

$$\left(g^{-1}(y)\right)' = -\sin^2 x$$

gilt, und mit unseren neuen Kenntnissen folgt daraus:

$$\left(g^{-1}(y)\right)' = -\sin^2 x = -\frac{1}{1 + y^2}.$$

Es gilt also

$$(\operatorname{arccot} y)' = -\frac{1}{1+y^2},$$

und da es auf den Namen der Variablen nicht ankommt, habe ich damit die Gleichung

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

bewiesen.

Der zweite Teil der Aufgabe ist Routine. Die zweite Ableitung von $\operatorname{arccot} x$ ist die erste Ableitung seiner ersten Ableitung, also die erste Ableitung von $-\frac{1}{1+x^2}$. Beim flüchtigen Hinschauen sieht es vielleicht gar nicht so aus, aber das ist ein Fall für die Kettenregel, denn ich kann schreiben:

$$-\frac{1}{1+x^2} = -(1+x^2)^{-1},$$

und habe damit eine verkettete Funktion vor mir. Die innere Funktion ist $v(x) = 1+x^2$ mit der inneren Ableitung $v'(x) = 2x$, während ich es mit der äußeren Funktion $u(x) = -x^{-1}$ mit der Ableitung $u'(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ zu tun habe. Da ich bei Gebrauch der Kettenregel in die äußere Ableitung immer die innere Funktion $v(x)$ einsetzen muss, folgt daraus:

$$(\operatorname{arccot} x)'' = v'(x) \cdot u'(v(x)) = 2x \cdot \frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

7.7 Bestimmen Sie die ersten beiden Ableitungen der folgenden Funktionen.

(i) $f(x) = x \cdot \sqrt{1+x^2}$;
(ii) $g(x) = \arccos(x-1)$;
(iii) $h(x) = (x^2-4)^{-\frac{5}{3}}$.

Lösung In dieser Aufgabe gibt es einen wichtigen Unterschied zu den Aufgaben 7.1, 7.2 und 7.4: es geht hier nicht mehr nur um die gewohnte erste Ableitung, sondern es wird die zweite Ableitung verlangt. Das ist natürlich auch nichts prinzipiell anderes, denn die zweite Ableitung erhält man, indem man die erste Ableitung noch einmal ableitet. Was sich ändert ist einfach nur der Arbeitsaufwand, denn wenn ich vorher nur einmal pro Funktion ableiten musste, dann bleibt mir jetzt nichts anderes übrig, als es zweimal zu machen.

(i) Zum Berechnen der zweiten Ableitung von $f(x) = x \cdot \sqrt{1+x^2}$ bestimme ich erst einmal die erste Ableitung. Da f ein Produkt ist, bietet sich die Produktregel an. Es gilt:

$$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{1+x^2} + \left(\sqrt{1+x^2}\right)' \cdot x.$$

Dabei habe ich die unproblematische Ableitung $(x)' = 1$ gleich hingeschrieben und die lästigere Ableitung von $\sqrt{1+x^2}$ auf später verschoben. Für die brauche ich nämlich wieder einmal die Kettenregel. Die innere Funktion ist $v(x) = 1 + x^2$, und die äußere Funktion lautet $u(x) = \sqrt{x}$. Insgesamt ist dann $\sqrt{1+x^2} = u(v(x))$. Nun wissen Sie sicher, dass $v'(x) = 2x$ gilt, und Sie wissen hoffentlich, wie man die Wurzelfunktion ableitet: es gilt $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Nach dem Prinzip „innere Ableitung · äußere Ableitung" folgt daraus:

$$\left(\sqrt{1+x^2}\right)' = 2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

denn in die äußere Ableitung muss ich nicht mehr nur x einsetzen, sondern die innere Funktion $v(x) = 1 + x^2$. Für die erste Ableitung habe ich jetzt alles zusammen. Es folgt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{1+x^2} + \left(\sqrt{1+x^2}\right)' \cdot x \\ &= \sqrt{1+x^2} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot x \\ &= \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}. \end{aligned}$$

Bringt man diese Summe noch auf einen Bruch, so muss man $\sqrt{1+x^2}$ mit $\sqrt{1+x^2}$ erweitern und erhält:

$$f'(x) = \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Damit ist die erste Ableitung erledigt, aber leider reicht das noch nicht, da hier die zweite Ableitung verlangt wird. Wegen $f''(x) = (f')'(x)$ werde ich jetzt also die berechnete erste Ableitung noch einmal ableiten. Ich habe es nun allerdings mit einem Quotienten zu tun und verwende daher die Quotientenregel. Sie liefert:

$$f''(x) = \frac{4x\sqrt{1+x^2} - \left(\sqrt{1+x^2}\right)' \cdot (1+2x^2)}{\sqrt{1+x^2}^2}.$$

Das sieht viel schlimmer aus als es ist. Erstens habe ich die im Zähler auftauchende Ableitung eben gerade ausgerechnet, und zweitens lässt sich der Nenner deutlich vereinfachen, denn das Quadrat einer Wurzel ist immer ihr Wurzelinhalt. Damit folgt:

$$f''(x) = \frac{4x\sqrt{1+x^2} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot (1+2x^2)}{1+x^2}.$$

Im Grunde genommen ist die Arbeit des Ableitens damit schon erledigt. Da das Ergebnis aber noch etwas unübersichtlich aussieht, will ich es ein wenig vereinfachen. Den Bruch im Zähler kann ich beseitigen, indem ich den ganzen Ausdruck mit $\sqrt{1+x^2}$ erweitere, denn beim Erweitern werden Zähler und Nenner mit $\sqrt{1+x^2}$ multipliziert. Außerdem hat das den Vorteil, dass die erste Wurzel im Zähler mit sich selbst multipliziert wird und damit ihr Wurzelinhalt herauskommt. Es gilt also:

$$f''(x) = \frac{4x(1+x^2) - x(1+2x^2)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{4x+4x^3-x-2x^3}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{3x+2x^3}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}.$$

Legt man Wert auf die Potenzschreibweise, so kann man sich für den Nenner noch überlegen, dass

$$(1+x^2)\sqrt{1+x^2} = (1+x^2)(1+x^2)^{\frac{1}{2}} = (1+x^2)^{\frac{3}{2}}$$

gilt, und erhält schließlich:

$$f''(x) = \frac{3x+2x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

(ii) Nun geht es um die zweite Ableitung von $g(x) = \arccos(x-1)$. Die erste Ableitung ist nicht weiter dramatisch, wenn man weiß, dass $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ gilt. Meine Funktion g ist nämlich eine verkettete Funktion, deren innere Funktion $v(x) = x-1$ heißt, während ihre äußere Funktion gerade der Arcuscosinus ist. Die innere Ableitung beträgt also 1, und aus der Kettenregel folgt:

$$g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-(x^2-2x+1)}} = -\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}.$$

Die zweite Ableitung ist nun wieder die erste Ableitung der ersten Ableitung. Dazu dürfte es am einfachsten sein, wenn man $g'(x)$ als Potenz schreibt, weil in diesem Fall das weitere Ableiten direkt über die Kettenregel abläuft und man sich die Quotientenregel für den Bruch ersparen kann. Nach den Regeln der Potenzrechnung gilt:

$$g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} = -\frac{1}{(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}} = -(2x-x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Das ist offenbar eine verkettete Funktion: mit der inneren Funktion $v(x) = 2x - x^2$ und der äußeren Funktion $u(x) = -x^{-\frac{1}{2}}$ ist

$$g(x) = u(v(x)).$$

Die innere Ableitung ist mit $v'(x) = 2 - 2x$ ganz einfach zu berechnen. Die äußere Funktion ist zwar kein Polynom, aber doch immerhin – bis auf das vordere Minuszeichen – eine Potenz, die man nach der Regel $(x^a)' = ax^{a-1}$ ableiten kann. In diesem Fall heißt das:

$$u'(x) = -\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x^{-\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}.$$

Bei der Anwendung der Kettenregel muss ich dann wieder die innere Ableitung mit der äußeren multiplizieren, wobei in die äußere Ableitung nicht mehr der Input x, sondern die innere Funktion $v(x)$ eingesetzt wird. Das bedeutet:

$$g''(x) = v'(x) \cdot u'(v(x)) = (2 - 2x) \cdot \frac{1}{2}(2x - x^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

Aus der vorderen Klammer kann man den Faktor 2 vorklammern, der sich sofort gegen den Faktor $\frac{1}{2}$ wegkürzt. Bedenken Sie jetzt noch, was die Potenzierung mit einem negativen Exponenten bedeutet, dann erhalten Sie:

$$g''(x) = \frac{1 - x}{(2x - x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

(iii) Auch die Funktion $h(x) = (x^2 - 4)^{-\frac{5}{3}}$ wird mit Hilfe der Kettenregel abgeleitet. Die innere Funktion ist $v(x) = x^2 - 4$, und die äußere Funktion ist die Potenzierung mit $-\frac{5}{3}$, also $u(x) = x^{-\frac{5}{3}}$. Dann lautet die innere Ableitung $v'(x) = 2x$, und es gilt:

$$u'(x) = -\frac{5}{3}x^{-\frac{5}{3}-1} = -\frac{5}{3}x^{-\frac{8}{3}}.$$

Zur Anwendung der Kettenregel multipliziere ich die innere Ableitung mit der äußeren und muss dabei beachten, dass in die äußere Ableitung die innere Funktion eingesetzt wird. Damit folgt:

$$h'(x) = v'(x) \cdot u'(v(x)) = 2x \cdot \left(-\frac{5}{3}\right)(x^2 - 4)^{-\frac{8}{3}} = -\frac{10x}{3}(x^2 - 4)^{-\frac{8}{3}}.$$

Die zweite Ableitung ist wie üblich die erste Ableitung der ersten Ableitung, und da es sich bei der ersten Ableitung um ein Produkt handelt, brauche ich hier die Produktregel. Dabei schreibe ich die unproblematische Ableitung sofort auf und verschiebe die schwierigere auf später. Es gilt:

$$h''(x) = -\frac{10}{3} \cdot (x^2 - 4)^{-\frac{8}{3}} + \left((x^2 - 4)^{-\frac{8}{3}}\right)' \cdot \left(-\frac{10x}{3}\right).$$

Ich muss also nur noch die Ableitung von $(x^2-4)^{-\frac{8}{3}}$ herausfinden. Das ist jetzt aber nicht mehr schwer, weil es genauso funktioniert wie bei der ersten Ableitung von h selbst, nur dass ich jetzt den Exponenten $-\frac{8}{3}$ anstatt $-\frac{5}{3}$ habe. Es ergibt sich also:

$$\left((x^2-4)^{-\frac{8}{3}}\right)' = 2x \cdot \left(-\frac{8}{3}\right)(x^2-4)^{-\frac{11}{3}} = -\frac{16x}{3}(x^2-4)^{-\frac{11}{3}}.$$

Damit gehe ich jetzt in die Formel für $h''(x)$ und kann die fehlende Ableitung eintragen. Es folgt dann:

$$\begin{aligned} h''(x) &= -\frac{10}{3} \cdot (x^2-4)^{-\frac{8}{3}} + \left((x^2-4)^{-\frac{8}{3}}\right)' \cdot \left(-\frac{10x}{3}\right) \\ &= -\frac{10}{3} \cdot (x^2-4)^{-\frac{8}{3}} - \frac{16x}{3}(x^2-4)^{-\frac{11}{3}} \cdot \left(-\frac{10x}{3}\right) \\ &= -\frac{10}{3} \cdot (x^2-4)^{-\frac{8}{3}} + \frac{160}{9}x^2(x^2-4)^{-\frac{11}{3}}, \end{aligned}$$

wobei ich im letzten Schritt noch die Zusammenfassung $-\frac{16x}{3} \cdot \left(-\frac{10x}{3}\right) = \frac{160}{9}x^2$ vorgenommen habe.

7.8 Zeigen Sie, dass für alle $x \in [-1, 1]$ die Beziehung

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

gilt.

Hinweis: Leiten Sie die Funktion $f(x) = \arcsin x + \arccos x$ ab und stellen Sie fest, was das Ergebnis für die Funktion f bedeutet.

Lösung Hier geht es einmal nicht darum, bestimmte Ableitungen auszurechnen, sondern mit Hilfe der Differentialrechnung eine Gleichung über Arcussinus und Arcuscosinus nachzuweisen, obwohl in dieser Gleichung überhaupt keine Ableitungen vorkommen. Die Aufgabe setzt allerdings einige Kenntnisse über Differentialrechnung voraus, und ich schreibe jetzt erst einmal auf, was Sie alles wissen müssen, um sie wirklich lösen zu können.

Laut Hinweis sollen Sie die Funktion $f(x) = \arcsin x + \arccos x$ ableiten, und das bedeutet, dass Sie die Ableitungen von $\arcsin x$ und von $\arccos x$ kennen müssen. Das kann man sich so ähnlich überlegen wie die Ableitung des Arcuscotangens in Aufgabe 7.6, nur dass Sie bei $\arcsin x$ und $\arccos x$ nicht so viel mit den trigonometrischen Funktionen herumhantieren müssen wie ich es in 7.6 musste. Da es hier aber um eine Anwendung der Differentialrechnung geht, verzichte ich auf diese Rechnungen und teile Ihnen einfach mit, dass

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ und } (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

gilt.

Weiterhin wird sich gleich herausstellen, dass ich etwas über Funktionen wissen muss, deren Ableitung durchgängig Null ist. Es ist aber nicht schwer, sich vorzustellen, wie solche Funktionen aussehen müssen: wenn eine Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ überall die Tangentensteigung Null hat, dann kann sie weder ansteigen noch abfallen und muss deshalb konstant sein. Präzise beweisen kann man das mit dem sogenannten Mittelwertsatz, aber aus dem gleichen Grund wie oben verzichte ich auf die genaue Herleitung.

Mit diesem Hintergrundwissen ist die Aufgabe nicht mehr so schwer. Ich setze also $f(x) = \arcsin x + \arccos x$ und berechne die erste Ableitung von f. Mit den Aussagen über die Ableitungen von $\arcsin x$ und $\arccos x$ erhalte ich:

$$f'(x) = (\arcsin x)' + (\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = 0.$$

Somit ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in [-1, 1]$. Nach dem eben zitierten Satz über Funktionen, deren Ableitung überall Null ist, bleibt f nichts anderes übrig, als eine konstante Funktion zu sein. Es gibt daher eine Zahl $c \in \mathbb{R}$, so dass gilt:

$$\arcsin x + \arccos x = c \text{ für alle } x \in [-1, 1].$$

Die Frage ist nur: was ist c? Das ist leicht herauszufinden, denn da für alle x-Werte das gleiche c herauskommen muss, gilt insbesondere:

$$\arcsin 0 + \arccos 0 = c.$$

Nun ist aber $\arcsin 0$ die Zahl, deren Sinus genau Null ist, und das heißt: $\arcsin 0 = 0$. Und weiterhin ist $\arccos 0$ die Zahl, deren Cosinus genau Null ist, und das heißt: $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$. Setzt man diese Werte ein, so ergibt sich:

$$c = \arcsin 0 + \arccos 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Jetzt bin ich mit der Aufgabe auch schon fertig, denn ich habe $c = \frac{\pi}{2}$ herausgefunden, und daraus folgt:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \text{ für alle } x \in [-1, 1].$$

Im Interesse der Einfachheit habe ich mich hier aber einer kleinen Schlamperei schuldig gemacht. Wenn Sie die Berechnung der ersten Ableitung genauer ansehen, dann werden Sie feststellen, dass man sie genau genommen nur für $x \in (-1, 1)$ ausrechnen darf, da ansonsten durch Null dividiert wird. Das ist aber nicht weiter schlimm. Mit den gleichen Argumenten wie eben folgt dann $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ für alle $x \in (-1, 1)$, und da es sich um eine auf ganz $[-1, 1]$ stetige Funktion handelt, muss dann diese Gleichung auch auf $[-1, 1]$ gelten.

7.9 Es sei $n \in \mathbb{N}$. Bilden Sie für die nachstehenden Funktionen jeweils die n-te Ableitung $f^{(n)}(x)$.

(i) $f(x) = \cos x$;
(ii) $f(x) = \frac{1}{x}$;
(iii) $f(x) = \ln x$;
(iv) $f(x) = e^{2x}$.

Lösung Die Aufforderung, die n-te Ableitung einer gegebenen Funktion zu bestimmen, ist oft etwas schwieriger als die bisher betrachteten Ableitungsaufgaben. Wenn Sie zum Beispiel die erste oder auch die zweite Ableitung ausrechnen sollen, dann ist das eine überschaubare Angelegenheit: mit Hilfe der üblichen Regeln sieht man zu, dass man an die Ableitung herankommt, und dann hat sich die Sache. Bei der n-ten Ableitung kommt noch hinzu, dass man keine konkrete Ableitungsnummer hat, sondern eben die etwas abstrakte n-te Ableitung angehen muss. Da n irgendeine beliebige natürliche Zahl ist, bedeutet das im Grunde genommen, dass Sie *jede beliebige Ableitung* der Funktion mit einem Schlag ausrechnen müssen, denn sobald Sie über eine Formel für die n-te Ableitung verfügen, können Sie sofort durch pures Einsetzen die siebzehnte, achtunddreißigste oder auch fünfhunderttausendste Ableitung bestimmen. Dass so eine universelle Aufgabe schwieriger ist als das übliche Berechnen der ersten Ableitung, wird niemanden überraschen. Bei den Funktionen aus dieser Aufgabe ist der Aufwand allerdings noch vertretbar.

(i) Ich suche nun die n-te Ableitung von $f(x) = \cos x$. Ein guter Anfang besteht fast immer darin, sich ein paar Ableitungen aufzuschreiben und zu sehen, ob sich irgendeine Gesetzmäßigkeit erkennen lässt, mit deren Hilfe man die n-te Ableitung beschreiben kann. Ich fange also einfach mit dem Ableiten an und erhalte:

$$f'(x) = -\sin x,\ f''(x) = -\cos x,\ f'''(x) = \sin x,\ f^{(4)}(x) = \cos x.$$

Neben der eher nebensächlichen Tatsache, dass ich ab $n = 4$ nicht mehr die Strichschreibweise, sondern die Schreibweise der eingeklammerten Zahlen für die Ableitungsnummer verwende, sollte Ihnen hier etwas auffallen. Die vierte Ableitung entspricht nämlich genau der Funktion selbst; es gilt:

$$f^{(4)}(x) = f(x) = \cos x.$$

Das ist praktisch, denn jetzt brauche ich eigentlich nichts mehr zu tun. Daraus folgt nämlich sofort:

$$f^{(5)}(x) = f'(x) = -\sin x,\ f^{(6)}(x) = f''(x) = -\cos x$$

und

$$f^{(7)}(x) = f'''(x) = \sin x,\ f^{(8)}(x) = f^{(4)}(x) = \cos x.$$

Und ab der neunten Ableitung wiederholt sich wieder alles. Unter all diesen Ableitungen der Funktion $f(x) = \cos x$ gibt es offenbar nur vier wirklich verschiedene, die sich in regelmäßigen Abständen immer wieder wiederholen, und ich muss jetzt nur noch ordentlich aufschreiben, wie man diese Wiederholung mathematisch formuliert.
Das ist aber nicht so schwer. Bezeichnet man die Funktion selbst als ihre nullte Ableitung, so ist offenbar

$$\cos x = f^{(0)}(x) = f^{(4)}(x) = f^{(8)}(x) = f^{(12)}(x) = \cdots,$$

und das heißt, dass bei allen durch vier teilbaren Ableitungsnummern n die n-te Ableitung $f^{(n)}(x) = \cos x$ herauskommt. In Formeln gefasst heißt das:

$$f^{(n)}(x) = \cos x \text{ für } n = 4m, m \in \mathbb{N}_0,$$

denn n ist genau dann durch 4 teilbar, wenn es eine natürliche Zahl m gibt mit $n = 4m$. Weiterhin haben Sie gesehen, dass

$$-\sin x = f^{(1)}(x) = f^{(5)}(x) = f^{(9)}(x) = f^{(13)}(x) = \cdots,$$

und das heißt:

$$f^{(n)}(x) = -\sin x \text{ für } n = 4m + 1, m \in \mathbb{N}_0,$$

denn die natürlichen Zahlen $n = 4m + 1, m \in \mathbb{N}_0$, sind genau die eben gebrauchten Zahlen $1, 5, 9, 13, \ldots$. Nun ist aber klar, wie es weitergeht. Die nächste Gruppe von möglichen Ableitungsnummern sind die Zahlen $n = 4m + 2, m \in \mathbb{N}_0$, und zum Schluss habe ich noch $n = 4m + 3, m \in \mathbb{N}_0$. Für diese beiden Gruppen gilt:

$$f^{(n)}(x) = -\cos x \text{ für } n = 4m + 2, m \in \mathbb{N}_0$$

und

$$f^{(n)}(x) = \sin x \text{ für } n = 4m + 3, m \in \mathbb{N}_0.$$

Insgesamt kann ich die n-te Ableitung von f also darstellen als:

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{falls } n = 4m,\ m \in \mathbb{N}_0 \\ -\sin x, & \text{falls } n = 4m + 1,\ m \in \mathbb{N}_0 \\ -\cos x, & \text{falls } n = 4m + 2,\ m \in \mathbb{N}_0 \\ \sin x, & \text{falls } n = 4m + 3,\ m \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

(ii) Zu berechnen ist die n-te Ableitung von $f(x) = \frac{1}{x}$. Zu diesem Zweck verwende ich wieder die angenehme Tatsache, dass man $\frac{1}{x}$ auch als Potenz schreiben kann, denn es gilt $f(x) = x^{-1}$, und das macht das Ableiten wesentlich einfacher. Berechnet man nach der Regel $(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$ die ersten drei Ableitungen von f, so ergibt sich:

$$f'(x) = (-1) \cdot x^{-2}, f''(x) = (-1) \cdot (-2) \cdot x^{-3}$$

und

$$f'''(x) = (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot x^{-4}.$$

Sie könnten hier natürlich auch die jeweiligen Vorfaktoren ausmultiplizieren und würden dann eben irgendeine Zahl vor der jeweiligen Potenz von x erhalten. Das wäre aber nicht sehr sinnvoll, denn indem ich die Faktoren einfach als Faktoren stehen lasse, kann ich in den verschiedenen Ableitungen schon jetzt ein System erkennen: Die Anzahl der Vorfaktoren von x^{etwas} entspricht genau der Nummer der Ableitung, und jedesmal starte ich mit dem Faktor -1. Bei der ersten Ableitung höre ich mit den Vorfaktoren auch bei -1 gleich wieder auf, bei der zweiten komme ich bis -2, bei der dritten bis -3, und folglich werde ich bei der n-ten Ableitung mit dem letzten Vorfaktor $-n$ aufhören. Meine n-te Ableitung wird also vor der Potenz von x die Vorfaktoren $(-1) \cdot (-2) \cdots (-n)$ haben. Jetzt muss ich nur noch den passenden Exponenten von x bestimmen. Wie Sie aber schon an den Beispielen gesehen haben, ist der Exponent von x immer um 1 kleiner als der letzte auftretende Vorfaktor, und deshalb wird bei der n-ten Ableitung mit dem letzten Vorfaktor $-n$ auch der Exponent $-n - 1$ verbunden sein. Insgesamt erhalte ich also:

$$f^{(n)}(x) = (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdots (-n) \cdot x^{-n-1}.$$

Das kann man etwas einfacher schreiben. Offenbar habe ich hier genau n Vorfaktoren $(-1) \cdots (-n)$ und damit auch genau n Minuszeichen. Bekanntlich wird Minus mal Minus zu Plus, während Minus mal Minus mal Minus wieder zu Minus wird. Ist n also gerade, so werden alle Minuszeichen zusammen genau ein Plus ergeben; ist n dagegen ungerade, so wird am Ende ein Minus herauskommen. Deshalb lassen sich alle Minuszeichen zu dem Term $(-1)^n$ zusammenfassen, der für ungerades n zu -1 und für gerades n zu 1 wird.

Hat man nun alle Minuszeichen aus den Vorfaktoren herausgezogen, so bleiben nur noch die nackten Zahlen $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ übrig, und diesen Ausdruck pflegt man mit dem Zeichen $n!$ abzukürzen und als die *Fakultät von n* zu bezeichnen. Insgesamt erhalte ich also die Formel:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot n! \cdot x^{-n-1} = (-1)^n \cdot n! \cdot \frac{1}{x^{n+1}}.$$

(iii) Bei der Berechnung der n-ten Ableitung von $f(x) = \ln x$ fällt zunächst auf, dass

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

gilt, und das gibt Anlass zur Freude, wenn Sie noch einmal einen Blick auf die Teilaufgabe (ii) werfen. Jetzt folgt nämlich sofort:

$$f''(x) = \left(\frac{1}{x}\right)', f'''(x) = \left(\frac{1}{x}\right)'', f^{(4)}(x) = \left(\frac{1}{x}\right)'''$$

und ganz allgemein

$$f^{(n)}(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)},$$

denn wenn $\frac{1}{x}$ die erste Ableitung von $\ln x$ ist, dann muss $\left(\frac{1}{x}\right)'$ die zweite Ableitung von $\ln x$ sein, und dieser Vorsprung um eine Ableitungsnummer zieht sich durch bis hin zur n-ten Ableitung $f^{(n)}(x)$, die der $(n-1)$-ten Ableitung von $\frac{1}{x}$ entspricht. In Teil (ii) hatte ich aber die n-te Ableitung von $\frac{1}{x}$ ausgerechnet. Sie lautet:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)^n \cdot n! \cdot \frac{1}{x^{n+1}}.$$

Nun muss ich aber nicht die n-te, sondern die $(n-1)$-te Ableitung heranziehen, und das bedeutet, dass ich überall in der Ableitungsformel n durch $n-1$ zu ersetzen habe. Daraus folgt:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)} = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot \frac{1}{x^{(n-1)+1}} = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot \frac{1}{x^n}.$$

Wegen

$$f^{(n)}(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)}$$

heißt das dann

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot \frac{1}{x^n}.$$

(iv) Die Funktion $f(x) = e^{2x}$ ist sicher die einfachste in der Riege der hier vertretenen Funktionen. Nach der Kettenregel gilt:

$$f'(x) = 2e^{2x}, f''(x) = 4e^{2x} = 2^2e^{2x}, f'''(x) = 8e^{2x} = 2^3e^{2x},$$

und offenbar wird bei jeder weiteren Ableitung der Exponent der 2 um 1 erhöht, während sich an e^{2x} nichts ändert. Damit folgt:

$$f^{(n)}(x) = 2^n \cdot e^{2x}.$$

7.10 Untersuchen Sie mit Hilfe der ersten Ableitung, auf welchen Teilmengen von $\mathbb{R}$ die folgenden Funktionen monoton wachsend bzw. monoton fallend sind.

(i) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 17$;
(ii) $f(x) = x \cdot e^x$.

Lösung Solange man die Differentialrechnung nicht zur Verfügung hat, ist die Frage nach den Monotoniebereichen einer Funktion in aller Regel schwer zu beantworten. Um festzustellen, auf welchen Teilmengen des Definitionsbereiches eine Funktion f beispielsweise monoton steigend ist, muss man überprüfen, für welche Bereiche aus $x_1 < x_2$ immer $f(x_1) \leq f(x_2)$ folgt. Wenn die Funktion nicht mehr ganz so einfach ist, dann kann das eine recht komplizierte Aufgabe sein, und oft genug kommen dabei Ausdrücke vor, denen man einigermaßen hilflos gegenüber steht. Das Ganze wird deutlich einfacher, sobald man die Methoden der Differentialrechnung verwendet. Ist I irgendein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, so gilt beispielsweise genau dann $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$, wenn f auf I monoton steigend ist, und auf analoge Weise kann man das monotone Fallen mit $f'(x) \leq 0$ charakterisieren. Und auch die strenge Monotonie kann man mit Hilfe von Ableitungen beschreiben, wobei allerdings keine „genau dann, wenn"-Beziehung mehr besteht: aus $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$ folgt, dass f auf I streng monoton steigt, und aus $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$ folgt, dass f auf I streng monoton fällt.

(i) Nun ist die Funktion $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 17$ auf Monotonie zu untersuchen. Dazu bestimme ich zuerst die erste Ableitung von f. Es gilt:

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12.$$

Die Monotonie von f hängt vom Vorzeichenverhalten der ersten Ableitung f' ab, und ich muss daher feststellen, wann $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$ gilt. Natürlich ist

$$6x^2 - 18x + 12 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 > 0,$$

denn ich kann die erste Ungleichung auf beiden Seiten durch 6 teilen. Die entsprechende Gleichung $x^2 - 3x + 2 = 0$ hat die Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}.$$

Also ist $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$. Nun ging es aber gar nicht um die Gleichung, sondern um die Ungleichung $x^2 - 3x + 2 > 0$. Wenn Sie sich einmal die Parabel $y = x^2 - 3x + 2$

vorstellen, dann handelt es sich um eine nach oben geöffnete Parabel, die die x-Achse in den beiden Punkten $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$ schneidet. Rechts von x_2 und links von x_1 liegt diese Parabel oberhalb der x-Achse, und das bedeutet:

$$x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow x < 1 \text{ oder } x > 2.$$

Mit anderen Worten: die erste Ableitung $f'(x)$ ist genau dann größer als Null, wenn $x < 1$ oder wenn $x > 2$ gilt. Und da die Parabel $y = x^2 - 3x + 2$ zwischen ihren beiden Nullstellen natürlich negative Werte liefert, gilt auch:

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2.$$

Folglich ist f auf dem Intervall $(1, 2)$ streng monoton fallend. Außerdem ist f auf den Intervallen $(-\infty, 1)$ und $(2, \infty)$ streng monoton steigend. Da die Hinzunahme eines einzigen Punktes am Rand des jeweiligen Intervalls nichts am Monotonieverhalten ändern kann, sofern die Funktion stetig ist, gilt: f ist streng monoton fallend auf $[1, 2]$ und streng monoton steigend auf den Intervallen $(-\infty, 1]$ und $[2, \infty)$.

(ii) Die Funktion $f(x) = x \cdot e^x$ gehe ich nach der gleichen Methode an. Nach der Produktregel gilt:

$$f'(x) = e^x + e^x \cdot x = e^x(1 + x).$$

Nun ist aber ein Produkt genau dann positiv, wenn entweder beide Faktoren positiv oder beide Faktoren negativ sind. Hier kann nur der der erste Fall eintreten, denn e^x ist schon von alleine immer positiv, und somit gilt:

$$e^x(1 + x) > 0 \Leftrightarrow 1 + x > 0 \Leftrightarrow x > -1,$$

also

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > -1 \text{ und genauso } f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < -1.$$

Die Funktion f ist also streng monoton steigend auf dem Intervall $(-1, \infty)$ und streng monoton fallend auf dem Intervall $(-\infty, -1)$. Und wieder gilt: das Verhalten der stetigen Funktion f im Randpunkt -1 kann die Monotonieeigenschaft nicht mehr beeinflussen, und daraus folgt: f ist also streng monoton steigend auf dem Intervall $[-1, \infty)$ und streng monoton fallend auf dem Intervall $(-\infty, -1]$.

7.11 Man definiere $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ durch

$$g(x) = \sqrt{x \cdot (1 - x)}.$$

Bestimmen Sie alle Minima und Maxima von g auf $[0, 1]$.

Hinweis: g hat mehr als eine Extremstelle.

Lösung Der Hinweis wirkt auf den ersten Blick eher verwirrend als hilfreich, denn warum sollte man sich schon am Anfang einer Aufgabe dafür interessieren, wieviele Extremstellen am Ende herauskommen werden, da man doch die üblichen Methoden der Differentialrechnung zur Verfügung hat? Behalten Sie den Hinweis für den Anfang einfach im Gedächtnis und gehen Sie ganz nach dem Standardverfahren zur Bestimmung von Extremwerten vor. Hat man eine Funktion g gegeben, so berechnet man zuerst die Nullstellen der ersten Ableitung $g'(x)$. Mit diesen Nullstellen geht man dann in die zweite Ableitung $g''(x)$ und testet, ob sich für die zweite Ableitung ein positives oder eine negatives Resultat ergibt, wenn man die Nullstellen der ersten Ableitung dort der Reihe nach einsetzt. Bei positiver zweiter Ableitung liegt ein lokales Minimum vor, bei negativer zweiter Ableitung ein lokales Maximum. Die Nullstellen der ersten Ableitung sind also keineswegs gesicherte Extremwerte, sondern nur Extremwertkandidaten, die durch Einsetzen in die zweite Ableitung noch getestet werden müssen.

In dieser Aufgabe habe ich die Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, definiert durch $g(x) = \sqrt{x \cdot (1-x)}$. Die erste Ableitung berechne ich nach der Kettenregel, und multipliziere dazu der Einfachheit halber die Klammern innerhalb der Wurzel aus. Es gilt also $g(x) = \sqrt{x - x^2}$, und das heißt, dass die innere Funktion $v(x) = x - x^2$ lautet, während die äußere Funktion die Wurzelfunktion ist. Wegen $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ folgt dann mit der Kettenregel:

$$g'(x) = (1-2x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}} = \frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}.$$

Da ich schon dabei bin, berechne ich auch gleich die zweite Ableitung $g''(x)$ mit Hilfe der Quotientenregel. Den Faktor 2 im Nenner ziehe ich dabei als Faktor $\frac{1}{2}$ vor den gesamten Bruch und erhalte damit:

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{-2\sqrt{x-x^2} - (1-2x)\left(\sqrt{x-x^2}\right)'}{\sqrt{x-x^2}^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{-2\sqrt{x-x^2} - (1-2x)\left(\sqrt{x-x^2}\right)'}{x-x^2}, \end{aligned}$$

denn das Quadrieren einer Wurzel liefert den Wurzelinhalt. Was mir hier noch fehlt, ist die Ableitung von $\sqrt{x-x^2}$, aber die hatte ich ja mit $g'(x)$ gerade eben ausgerechnet. Somit folgt:

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{-2\sqrt{x-x^2} - (1-2x)\left(\sqrt{x-x^2}\right)'}{x-x^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{-2\sqrt{x-x^2} - (1-2x)\frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}}{x-x^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{-2\sqrt{x-x^2} - \frac{(1-2x)^2}{2\sqrt{x-x^2}}}{x-x^2}. \end{aligned}$$

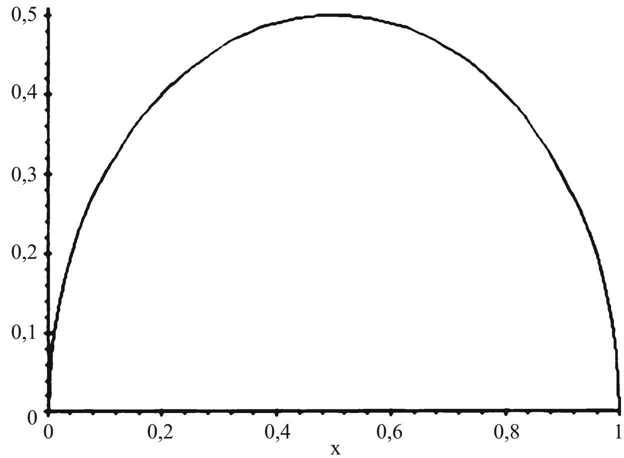


Abb. 7.1 $g(x) = \sqrt{x \cdot (1-x)}$ auf dem Intervall [0, 1]

Nun könnte man diesen Ausdruck noch ein Stück weit vereinfachen, indem man mit dem Term $2\sqrt{x - x^2}$ erweitert und damit den Bruch im Zähler los wird, aber die zweite Ableitung soll hier eigentlich nur dazu dienen, die Nullstellen der ersten Ableitung einzusetzen und dann das Vorzeichen zu überprüfen. Es ist oft einfacher, sich die Mühe des weiteren formalen Rechnens zu sparen und sich dann später etwas mehr Mühe mit dem konkreten Zahlenrechnen zu machen als umgekehrt. Sollten dabei später noch Probleme auftauchen, kann man die Formel schließlich immer noch vereinfachen.

Die Berechnung der Ableitungen stellt aber nur die Vorarbeit dar, denn ich suche nach den Extremwerten der Funktion. Nullsetzen der ersten Ableitung führt zu:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}} = 0 \Leftrightarrow 1 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2},$$

denn ein Bruch kann nur dann den Wert Null annehmen, wenn sein Zähler Null wird. Die einzige Nullstelle von g' ist also $x = \frac{1}{2}$, und diese Nullstelle muss ich in die zweite Ableitung einsetzen. Für $x = \frac{1}{2}$ ist aber $1 - 2x = 0$ und $x - x^2 = \frac{1}{4}$. Damit folgt:

$$g''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2\sqrt{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}} < 0.$$

Vergessen Sie nicht, dass mir der tatsächliche Wert der zweiten Ableitung egal sein kann: ich brauche nur ihr Vorzeichen, und offenbar ist $g''\left(\frac{1}{2}\right)$ negativ. Damit liegt bei $x_0 = \frac{1}{2}$ ein lokales Maximum vor.

Das ist der richtige Zeitpunkt, um sich an den in der Aufgabe gegebenen Hinweis zu erinnern: es hieß dort, dass die Funktion mehr als eine Extremstelle hat. Ich habe aber nur eine Extremstelle ausgerechnet, und mehr gab die Differentialrechnung nicht her, da $g'(x)$ nur eine Nullstelle hatte. Die Differentialrechnung hat aber auch ihre Tücken. Der Satz, dass jede Extremstelle von g eine Nullstelle der ersten Ableitung sein muss, gilt nämlich *nur dann*, wenn sich die Extremstelle nicht am Rand des betrachteten Definitionsintervalls befindet. In diesem Beispiel heißt das, dass ich zwar mit $x_0 = \frac{1}{2}$ jede Extremstelle im *offenen Intervall* $(0, 1)$ erwischt habe, aber ich weiß noch nichts über die beiden Randpunkte 0 und 1. Die Differentialrechnung liefert nur Informationen über die Extremstellen, die *im Inneren* des Intervalls liegen; über die Randpunkte sagt sie rein gar nichts. Und genau daran hängt es. Für $0 \leq x \leq 1$ ist natürlich $x \cdot (1 - x) \geq 0$, sonst könnte ich die Wurzel gar nicht ausrechnen, und es gilt $g(x) \geq 0$. Nun ist aber $g(0) = g(1) = 0$, wie Sie leicht durch Einsetzen feststellen können. Daher gibt es keine Funktionswerte, die kleiner sind als $g(0)$ bzw. $g(1)$, und daraus folgt, dass sowohl bei $x_1 = 0$ als auch bei $x_2 = 1$ ein globales Minimum der Funktion g vorliegt. Es gibt also in Wahrheit drei Extremstellen von g: ein Maximum bei $\frac{1}{2}$ und jeweils ein Minimum bei 0 und bei 1.

Wie das bildlich aussieht, können Sie sich in Abb. 7.1 ansehen.

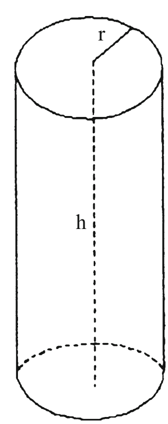
7.12 Ein Zylinder mit Boden und Deckel soll bei einem gegebenen Materialverbrauch $F = 10$ ein möglichst großes Volumen umschließen. Berechnen Sie den optimalen Radius r und die optimale Höhe h sowie das daraus resultierende Volumen.

Lösung In Abb. 7.2 ist ein Zylinder mit der Höhe h und dem Radius r aufgezeichnet.

Gegeben ist der Materialverbrauch beim Erstellen des Zylinders, und das bedeutet, dass ich die *Oberfläche* des Zylinders kenne: die gesamte Oberfläche einschließlich Boden und Deckel soll 10 Flächeneinheiten betragen. Bei diesem gegebenen Materialverbrauch sollen Radius und Höhe so eingestellt werden, dass das Volumen des Zylinders so groß wie möglich wird. Hier liegt also eine Optimierungsaufgabe mit einer Nebenbedingung vor, denn ich soll das Volumen des Zylinders unter der Bedingung optimieren, dass seine Fläche genau 10 Flächeneinheiten beträgt.

Um diese Aufgabe zu lösen, muss man sich erst einmal die Formeln für das Volumen und die Oberfläche eines Zylinders verschaffen. Das Volumen V stellt kein Problem dar,

Abb. 7.2 Zylinder mit Radius r und Höhe h



http://www.springer.com/978-3-662-54802-8

Übungsaufgaben zur Mathematik für Ingenieure
Mit durchgerechneten und erklärten Lösungen
Rießinger, Th.
2017, XIII, 445 S. 40 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-662-54802-8